BI-LIN, Lineární algebra – cvičení

Daniel Dombek, Luděk Kleprlík, Karel Klouda

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze

LS 2019/2020

vytvořeno: 15. února 2022, 13:46

2 Matice a soustavy lineárních rovnic

Značení:

- ◇ $\mathbb{R}^{m,n}$ .... množina všech reálných matic o m řádcích a n sloupcích
- ◇ $a_{ij} = \mathbb{A}_{ij}$ .... prvek matice $\mathbb{A}$ v $i$tém řádku a $j$tém sloupci
- ◇ $\mathbb{A}^T \in \mathbb{R}^{n,m}$ .... matice transponovaná k $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$
- ◇ $\theta \in \mathbb{R}^{n,1}$ .... nulový vektor v $\mathbb{R}^{n,1}$, $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^T$

2.1 Základy maticového počtu

Zavedené operace sčítání matic a násobení matice číslem jsou jednoduché, definované tzv. po složkách. Definici maticového násobení raději připomeneme. Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ a $\mathbb{B} \in \mathbb{R}^{n,p}$ (s prvky značenými popořadě a_{ij}, resp. b_{ij}) pro nějaká $m, n, p \in \mathbb{N}$, pak pro součin těchto matic platí $\mathbb{AB} \in \mathbb{R}^{m,p}$ a

$$\forall i \in \hat{m}, \forall j \in \hat{p} : (\mathbb{AB})_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \,.$$

Doplňme ještě základní vlastnosti daných tří operací, kde vždy předpokládáme $\alpha \in \mathbb{R}$ a matice $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{D}$ s takovými rozměry, že všechny výrazy níže mají smysl:

1. $\mathbb{A} + \mathbb{B} = \mathbb{B} + \mathbb{A}$,
2. $\mathbb{A} + (\mathbb{B} + \mathbb{D}) = (\mathbb{A} + \mathbb{B}) + \mathbb{D}$,
3. $\alpha(\mathbb{A} + \mathbb{B}) = \alpha\mathbb{A} + \alpha\mathbb{B}$,
4. $\mathbb{A}(\mathbb{BD}) = (\mathbb{AB})\mathbb{D}$,
5. $\mathbb{A}(\mathbb{B} + \mathbb{D}) = \mathbb{AB} + \mathbb{AD}$,
6. $(\mathbb{A} + \mathbb{B})\mathbb{D} = \mathbb{AD} + \mathbb{BD}$,
7. $\alpha(\mathbb{AB}) = (\alpha\mathbb{A})\mathbb{B} = \mathbb{A}(\alpha\mathbb{B})$,
8. $(\mathbb{AB})^T = \mathbb{B}^T\mathbb{A}^T$.

Příklad 2.1. Pro zadané reálné matice

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{D} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

vypočtěte následující součiny a součty (jsou-li definovány):

a) $\mathbb{A}\mathbb{B}$

b) $\mathbb{B}\mathbb{A}$

c) $\mathbb{A}\mathbb{D}$

d) $\mathbb{D}\mathbb{A}$

e) $\mathbb{B}\mathbb{D}$

f) $\mathbb{D}\mathbb{B}$

g) $\mathbb{A}\mathbb{B}\mathbb{D}$

h) $\mathbb{D}\mathbb{B}\mathbb{A}$

i) $\mathbb{B}\mathbb{D}\mathbb{A}$

j) $\mathbb{B}\mathbb{A}\mathbb{D}$

k) $\mathbb{A}\mathbb{D} + \mathbb{B}$

l) $\mathbb{D}\mathbb{A} + \mathbb{B}$

Řešení. a) $\mathbb{A}\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -1 \\ 24 & 14 & 0 \end{pmatrix}$,

b) $\mathbb{B}\mathbb{A}$ není definován,

c) $\mathbb{A}\mathbb{D} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 16 \end{pmatrix}$,

d) $\mathbb{D}\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 2 & 10 & 8 \\ 0 & 6 & 12 \end{pmatrix}$,

e) $\mathbb{B}\mathbb{D} = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 2 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$,

f) $\mathbb{D}\mathbb{B}$ není definován,

g) $\mathbb{A}\mathbb{B}\mathbb{D} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 28 & 4 \end{pmatrix}$,

h) $\mathbb{D}\mathbb{B}\mathbb{A}$ není definován,

i) $\mathbb{B}\mathbb{D}\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -2 & -18 & -24 \\ 2 & 6 & 0 \\ 6 & 20 & 4 \end{pmatrix}$,

j) $\mathbb{B}\mathbb{A}\mathbb{D}$ není definován,

k) $\mathbb{A}\mathbb{D} + \mathbb{B}$ není definován,

l) $\mathbb{D}\mathbb{A} + \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 4 & 11 & 8 \\ 5 & 9 & 12 \end{pmatrix}$.

