BI-LIN, Lineární algebra – cvičení

Daniel Dombek, Luděk Kleprlík, Karel Klouda

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze

LS 2019/2020

vytvořeno: 15. února 2022, 13:46

3 Základní pojmy lineární algebry

Značení a zkratky:

- ⋄ VP .... zkr. pro *vektorový prostor*
- ⋄ $P \subset\subset V$ .... P je podprostor vektorového prostoru V
- ⋄ $(x_1, \dots, x_n)$ .... soubor vektorů délky n
- ⋄ $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ .... lineární obal souboru $(x_1, \dots, x_n)$
- ⋄ LN/LZ .... zkr. pro *lineárně nezávislý/závislý*

3.1 Vektorový prostor a podprostory

Podprostor je taková podmnožina VP, která je, stejně jako VP samotný, uzavřená vůči oběma binárním operacím VP (které tradičně značíme + a $\cdot$):

Definice 3.1. *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a nechť $\emptyset \neq P \subset V$ (P je neprázdná podmnožina V). Říkáme, že P je* ***podprostor*** *prostoru V, právě když platí:*

1. $\forall x, y \in P$: $x + y \in P$,
2. $\forall \alpha \in T, \forall x \in P$: $\alpha x \in P$

Vztah „být podprostorem“ pak značíme

$$P \subset\subset V.$$

Příklad 3.2. Pro následující množiny $M \subset \mathbb{R}^4$ rozhodněte, zda se jedná o podprostor $\mathbb{R}^4$.

a) $M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_2 + 3x_3,\ x_2 = -x_4\}$,

b) $M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 < x_2\}$,

c) $M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 \neq x_2,\ 3x_3 = x_4\}$,

d) $M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = 1,\ x_2 = x_3 = x_4\}$,

e) $M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = 0\}$,

f) $M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_2 x_3\}$,

g) $M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid |x_1| = |x_2|,\ |x_3| = |x_4|\}$.

Řešení. Uvažujme množinu M z bodu a): pokusíme se ukázat, že se jedná o podprostor. Nechť $x = (x_1, x_2, x_3, x_4), y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in M$. Dle definice musí pro M platit, že $x + y$ je také z M, ověřme, zda to skutečně platí: dle definice sčítání vektorů v $\mathbb{R}^4$ máme

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4).$$

Aby tento vektor byl v M, musí splňovat podmínku, že jeho první souřadnice je rovna součtu druhé a trojnásobku třetí, neboli:

$$x_1 + y_1 = (x_2 + y_2) + 3(x_3 + y_3) = (x_2 + 3x_3) + (y_2 + 3y_3).$$

Tato rovnost zřejmě platí díky tomu, že x, y jsou z M, a tedy jistě $x_1 = x_2 + 3x_3$ a $y_1 = y_2 + 3y_3$.

Analogicky ukážeme, že je pro $x + y$ splněna i druhá podmínka, tedy že čtvrtá souřadnice je rovna druhé s opačným znaménkem, tedy že

$$x_2 + y_2 = -(x_4 + y_4).$$

Platnost této rovnosti je opět přímým důsledkem toho, že pro $x, y \in M$ platí $x_2 = -x_4$ a $y_2 = -y_4$.

Zbývá ukázat, že pro všechna $\alpha \in \mathbb{R}$ je $\alpha x \in M$. Jelikož dle definice násobení vektoru číslem v $\mathbb{R}^4$ platí

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, \alpha x_4),$$

musí platit

$$\alpha x_1 = \alpha x_2 + 3\alpha x_3 = \alpha(x_2 + 3x_3),$$

to ale opět očividně platí, díky tomu že $x \in M$ a tedy $x_1 = x_2 + 3x_3$. Že je splněna i druhá podmínka z definice M, tedy že $\alpha x_2 = -(\alpha x_4)$, si laskavý čtenář dokáže sám.

Pro množinu M z bodu b) ukážeme, že netvoří podprostor. Když chceme ukázat, že něco neplatí, je možné odbýt celý důkaz nalezením protipříkladu[1]: v tomto případě si snadno můžeme všimnout, že např. $(1, 2, 3, 4)$ do množiny M patří, ale jeho -1 násobek $(-1, -2, -3, -4)$ již nikoli a o podprostor se tedy nejedná. Ještě kratší argument je poukázat na to, že v M neleží nulový vektor $(0, 0, 0, 0)$, a tedy se nemůže jednat o podprostor.

Shrňme si správné odpovědi na otázku „Je M podprostor?“:

a) ano, b) ne, c) ne, d) ne, e) ano, f) ne, g) ne.

Příklad 3.3. Nechť $\mathbb{A} \in T^{m,n}$ je matice s prvky z tělesa T. Označme $S_0 \subset T^n$ množinu řešení rovnice $\mathbb{A}\mathbb{x} = \theta$. Dokažte, že S_0 je podprostor T^n.

Řešení. Důkaz je jednoduchým důsledkem vlastností operací násobení a sčítání matic a násobení matice číslem.

Příklad 3.4. Pro následující množiny $M \subset T^3$ a tělesa T rozhodněte, zda se jedná o podprostor T^3.

a) $M = \{(0, 0, 0), (1, 1, 1)\}$ a $T = \mathbb{Z}_2$,

b) $M = \{(0, 0, 0), (1, 1, 1), (2, 2, 2)\}$ a $T = \mathbb{Z}_3$,

c) $M = \{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (2, 0, 0), (3, 0, 0), (4, 0, 0)\}$ a $T = \mathbb{Z}_5$,

[1] Důkaz platnosti nějakého tvrzení pomocí „propříkladu“ je naopak striktně zapovězen!

d) $M = \{(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ a $T = \mathbb{Z}_2$.

