BI-LIN, Lineární algebra – cvičení

Daniel Dombek, Luděk Kleprlík, Karel Klouda

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze

LS 2019/2020

vytvořeno: 15. února 2022, 13:46

4 Hodnost matic a Frobeniova věta

Značení a zkratky:

- $h(\mathbb{A})$ .... hodnost matice $\mathbb{A}$
- $\mathbb{A}^{-1}$ .... inverzní matice k matici $\mathbb{A}$

4.1 Hodnost matice

Hodnost matice jsme definovali následovně:

Definice 4.1. *Nechť $\mathbb{A} \in T^{m,n}$. **Hodností matice** $\mathbb{A}$ nazýváme dimenzi lineárního obalu souboru řádků matice $\mathbb{A}$ (jako vektorů z $T^{1,n}$) a značíme ji $h(\mathbb{A})$. Tedy:*

$$h(\mathbb{A}) = \dim\langle \mathbb{A}_{1:}, \ldots, \mathbb{A}_{m:} \rangle.$$

Na přednášce jsme si ovšem také ukázali, jak hodnost matice spočítat a čemu všemu se ještě rovná:

- hodnost matice se rovná hodnosti transponované matice, tedy $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{A}^T)$,
- nechť $\mathbb{B}$ je matice v horním stupňovitém tvaru, kterou jsme pomocí GEM získali z matice $\mathbb{A}$, potom $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{B})$,
- hodnost matice v horním stupňovitém tvaru je rovna počtu nenulových řádků,
- hodnost matice v horním stupňovitém tvaru je rovna počtu hlavních sloupců.

Poslední dva body nám vlastně říkají, jak hodnost spočítat: stačí převést matici do horního stupňovitého tvaru a spočítat nenulové řádky (nebo hlavní sloupce, což je ale vlastně totéž).

Příklad 4.2. Určete hodnosti následujících matic:

$$\text{a) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5,5}, \quad \text{b) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}, \quad \text{c) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_5^{3,3},$$

$$\text{d) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{6,4}, \quad \text{e) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4,7}.$$

Řešení. Všechny příklady lze vyřešit prachobyčejným GEM, takže zde vzorová řešení ani neuvádíme, pouze sdělujeme výsledky:

a) $h(\mathbb{A}) = 4$, b) $h(\mathbb{A}) = 2$, c) $h(\mathbb{A}) = 2$, d) $h(\mathbb{A}) = 4$, e) $h(\mathbb{A}) = 3$.

Příklad 4.3. V závislosti na parametru $\alpha \in T$ určete hodnosti následujících matic z $T^{m,n}$:

$$\text{a) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \alpha & 2 & 3 \\ 2 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_5^{3,3}, \quad \text{b) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \alpha & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}, \quad \text{c) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2},$$

$$\text{d) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \alpha & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,4}, \quad \text{e) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}, \quad \text{f) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \alpha+2 & 2\alpha & 2\alpha & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & \alpha+1 & \alpha+1 & 1 \\ \alpha+2 & \alpha+1 & 2 & 2 \\ \alpha+2 & \alpha+1 & \alpha+1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5,4}.$$

Řešení. Zde je úloha lehce zpestřena přítomností parametru $\alpha \in T$, a proto si předvedeme jedno řešení podrobněji, i když se stále jedná o pouhé provedení GEM.

Prohodíme řádky matice $\mathbb{A}$ z a) tak, abychom dostali

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & 2 \\ \alpha & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Abychom se zbavili α v posledním řádku, musíme přičíst β násobek prvního řádku, kde

$$\alpha + 2\beta = 0,$$

připomínáme, že sčítání i násobení čísel ze $\mathbb{Z}_5$ opět automaticky chápeme jako *modulo* 5. Řešení této rovnice je jistě $\beta = 2\alpha$. Výsledkem této úpravy je matice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & 2 \\ 5\alpha & 2+2\alpha & 3+2\alpha^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2+2\alpha & 3+2\alpha^2 \end{pmatrix}.$$

Nyní bychom chtěli k třetímu řádku přičíst β násobek druhého, aby platilo

$$2 + 2\alpha + \beta = 0.$$

Rovnice je jistě splněna pro $\beta = 3 + 3\alpha$, což vede na matici

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4+\alpha+2\alpha^2 \end{pmatrix}.$$

Hodnost matice $\mathbb{A}$ je tedy buď 2 (je-li $4 + \alpha + 2\alpha^2 = 0$) nebo 3 (je-li $4 + \alpha + 2\alpha^2 \neq 0$). Prostým dosazením zjistíme, že $h(\mathbb{A}) = 2$ platí pro $\alpha \in \{3, 4\}$, pro $\alpha \in \{0, 1, 2\}$ je $h(\mathbb{A}) = 3$

Výsledky ostatních úloh: b) $h(\mathbb{A}) = 3$ pro $\alpha = 0$, $h(\mathbb{A}) = 4$ jinak, c) $h(\mathbb{A}) = 1$ pro $\alpha = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$, $h(\mathbb{A}) = 2$ jinak, d) $h(\mathbb{A}) = 2$ pro $\alpha = 3$, $h(\mathbb{A}) = 3$ jinak, e) $h(\mathbb{A}) = 1$ pro $\alpha = 1$, $h(\mathbb{A}) = 2$ pro $\alpha = -\frac{1}{2}$, $h(\mathbb{A}) = 3$ jinak, f) $h(\mathbb{A}) = 3$ pro $\alpha \in \{0, 1\}$, $h(\mathbb{A}) = 4$ jinak.

