BI-LIN, Lineární algebra – cvičení

Daniel Dombek, Luděk Kleprlík, Karel Klouda

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze

LS 2019/2020

vytvořeno: 15. února 2022, 13:46

1 Úvod

Značení:

- ⋄ $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ .... množina přirozených čísel bez nuly
- ⋄ $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ .... množina nezáporných celých čísel
- ⋄ $\mathbb{Z}$ .... množina celých čísel
- ⋄ $\mathbb{Q}$ .... množina racionálních čísel
- ⋄ $\mathbb{R}$ .... množina reálných čísel
- ⋄ $\mathbb{C}$ .... množina komplexních čísel
- ⋄ $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$ .... reálná a imaginární část $z \in \mathbb{C}$
- ⋄ $\emptyset$ .... prázdná množina
- ⋄ $\mathbb{P}$ .... množina polynomů
- ⋄ $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .... uspořádaná n-tice čísel
- ⋄ i .... imaginární jednotka (nebo sčítací index, dle kontextu)
- ⋄ $\hat{n} = \{1, 2, \dots, n\}$ pro $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=k}^{\ell} a_i = \begin{cases} a_k + a_{k+1} + \cdots + a_\ell & \text{pokud } k \le \ell, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

$$\prod_{i=k}^{\ell} a_i = \begin{cases} a_k \cdot a_{k+1} \cdots a_\ell & \text{pokud } k \le \ell, \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases}$$

1.1 Komplexní čísla

Množinu komplexních čísel definujeme jako

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\},$$

kde i značí tzv. **imaginární jednotku**, číslo s vlastností $i^2 = -1$. Koeficienty $a, b \in \mathbb{R}$ popořadě nazýváme **reálnou** a **imaginární částí** $z \in \mathbb{C}$ a značíme je $a = \operatorname{Re} z, b = \operatorname{Im} z$.

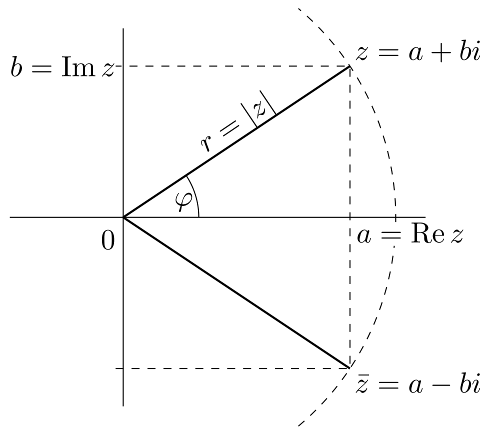
Pro dvě komplexní čísla triviálně (s využitím faktu $i^2 = -1$) platí:

$$(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i \,,$$
$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i \,.$$

Komplexní číslo $z = a + bi$ znázorňujeme v tzv. komplexní rovině jako bod o souřadnicích (a, b), viz obrázek 1. Číslem **komplexně sdruženým** k z nazveme číslo $\overline{z} = a - bi$.

Každý bod v rovině lze charakterizovat jednak souřadnicemi v kartézské soustavě souřadnic (a, b), jednak v tzv. **polárních souřadnicích**, jako bod, jehož vzdálenost od počátku $(0, 0)$ je rovna $r \geq 0$ a který svírá s osou x (zde s reálnou osou) úhel $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$. Z vlastností pravoúhlých trojúhelníků zřejmě plynou vztahy

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}\,, \quad a = r \cdot \cos\varphi\,, \quad b = r \cdot \sin\varphi\,.$$



Obrázek 1: Číslo $z \in \mathbb{C}$ v komplexní rovině

Tedy každé $z \in \mathbb{C}$ lze zapsat i v tomto **polárním tvaru** jako

$$z = a + bi = r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)\,,$$

kde $r \geq 0$ značí absolutní hodnotu (**velikost**) komplexního čísla a značíme ji $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Lze ověřit, že pro absolutní hodnotu a operaci komplexního sdružení platí jednoduché vlastnosti (kde $z, w \in \mathbb{C}$):

$$|z|^2 = z \cdot \overline{z}, \quad \overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}, \quad \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}\,.$$

Dále lze odvodit jednoduché pravidlo pro mocnění komplexních čísel, tzv. Moivreovu větu,

$$\begin{aligned} z^n &= \Big(r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)\Big)^n \\ &= r^n(\cos(n\varphi) + i \cdot \sin(n\varphi))\,, \end{aligned}$$

kde $n \in \mathbb{N}_0$.

Příklad 1.1. Nechť $z = 2 + 2\sqrt{3}i$. Převeďte z do polárního tvaru a poté vypočtěte

a) z^3,

b) $\sqrt{z}$.