Příklad 2.2. Pro matici $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$ odvoďte předpis pro obecnou mocninu $\mathbb{A}^n$, kde $n \in \mathbb{N}$. Jeho správnost dokažte.

Řešení. Postupným napočítáváním mocnin $\mathbb{A}^n$,

$$\mathbb{A}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ldots$$

dojdeme k podezření, že by mohlo platit

$$\mathbb{A}^n \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Toto podezření dokážeme matematickou indukcí, důkaz provedeme ve dvou krocích:

1. Základní krok: Pro volbu $n = 1$ je tvrzení $\mathbb{A}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ triviálně splněno.

2. Indukční krok (platí-li tvrzení pro libovolné $n \geq 1$, platí i pro $n+1$): Předpokládejme, že platí $\mathbb{A}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pak jednoduše odvodíme (IP značí použití indukčního předpokladu), že

$$\mathbb{A}^{n+1} \overset{def}{=} \mathbb{A} \cdot \mathbb{A}^n \overset{IP}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

tedy tvrzení platí i pro $n+1$ a naše hypotéza je dokázána pro každé $n \in \mathbb{N}$.

2.2 Soustavy lineárních rovnic, GEM

V následující části budeme téměř výhradně řešit soustavy rovnic (obecně soustavy m rovnic pro n neznámých, kde $m, n \in \mathbb{N}$ jsou libovolné), ve tvaru

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m, \end{array}$$

přičemž namísto $x_1, x_2, \ldots, x_n$ lze často (při „malém konkrétním“ n) neznámé značit bez použití indexů, tj. $x, y, z, t, \ldots$.

Řešenou soustavu budeme vždy zapisovat v maticovém tvaru. Označíme-li

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m,n}, \qquad \mathbb{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n,1}, \qquad \mathbb{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m,1},$$

daná soustava je pak (díky maticovému násobení) ekvivalentní rovnici

$$\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}.$$

Při samotném řešení pak pracujeme s **rozšířenou maticí soustavy**, tedy používáme zápis

$$(\mathbb{A} \mid \mathbb{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Na přednášce jsme dosud neprobrali všechnu potřebnou teorii ke struktuře množiny všech řešení soustav tvaru $\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$, z různých pozorování, která již máme k dispozici, jmenujme alespoň toto: *Je-li $\tilde{\mathbb{x}}$ nějaké řešení soustavy $\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$, potom pro tuto soustavu platí, že $S = \tilde{\mathbb{x}} + S_0$, kde S_0 je množina všech řešení přidružené homogenní rovnice $\mathbb{A}\mathbb{x} = \theta$.*

Proto kdykoliv bude v této části zadáno „vyřešit soustavu lineárních rovnic“, slovo **vyřešit** budeme chápat v následujícím významu:

1. Poznat, zda má soustava alespoň jedno řešení nebo nemá řešení žádné.

2. Poznat, jestli má daná soustava právě jedno řešení nebo jich má nekonečně mnoho.

3. V případě, že má soustava právě jedno řešení, toto řešení nalézt.

4. V případě, že má soustava více než jedno řešení, nalézt jich co nejvíce.

K ověření řešitelnosti a snadnému hledání řešení budeme používat **Gaussovu eliminační metodu (GEM)**, spočívající v opakované aplikaci tří elementárních úprav,

(G1) prohození dvou řádků,

(G2) vynásobení jednoho řádku matice nenulovým číslem,

(G3) přičtení libovolného násobku jednoho řádku k jinému,

na rozšířenou matici soustavy (tím neměníme množinu řešení), s cílem převést ji do tzv. horního stupňovitého tvaru, viz. následující definice. Aplikaci úprav $(G1)-(G3)$ můžeme značit buďto jednoduše vlnovkou $\sim$, nebo podrobněji viz. příklady níže.