4.2 Regularita a inverzní matice

Čtvercovou matici $\mathbb{A} \in T^{n,n}$ nazýváme **regulární**, jestliže k ní existuje tzv. **inverzní matice**, značená $\mathbb{A}^{-1} \in T^{n,n}$, splňující rovnice

$$\mathbb{A}^{-1}\mathbb{A} = \mathbb{A}\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{E},$$

kde $\mathbb{E}$ je **jednotková matice** s jedničkami na diagonále a ostatními prvky nulovými. Dokonce víme, že platí-li pro nějakou matici $\mathbb{B} \in T^{n,n}$, že $\mathbb{B}\mathbb{A} = \mathbb{E}$, potom musí platit $\mathbb{B} = \mathbb{A}^{-1}$.

Abychom poznali, jestli je matice regulární, můžeme využít následující fakt dokázaný na přednášce:

Matice $\mathbb{A} \in T^{n,n}$ je regulární, právě když $h(\mathbb{A}) = n$.

Chceme-li tedy zjistit, zda je matice regulární, vyčteme z horního stupňovitého tvaru, jestli jsou všechny sloupce hlavní; je-li alespoň jeden sloupec vedlejší, matice regulární není.

K regulární matici budeme potom chtít najít matici inverzní. K tomu nám opět dopomůže GEM. Každá z úprav, které při GEM používáme, je totiž ekvivalentní násobení matice, kterou upravujeme, nějakou vhodnou regulární maticí zleva.[1] To znamená, že umíme-li převést pomocí GEM matici $\mathbb{A}$ na matici $\mathbb{B}$, existuje regulární matice $\mathbb{P}$ taková, že $\mathbb{B} = \mathbb{P}\mathbb{A}$. Jak si snadno rozmyslíte, regulární matice je právě taková, kterou lze pomocí GEM úprav převést na jednotkovou; to jest, existuje regulární matice $\mathbb{P}$ tak, že $\mathbb{P}\mathbb{A} = \mathbb{E}$. To ale znamená, že $\mathbb{P}$ je hledaná inverzní matice. Abychom takovou matici $\mathbb{P}$ našli, budeme všechny úpravy, které aplikujeme na $\mathbb{A}$, aplikovat zároveň na jednotkovou matici. Tak získáme $\mathbb{P}\mathbb{A} = \mathbb{E}$ a zároveň $\mathbb{P}\mathbb{E} = \mathbb{P}$.

Příklad 4.4. Rozhodněte, zda jsou následující matice regulární a v kladném případě k nim nalezněte matice inverzní:

$$\text{a) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_5^{3,3}, \quad \text{b) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_5^{3,3}, \quad \text{c) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_2^{2,2}$$

Řešení. Pro případ a) vyjdeme z matice $(\mathbb{A} \mid \mathbb{E}) \in T^{3,6}$ (svislá čára opět nemá jiný význam, než že vizuálně odděluje původní matici a matici jednotkovou). Tuto matici se pokusíme upravit na matici $(\mathbb{E} \mid \mathbb{B})$. Pokud to půjde, je matice $\mathbb{A}$ regulární a $\mathbb{B}$ je hledaná inverze $\mathbb{A}^{-1}$. Matici

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

---

[1] Například upravit matici $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ na matici $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, totiž vyměnit první a druhý řádek, znamená právě přenásobit původní matici zleva regulární maticí $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; podobně upravit matici $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ na matici $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, totiž zdvojnásobit druhý řádek, obnáší právě přenásobit původní matici zleva regulární maticí $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; a provést obě tyto úpravy znamená právě násobit zleva regulární maticí $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Podobně přičtení násobku jednoho řádku k jinému řádku, jakož i každá jiná GEM úprava, je zachycena takovým násobením nějakou regulární maticí zleva (rozmyslete si jak přesně), a součin takových matic, což je opět regulární matice, pak odpovídá právě kumulaci takových úprav, jako výše. Takto se úpravy prováděné na zadané matici $\mathbb{A}$ zároveň promítají do jednotkové matice (viz příklad).

snadno upravíme[2] na matici

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Odtud vidíme, že hodnost matice $\mathbb{A}$ je tři, a tedy se jedná o regulární matici. Pomocí dalších kroků GEM dostaneme

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

a matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

je hledanou inverzí $\mathbb{A}^{-1}$, jak si snadno můžete ověřit vyčíslením $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{A}$.

Pro případ b) upravíme matici

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

pomocí GEM na

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right).$$

Z toho vidíme, že hodnost matice $\mathbb{A}$ je dva a ona není regulární.

V případě matice c) snadno ověříme, že je sama sobě inverzí.