Řešení. Nejprve vypočteme velikost čísla z, ta se rovná $|z| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = 4$. Tuto absolutní hodnotu pak vytkneme ze zadání a dále upravíme,

$$z = 2 + 2\sqrt{3}i = 4\left(\tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4\left(\cos\tfrac{\pi}{3} + i \cdot \sin\tfrac{\pi}{3}\right),$$

kde jsme využili známé tabulkové hodnoty funkcí sinus a kosinus.

a) $z^3 = 4^3\left(\cos(3\cdot\frac{\pi}{3}) + i\cdot\sin(3\cdot\frac{\pi}{3})\right)$, což se po úpravě rovná $z^3 = 64(\cos\pi + i\cdot\sin\pi) = 64(-1+i\cdot 0)$, tedy $(2+2\sqrt{3}i)^3 = -64$.

b) Hledáme všechna $w \in \mathbb{C}$ taková, že $w^2 = z$. Označme velikost čísla w jako s a jemu příslušný úhel jako ψ. Tedy musí platit $s^2\left(\cos(2\psi) + i\cdot\sin(2\psi)\right) = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right)$. Z rovnosti absolutních hodnot plyne $s^2 = 4$, tedy $s = 2$. Další podmínkou je, aby dvojnásobek úhlu ψ měl stejnou hodnotu sinu a kosinu jako $\pi/3$ (tedy se může lišit jen o celočíselný násobek plného úhlu 2π). Dostáváme $2\psi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$, tedy $\psi = \frac{\pi}{6} + k\pi$. V intervalu $\langle 0, 2\pi)$ jsou jen dva úhly v takovém tvaru, a to $\psi \in \{\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\}$.

   Existují tedy dvě odmocniny w čísla $2+2\sqrt{3}i$, a to

$$w_1 = 2(\cos\tfrac{\pi}{6} + i\cdot\sin\tfrac{\pi}{6}), \quad w_2 = 2(\cos\tfrac{7\pi}{6} + i\cdot\sin\tfrac{7\pi}{6}),$$

   což ještě můžeme, se znalostí tabulkových hodnot, upravit na

$$\sqrt{2+2\sqrt{3}i} = \pm(\sqrt{3}+i).$$

1.2 Polynomy

(Komplexním) **polynomem** je každé zobrazení $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, pro které existují $n \in \mathbb{N}_0$ a $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ takové, že

$$\forall x \in \mathbb{C} : p(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i .$$

Množinu všech polynomů značíme $\mathbb{P}$ a pro každý nenulový polynom definujeme jeho **stupeň** jako $\mathrm{st}(p) = \max\{j \in \mathbb{N}_0 : \alpha_j \neq 0\}$. Navíc stupeň **nulového polynomu** (všechny koeficienty $\alpha_i = 0$) definujeme -1.

Poznámka: Nulový polynom nemá stupeň nula, jak by se mohlo zdát! Stupeň nula mají totiž všechny nenulové konstantní polynomy, tj. polynomy s předpisem $p(x) = \alpha_0 \in \mathbb{C}$, kde $\alpha_0 \neq 0$.

Číslo $z \in \mathbb{C}$ nazveme **kořenem** polynomu $p \in \mathbb{P}$, platí-li $p(z) = 0$. Řekneme, že polynomy $p, q \in \mathbb{P}$ se **rovnají**, pokud platí $\forall x \in \mathbb{C} : p(x) = q(x)$. Díky faktu, že každý polynom je **jednoznačně** určen svými koeficienty, lze vyslovit ekvivalentní tvrzení, že polynomy se rovnají, pokud se rovnají jejich koeficienty (u příslušných mocnin samozřejmě).

Věta 1.2 (Základní vlastnosti polynomů)**.** *Základní věta algebry říká, že každý nekonstantní komplexní polynom má alespoň jeden komplexní kořen. Uvedeme několik upřesňujících tvrzení platných pro obecný komplexní polynom p stupně $n \geq 0$.*

1. *p má nejvýše n různých kořenů. Označíme-li je $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, existují jednoznačně určená čísla $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ (tzv. **násobnosti** kořenů) taková, že $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$ a platí*

$$\forall x \in \mathbb{C} : p(x) = \alpha_n \prod_{i=1}^{k} (x - \lambda_i)^{n_i} .$$

   *Tento zápis nazýváme **faktorizací** polynomu, nebo také jeho rozkladem na **kořenové činitele**.*

2. *Má-li p pouze reálné koeficienty, pak pro každé $\lambda \in \mathbb{C}$ platí: Je-li λ kořen p, pak i $\overline{\lambda}$ je kořenem p a oba mají stejnou násobnost.*