Definice 2.3. *O matici $\mathbb{D} \in \mathbb{R}^{m,n}$ řekneme, že je v* ***horním stupňovitém tvaru****, jestliže všechny řádky jsou nulové, nebo existuje $k \in \{1,\dots,m\}$ tak, že řádky 1 až k matice $\mathbb{D}$ jsou nenulové a řádky $k+1$ až m jsou nulové a jestliže platí následující:*

Označme pro každé $i \in \{1,2\dots,k\}$ index nejlevějšího nenulového prvku v itém řádku jako j_i, tj.

$$j_i = \min\{\ell \in \{1,\dots,n\} \mid \mathbb{D}_{i\ell} \neq 0\}.$$

Potom platí $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k$.

Je-li matice v horním stupňovitém tvaru, potom sloupcům s indexy $j_1, j_2, \dots, j_k$ říkáme ***hlavní sloupce****, ostatním říkáme* ***vedlejší sloupce****.*

O soustavě $\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$ řekneme, že je v horním stupňovitém tvaru, pokud matice této soustavy $(\mathbb{A} \mid \mathbb{b})$ je v horním stupňovitém tvaru.

Řešitelnost soustavy, případně počet jejích řešení, vyhodnotíme přímo z horního stupňovitého tvaru dle následující věty. Samotná řešení nalezneme postupným vyhodnocováním příslušných rovnic odspoda nahoru.

Věta 2.4. *Mějme soustavu lineárních rovnic $\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$, kde $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ a matice $(\mathbb{A} \mid \mathbb{b})$ je v horním stupňovitém tvaru. Pak nastává právě jeden z následujících případů:*

(i) Je-li poslední sloupec matice $(\mathbb{A} \mid \mathbb{b})$ hlavní, soustava nemá řešení.

(ii) Je-li poslední sloupec matice $(\mathbb{A} \mid \mathbb{b})$ jediný vedlejší sloupec, má soustava právě jedno řešení.

(iii) Je-li poslední sloupec matice $(\mathbb{A} \mid \mathbb{b})$ vedlejší a existuje-li ještě jiný vedlejší sloupec, má soustava více než jedno řešení.

Příklad 2.5. Vyřešte v $\mathbb{R}$ soustavu

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
x & + & 2y & - & 3z & & & = & 1, \\
x & - & y & & & + & t & = & -1, \\
 & & 2y & - & 2z & & & = & 3, \\
2x & + & y & + & z & + & t & = & 0.
\end{array}$$

Řešení. Soustavu převedeme do maticového tvaru a upravujeme pomocí GEM, jejíž kroky budeme v tomto příkladu podrobně popisovat. Poznamenejme, že neexistuje jediný možný způsob postupu – můžeme se pouze snažit o „rozumný“ postup, především s cílem vyhnout se zbytečně velkým koeficientům a zlomkům v matici soustavy.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{ř1}-\text{ř3}]{G3} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{ř2}-\text{ř1},\text{ř4}-2*\text{ř1}]{G3} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-1*\text{ř2}]{G2} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{ř3}-2*\text{ř2},\text{ř4}-\text{ř2}]{G3} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{ř3}\leftrightarrow\text{ř2}]{G1} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{ř3}-\text{ř4}]{G3} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

Výsledná matice je v horním stupňovitém (dokonce trojúhelníkovém) tvaru, má jediný vedlejší sloupec (ten poslední) a má tedy právě jedno řešení. Vyhodnocováním rovnic a postupným dosazováním odspoda nahoru dostáváme

$$S = \{(-2, \tfrac{3}{2}, 0, \tfrac{5}{2})\}\,.$$

Příklad 2.6. Vyřešte v $\mathbb{R}$ soustavu

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x & - & y & - & z & & & = & 2, \\ x & - & y & & & + & t & = & 5, \\ & & y & - & 2z & + & 2t & = & 0, \\ -x & + & 3y & - & z & - & 4t & = & -1. \end{array}$$

Řešení. Postupujeme obdobně,

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 3 & -1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -4 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{ř1}\leftrightarrow\text{ř2}]{G1} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -4 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{ř2}-3\text{ř1},\text{ř4}+\text{ř1}]{G3} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & -3 & -13 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -3 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{ř2}\leftrightarrow\text{ř3}]{G1} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -3 & -13 \\ 0 & 2 & -1 & -3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{ř3}-2\text{ř2},\text{ř4}-2\text{ř2}]{G3} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -7 & -13 \\ 0 & 0 & 3 & -7 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{ř4}-\text{ř3}]{G3} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -7 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 17 \end{array}\right)$$

Jelikož je poslední sloupec rozšířené matice soustavy hlavní, poslední rovnice (a tedy i celá soustava) nemá řešení.