Je-li M podprostor, pokuste se najít matici $\mathbb{A} \in T^{m,n}$ odpovídajících rozměrů, aby M odpovídalo množině řešení soustavy $\mathbb{A}\mathbb{x} = \theta$.

Řešení. M z bodu $a)$ je zřejmě podprostor. Abychom našli matici $\mathbb{A}$, všimneme si, že množinu M můžeme charakterizovat jako množinu vektorů (x_1, x_2, x_3) ze $\mathbb{Z}_2^3$ takových, že všechny jejich složky jsou stejné, tedy $x_1 = x_2 = x_3$. To můžeme zapsat pomocí dvou rovnic $x_1 +_2 x_2 = 0$ a $x_2 +_2 x_3 = 0$ a odtud už vidíme, že hledaná matice je

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pro bod $b)$ je situace stejná: jedná se o podprostor a i hledaná matice $\mathbb{A}$ se získá podobně (jen je třeba si uvědomit, že $x_1 = x_2$ je ekvivalentní s $x_1 + 2x_2 = 0$):

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

M z bodu $c)$ je také podprostor, matice $\mathbb{A}$ je např.

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

M z bodu $d)$ není podprostor.

Poznámka 3.1. *Viděli jsme, že množina řešení homogenní soustavy vždy tvoří podprostor a v předchozím příkladě jsme si naznačili, že k podprostorům je někdy možné najít homogenní soustavu, jejíž množina řešení je shodná s daným podprostorem. Později si ukážeme, že takovou soustavu umíme najít pro libovolný podprostor T^n pro libovolné těleso T a libovolné přirozené n.*

3.2 Lineární (ne)závislost

Základním pojmem následujících cvičení bude pojem **lineární kombinace** souboru $(x_1, \ldots, x_n)$: řekneme, že vektor x je lineární kombinací souboru $(x_1, \ldots, x_n)$, jestliže existují koeficienty $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ z příslušného tělesa tak, že

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i.$$

Příklad 3.5. Čemu se rovná lineární kombinace souboru vektorů

$$((1,1,1),(2,3,0),(2,1,0)) \subset \mathbb{R}^3$$

s koeficienty $1, 2$ a 3?

Jak se odpověď změní, jestliže se přesuneme do VP $\mathbb{Z}_5^3$?

Definice 3.6. *Nechť $(x_1, \ldots, x_n)$ je soubor vektorů z V. Řekneme, že $(x_1, \ldots, x_n)$ je **lineárně nezávislý (LN)** soubor, právě když pouze triviální lineární kombinace tohoto souboru je rovna nulovému vektoru θ. V opačném případě nazýváme soubor **lineárně závislý (LZ)**. Jinými slovy:*

- ◇ *$(x_1, \ldots, x_n)$ je LN $\Leftrightarrow$*

$$\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in T : \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \theta \Rightarrow (\forall i \in \hat{n})(\alpha_i = 0) \right)$$

◇ $(x_1, \ldots, x_n)$ *je LZ* $\Leftrightarrow$

$$\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in T, \exists k \in \hat{n}, \alpha_k \neq 0 : \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \theta \right)$$

Příklad 3.7. Rozhodněte, zda následující vektory tvoří LZ, nebo LN soubor:

a) $(1, 3, 0, -1), (0, 2, -1, 4), (1, -5, 7, -2)$ v prostoru $\mathbb{R}^4$,

b) $(1, 2, 3, 4), (2, 1, -3, 3), (1, 5, 12, 9)$ v prostoru $\mathbb{R}^4$,

c) $(1, 0, 0, 1), (1, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 1)$ v prostoru $\mathbb{Z}_2^4$,

d) $(1, 2, 3), (2, 3, 1), (1, 1, 1)$ v prostoru $\mathbb{Z}_5^3$,

e) $(1, 2, 3), (2, 3, 1), (1, 1, 1)$ v prostoru $\mathbb{Z}_p^3$ pro prvočíslo $p > 5$,

f) $(i, 1, 1 + i), (2, 2 + i, 0), (0, 3 - 3i, 7)$ v prostoru $\mathbb{C}^3$.

Řešení. Postup při řešení takovýchto příkladů si ukážeme na souboru vektorů z bodu a). Dle definice LN resp. LZ souboru potřebujeme rozhodnout, zda

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \theta$$

má jediné řešení ($\alpha_i = 0$ pro všechna i je jistě vždy řešení). Tuto rovnici ale v případě vektorových prostorů T^n umíme vyjádřit maticově jako

$$\mathbb{A}\mathbb{x} = \theta,$$

kde $\mathbb{A}$ vznikne tak, že vektory x_1 až x_n napíšeme do sloupců. Pro vektory $(1, 3, 0, -1), (0, 2, -1, 4)$ a $(1, -5, 7, -2)$ tak dostáváme soustavu s rozšířenou maticí

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & 0 \\ -1 & 4 & -2 & 0 \end{array} \right).$$

Pomocí GEM snadno zjistíme, že soustava má jediné řešení $(0, 0, 0)$ a soubor je tedy dle definice LN.

Výsledky pro ostatní body získáme podobně:

b) LZ, c) LZ, d) LN, e) LN, f) LN

Příklad 3.8. Uvažujme LN soubor vektorů $((1, 2, 3), (1, 0, -1))$ z $\mathbb{R}^3$. Rozhodněte, které z vektorů $(0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)$ můžeme k těmto dvěma vektorům přidat, aby vznikl LN soubor.