3. *Každý polynom s reálnými koeficienty lichého stupně má alespoň jeden reálný kořen.*

4. *Má-li p pouze celočíselné koeficienty a má-li alespoň jeden celočíselný kořen λ, pak konstantní koeficient polynomu α_0 je násobkem λ.*

5. *Každý polynom lze jednoznačně vydělit jiným nenulovým polynomem se zbytkem, tj.:*

$$\forall p, q \in \mathbb{P}, q \neq 0,\ \exists_1 r, z \in \mathbb{P} : (p = rq + z) \wedge (\mathrm{st}\,(z) < \mathrm{st}(q))\,.$$

Zdůrazněme, že se zde nebudeme podrobněji zabývat natolik elementárními pojmy, jako je násobení polynomů a jejich dělení se zbytkem – v tomto spoléháme na čtenáře a jeho vzpomínky na dřívější fáze vzdělávacího procesu! Typickým úkolem v této části kurzu bude nalézání všech kořenů zadaných polynomů, tedy jejich faktorizace. Jak budeme typicky postupovat:

- ◇ ($\mathrm{st}(p) = -1$) Nulový polynom má za kořen všechna komplexní čísla → triviální.
- ◇ ($\mathrm{st}(p) = 0$) Konstantní polynom (je nenulový!) žádný kořen nemá → triviální.
- ◇ ($\mathrm{st}(p) \in \{1, 2\}$) Pro lineární a kvadratické polynomy je to snadné, máme k dispozici elementární vzorečky,

$$\begin{aligned} p(x) &= \alpha_1 x + \alpha_0 && = \alpha_1(x - \lambda_1) && \Rightarrow \lambda_1 = -\tfrac{\alpha_0}{\alpha_1}\,, \\ p(x) &= \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0 && = \alpha_2(x - \lambda_1)(x - \lambda_2) && \Rightarrow \lambda_{1,2} = \tfrac{-\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_2\alpha_0}}{2\alpha_2}\,, \end{aligned}$$

  přičemž v kvadratickém případě lze také použít (i snadno odvodit) tzv. Viétovy vzorce:

$$\tfrac{\alpha_0}{\alpha_2} = \lambda_1\lambda_2\,, \quad \tfrac{-\alpha_1}{\alpha_2} = \lambda_1 + \lambda_2\,.$$

- ◇ ($\mathrm{st}(p) \in \{3, 4\}$) Pro kubické a kvartické polynomy vzorce sice existují, ale pro svou složitost jsou pro nás nepoužitelné.
- ◇ Pro obecné polynomy se $\mathrm{st}(p) \geq 5$ algebraické vzorce pro jejich kořeny neexistují!

S polynomy stupně ≥ 3 se budeme rutinně setkávat, jak tedy postupovat?

Příklad 1.3. Uveďme několik typových příkladů s polynomem vyššího stupně.

1. Nechť $p(x) = x^4 - 3x^2 - 4$. Jde o tzv. bikvadratický polynom, rovnici $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ lze řešit substitucí $t = x^2$, tedy $t^2 - 3t - 4 = 0$ s mezivýsledkem $t_1 = 4, t_2 = -1$. Zpětná substituce vede na dvě rovnice, $x^2 - 4 = 0$ s řešeními $x_1 = 2, x_2 = -2$ a $x^2 + 1 = 0$ s řešeními $x_3 = i, x_4 = -i$. Tedy
$$x^4 - 3x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)(x - i)(x + i)\,.$$

2. Nechť $q(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ a $r(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 6$. Při troše trpělivosti lze u obou polynomů rovnou odhalit jednoduchý rozklad na polynomy nižších stupňů (které pak už faktorizujeme triviálně)! Konkrétně,
$$\begin{aligned} q(x) &= (x^3 - x^2) - (x - 1) = x^2(x - 1) - (x - 1) = (x^2 - 1)(x - 1) \\ &= (x - 1)^2(x + 1)\,, \\ r(x) &= (x^3 + 2x) - (3x^2 + 6) = x(x^2 + 2) - 3(x^2 + 2) = (x - 3)(x^2 + 2) \\ &= (x - 3)(x - \sqrt{2}i)(x + \sqrt{2}i)\,. \end{aligned}$$

3. Nechť $s(x) = x^4 + x^3 - 6x^2 - 4x + 8$, žádný přímočarý rozklad na polynomy nižšího stupně nás pravděpodobně nenapadá. Jelikož jde o polynom s celočíselnými koeficienty, využijeme bod 4. věty 1.2 – pokud má polynom s nějaký celočíselný kořen (v to upřímně doufáme!), pak jde o dělitele konstantního koeficientu 8, kandidáty na kořen jsou tedy $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$.