Příklad 2.7. Vyřešte v $\mathbb{R}$ soustavu

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 3y & - & z & + & 4t & = & 8, \\ x & + & y & - & z & - & 2t & = & 2, \\ x & + & 7y & - & z & + & 16t & = & 20. \end{array}$$

Řešení.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & 7 & -1 & 16 & 20 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{ř}1\leftrightarrow\text{ř}2]{G1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 4 & 8 \\ 1 & 7 & -1 & 16 & 20 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{ř}2-\text{ř}1,\text{ř}3-\text{ř}1]{G3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 6 & 0 & 18 & 18 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[1/2*\text{ř}2]{G2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 6 & 0 & 18 & 18 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{ř}3-6*\text{ř}2]{G3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Jelikož rozšířená matice soustavy má více než jeden vedlejší sloupec a poslední sloupec je jedním z nich, soustava má nekonečně mnoho řešení. Z tvaru soustavy vidíme, že pokud si libovolným způsobem zvolíme proměnné $z, t \in \mathbb{R}$, zbylé dvě bude možné dopočítat. Z druhé rovnice dostáváme $y = 3 - 3t$ a z první rovnice $x = 2 - y + z + 2t = 2 - (3 - 3t) + z + 2t = -1 + z + 5t$. Nemáme sice dokázáno, že takto najdeme všechna řešení, můžeme alespoň tvrdit, že

$$S \supseteq \{(-1 + z + 5t, 3 - 3t, z, t),\ \text{kde } z \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}\}\,.$$

Příklad 2.8. Nalezněte polynom p s reálnými koeficienty stupně nejvýše 3 takový, že platí $p(0) = 1$, $p(1) = 0$, $p'(1) = 0$ a $p'(-1) = 0$ ($'$ značí derivaci reálné funkce).

Řešení. Každý polynom stupně nejvýše 3 je tvaru $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ pro $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Triviálně pro každé reálné x platí $p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Dosadíme-li tento tvar do zadaných podmínek, dostáváme soustavu rovnic s neznámými $a, b, c, d \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} p(0) = 1 \ &\Rightarrow & d &= 1, \\ p(1) = 0 \ &\Rightarrow & a + b + c + d &= 0, \\ p'(1) = 0 \ &\Rightarrow & 3a + 2b + c &= 0, \\ p'(-1) = 0 \ &\Rightarrow & 3a - 2b + c &= 0. \end{aligned}$$

Jejím jediným řešením (to snadno ověříme) je čtveřice $(a, b, c, d) = (\frac{1}{2}, 0, -\frac{3}{2}, 1)$, tedy hledaný polynom má předpis

$$\forall x \in \mathbb{R}:\ p(x) = \tfrac{1}{2}x^3 - \tfrac{3}{2}x + 1\,.$$

2.3 Konečná tělesa

Prakticky vše, co jsme si řekli o maticích z $\mathbb{R}^{m,n}$ platí i pro matice s prvky z obecného tělesa T. Množinu matic typu $m \times n$ značíme analogicky $T^{m,n}$. Operace sčítání, násobení prvkem z T a násobení matic definujeme též naprosto analogicky, pouze namísto sčítání a násobení reálných čísel používáme sčítání a násobení definované v daném tělese T.

Příklad 2.9. Uvažujme následující matice:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_5^{3,1}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_5^{1,3}, \quad \mathbb{D} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_5^{3,3}.$$

Vypočtěte následující součiny a součty (jsou-li definovány):

a) $\mathbb{AB}$
b) $\mathbb{BA}$
c) $\mathbb{AD}$
d) $\mathbb{DA}$
e) $\mathbb{BD}$
f) $\mathbb{DB}$
g) $\mathbb{ABD}$
h) $\mathbb{DBA}$
i) $\mathbb{BDA}$
j) $\mathbb{BAD}$
k) $\mathbb{AD} + 3\mathbb{B}$
l) $\mathbb{DA} + 4\mathbb{A}$