Řešení. Mohli bychom postupovat jako v předchozím příkladě a vytvořit postupně tři soustavy s maticí, jejíž první dva sloupce vzniknou z vektorů $((1, 2, 3), (1, 0, -1))$ a třetí se po řadě doplní z vektorů $(0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)$. Snadno si ale rozmyslíme, že vše můžeme vyřešit najednou převedením násl. matice na horní stupňovitý tvar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tak zjistíme, že můžeme vybrat kterýkoli z nabízených vektorů.

Příklad 3.9. Nechť (x, y, z) je LN soubor vektorů ve vektorovém prostoru V nad tělesem $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zda jsou následující soubory LZ nebo LN.

a) $(x + y, 2x + z, y - z)$,

b) $(x + 2y + z, 2x + y + 5z, 3x + y + 8z)$.

Řešení. Postupujeme přímo z definice: hledáme $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tak, aby

$$\alpha(x + y) + \beta(2x + z) + \gamma(y - z) = \theta.$$

To upravíme na rovnici

$$(\alpha + 2\beta)x + (\alpha + \gamma)y + (\beta - \gamma)z = \theta.$$

Tato rovnice je ale lineární kombinace LN souboru dávající nulový vektor, o té víme, že má pouze triviální řešení, tedy že všechny koeficienty jsou nula. To nám dává soustavu tří rovnic

$$\alpha + 2\beta = 0, \quad \alpha + \gamma = 0, \quad \beta - \gamma = 0,$$

kterou vyřešíme, a zjistíme, že musí být $\alpha = \beta = \gamma = 0$ a soubor je LN.

Podobně zjistíme, že soubor z bodu b) je LZ.

3.3 Lineární obal

Lineární obal nějakého souboru vektorů je množina všech lineárních kombinací tohoto souboru. Je to tedy podmnožina VP (dokonce víme, že to je podprostor) a má tedy smysl se ptát, jestli do této množiny nějaký daný vektor patří či nikoli.

Příklad 3.10. Zjistěte, zda vektor x patří do $\langle M \rangle$, kde M a x jsou následující:

a) $M = ((1, 2, 3), (1, -1, 5), (2, 2, 2))$ a $x = (4, 4, 12)$ (v prostoru $\mathbb{R}^3$),

b) $M = ((1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 1), (0, 0, 0, 1))$ a $x = (1, 0, 0, 0)$ (v prostoru $\mathbb{Z}_2^4$),

c) $M = ((1, 2, 3), (2, 3, 1), (1, 1, 1), (2, 2, 0))$ a $x = (1, 1, 2)$ (v prostoru $\mathbb{Z}_5^3$),

Pokud $x \in \langle M \rangle$, najděte koeficienty nějaké lineární kombinace vektorů z M, která se rovná x.

Řešení. Ověřit, jestli je nějaký vektor v lineárním obalu souboru, znamená najít lineární kombinaci tohoto souboru, která dává tento vektor, příp. ukázat, že taková lineární kombinace neexistuje. Pro případ *a*) to znamená hledat reálná čísla $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tak, že

$$\alpha_1(1, 2, 3) + \alpha_2(1, -1, 5) + \alpha_3(2, 2, 2) = (4, 4, 12).$$

Díky tomu, že v $\mathbb{R}^3$ jsou definovány obě vektorové binární operace po složkách, je rovnice výše ekvivalentní soustavě rovnic pro tři neznámé $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ s rozšířenou maticí

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 12 \end{array}\right).$$

Tu snadno vyřešíme pomocí GEM a zjistíme, že má jediné řešení a že x leží v $\langle M \rangle$, neboť

$$2(1, 2, 3) + 1(1, -1, 5) + \frac{1}{2}(2, 2, 2)) = (4, 4, 12).$$

V případě *b*) zjistíme pro příslušnou soustavu 4 rovnic o 4 neznámých, že nemá řešení a x v $\langle M \rangle$ neleží.

V případě *c*) má naopak soustava 3 rovnic o 4 neznámých řešení více. Hledané koeficienty $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{Z}_5$ lineární kombinace vektorů z M, jejímž výsledkem je vektor x, jsou všechny násl. čtveřice čísel

$$(1 + 4\beta, 4 + \beta, 2\beta, 1 + \beta), \quad \text{pro všechna } \beta \in \mathbb{Z}_5.$$

Viděli jsme, že koeficienty lineární kombinace dávající x mohou i nemusí být jednoznačné. S tím, co víte o soustavách rovnic, by nemělo být těžké dokázat následující.

Příklad 3.11. Dokažte násl. tvrzení:

Nechť je $(x_1, \dots, x_n)$ soubor vektorů z libovolného vektorového prostoru V nad tělesem T a nechť $z \in \langle x_1, \dots, x_n \rangle$. Potom platí následující: $n$tice čísel $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ z tělesa T taková, že

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = z,$$

existuje právě jedna, právě když je $(x_1, \dots, x_n)$ LN.

3.4 Báze a dimenze

První typ úlohy, se kterou se seznámíme, je rozhodnutí, zda daný soubor tvoří bázi daného VP.

Příklad 3.12. Rozhodněte, zda soubor

a) $\mathcal{X} = ((1,2,3),(3,2,1),(1,1,5))$ tvoří bázi $\mathbb{R}^3$,

b) $\mathcal{X} = ((1,2,3),(3,2,1))$ tvoří bázi $\mathbb{R}^3$,

c) $\mathcal{X} = (1,2,3),(3,2,1),(2,2,5),(3,3,0)$ tvoří bázi $\mathbb{R}^3$,

d) $\mathcal{X} = ((1,i,1),(0,1,i),(i,1,-i))$ tvoří bázi $\mathbb{C}^3$,

e) $\mathcal{X} = ((1,2,3),(3,2,1),(1,0,4))$ tvoří bázi $\mathbb{Z}_5^3$

V případě, že soubor bázi netvoří, určete dimenzi jeho lin. obalu.