   Postupným zkoušením ověřujeme kandidáty na kořeny, dokud neuspějeme, označme nalezený kořen jako λ. Pak z částí 1. a 5. věty 1.2 víme, že lze polynom s vydělit beze zbytku, $s(x) = (x - \lambda)s'(x)$ a získat polynom s' nižšího stupně. Tento postup opakujeme, dokud nezískáme kvadratický polynom, jehož rozklad je triviální,

$$\begin{aligned} s(x) =& x^4 + x^3 - 6x^2 - 4x + 8 && \textit{(kandidáti } \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \textit{ nalezeno } \lambda = 1\textit{)} \\ =& (x-1)(x^3 + 2x^2 - 4x - 8) && \textit{(stejní kandidáti, } 1 \textit{ už není kořenem, nalezeno } \lambda = -2\textit{)} \\ =& (x-1)(x+2)(x^2 - 4) && \textit{(rozklad zřejmý, } 2 \textit{ je nový kořen, } -2 \textit{ dvojnásobný)} \\ =& (x-1)(x-2)(x+2)^2 \end{aligned}$$

1.3 Lineární rovnice

Nechť $x, y \in \mathbb{R}$. Dvojici (x, y) lze interpretovat jako bod v $\mathbb{R}^2$ zadaný v pravoúhlém souřadném systému s počátkem $(0, 0)$. Každá lineární rovnice o dvou neznámých tvaru

$$a_1 x + a_2 y = b\,,$$

kde $a_1, a_2, b \in \mathbb{R}$ a současně neplatí $a_1 = a_2 = 0$, určuje **přímku** v rovině – množina všech jejích řešení (x, y) tvoří přímku.

Nechť je dána soustava více rovnic o dvou neznámých,

$$\begin{aligned} a_{1,1}x + a_{1,2}y &= b_1 \\ a_{2,1}x + a_{2,2}y &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m,1}x + a_{m,2}y &= b_m \end{aligned}$$

Pak hledáme dvojice (x, y), které splňují všechny dané rovnice, tedy body v rovině, které leží na všech příslušných přímkách současně (tj. v jejich průniku). Zřejmě mohou nastat tři možnosti,

1. neexistuje žádné řešení (přímky se neprotínají),
2. existuje právě jedno řešení (protínají se všechny v jednom bodě),
3. řešení existuje nekonečně mnoho a navíc tvoří přímku (pokud všechny rovnice určují jednu a tutéž přímku).

Podobně lze pracovat s trojicemi reálných čísel, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Každá lineární rovnice o třech neznámých tvaru

$$a_1 x + a_2 y + a_3 z = b\,,$$

kde $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ a současně neplatí $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, určuje **rovinu** v třírozměrném prostoru s počátkem $(0, 0, 0)$. Soustava více takových rovnic pak může mít množinu řešení rovnu prázdné množině (značené $\emptyset$), bodu, přímce, nebo rovině.

Analogicky, byť s notnou dávkou představivosti, lze i s n-ticemi reálných čísel (pro **libovolné** n přirozené!), značenými $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, pracovat jako se souřadnicemi bodů v n-rozměrném prostoru. Přitom i tady lze body, přímky, roviny, i další objekty (které budeme v pokročilé části kurzu nazývat lineárními varietami) popisovat pomocí soustav lineárních rovnic s neznámými $x_1, \ldots, x_n$.

Příklad 1.4. Nalezněte průnik následujících dvou přímek v $\mathbb{R}^2$:

$$p : y = 3 - 2x, \qquad q : x - 2y = 1\,.$$

Řešení. Soustavu lze přepsat do standardního tvaru

$$\begin{aligned} 2x + y &= 3, \\ x - 2y &= 1, \end{aligned}$$

můžeme ale rovnou dosadit z první zadané rovnice do druhé,

$$x - 2y = 1 \;\Rightarrow\; x - 2(3 - 2x) = 1 \;\Rightarrow\; 5x - 6 = 1 \;\Rightarrow x = \tfrac{7}{5} \;\Rightarrow\; y = 3 - 2 \cdot \tfrac{7}{5} \;\Rightarrow\; y = \tfrac{1}{5}\,.$$

Přímky se tedy protínají pouze v jednom bodě a platí $p \cap q = \{(\frac{7}{5}, \frac{1}{5})\}$.

Příklad 1.5. Sestavte lineární rovnici, jejímž řešením bude přímka v rovině procházející body $(1,1)$ a $(2,6)$.