4.3 Soustavy lineárních rovnic

Soustavám lineárních rovnic jsme se věnovali ve cvičení č. 2, a proto zde uvedeme pouze ukázku výpočtu posledního nedořešeného případu: tím je situace, kdy nám vyjde, že soustava má více jak jedno řešení. Již víme, že množina všech řešení S se dá zapsat ve tvaru

$$S = \tilde{x} + S_0,$$

kde $\tilde{x}$ je tzv. *partikulární* řešení a S_0 je *podprostor* tvořený řešeními přidružené homogenní soustavy. Jak najít partikulární řešení už víme, zbývá nám problém, jak popsat podprostor S_0.

Díky tomu, že S_0 je podprostor, musí mít bázi. Pokud tuto bázi najdeme, získáme velice kompaktní zápis množiny S_0, neboť víme, že S_0 je rovna lineárnímu obalu této báze. Návod, jak najít tuto bázi, vyplyne z tvrzení **Frobeniovy** věty, která mj. říká toto:

> Soustava s rozšířenou maticí $(\mathbb{A} \mid \mathbb{b})$ má řešení právě tehdy, když hodnost této rozšířené matice je rovna hodnosti matice[3] $\mathbb{A}$.
>
> Má-li soustava řešení, převedeme rozšířenou matici do horního stupňovitého tvaru. Potom platí, že dimenze podprostoru S_0 je rovna počtu vedlejších sloupců (nepočítaje sloupec pravých stran).

[2] Všimněte si opět, jak pravá strana zachycuje provedené úpravy: vyměnili jsme první a druhý řádek, a přičetli dvojnásobek druhého řádku ke třetímu řádku.

[3] To je jinými slovy řečeno to, co už víme ze cvičení č. 2: soustava s rozšířenou maticí v horním stupňovitém tvaru má řešení právě tehdy, když pravá strana je vedlejší sloupec. Že je to to samé si uvědomíte, když si připomenete, jak se počítá hodnost matice.

Řešení soustavy tedy spočívá, jako obvykle, v převodu rozšířené matice do horního stupňovitého tvaru. Z výsledku poznáme, jestli nemá soustava řešení, jestli má právě jedno (a dimenze S_0 je nula) nebo jestli jich má více. V takovém případě umíme i najít příp. partikulární řešení a nyní již i víme, že existuje báze S_0, která má k prvků, kde k je počet vedlejších sloupců matice soustavy (tj. vedlejší sloupec vzniklý z $\mathbb{b}$ nepočítáme).

Najít tuto bázi je poměrně prosté: označme $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ proměnné soustavy a nechť $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}$ jsou proměnné, které odpovídají vedlejším sloupcům (tzv. **volné proměnné**) získaným pomocí GEM. Je jasné, že pokud za těchto k volných proměnných dosadíme nějaká čísla z daného tělesa, zbylé proměnné už jednoznačně dopočítáme. Není již těžké si domyslet, že dosadíme-li za tuto $k$tici volných proměnných postupně vektory libovolné báze prostoru T^k, přičemž vázané proměnné po každém dosazení dopočítáme, dostaneme kčlenný LN soubor vektorů z $k$dimenzionálního podprostoru $S_0 \subset\subset T^n$. Z toho co víme o bázi a dimenzi pak již plyne, že těchto k vektorů tvoří bázi S_0.

Ukažme si tento postup na příkladu.

Příklad 4.5. Vyřešte soustavu s maticí $\mathbb{A}$ a pravou stranou $\mathbb{b}$, kde:

$$\text{a) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_5^{3,5} \text{ a } \mathbb{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_5^{3,4} \text{ a } \mathbb{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Řešení. Rozšířenou matici soustavy upravíme do horního stupňovitého tvaru:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 4 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Vidíme, že soustava má řešení, protože poslední sloupec je vedlejší. Snadno najdeme nějaké partikulární řešení, např.

$$\tilde{x} = (1, 2, 0, 1, 0).$$

V upravené rozšířené matici soustavy existují ještě další dva vedlejší sloupce, a proto soustava bude mít více než jedno řešení. Tyto sloupce odpovídají proměnným x_3 a x_5, tyto dvě proměnné jsou tedy volné. Z Frobeniovy věty víme, že podprostor S_0 bude mít dvoučlennou bázi. Tuto bázi dostaneme tak, že za x_3 a x_5 dosadíme vektory nějaké báze $\mathbb{Z}_5^2$, můžeme vzít např. standardní bázi $((1,0),(0,1))$. Dosadíme $x_3 = 1$ a $x_5 = 0$ a dopočítáme zbylé proměnné tak, abychom dostali řešení přidružené homogenní rovnice $\mathbb{A}\mathbb{x} = \theta$. Dostaneme $x_4 = 0, x_2 = 1$ a $x_1 = 3$. Podobně pro $x_3 = 0$ a $x_5 = 1$ dostaneme $x_4 = 1, x_2 = 0$ a $x_1 = 0$.