Řešení. Potřebujeme ověřit dvě vlastnosti báze: jestli je soubor LN a jestli *generuje* celý VP (neboli jestli každý vektor VP leží v lin. obalu souboru). Jestli je soubor LN už ověřit umíme: stačí si napsat vektory do sloupců matice, provést GEM a koukat se, jestli ve výsledném horním stup. tvaru existují vedlejší sloupce (jen tehdy je soubor LZ). Umíme také rozhodnout, jestli je konkrétní vektor v lin. obalu, ale jak zjistit, jestli je tam *libovolný* vektor? Jednoduše, namísto konkrétního vektoru napíšeme vektor, jehož prvky budou proměnné.

Např. pro případ a) řešíme soustavu s rozšířenou maticí

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & x_1 \\ 2 & 2 & 1 & x_2 \\ 3 & 1 & 5 & x_3 \end{array}\right),$$

kde x_1, x_2, x_3 jsou libovolná reálná čísla. Je jasné, že pokud po úpravě na horní stupňovitý tvar bude pro libovolné hodnoty x_1, x_2, x_3 poslední sloupec jediný vedlejší, je soubor LN a vektor (x_1, x_2, x_3) leží v lin. obalu zadaného souboru (protože soustava má vždy řešení). Po úpravě na horní stupňovitý tvar pomocí GEM dostáváme (např.) tuto matici:

$$\left(\begin{array}{ccc|l} 1 & 3 & 1 & x_1 \\ 0 & 4 & 1 & 2x_1 - x_2 \\ 0 & 0 & 4 & x_1 - 2x_2 + x_3 \end{array}\right).$$

Z ní je vidět, že se skutečně jedná o bázi.

Pro další tři případy dostáváme tyto výsledky: b) není báze, $\dim\langle\mathcal{X}\rangle = 2$, c) není báze, $\mathcal{X}$ je LZ, $\dim\langle\mathcal{X}\rangle = 3$ d) je to báze.

Pro případ e) dostáváme soustavu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & x_1 \\ 2 & 2 & 0 & x_2 \\ 3 & 1 & 4 & x_3 \end{array}\right),$$

kterou upravíme na (sčítání a násobení je vždy sčítání a násobení modulo 5, pro přehlednost používáme $+$ namísto $+_5$ a prosté $\cdot$ namísto $\cdot_5$)

$$\left(\begin{array}{ccc|l} 1 & 3 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 3 & x_2 + 3x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 + 3x_2 + x_1 \end{array}\right).$$

Z této matice je vidět hned několik důležitých věcí: předně soubor není LN, neboť platí, že příslušná homogenní soustava má netriviální řešení (např. $(3, 2, 1)$). Soubor také negeneruje $\mathbb{Z}_5^3$, protože pokud pro nějaký vektor (x_1, x_2, x_3) neplatí, že $x_3 + 3x_2 + x_1 = 0$, nemá soustava řešení. Ekvivalentně můžeme říci, že v lineárním obalu zadaného souboru leží pouze vektory (x_1, x_2, x_3) splňující rovnici $x_3 + 3x_2 + x_1 = 0$. To pěkně koresponduje s tím, co víme z přednášky: lin. obal je vždy podprostor, stejně jako řešení homogenní soustavy (zde $x_3 + 3x_2 + x_1 = 0$).

Jak zjistíme dimenzi lin. obalu? Předně si uvědomíme, že lin. obal je podprostor, podprostor je sám o sobě VP, a tedy má smysl o dimenzi lin. obalu uvažovat. Pro výpočet dimenze nám postačí najít bázi, neboť víme, že dimenze lin. obalu tří nenulových vektorů je menší než tři[2] a větší než nula a v tom případě se délka báze rovná dimenzi. Vyjdeme z věty z přednášky, která nám říká následující:

> Buď $(y_1, \ldots, y_n)$ LZ soubor vektorů z V, $n \geq 2$. Potom $\exists k \in \hat{n}$ tak, že $y_k \in \langle y_1, \ldots, y_{k-1}, y_{k+1}, \ldots, y_n \rangle$. Pro takové k navíc platí $\langle y_1, \ldots, y_n \rangle = \langle y_1, \ldots, y_{k-1}, y_{k+1}, \ldots, y_n \rangle$.

Nyní roli vektoru y_k může hrát například vektor $(1, 0, 4)$, který dle matice výše lze napsat jako lin. kombinace prvních dvou vektorů: $(1, 0, 4) = 2(1, 2, 3) + 3(3, 2, 1)$. Proto také platí, že

$$\langle (1, 2, 3), (3, 2, 1), (1, 0, 4) \rangle = \langle (1, 2, 3), (3, 2, 1) \rangle.$$

Jelikož je soubor $((1, 2, 3), (3, 2, 1))$ LN a jelikož generuje lin. obal původního souboru, jedná se i o jeho bázi a dimenze je dva.

Příklad 3.13.

a) Doplňte soubor $((3, 4, 2, 7), (1, 2, 1, 0))$ na bázi prostoru $\mathbb{R}^4$.

b) Doplňte soubor $((1, 2, 0, 0), (1, 1, 1, 1))$ na bázi prostoru $\mathbb{Z}_3^4$.