Řešení. Hledáme rovnici ve tvaru $p : ax + by = c$. Ta musí platit, pokud dosadíme $(x,y) = (1,1)$ a podobně pro druhý zadaný bod, přitom našimi neznámými jsou aktuálně parametry $a, b, c \in \mathbb{R}$. Dostáváme následující soustavu, kterou snadno vyřešíme, například vhodným odečítáním získaných rovnic:

$$\begin{array}{l} (1,1) \in p \\ (2,6) \in p \end{array} \;\Rightarrow\; \begin{aligned} a \cdot 1 + b \cdot 1 &= c \\ a \cdot 2 + b \cdot 6 &= c \end{aligned} \;\Rightarrow\; \begin{aligned} a + b &= c \\ 2a + 6b - 2(a + b) &= c - 2c \end{aligned} \;\Rightarrow\; \begin{aligned} a + b &= c \\ 4b &= -c \end{aligned} \;\Rightarrow\; \begin{aligned} a + b &= c \\ b &= -\tfrac{c}{4}\,, \end{aligned}$$

z čehož plyne $a = \frac{5c}{4}$ a $b = -\frac{c}{4}$. Jelikož jsme použili obě zadané rovnice, poslední parametr $c \in \mathbb{R}$ si můžeme libovolně zvolit, tedy například $c = 4$ (pro „hezčí“ výsledek). Hledaná přímka je určená rovnicí

$$p : 5x - y = 4\,.$$

Příklad 1.6. Nalezněte průnik následujících dvou rovin v $\mathbb{R}^3$:

$$r : x + y = 0, \qquad s : z = x - 2y + 3\,.$$

Řešení. Z první rovnice plyne $y = -x$ a po dosazení do druhé dostáváme $z = x - 2y + 3 = x - 2(-x) + 3 = 3x + 3$. Jelikož další podmínku nemáme, proměnnou $x \in \mathbb{R}$ lze zvolit libovolně, jako tzv. **parametr**. Průnikem zadaných dvou rovin je tedy množina bodů, kterou lze zapsat např. jako

$$r \cap s = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = -x \wedge z = 3x + 3\big\}\,.$$

Po krátké úvaze lze dojít k závěru, že se jedná o přímku, kterou lze alternativně také zapsat

$$r \cap s = \{(t, -t, 3t + 3) : t \in \mathbb{R}\} = \big\{(0, 0, 3) + t \cdot (1, -1, 3) : t \in \mathbb{R}\big\}\,,$$

přičemž k vysvětlení posledního zvoleného způsobu zápisu se dostaneme později.

1.4 Počítání modulo

Všechny doposud prováděné výpočty, zápisy, problémy a tak dále se odehrávaly v tzv. **tělese** komplexních čísel, které značíme $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ – tím dáváme najevo, že pracujeme s prvky množiny komplexních čísel $\mathbb{C}$, na které aplikujeme výpočetní operace $+$ a $\cdot$, obyčejné sčítání a násobení. Ty splňují jisté vlastnosti/axiomy, ale o tom se dozvíme více až na přednáškách.

Přejdeme do „jiného světa“, do jiného tělesa. Nechť p je **prvočíslo**, tedy celé číslo $p \geq 2$, které je dělitelné ze všech přirozených čísel pouze jedničkou a samo sebou. Budeme pracovat v tělese

$$(\mathbb{Z}_p, +_p, \cdot_p), \text{ kde } \mathbb{Z}_p = \{0, 1, \dots, p-1\}$$

a operace $+_p, \cdot_p$ se nazývají sčítání a násobení **modulo p**. Pro libovolné prvky $x, y \in \mathbb{Z}_p$ je výsledek $x +_p y$, resp. $x \cdot_p y$, definován jako zbytek součtu $x + y$, resp. součinu $x \cdot y$, po dělení prvočíslem p. Jediná zdánlivě problematická operace je dělení, tedy přesněji řešení rovnice $a \cdot_p x = 1$ pro zadané $a \in \mathbb{Z}_p$. Prozradíme, že je-li p prvočíslo, tato rovnice má vždy právě jedno řešení, tedy lze dělit jednoznačně. (My budeme tuto rovnici řešit dosazováním všech prvků pro malá p, obecné řešení necháme na předmět BI-ZDM.) Především z tohoto důvodu platí, že $\mathbb{Z}_p$ je těleso, právě když p je prvočíslo. (Zkuste odhalit, kterým prvkem nelze jednoznačně dělit v $\mathbb{Z}_4$.) Nebude-li hrozit nedorozumění, budeme v dalším používat značení $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ pro těleso $\mathbb{Z}_p$ s operacemi modulo p. Obě operace se dají přehledně ilustrovat tabulkou, viz příklad 1.7.