Celkově tak dostáváme množinu všech řešení

$$S = (1, 2, 0, 1, 0) + \langle (3, 1, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 1) \rangle.$$

Pro soustavu b) zjistíme, že má řešení a jednu volnu proměnnou. Množinu S pak můžeme zapsat např. v tomto tvaru:

$$S = (1, 1, 0, 4) + \langle (1, 3, 1, 0) \rangle.$$

4.4 Lineární variety

Lineární varieta ve vektorovém prostoru T^n je libovolná množina zapsatelná ve tvaru

$$W = a + P,$$

kde $a \in T^n$ je vektor posunutí a $P \subset\subset T^n$ je zaměření. Každou varietu umíme zapsat dvěma způsoby. První jsou tzv. **parametrické rovnice**, které získáme tak, že najdeme bázi P. Ta existuje, pokud se nejedná o bod, tedy varietu s $P = \{\theta\}$, jejíž parametrické rovnice jsou triviálně $u = a$ (chápáno jako u je prvek variety právě když splňuje rovnici $u = a$). Buď tedy $(y_1, \dots, y_k)$ báze P. Potom parametrické rovnice jsou

$$u \in W \Leftrightarrow \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in T: \ u = a + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i y_i \,.$$

Jako **neparametrické rovnice** variety pak označujeme jakoukoli soustavu rovnic $\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$, jejíž množina řešení je právě rovna $a + P$, tedy platí, že a je partikulární řešení a $P = S_0$. V tomto cvičení si ukážeme, jak přejít od parametrických rovnic k neparametrickým, což lze chápat tak, že k množině řešení budeme hledat soustavu lineárních rovnic. Přechod od neparametrických rovnic k parametrickým je vlastně ekvivalentní problému, který už vyřešit umíme: nalezení množiny řešení soustavy lineárních rovnic.

Příklad 4.6. Nalezněte neparametrické rovnice variety $W \subset \mathbb{R}^n$, je-li:

a) $n = 2, \quad W = (1, -1) + \langle (2, 1) \rangle$ b) $n = 2, \quad W: \begin{array}{l} \text{x=3 -3t} \\ \text{y=1+2t} \end{array}$

c) $n = 3, \quad W: \begin{array}{l} \text{x=1 - t} \\ \text{y=2+3t} \\ \text{z= 2t} \end{array}$ d) $n = 3, \quad W: \begin{array}{l} \text{x=1+3t -r} \\ \text{y= t+r} \\ \text{z=3 -r} \end{array}$

e) $n = 4, \quad W: \begin{array}{l} \text{x= 1+ t} \\ \text{y= 2 -3t} \\ \text{z=-1+2t} \\ \text{u= 1} \end{array}$ f) $n = 4, \quad W: \begin{array}{l} \text{x=-2 -3t+3r -4s} \\ \text{y= 3+ t + s} \\ \text{z= 1+ t+5r+2s} \\ \text{u=-1+2t+2r+3s} \end{array}$

Řešení. Vyřešíme případ f) a použijeme přesně postup popsaný v sekci 3.5 studijního textu. Varietu z f) můžeme zapsat v násl. tvaru:

$$W = (-2, 3, 1, -1) + \langle (-3, 1, 1, 2), (3, 0, 5, 2), (-4, 1, 2, 3) \rangle.$$

Hledáme tedy matici $\mathbb{A}$ a vektor pravých stran $\mathbb{b}$ tak, že množina řešení soustavy $\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$ je rovna varietě W, tedy že $(-2, 3, 1, -1)$ je partikulární řešení a podprostor S_0 je roven podprostoru $\langle (-3, 1, 1, 2), (3, 0, 5, 2), (-4, 1, 2, 3) \rangle$, neboli že vektory $(-3, 1, 1, 2), (3, 0, 5, 2), (-4, 1, 2, 3)$ tvoří bázi (že jsou LN víme ze zadání, příp. si snadno ověříme). Díky Frobeniově větě víme, že matice bude muset mít hodnost jedna, neb $\dim S_0 = 3$ a jedná se o body ve čtyřdimenzionálním prostoru. Napišme tři vektory z báze zaměření variety do sloupců matice, získáme tak matici

$$\mathbb{Y} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Pro hledanou matici $\mathbb{A}$ tedy musí platit

$$\mathbb{A}\mathbb{Y} = \Theta,$$

kde Θ je nulová matice příslušných rozměrů. Transponováním tak můžeme získat rovnici pro řádky matice $\mathbb{A}$: každý řádek $\mathbb{a} = (a_1, \dots, a_4)$ musí splňovat

$$\mathbb{Y}^T \mathbb{a}^T = \theta.$$

Odpovídající rozšířená matice soustavy je

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -3 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right).$$

Soustavu vyřešíme a zjistíme, že $S_0 = \langle(3, -2, -5, 8)\rangle$. Jako matici $\mathbb{A}$ tedy můžeme volit

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Zbývá najít pravou stranu $\mathbb{b}$. Tu zvolíme k dané matici $\mathbb{A}$ prostě tak, aby zadaný vektor posunutí $(-2, 3, 1, -1)$ byl partikulárním řešením soustavy $\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$, neboli

$$\mathbb{b} = (3(-2) + (-2)3 + (-5)1 + 8(-1)) = (-25).$$

Hledané neparametrické rovnice mají tedy tvar soustavy jedné rovnice o čtyřech neznámých

$$3x - 2y - 5z + 8u = -25.$$

Pro ostatní případy dostaneme pomocí stejného postupu následující výsledky: a) $x - 2y = 3$, b) $2x + 3y = 9$, c) $2x + z = 2$, $3x + y = 5$, d) $x - 3y - 4z = -11$, e) $3x + y = 5$, $2x - z = 3$, $u = 1$.