Řešení. Oba soubory ze zadání příkladu jsou LN a tak dle Steinitzovy věty víme, že je lze doplnit (dvěma) vektory tak, aby vzniklý soubor tvořil bázi. Jak to provedeme: vezmeme si nějakou bázi, např. standardní $\mathcal{E} = ((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$. Napíšeme původní dva vektory spolu s vektory této báze do sloupců matice: pro soubor z a) dostáváme

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

[2] Našli jsme tříčlenný soubor, který generuje daný podprostor a tento soubor je LZ: dle Steinitzovy věty víme, že délka LN souboru v tomto podprostoru nemůže být více než dva! Je také jasné, že dimenze není nula, neboť tu má pouze triviální podprostor $\{\theta\}$

tuto matici upravíme na horní stupňovitý tvar a vybereme z posledních 4 sloupců dva tak, že budou spolu s prvními dvěma sloupci tvořit matici se čtyřmi hlavními sloupci (často je možné vybrat libovolné dva vektory). Dostáváme tak násl. řešení.

a) Např. $((3,4,2,7),(1,2,1,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1))$.

b) Např. $((1,2,0,0),(1,1,1,1),(1,0,0,0),(0,0,1,0))$.

Příklad 3.14. Pokud pro soubor vektorů $\mathcal{X}$ z vektorového prostoru V platí $\langle\mathcal{X}\rangle = V$, odeberte z $\mathcal{X}$ vektory tak, aby zbylý soubor byl bází V.

a) $V = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{X} = ((3,4,2),(1,0,-1),(1,1,0),(1,2,2),(2,3,2))$,

b) $V = \mathbb{R}^4$, $\mathcal{X} = ((1,2,0,6),(1,1,1,1),(0,1,0,3))$,

c) $V = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{X} = ((1,1,0),(1,0,2),(0,-1,2),(4,2,4))$,

d) $V = \mathbb{Z}_2^4$, $\mathcal{X} = ((1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,0,0),(0,1,1,0),(1,1,1,1))$.

Řešení. a) Bází je např. $((3,4,2),(1,0,-1),(1,1,0))$,

b) $\langle\mathcal{X}\rangle \neq V$,

c) $\langle\mathcal{X}\rangle \neq V$,

d) bází je např. $((1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,0,0),(1,1,1,1))$.

Příklad 3.15. Uvažujme matici $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ a množinu M všech reálných matic typu $(2,2)$, které s $\mathbb{A}$ tzv. komutují. Tedy

$$M = \{\mathbb{X} \in \mathbb{R}^{2,2} \mid \mathbb{A}\mathbb{X} = \mathbb{X}\mathbb{A}\}\,.$$

Dokažte, že $M \subset\subset \mathbb{R}^{2,2}$, určete dimenzi M a nalezněte nějakou jeho bázi.

Řešení. Množina M je jistě neprázdná, definující rovnici splňuje například nulová matice $\Theta \in \mathbb{R}^{2,2}$ a samotná matice $\mathbb{A}$ (rozmyslete si). Uzavřenost množiny plyne z vlastností maticového násobení. Buďte $\alpha \in \mathbb{R}$ a $\mathbb{X}, \mathbb{Y} \in M$ (tedy platí $\mathbb{A}\mathbb{X} = \mathbb{X}\mathbb{A}$ a současně $\mathbb{A}\mathbb{Y} = \mathbb{Y}\mathbb{A}$). Z toho plyne

$$\mathbb{A}(\mathbb{X}+\mathbb{Y}) = \mathbb{A}\mathbb{X} + \mathbb{A}\mathbb{Y} = \mathbb{X}\mathbb{A} + \mathbb{Y}\mathbb{A} = (\mathbb{X}+\mathbb{Y})\mathbb{A}\,, \qquad \mathbb{A}(\alpha\mathbb{X}) = \alpha(\mathbb{A}\mathbb{X}) = \alpha(\mathbb{X}\mathbb{A}) = (\alpha\mathbb{X})\mathbb{A}\,,$$

tedy v množině M leží i matice $\mathbb{X}+\mathbb{Y}$ a $\alpha\mathbb{X}$.

Dále potřebujeme popsat všechny prvky množiny M, tedy všechny matice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$, které splňují rovnost

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\,.$$

To vede na soustavu lineárních rovnic pro proměnné $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ s rozšířenou maticí

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

a s řešením

$$\begin{aligned}(a,b,c,d) \in \left\{(a,b,b,a+\tfrac{3}{2}b) \mid a,b \in \mathbb{R}\right\} &= \left\{a(1,0,0,1) + b(0,1,1,\tfrac{3}{2}) \mid a,b \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \langle(1,0,0,1),(0,1,1,\tfrac{3}{2})\rangle \\ &= \langle(1,0,0,1),(0,2,2,3)\rangle\,.\end{aligned}$$

Z toho již plyne, že

$$M = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle ,$$

tedy M je generována souborem délky 2. Ten je současně zřejmě LN (rozmyslete si), tedy se jedná o bázi a platí $\dim M = 2$.

Poznámka: Alternativně jsme řešení příkladu mohli rovnou začít popisem všech prvků $\mathbb{X} \in M$. Zjistili bychom, že M je lineárním obalem nějakého souboru, přičemž z přednášky víme, že všechny lineární obaly jsou současně podprostory – z toho by rovnou plynulo, že $M \subset\subset \mathbb{R}^{2,2}$).