Příklad 1.7. Tabulky operací $+_p$ a $\cdot_p$ pro malá prvočíselná modula p:

$p = 2$:

$+_2$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot_2$	0	1
0	0	0
1	0	1

$p = 5$:

$+_5$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\cdot_5$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Příklad 1.8. V pokoji máme pět žárovek (značíme $z_1, \dots, z_5$) a pět vypínačů (značíme $v_1, \dots, v_5$), u všech jsou možné pouze dva stavy, vypnuto/zapnuto. Na zapojení všech žárovek jsme si najali elektrikáře, který je v rozverné náladě zapojil následovně:

- jsou-li všechny vypínače vypnuty, nesvítí ani jedna žárovka,
- v_1 přepíná žárovky z_1 a z_2,
- v_2 přepíná žárovky z_2, z_4 a z_5,
- v_3 přepíná žárovky z_1 a z_3,
- v_4 přepíná žárovky z_2, z_3 a z_4,
- v_5 přepíná žárovky z_2 a z_5.

Určete, které vypínače musíme zapnout, aby všechny žárovky svítily.

Řešení. Označíme-li stavy vypnuto/zapnuto jak u žárovek, tak u vypínačů 0, resp. 1, dostáváme úlohu v $\mathbb{Z}_2$ ve tvaru soustavy lineárních rovnic! Jelikož žárovku z_1 ovládají vypínače v_1 a v_3 a my chceme, aby svítila, dostáváme rovnici $v_1 + v_3 = 1$ (počítání modulo 2 přirozeně koresponduje s pozorováním z reálného života, že pokud něco dvakrát za sebou přepneme, nic se většinou nestane). Totéž opakujeme u dalších žárovek a dostáváme soustavu

$$\begin{array}{cccccl} v_1 & & +v_3 & & & =1\,, \\ v_1 & +v_2 & & +v_4 & +v_5 & =1\,, \\ & & v_3 & +v_4 & & =1\,, \\ & v_2 & & +v_4 & & =1\,, \\ & v_2 & & & +v_5 & =1\,. \end{array}$$

Tato soustava se dá řešit různě, sčítáním rovnic s využitím faktu $1+1=0$, nebo například postupným dosazováním. Zkusíme druhý způsob. Z poslední rovnice plyne $v_5 = v_2 - 1$ (což je v $\mathbb{Z}_2$ totéž jako $v_5 = v_2 + 1$!), po dosazení do ostatních (do druhé rovnice) dostáváme

$$\begin{array}{ccccl} v_1 & & +v_3 & & =1\,, \\ v_1 & & & +v_4 & =0\,, \\ & & v_3 & +v_4 & =1\,, \\ & v_2 & & +v_4 & =1\,. \end{array}$$

Proceduru opakujeme s vyjádřením $v_4 = v_2 + 1$ ze čtvrté rovnice a dosazením

$$\begin{array}{cccl} v_1 & & +v_3 & =1\,, \\ v_1 & +v_2 & & =1\,, \\ & v_2 & +v_3 & =0\,, \end{array}$$

z čehož už rovnou zjišťujeme, že $v_2 = v_3 = v_1 + 1$ a žádnou další podmínku nemáme. Zvolme v_1 za parametr, může nabývat dvou hodnot, 0 nebo 1. V závislosti na něm pak odvodíme ostatní proměnné:

$$v_1 = 1 \Rightarrow v_2 = v_3 = 0 \Rightarrow v_4 = 1 \Rightarrow v_5 = 1\,,$$
$$v_1 = 0 \Rightarrow v_2 = v_3 = 1 \Rightarrow v_4 = 0 \Rightarrow v_5 = 0\,.$$

Požadované řešení tedy splňuje $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) \in \{(1,0,0,1,1),(0,1,1,0,0)\}$ a řešením naší prekérní situace je sepnout buďto současně vypínače 1,4 a 5, nebo současně vypínače 2 a 3.

1.5 Cvičení

Příklad 1.9. Pro každé z následujících komplexních čísel $z \in \mathbb{C}$ vždy zjistěte jeho velikost $|z|$, převeďte jej do polárního tvaru a vypočítejte zadané mocniny nebo odmocniny:

a) $z = 1 + i$: $z^2 =?$, $z^3 =?$

b) $z = i$: $\sqrt{z} =?$, $\sqrt[3]{z} =?$

c) $z = \sqrt{3} + i$: $z^2 =?$, $z^3 =?$

d) $z = 1$: $\sqrt[3]{z} =?$, $\sqrt[4]{z} =?$

e) $z = -1$: $\sqrt[3]{z} =?$, $\sqrt[4]{z} =?$

Řešení. a)
$$\begin{aligned} 1+i &= \sqrt{2}\big(\cos(\tfrac{\pi}{4}) + i\sin(\tfrac{\pi}{4})\big), \\ (1+i)^2 &= 2\big(\cos(\tfrac{\pi}{2}) + i\sin(\tfrac{\pi}{2})\big) &&= 2i, \\ (1+i)^3 &= 2\sqrt{2}\big(\cos(\tfrac{3\pi}{4}) + i\sin(\tfrac{3\pi}{4})\big) &&= -2+2i. \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} i &= 1\big(\cos(\tfrac{\pi}{2}) + i\sin(\tfrac{\pi}{2})\big), \\ \sqrt{i} &= 1\big(\cos(\tfrac{\pi}{4} + k\pi) + i\sin(\tfrac{\pi}{4} + k\pi)\big) &&\in \{\pm\tfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\}, \\ \sqrt[3]{i} &= 1\big(\cos(\tfrac{\pi}{6} + \tfrac{2}{3}k\pi) + i\sin(\tfrac{\pi}{6} + \tfrac{2}{3}k\pi)\big) &&\in \{\pm\tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{1}{2}i, -i\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sqrt{3}+i &&= 2\big(\cos(\tfrac{\pi}{6}) + i\sin(\tfrac{\pi}{6})\big), \\
\text{c)}\quad &(\sqrt{3}+i)^2 &&= 4\big(\cos(\tfrac{\pi}{3}) + i\sin(\tfrac{\pi}{3})\big) &&= 2(1+\sqrt{3}i), \\
&(\sqrt{3}+i)^3 &&= 8\big(\cos(\tfrac{\pi}{2}) + i\sin(\tfrac{\pi}{2})\big) &&= 8i.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&1 &&= 1\big(\cos 0 + i\sin 0\big), \\
\text{d)}\quad &\sqrt[3]{1} &&= 1\big(\cos(0+\tfrac{2}{3}k\pi) + i\sin(0+\tfrac{2}{3}k\pi)\big) &&\in \{1, -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{\sqrt{3}}{2}i\}, \\
&\sqrt[4]{1} &&= 1\big(\cos(0+\tfrac{1}{2}k\pi) + i\sin(0+\tfrac{1}{2}k\pi)\big) &&\in \{\pm 1, \pm i\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&-1 &&= 1\big(\cos\pi + i\sin\pi\big), \\
\text{e)}\quad &\sqrt[3]{-1} &&= 1\big(\cos(\tfrac{\pi}{3}+\tfrac{2}{3}k\pi) + i\sin(\tfrac{\pi}{3}+\tfrac{2}{3}k\pi)\big) &&\in \{\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{\sqrt{3}}{2}i, -1\}, \\
&\sqrt[4]{-1} &&= 1\big(\cos(\tfrac{\pi}{4}+\tfrac{1}{2}k\pi) + i\sin(\tfrac{\pi}{4}+\tfrac{1}{2}k\pi)\big) &&\in \{\pm\tfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i), \pm\tfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\}.
\end{aligned}$$

Příklad 1.10. Vyjádřete následující komplexní čísla ve tvaru $a+bi$ *(Tip: k výpočtu čísla tvaru $\frac{1}{z}$ využijte vlastnosti $z\cdot\overline{z} = |z|^2$)*:

a) $\frac{1}{3+i}$,

b) $\frac{1}{3+2i}$,

c) $\frac{1}{3-4i}$,

d) $\frac{10}{3i-1}$.

Řešení. a) $\frac{1}{3+i} = \frac{3}{10} - \frac{1}{10}i$,

b) $\frac{1}{3+2i} = \frac{3}{13} - \frac{2}{13}i$,

c) $\frac{1}{3-4i} = \frac{3}{25} + \frac{4}{25}i$,

d) $\frac{10}{3i-1} = -1-3i$.

Příklad 1.11. Najděte všechny kořeny (i s jejich násobnostmi) následujících polynomů:

a) x^3+4x^2+x-6,

b) x^3-3x^2+3x-1,

c) $x^3-7x^2+16x-12$,

d) x^4-1,

e) x^5-x^3-2x,

f) x^4+2x^2+1,

g) $x^4-2x^3-9x^2+18x$,

h) x^4-2x^3+2x-1.

Řešení. a) $x^3+4x^2+x-6 = (x+3)(x+2)(x-1)$
má tři jednoduché kořeny $-3,-2,1$.

b) $x^3-3x^2+3x-1 = (x-1)^3$
má jeden trojnásobný kořen 1.

c) $x^3-7x^2+16x-12 = (x-2)^2(x-3)$
má dvojnásobný kořen 2 a jednoduchý 3.

d) $x^4-1 = (x+1)(x-1)(x+i)(x-i)$
má čtyři jednoduché kořeny $\pm 1, \pm i$.

e) $x^5-x^3-2x = x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+i)(x-i)$
má pět jednoduchých kořenů $0, \pm\sqrt{2}, \pm i$.

f) $x^4+2x^2+1 = (x+i)^2(x-i)^2$
má dva dvojnásobné kořeny $\pm i$.

g) $x^4-2x^3-9x^2+18x = x(x-2)(x-3)(x+3)$
má čtyři jednoduché kořeny $0, 2, \pm 3$.

h) $x^4-2x^3+2x-1 = (x+1)(x-1)^3$
má jednoduchý kořen -1 a trojnásobný 1.