4.5 Cvičení

Příklad 4.7. Jak je třeba volit parametry $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, aby následující matice měly hodnost rovnou třem:

$$\text{a) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \alpha & \beta & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ \alpha & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -2 & 1 \\ \beta & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{c) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & \alpha \\ 1 & 4 & -2 & 2 & \beta \\ 1 & -12 & 8 & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

Řešení. a) $\alpha + 2 \neq \beta$, b) $\alpha + 2\beta + 2 = 0$, c) $2\alpha \neq 3\beta + \gamma$.

Příklad 4.8. Nalezněte všechny parametry $\alpha \in \mathbb{R}$, tak aby následující matice měly minimální hodnost:

$$\text{a) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 1 & \alpha+2 & \alpha+4 \\ 2 & \alpha+4 & \alpha(\alpha+2) \end{pmatrix}, \text{b) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha+1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & \alpha+3 \end{pmatrix}, \text{c) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & \alpha & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 10 & -5 & 5 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Řešení. a) $\alpha \in \{-2, 0, 2\}$, b) $\alpha = 0$, c) $\alpha \in \{-2, 15\}$.

Příklad 4.9. V závislosti na parametrech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ určete hodnosti následujících matic:

$$\text{a) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \beta \\ -1 & \beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 1 \\ 1 & \alpha\beta & 1 \\ 1 & \beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad \text{c) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta^2 & \alpha\beta^2 \\ 1 & \beta & \alpha\beta \\ 1 & \beta & \beta^2 \end{pmatrix}.$$

Řešení. a) $h(\mathbb{A}) = 2$ pro $\alpha = \pm\beta$, $h(\mathbb{A}) = 3$ jinak, b) $h(\mathbb{A}) = 1$ pro $\alpha = 1$, $h(\mathbb{A}) = 2$ pro $\alpha = -2 \vee (\alpha \neq 1 \wedge \beta = 0)$, $h(\mathbb{A}) = 3$ jinak, c) $h(\mathbb{A}) = 1$ pro $\beta = 0 \vee \alpha = \beta$, $h(\mathbb{A}) = 3$ jinak.

Příklad 4.10.

Buď $n \geq 2$. Určete pravdivostní hodnotu následujících tvrzení:

a) $(\forall \mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{C}^{n,n})(\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{A})$,

b) $(\forall \mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{C}^{n,n})(\mathbb{A}\mathbb{B} = \Theta \;\Rightarrow\; \mathbb{B}\mathbb{A} = \Theta)$,

c) $(\forall \mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{C}^{n,n})(\mathbb{A} \neq \Theta \wedge \mathbb{B} \neq \Theta \;\Rightarrow\; \mathbb{A}\mathbb{B} \neq \Theta)$,

d) $(\forall \mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{C}^{n,n})((\mathbb{A} + \mathbb{B})^2 = \mathbb{A}^2 + 2\mathbb{A}\mathbb{B} + \mathbb{B}^2)$,

e) $(\forall \mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{C}^{n,n})(\mathbb{A}^2 - \mathbb{B}^2 = (\mathbb{A} + \mathbb{B})(\mathbb{A} - \mathbb{B}))$.

Řešení. Ani jedno z tvrzení neplatí. (Najděte protipříklady!)

Příklad 4.11. * **Stopou** tr$\mathbb{A}$ čtvercové matice $\mathbb{A}$ rozumíme součet jejích prvků na diagonále. Dokažte, že pro matice $\mathbb{B} \in T^{m,n}$ a $\mathbb{C} \in T^{n,m}$ platí

$$\operatorname{tr}(\mathbb{B}\mathbb{C}) = \operatorname{tr}(\mathbb{C}\mathbb{B}).$$

Příklad 4.12. S využitím výsledku předchozího cvičení dokažte, že neexistují matice $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in T^{n,n}$ takové, aby $\mathbb{A}\mathbb{B} - \mathbb{B}\mathbb{A} = \mathbb{E}$.

Příklad 4.13. Je množina čtvercových matic s nulovou stopou podprostor $T^{n,n}$? Pokud ano, jakou má tento podprostor dimenzi?

Řešení. Ano, $n^2 - 1$.

Příklad 4.14. Matice $\mathbb{A} \in T^{n,n}$ je **symetrická**, právě když $(\forall i, j \in \hat{n})(\mathbb{A}_{ij} = \mathbb{A}_{ji})$. Je množina symetrických matic podprostor $T^{n,n}$? Pokud ano, jakou má tento podprostor dimenzi?

Řešení. Ano, $n(n+1)/2$.