V následujícím příkladě můžete využít násl. větu z přednášky:

Buďte $(x_1, \ldots, x_n)$ a $(y_1, \ldots, y_m)$ dva soubory vektorů z V. Potom

$$\langle x_1, \ldots, x_n \rangle = \langle y_1, \ldots, y_m \rangle$$

právě tehdy, když

$$\dim\langle x_1, \ldots, x_n \rangle = \dim\langle y_1, \ldots, y_m \rangle = \dim\langle x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m \rangle.$$

Úlohu rovnosti dvou lineárních obalů tak převádíme na úlohu určení dimenze, kterou již vyřešit umíme.

Příklad 3.16. Rozhodněte, zda soubory $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ generují stejný podprostor v T^3, je-li

a) $\mathcal{X} = ((2, -3, 3), (-1, 1, 2))$, $\mathcal{Y} = ((0, -1, 7), (3, -5, 8))$, $T = \mathbb{R}$,

b) $\mathcal{X} = ((1, 1, 2), (2, 1, 1))$, $\mathcal{Y} = ((1, 3, 1), (0, 1, -1))$, $T = \mathbb{R}$,

c) $\mathcal{X} = ((1, 2, 1), (2, 1, 0), (1, 5, 3))$, $\mathcal{Y} = ((-1, 1, 1), (0, 3, 2))$, $T = \mathbb{R}$,

d) $\mathcal{X} = ((1, 2, 1), (2, 1, 0), (1, 0, 3))$, $\mathcal{Y} = ((4, 1, 1), (0, 3, 2))$, $T = \mathbb{Z}_5$.

Řešení. a) Ano, b) ne, c) ano, d) ano.

3.5 Souřadnice vektoru v bázi

Z příkladu 3.11 víme, že pro vektory z z lin. obalu LN souboru je jednoznačně určena lineární kombinace tohoto souboru dávající z. Když toto tvrzení použijeme na bázi, dostáváme tvrzení, že pro libovolný vektor z z VP s bází $\mathcal{X} = (x_1, \ldots, x_n)$ existuje jednoznačně určená $n$tice čísel $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ z T tak, že

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = z.$$

Souřadnicemi vektoru $z \in V_n$ v bázi $\mathcal{X}$ pak rozumíme sloupec

$$(z)_{\mathcal{X}} := \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

(na který lze v případě potřeby pohlížet i jako na obyčejnou $n$tici $(z)_{\mathcal{X}} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$).

Zobrazení $x_i^{\#} : V_n \to T$ přiřazující vektoru $i$tou souřadnici, tedy

$$x_i^{\#}(z) := \alpha_i \,,$$

nazýváme $i$tý souřadnicový funkcionál vzhledem k bázi $\mathcal{X}$.

Příklad 3.17. Soubor $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3)$ je báze prostoru $\mathbb{R}^3$, $x \in \mathbb{R}^3$, Nalezněte souřadnice x v bázi $\mathcal{X}$, je-li

a) $x_1 = (1, 1, 1)$, $x_2 = (1, 2, 1)$, $x_3 = (0, 0, 1)$, $x = (1, 0, 4)$,

b) $x_1 = (1, 0, 1)$, $x_2 = (0, 1, 0)$, $x_3 = (2, 3, 4)$, $x = (1, -3, -3)$,

c) $x_1 = (3, 1, -3)$, $x_2 = (-5, 2, -1)$, $x_3 = (7, 3, 4)$, $x = (11, -8, -4)$.

Řešení. Jedná se o jednoduchou úlohu, kterou už jsme vlastně řešili, když jsme ověřovali, zda nějaký vektor leží v lin. obalu daného souboru či nikoli. Pro případ a) řešíme soustavu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right).$$

Díky tomu, že $\mathcal{X}$ je báze, víme, že soustava bude mít jediné řešení.

Vyjdou nám násl souřadnice a) $(2, -1, 3)$, b) $(5, 3, -2)$, c) $(1, -3, -1)$.

Příklad 3.18. Uvažte bázi $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3) = ((1, 3, 2), (1, 2, 0), (1, 0, 0))$ vektorového prostoru $\mathbb{Z}_5^3$. Najděte předpis pro souřadnice $(v)_{\mathcal{X}}$ obecného vektoru $v \in \mathbb{Z}_5^3$.

Řešení. Postupujeme jako při hledání souřadnic konkrétního vektoru s tím rozdílem, že pravou stranou soustavy je obecný vektor $v = (v_1, v_2, v_3)$. Můžeme si také všimnout, že když napíšeme vektory z báze v opačném pořadí, dostaneme rovnou soustavu s maticí v horním stupňovitém tvaru:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & v_1 \\ 0 & 2 & 3 & v_2 \\ 0 & 0 & 2 & v_3 \end{array}\right).$$

Tu můžeme klasicky vyřešit, ale my si při této příležitosti ukážeme i jiný postup. Pomocí GEM postupujeme následovně:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & v_1 \\ 0 & 2 & 3 & v_2 \\ 0 & 0 & 2 & v_3 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{ř}2+\text{ř}3,\text{ř}1+2\cdot\text{ř}3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & v_1 + 2v_3 \\ 0 & 2 & 0 & v_2 + v_3 \\ 0 & 0 & 2 & v_3 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{ř}1+2\cdot\text{ř}2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & v_1 + 2v_2 + 4v_3 \\ 0 & 2 & 0 & v_2 + v_3 \\ 0 & 0 & 2 & v_3 \end{array}\right) \xrightarrow{3\cdot\text{ř}2,3\cdot\text{ř}3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & v_1 + 2v_2 + 4v_3 \\ 0 & 1 & 0 & 3v_2 + 3v_3 \\ 0 & 0 & 1 & 3v_3 \end{array}\right).$$