Řešení. a) $\mathbb{AB} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$,

b) $\mathbb{BA} = \begin{pmatrix} 1 \cdot_5 2 +_5 3 \cdot_5 2 +_5 4 \cdot_5 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 +_5 1 +_5 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_5^{1,1}$,

c) $\mathbb{AD}$ není definováno,

d) $\mathbb{DA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$,

e) $\mathbb{BD} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$,

f) $\mathbb{DB}$ není definován,

g) $\mathbb{ABD} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$,

h) $\mathbb{DBA}$ není definován,

i) $\mathbb{BDA} = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$,

j) $\mathbb{BAD}$ není definován,

k) $\mathbb{AD} + 3\mathbb{B}$ není definován,

l) $\mathbb{DA} + 4\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Opět naprosto stejně, jako jsme řešili soustavy rovnic v $\mathbb{R}$, můžeme řešit soustavy v libovolném tělese T. Musíme jenom myslet na to, že se mohly změnit aritmetické operace.

Příklad 2.10. Vyřešte soustavu s rozšířenou maticí

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \in \mathbb{Z}_5^{3,4}$$

Řešení.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{ř2+ř1,ř3+3·ř1}]{G3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{ř2}\leftrightarrow\text{ř3}]{G1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{ř3+2·ř2}]{G3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right).$$

Tato matice je v horním stupňovitém tvaru a poslední sloupec je jediný vedlejší, má proto jediné řešení. Označme si neznámé jako $x, y, z \in \mathbb{Z}_5$. Potom z posledního řádku máme $z = 4$, po dosazení do druhého máme $y +_5 4 = 2$, z čehož plyne $y = 3$ a konečně po dosazení do prvního získáváme $2 \cdot_5 x +_5 1 +_5 4 = 2$, což znamená, že $x = 1$.

Příklad 2.11. Vyřešte soustavu s rozšířenou maticí

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \in \mathbb{Z}_5^{2,5}$$

Řešení.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{ř2+ř1}]{G3} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 2 \end{array}\right).$$

Tato matice je v horním stupňovitém tvaru a vedle posledního sloupce má ještě další dva vedlejší, soustava proto bude mít více než jedno řešení. Označme si neznámé $x, y, z, t \in \mathbb{Z}_5$. Najdeme partikulární řešení: položme např. $y = t = 0$, potom nutně $z = 3$ a $x = 2$. Máme tedy

$$(2, 0, 3, 0) \in S.$$

Nalezněme nějaká řešení přidružené homogenní soustavy. Položme $y = 0$ a $t = 1$, potom nutně musí být $z = 4$ a $x = 3$. Položme naopak $y = 1$ a $t = 0$, potom nutně musí být $z = 0$ a $x = 1$. Dostáváme tedy

$$(1, 1, 0, 0), (3, 0, 4, 1) \in S_0,$$

z čehož plyne, že

$$(2, 0, 3, 0) + \alpha(1, 1, 0, 0) + \beta(3, 0, 4, 1) \in S$$

pro všechna $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_5$. Celkem jsme nalezli 25 různých řešení (jak později uvidíme, více jich není).

2.4 Cvičení

Příklad 2.12. Vypočtěte součiny $\mathbb{AB}$ a $\mathbb{BA}$ (jsou-li definované) pro matice

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1,n}, \qquad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n,1},$$

kde $n \in \mathbb{N}$ je libovolné.

Řešení.

$$\mathbb{AB} = \begin{pmatrix} \frac{n^2+n}{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1,1}, \qquad \mathbb{BA} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ n & n & \cdots & n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n}.$$

Příklad 2.13. Pro zadané reálné matice odvoďte předpisy pro jejich $n$té mocniny ($n \in \mathbb{N}$). Správnost vašich odhadů dokažte.

a) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A}^n = ?$

b) $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B}^n = ?$

c) $\mathbb{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{C}^n = ?$

d) $\mathbb{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{D}^n = ?$

e) $\mathbb{E} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad \mathbb{E}^n = ?$
(spíše pro odvážné s povědomím o součtových vzorcích pro $\sin x$ *a* $\cos x$*)*

Řešení.

a) $\mathbb{A}^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+(-1)^n & 1-(-1)^n \\ 1-(-1)^n & 1+(-1)^n \end{pmatrix}$
(lze rozepsat zvlášť pro n sudá a lichá),

b) $\mathbb{B}^n = \begin{pmatrix} n+1 & n \\ -n & 1-n \end{pmatrix}$,

c) $\mathbb{C}^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$,

d) $\mathbb{D}^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n^2+n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

e) $\mathbb{E}^n = \begin{pmatrix} \cos(n\varphi) & -\sin(n\varphi) \\ \sin(n\varphi) & \cos(n\varphi) \end{pmatrix}$.