Příklad 4.15. Rozhodněte, zda jsou následující matice (s prvky z tělesa $\mathbb{R}$ resp $\mathbb{C}$) regulární a v kladném případě k nim nalezněte matice inverzní:

$$\text{a) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{c) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad \text{d) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

$$\text{e) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{f) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{g) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3i & 1 & 2-i \\ 0 & 3 & 5 \\ 2i & i & 3+i \end{pmatrix}.$$

Řešení.

$$\text{a) } \mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{c) } \mathbb{A} \text{ není regulární,}$$

$$\text{d) } \mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad \text{e) } \mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{f) } \mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 2 \\ -4 & 1 & 5 & 1 \\ -8 & -3 & 5 & 7 \\ 0 & -5 & 5 & 5 \end{pmatrix}, \quad \text{g) } \mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} -2-9i & 1+2i & 3+i \\ 10 & 5+5i & -15 \\ -6 & 2-3i & 9 \end{pmatrix}.$$

Příklad 4.16. Zjistěte, pro které hodnoty parametru $\alpha \in \mathbb{C}$ jsou následující matice regulární, a nalezněte k nim matice inverzní:

$$\text{a) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}, \quad \text{c) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \text{d) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix},$$

$$\text{e) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{f) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{g) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \text{h) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení.

$$\text{a) } \forall\alpha \in \mathbb{C},\ \mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \nexists\alpha \in \mathbb{C}, \quad \text{c) } \alpha \neq 0,\ \mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/\alpha & 1/\alpha \end{pmatrix},$$

$$\text{d) } \alpha \neq \pm 1,\ \mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{\alpha^2-1}\begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix},$$

$$\text{e) } \alpha \neq \pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ \mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{2\alpha^2-1}\begin{pmatrix} -\alpha^2 & \alpha & \alpha^2-1 \\ \alpha & -1 & \alpha \\ \alpha^2-1 & \alpha & -\alpha^2 \end{pmatrix},$$

$$\text{f) } \alpha \notin \{0, \pm\sqrt{2}\},\ \mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{\alpha(2-\alpha^2)}\begin{pmatrix} -1 & \alpha & 1-\alpha^2 \\ \alpha & -\alpha^2 & \alpha \\ 1-\alpha^2 & \alpha & -1 \end{pmatrix},$$

$$\text{g) } \alpha \notin \left\{-1, \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\},\ \mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{\alpha^3+1}\begin{pmatrix} \alpha^2 & -\alpha & 1 \\ 1 & \alpha^2 & -\alpha \\ -\alpha & 1 & \alpha^2 \end{pmatrix},$$

$$\text{h) } \alpha \neq 1,\ \mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{\alpha-1}\begin{pmatrix} \alpha+1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Příklad 4.17. Nalezněte neznámou matici $\mathbb{X}$ vyhovující rovnici

a) $\mathbb{X}\mathbb{A} = (\mathbb{X} - \mathbb{B})\mathbb{B}$, je-li

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

b) $\mathbb{X}\mathbb{B} - \mathbb{A} = \mathbb{B}$, je-li

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

c) $\mathbb{A}\mathbb{X} - \mathbb{B} = \mathbb{X}$, je-li

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

d) $\mathbb{A}\mathbb{X} + 2\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{X} - 2\mathbb{C}$, je-li

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 8 \end{pmatrix},$$

e) $\mathbb{A}\mathbb{X} + i\mathbb{X} = \mathbb{B}$, je-li

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 5 & i-1 \\ 0 & 3i \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 13+i & 4i \\ -8 & -4i \end{pmatrix}.$$

Řešení.

$$\text{a) } \mathbb{X} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 7 & 14 & 9 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \mathbb{X} = \begin{pmatrix} 17 & 13 & -7 \\ -8 & -6 & 4 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{c) } \mathbb{X} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -12 & -5 \\ 1 & 3 & 1 \\ -4 & 3 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\text{d) } \mathbb{X} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{e) } \mathbb{X} = \begin{pmatrix} 3 & i \\ 2i & -1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 4.18. * Dokažte, že matice $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ je regulární a najděte $\mathbb{A}^{-1}$, je-li

$$\text{a) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{c) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{d) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{e) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 & \dots & \alpha^{n-1} \\ 0 & 1 & \alpha & \alpha^2 & \dots & \alpha^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & \dots & \alpha^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení.

$$\text{a) } \mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2-n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix},$$

$$\text{c) } \mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (-1)^{n-1} & (-1)^n & (-1)^{n-1} & (-1)^n & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{d)} \mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & \alpha^2 & -\alpha^3 & \dots & (-\alpha)^{n-1} \\ 0 & 1 & -\alpha & \alpha^2 & \dots & (-\alpha)^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & -\alpha & \dots & (-\alpha)^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \text{e) } \mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\alpha & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 4.19. Buďte $\mathbb{A} \in T^{n,n}$ regulární a $\mathbb{B} \in T^{n,n}$ singulární. Potom obě matice $\mathbb{AB}$, $\mathbb{BA}$ jsou singulární. Dokažte.

Příklad 4.20. Musí být součet dvou regulárních matic regulární matice? Může být součet dvou matic, z nichž jedna, resp. žádná není regulární, regulární matice? Uveďte vhodné příklady.