Takto upravená matice není jenom v horním stupňovitém tvaru — je diagonální, takže v posledním sloupci má přímo napsané řešení. Když si vzpomeneme, že třetí sloupec odpovídá prvnímu vektoru báze a ten první tomu třetímu, dostáváme

$$v = (v_1, v_2, v_3) \quad \Rightarrow \quad (v)_{\mathcal{X}} = (3v_3, 3v_2 + 3v_3, v_1 + 2v_2 + 4v_3).$$

3.6 Cvičení

Příklad 3.19. Uvažujme uspořádanou čtveřici $(V, T, \oplus, \odot)$, kde

- $V = \mathbb{R}^+$, vektory jsou kladná reálná čísla,
- $T = \mathbb{R}$, skaláry bereme z množiny všech reálných čísel,
- pro každé $x, y \in \mathbb{R}^+$ definujeme
$$x \oplus y := x \cdot y,$$
kde $\cdot$ značí klasické násobení reálných čísel,
- pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ a každé $x \in \mathbb{R}^+$ definujeme
$$\alpha \odot x := x^\alpha,$$
kde v předpisu používáme standardní umocnění kladného reálného čísla na reálnou mocninu.

Dokažte, že $(V, T, \oplus, \odot)$ je vektorový prostor.

Řešení. Abychom dokázali o nějaké struktuře $(V, T, \oplus, \odot)$, že se jedná o vektorový prostor, musíme nejprve ověřit, že množina V je uzavřená vůči binárním operacím $\oplus$ a $\odot$. V tomto případě je jasné, že množina $V = \mathbb{R}^+$ uzavřená je: součin dvou kladných čísel je kladné číslo a z kurzu ZMA[3] víme, že umocníme-li libovolné kladné číslo na libovolné reálné číslo, dostaneme kladné číslo (vzpomeňme graf exponenciální funkce).

Je-li množina V uzavřená vůči oběma operacím, zbývá ověřit splnění sedmi axiomů vektorového prostoru. Zde si ukážeme pro ilustraci dva z nich. Axiom 2 požaduje, aby platil asociativní zákon pro operaci $\oplus$:
$$\forall a, b, c \in V : (a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c).$$
Ten ale zřejmě platí, neb se po „dosazení“ za operaci $\oplus$ redukuje na tvrzení, že násobení reálných čísel je asociativní.

Axiom 3 požaduje, aby
$$\forall \alpha, \beta \in T, \forall a \in V : \alpha \odot (\beta \odot a) = (\alpha\beta) \odot a.$$
Po přepsání pro naši volbu $\odot$ se rovnost změní na
$$(a^\beta)^\alpha = a^{(\alpha\beta)},$$
o které opět díky ZMA víme, že platí.

Příklad 3.20. Tvoří $\mathbb{R}$ vektorový prostor nad $\mathbb{Z}_2$, pokud sčítání vektorů je obvyklé sčítání reálných čísel, a násobení skalárem definujeme jako $0 \odot x = 0$, $1 \odot x = x$?

Příklad 3.21. Na množině $\mathbb{R}$ definujme operace $\oplus$ a $\odot$ následovně:
$$x \oplus y := x + y + 2, \quad \alpha \odot x := \alpha x + 2\alpha - 2.$$
Dokažte, že $\mathbb{R}$ s těmito operacemi je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$. Co je nulový vektor v tomto prostoru?

Řešení. Nulovým vektorem je číslo -2.

[3] Pro ty, kteří snad zapomněli, příp. to vytěsnili: ZMA je zkratka pro základy matematické analýzy.

Příklad 3.22. Označme jako $\mathbb{R}^\infty$ vektorový prostor všech reálných posloupností, a uvažme následující podmnožiny $M \subset \mathbb{R}^\infty$ sestávající z takových posloupností $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, pro které platí:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,

c) $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ je konvergentní,

d) $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ je omezená,

e) $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ je ostře rostoucí,

f) $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ je neostře restoucí,

g) $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ je neostře monotónní,

h) $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ je od jistého indexu neostře monotónní,

i) $a_{2n} \geq 0 \geq a_{2n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,

j) $a_{2n} \geq 0 \geq a_{2n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, nebo $a_{2n} \leq 0 \leq a_{2n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,

k) $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,

l) $a_{n+2} = 12a_{n+1} + 17a_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,

m) $a_n = 0$ pro $n \notin A$, při nějaké dané $A \subset \mathbb{N}$,

n) $a_n \neq 0$ jen pro konečně mnoho $n \in \mathbb{N}$,

o) $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ je geometrická, tj. existuje číslo $q \in \mathbb{R}$ tak, že každé $a_n = a_0 q^n$.

Které z těchto množin M jsou podprostory $\mathbb{R}^\infty$?

Řešení. a) ne, b) ano, c) ano, d) ano, e) ne, f) ne, g) ne, h) ne, i) ne, j) ne, k) ano, l) ano, m) ano, n) ano, o) ne

Příklad 3.23. Pro následující množiny $M \subset \mathbb{R}^{2,2}$ rozhodněte, zda se jedná o podprostor $\mathbb{R}^{2,2}$.

a)
$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \;\middle|\; a - 2d = 0 \wedge c \in \mathbb{Z} \right\},$$

b)
$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \;\middle|\; a = b \wedge c = 1 \right\},$$

c)
$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \;\middle|\; a = -c \wedge b = -d \right\},$$

d)
$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \;\middle|\; a + b = c + d \right\}.$$

Řešení. a) ne, b) ne, c) ano, d) ano.