Příklad 1.12. Nalezněte průniky následujících dvojic přímek v $\mathbb{R}^2$:

a) $\begin{array}{ll} p: & x-3y=2, \\ q: & 2x+y=1. \end{array}$

b) $\begin{array}{ll} p: & x-y=2, \\ q: & 2y-2x=3. \end{array}$

Řešení. a) $\{(\frac{5}{7}, -\frac{3}{7})\}$ b) $\emptyset$

Příklad 1.13. Nalezněte průniky následujících dvojic/trojic rovin v $\mathbb{R}^3$:

a) $\begin{array}{ll} \rho: & x+2y+z=1, \\ \sigma: & 2x+2z=5-4y. \end{array}$

b) $\begin{array}{ll} \rho: & 2x-y-z=0, \\ \sigma: & x+2y=1, \\ \tau: & y+z=8. \end{array}$

c) $\begin{array}{ll} \rho: & x+y-z=1, \\ \sigma: & 3x+2z=5. \end{array}$

d) $\begin{array}{ll} \rho: & x-y+z=1, \\ \sigma: & y-x+z=2, \\ \tau: & 2x-2y+1=0. \end{array}$

Řešení. *a)* $\emptyset$, *b)* $\{(4, -\frac{3}{2}, \frac{19}{2})\}$, *c)* $\{(x, \frac{7}{2}-\frac{5}{2}x, \frac{5}{2}-\frac{3}{2}x)\ ,\ x \in \mathbb{R}\}$, *d)* $\{(x, x+\frac{1}{2}, \frac{3}{2})\ ,\ x \in \mathbb{R}\}$.

Příklad 1.14. Sestavte rovnice

a) přímky v $\mathbb{R}^2$ procházející body $(0,1)$ a $(3,3)$,

b) přímky v $\mathbb{R}^2$ procházející body $(-1,1)$ a $(2,10)$,

c) roviny v $\mathbb{R}^3$ procházející body $(1,1,0)$, $(1,0,1)$ a $(0,1,1)$,

d) roviny v $\mathbb{R}^3$ procházející body $(2,0,0)$, $(0,-1,1)$ a $(0,1,1)$.

Řešení. *a)* $2x-3y=-3$, *b)* $3x-y=-4$, *c)* $x+y+z=2$, *d)*$x+2z=2$.

Příklad 1.15. Vyřešte následující soustavy rovnic:

a) Pro $x,y,z \in \mathbb{Z}_2$: $\begin{array}{r} x+y+z=1, \\ y+z=0. \end{array}$

b) Pro $x,y,z,t \in \mathbb{Z}_2$: $\begin{array}{r} x+y=1, \\ x+t=0, \\ x+z+t=1. \end{array}$

c) Pro $x,y,z,t \in \mathbb{Z}_2$: $\begin{array}{r} x+y+t=1, \\ x+t=0, \\ y+t=1. \end{array}$

d) Pro $x,y,z \in \mathbb{Z}_3$: $\begin{array}{r} x+y=2, \\ y+z=1. \end{array}$

e) Pro $x,y,z \in \mathbb{Z}_3$: $\begin{array}{r} x+2y+z=0, \\ y+z=1, \\ x+z=2. \end{array}$

f) Pro $x,y,z,t \in \mathbb{Z}_3$: $\begin{array}{r} x+y+z+t=0, \\ y+z=1, \\ z+t=1. \end{array}$

Řešení. a) v $\mathbb{Z}_2$: $(x,y,z) \in \{(1,0,0),(1,1,1)\}$,

b) v $\mathbb{Z}_2$: $(x,y,z,t) \in \{(0,1,1,0),(1,0,1,1)\}$,

c) v $\mathbb{Z}_2$: $(x,y,z,t) \in \{(0,1,0,0),(0,1,1,0)\}$,

d) v $\mathbb{Z}_3$: $(x,y,z) \in \{(1,1,0),(2,0,1),(0,2,2)\}$,

e) v $\mathbb{Z}_3$: $(x,y,z) \in \{(0,2,2)\}$,

f) v $\mathbb{Z}_3$: $(x,y,z,t) \in \{(2,0,1,0),(1,1,0,1),(0,2,2,2)\}$.