Řešení. Ne, ano.

Příklad 4.21. Nechť $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in T^{n,n}$. Potom matice $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ jsou obě regulární, právě když matice $\mathbb{AB}, \mathbb{BA}$ jsou obě regulární. Dokažte.

Příklad 4.22. Nechť $\mathbb{A} \in T^{n,n}$ vyhovuje rovnici $\mathbb{A}^2 - \mathbb{A} + \mathbb{E} = \Theta$. Dokažte, že $\mathbb{A}$ je regulární. Co musí platit pro matici $\mathbb{A}^{-1}$?

Řešení. $\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{E} - \mathbb{A}$.

Příklad 4.23. * Nechť pro matici $\mathbb{A} \in T^{n,n}$ existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $\mathbb{A}^k = \Theta$ (taková $\mathbb{A}$ se nazývá **nilpotentní** matice). Potom je matice $\mathbb{E} - \mathbb{A}$ regulární a platí $(\mathbb{E} - \mathbb{A})^{-1} = \mathbb{E} + \mathbb{A} + \mathbb{A}^2 + \dots + \mathbb{A}^{k-1}$. Dokažte.

Příklad 4.24. * Nechť $\mathbb{A} \in T^{n,n}$ je regulární. Jak se změní matice $\mathbb{A}^{-1}$, jestliže v matici $\mathbb{A}$:

a) prohodíme i-tý a j-tý řádek,

b) i-tý řádek vynásobíme číslem $\alpha \in T \setminus \{0\}$,

c) k i-tému řádku přičteme j-tý řádek, $i \neq j$?

Jak se změní inverzní matice při podobných transformacích sloupců?

Řešení. a) Zamění se i-tý a j-tý sloupec, b) i-tý sloupec se vynásobí číslem $1/\alpha$, c) od j-tého sloupce se odečte i-tý. Varianta pro sloupce: jako a), b), c) ale s řádky.

Příklad 4.25. Nalezněte množinu řešení následujících homogenních soustav lineárních rovnic:

$$\text{a) } x-y+z-t=0 \qquad \text{b) } \begin{array}{l} 9x+3y-\ z=0 \\ 5x\ -2y-3z=0 \end{array} \qquad \text{c) } \begin{array}{rrrr} 3x+ & y & & +\ t=0 \\ 3x+ & y & & -2t=0 \\ -2x & -4y & +5z & -9t=0 \end{array}$$

$$
\text{d)}\ \begin{array}{r}
x+y+z=0\\
3x+10y+2z=0\\
6x+16y+11z=0\\
2x-2y-z=0
\end{array}
\qquad
\text{e)}\ \begin{array}{r}
-x+y+z+t+u=0\\
x-y+z+t+u=0\\
x+y-z+t+u=0\\
x+y+z-t+u=0\\
x+y+z+t-u=0
\end{array}
$$

$$
\text{f)}\ \begin{array}{r}
x-z+\ \ +v=0\\
y+t-u=0\\
x-y-t+v=0\\
y-z+t=0\\
x-u+v=0
\end{array}
\qquad
\text{g)}\ \begin{array}{r}
2x+3y-z-2t+2u=0\\
-3y+z+6t+2u=0\\
5x+6y-2z+7t+4u=0\\
9x+12y-4z+9t+8u=0
\end{array}
$$

Řešení. a) $\langle(1,1,0,0),(-1,0,1,0),(1,0,0,1)\rangle$,

b) $\langle(1,-2,3)\rangle$,

c) $\langle(1,-3,-2,0)\rangle$,

d) $\{(0,0,0)\}$,

e) $\{(0,0,0,0,0)\}$,

f) $\langle(1,1,1,0,1,0),(-1,0,0,0,0,1),(0,-1,0,1,0,0)\rangle$,

g) $\langle(0,1,3,0,0)\rangle$.

Příklad 4.26. Nalezněte množinu řešení následujících nehomogenních soustav lineárních rovnic:

$$
\text{a)}\ x+y+z+t+u=1
\qquad
\text{b)}\ \begin{array}{r}
x+y+z=2\\
x-y+z+t=1
\end{array}
\qquad
\text{c)}\ \begin{array}{r}
2x-y+z-3t=4\\
2x+y-z+t=1\\
3x-2y+2z-3t=2\\
5x+y-z+2t=-1
\end{array}
$$

$$
\text{d)}\ \begin{array}{r}
x+2y+3z+4t=11\\
2x+3y+4z+t=12\\
3x+4y+z+2t=13\\
4x+y+2z+3t=14
\end{array}
\qquad
\text{e)}\ \begin{array}{r}
x+3y-z+4t=8\\
x+y-z-2t=2\\
x+7y-z+16t=20
\end{array}
\qquad
\text{f)}\ \begin{array}{r}
2x+7y+3z+t=6\\
3x+5y+2z+2t=4\\
9x+4y+z+7t=2
\end{array}
$$

Řešení. a) $(1,0,0,0,0)+\langle(-1,1,0,0,0),(-1,0,1,0,0),(-1,0,0,1,0),(-1,0,0,0,1)\rangle$,

b) $(1,0,1,-1)+\langle(-1,1,0,2),(-1,0,1,0)\rangle$,

c) nemá řešení,

d) $\{(2,1,1,1)\}$,

e) $(0,3,1,0)+\langle(1,0,1,0),(5,-3,0,1)\rangle$,

f) $(-1,1,0,1)+\langle(1,-1,2,-1),(1,-5,11,0)\rangle$.