Příklad 3.24. Ukažte, že množina všech symetrických matic

$$S = \{\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n} \mid (\forall i, j \in \hat{n})(\mathbb{A}_{i,j} = \mathbb{A}_{j,i})\}$$

je podprostor prostoru $\mathbb{C}^{n,n}$.

Příklad 3.25. Nechť (x, y, z) je LN soubor vektorů ve vektorovém prostoru V nad $\mathbb{R}$. Zjistěte, pro která $\lambda \in \mathbb{R}$ je soubor vektorů $(x + 2y, 2x + 3z, x + \lambda y - z)$ LN.

Řešení. Pro $\lambda \neq \frac{10}{3}$.

Příklad 3.26. Zjistěte, zda je soubor vektorů $(\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3, \mathbb{A}_4)$ z prostoru $\mathbb{R}^{2,2}$ LN, nebo LZ, je-li:

a)

$$\mathbb{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A}_2 = \begin{pmatrix} 17 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A}_3 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

b)

$$\mathbb{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A}_2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}.$$

Řešení. a) LN, b) LZ.

Příklad 3.27. Nalezněte všechna $\alpha \in \mathbb{R}$, pro které je soubor $((\alpha, 1, 0), (1, \alpha, 1), (0, 1, \alpha)) \subset \mathbb{R}^3$ LZ.

Řešení. $\alpha \in \{0, \pm\sqrt{2}\}$.

Příklad 3.28. Nechť (x, y, z) je LN soubor vektorů v lineárním prostoru V nad tělesem $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zda jsou následující soubory LZ nebo LN.

a) $(x + y, x + z, x)$,

b) $(x + y, x - y)$,

c) $(x + y, x - y, x - z, x + z)$,

d) $(x + y, y + z, x + z)$,

e) $(x - 2y + z, 4x - y - z, 4x + 13y - 11z)$,

f) $(x, 2x, x - 2y + z)$,

g) $(x, y + z)$.

Řešení. a) LN, b) LN, c) LZ, d) LN, e) LZ, f) LZ, g) LN.

Příklad 3.29. Nechť (x, y, z) je soubor vektorů z vektorového prostoru V takový, že $x + y + z = \theta$. Potom $\langle x, y \rangle = \langle y, z \rangle = \langle x, z \rangle$. Dokažte.

Příklad 3.30. Nechť (x_1, x_2, x_3, x_4) je soubor vektorů z $\mathbb{R}^4$. Určete dimenzi podprostoru $P = \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$ v závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$, je-li

a) $x_1 = (3, 1, 1, 4)$, $x_2 = (\alpha, 4, 10, 1)$, $x_3 = (1, 7, 17, 3)$, $x_4 = (2, 2, 4, 1)$,

b) $x_1 = (\alpha, 1, 1, 1)$, $x_2 = (1, \alpha, 1, 1)$, $x_3 = (1, 1, \alpha, 1)$, $x_4 = (1, 1, 1, \alpha)$.

Řešení. a)$\dim P = 3$ pro $\alpha = 0$, $\dim P = 4$ pro $\alpha \neq 0$, b) $\dim P = 1$ pro $\alpha = 1$, $\dim P = 3$ pro $\alpha = -3$, $\dim P = 4$ pro ostatní α.

Příklad 3.31. Soubory $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3)$ a $\mathcal{Y} = (y_1, y_2, y_3)$ jsou báze prostoru $\mathbb{R}^3$. Určete souřadnice x v bázi $\mathcal{Y}$, je-li

a) $x_1 = (1, 1, 1)$, $x_2 = (2, -1, 2)$, $x_3 = (3, 1, -1)$, $y_1 = (1, 0, 0)$, $y_2 = (-1, 0, 2)$, $y_3 = (0, 1, 1)$ a souřadnice x v bázi $\mathcal{X}$ jsou $(4, 2, -2)$,

b) $x_1 = (3, 1, -1)$, $x_2 = (2, 3, 1)$, $x_3 = (1, -2, -3)$, $y_1 = (1, 2, 2)$, $y_2 = (1, 3, 5)$, $y_3 = (1, 2, 3)$ a souřadnice x v bázi $\mathcal{X}$ jsou $(2, 0, -1)$.

Řešení. souřadnice x v bázi $\mathcal{Y}$ jsou a) $(7, 5, 0)$, b) $(2, -6, 9)$.

Příklad 3.32. Nechť V_n je vektorový prostor dimenze $n \in \mathbb{N}$, $P \subset\subset V_n$, $Q \subset\subset V_n$, $\dim P + \dim Q > n$. Potom existuje $\theta \neq x \in P \cap Q$. Dokažte.

Nápověda: Použijte 1. větu o dimenzi.

Příklad 3.33. (∗∗) Ověřte, že $\mathbb{R}$ je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{Q}$ (vůči přirozeným operacím) a ukažte, že množina $\{\log p; p \text{ prvočíslo}\}$ je lineárně nezávislá. (Návod: jednoznačnost prvočíselných rozkladů.)

Příklad 3.34. Určete dimenzi prostorů $\mathbb{C}$ a $\mathbb{C}^3$ nad tělesem $\mathbb{R}$

Řešení. Víme, že každé komplexní číslo z lze jednoznačeně vyjádřit jako $z = a + b \cdot i$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Tedy dvouprvkový soubor $(1, i)$ tvoří bázi $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{R}$ a dimenze $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{R}$ je dva.

Podobně soubor $((1, 0, 0), (i, 0, 0), (0, 1, 0), (0, i, 0), (0, 0, 1), (0, 0, i))$ tvoří bázi prostoru $\mathbb{C}^3$ nad $\mathbb{R}$, takže jeho dimenze je šest.