Poznámka 2.1. *Výsledky uvedené u cvičení níže je třeba brát s rezervou, a to ze dvou důvodů. Jednak vždy uvádíme množinu* **všech** *řešení, ačkoli se to po nás v této kapitole nevyžaduje, jednak se běžně stává, že různé postupy vedou k „různě vypadajícím" výsledkům, ačkoli jsou všechny správně! Tento problém nejedinečnosti zápisu množiny řešení si ovšem vysvětlíme až později na přednáškách – budeme potřebovat pojmy jako podprostor, báze, či dimenze.*

Příklad 2.14. Vyřešte v $\mathbb{R}$ následující homogenní SLR:

a) $$\begin{array}{rcrcrcl} 9x & + & 3y & - & z & = & 0, \\ 5x & - & 2y & - & 3z & = & 0. \end{array}$$

b) $$\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x & + & y & & & + & t & = & 0, \\ 3x & + & y & & & - & 2t & = & 0, \\ -2x & - & 4y & + & 5z & - & 9t & = & 0. \end{array}$$

c) $$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} -x & + & y & + & z & + & t & + & u & = & 0, \\ x & - & y & + & z & + & t & + & u & = & 0, \\ x & + & y & - & z & + & t & + & u & = & 0, \\ x & + & y & + & z & - & t & + & u & = & 0, \\ x & + & y & + & z & + & t & - & u & = & 0. \end{array}$$

Řešení. a) Nekonečně mnoho řešení, $S = \{(x, -2x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

b) Nekonečně mnoho řešení, $S = \{(-\frac{1}{2}z, \frac{3}{2}z, z, 0) \mid z \in \mathbb{R}\}$.

c) Jedno řešení, $S = \{(0, 0, 0, 0, 0)\}$.

Příklad 2.15. Vyřešte v $\mathbb{R}$ následující nehomogenní SLR:

a) $$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & + & z & & & = & 2, \\ x & - & y & + & z & + & t & = & 1. \end{array}$$

b) $$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & - & y & + & z & - & 3t & = & 4, \\ 2x & + & y & - & z & + & t & = & 1, \\ 3x & - & 2y & + & 2z & - & 3t & = & 2, \\ 5x & + & y & - & z & + & 2t & = & -1. \end{array}$$

c) $$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & + & 4t & = & 11, \\ 2x & + & 3y & + & 4z & + & t & = & 12, \\ 3x & + & 4y & + & z & + & 2t & = & 13, \\ 4x & + & y & + & 2z & + & 3t & = & 14. \end{array}$$

Řešení. a) Nekonečně mnoho řešení, $S = \{(2 - y - z, y, z, -1 + 2y) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$.

b) Řešení neexistuje, $S = \emptyset$.

c) Jedno řešení, $S = \{(2, 1, 1, 1)\}$.

Příklad 2.16. V následujících bodech vždy nalezněte nějaké polynomy daného maximálního stupně (reálné proměnné s reálnými koeficienty), splňující zadané podmínky ($'$ značí derivaci reálné funkce).

a) polynom p nejvýše kvadratický takový, že $\forall x \in \mathbb{R}: \ p(x) = p(x+1)$,

b) polynom q nejvýše kvadratický takový, že $q(1) = 1$ a $q'(1) = 1$,

c) polynom r nejvýše kubický takový, že $r(0) = 3$, $r(1) = 1$, $r'(1) = 0$ a $r''(1) = 4$.

Řešení. a) p je libovolný konstantní polynom, tj. $p(x) = c \in \mathbb{R}$,

b) $q(x) = cx^2 + (1 - 2c)x + c$ (pro každé $x \in \mathbb{R}$), kde $c \in \mathbb{R}$ lze zvolit libovolně,

c) $r(x) = 2x^2 - 4x + 3$ (pro každé $x \in \mathbb{R}$).