Příklad 4.27. Nalezněte množinu řešení následujících soustav lineárních rovnic v závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\text{a)}\ \begin{array}{l} x+y+z=1 \\ x+\alpha y+z=\alpha \\ x+y+\alpha z=\alpha \end{array} \qquad \text{b)}\ \begin{array}{l} x+y+\alpha z=\alpha \\ x+\alpha y+z=1 \\ \alpha x+y+z=1 \end{array} \qquad \text{c)}\ \begin{array}{l} x-5y-7z=0 \\ -2x+y+\alpha z=-3 \\ -x+\alpha y+3z=-1 \end{array}$$

$$\text{d)}\ \begin{array}{l} \alpha x+y+2z=1 \\ x+\alpha y+2z=1 \\ x+2y+z=0 \end{array} \qquad \text{e)}\ \begin{array}{l} x+2y+z=3 \\ 2x-2y-z=3 \\ x+\alpha y+2z=\alpha \end{array} \qquad \text{f)}\ \begin{array}{l} \alpha x-y+z=1 \\ x+y+\alpha z=-1 \\ x+y+z=-\alpha \end{array}$$

$$\text{g)}\ \begin{array}{l} \alpha x+y+\alpha z=1 \\ \alpha x+\alpha y+z=\alpha^2 \\ x+\alpha y+z=\alpha \end{array} \qquad \text{h)}\ \begin{array}{l} \alpha x+y+z=1 \\ x+\alpha y+z=\alpha \\ x+y+\alpha z=\alpha^2 \end{array} \qquad \text{i)}\ \begin{array}{l} \alpha x+2\alpha y+z=1 \\ 2x+\alpha^2 y+(\alpha+1)z=\alpha \end{array}$$

Řešení. a) Pro $\alpha = 1$ je $M = (1,0,0) + \langle(-1,1,0),(-1,0,1)\rangle$, pro $\alpha \neq 1$ je $M = \{(-1,1,1)\}$,

b) pro $\alpha \notin \{1,-2\}$ je $M = \{(0,0,1)\}$, pro $\alpha = 1$ je $M = (1,0,0) + \langle(-1,1,0),(-1,0,1)\rangle$, pro $\alpha = -2$ je $M = (-1,-1,0) + \langle(1,1,1)\rangle$,

c) pro $\alpha \notin \{2,17\}$ je $M = (\frac{26}{17-\alpha}, \frac{1}{17-\alpha}, \frac{3}{17-\alpha})$, pro $\alpha = 17$ je $M = \emptyset$, pro $\alpha = 2$ je $M = (\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, 0) + \langle(1,-4,3)\rangle$,

d) pro $\alpha = 5$ je $M = \emptyset$, pro $\alpha = 1$ je $M = (2,-1,0) + \langle(-3,1,1)\rangle$, pro $\alpha \notin \{1,5\}$ je $M = (\frac{1}{\alpha-5}, \frac{1}{\alpha-5}, \frac{-3}{\alpha-5})$,

e) pro $\alpha = 4$ je $M = (2, \frac{1}{2}, 0) + \langle(0,-1,2)\rangle$, pro $\alpha \neq 4$ je $M = \{(2,1,-1)\}$,

f) pro $\alpha = 1$ je $M = (0,-1,0) + \langle(-1,0,1)\rangle$, pro $\alpha = -1$ je $M = (0,0,1) + \langle(-1,1,0)\rangle$, pro $\alpha \notin \{\pm 1\}$ je $M = \{(-1,-\alpha,1)\}$,

g) pro $\alpha = -1$ je $M = (-1,0,0) + \langle(0,1,1)\rangle$, pro $\alpha = 1$ je $M = (1,0,0) + \langle(-1,0,1),(-1,1,0)\rangle$, pro $\alpha \notin \{\pm 1\}$ je $M = \{(\alpha,1,-\alpha)\}$,

h) pro $\alpha \notin \{1,-2\}$ je $M = (-\frac{\alpha+1}{\alpha+2}, \frac{1}{\alpha+2}, \frac{(\alpha+1)^2}{\alpha+2})$, pro $\alpha = -2$ je $M = \emptyset$, pro $\alpha = 1$ je $M = (1,0,0) + \langle(-1,1,0),(-1,0,1)\rangle$,

i) pro $\alpha \notin \{0,-2\}$ je $M = (0, \frac{1}{\alpha(\alpha+2)}, \frac{\alpha}{\alpha+2}) + \langle(\alpha, 1-\alpha, \alpha(\alpha+2))\rangle$, pro $\alpha = -2$ je $M = \emptyset$, pro $\alpha = 0$ je $M = (-\frac{1}{2}, 0, 1) + \langle(0,1,0)\rangle$.