BI-LIN, Lineární algebra – cvičení

Daniel Dombek, Luděk Kleprlík, Karel Klouda

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze

LS 2019/2020

vytvořeno: 15. února 2022, 13:46

6 Lineární zobrazení

Osnova:

6.1 Lineární zobrazení a základní pojmy

6.2 Matice lineárního zobrazení

Značení a zkratky:

- $\mathcal{L}(P,Q)$ .... množina všech lineárních zobrazení $A : P \to Q$
- $\mathcal{L}(V) = \mathcal{L}(V,V)$ .... množina všech lineárních operátorů na V
- $(z)_{\mathcal{X}}$ ... souřadnice vektoru $z \in V$ v bázi $\mathcal{X}$ (zapisovány dle potřeby jako $n$tice nebo sloupcový vektor)
- ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$ .... matice zobrazení $A \in \mathcal{L}(P,Q)$ v bázích $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ (z $\mathcal{X}$ do $\mathcal{Y}$)
- ${}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{Y}}$ .... matice přechodu od báze $\mathcal{X}$ k bázi $\mathcal{Y}$ (matice identického operátoru)

6.1 Lineární zobrazení a základní pojmy

Definice 6.1. *Buďte P a Q dva vektorové prostory nad stejným tělesem T, nechť $A : P \to Q$. Zobrazení A nazveme **lineární** právě když současně platí:*

1. *(aditivita):* $\forall x, y \in P : A(x + y) = Ax + Ay$,
2. *(homogenita):* $\forall \alpha \in T, \forall x \in P : A(\alpha x) = \alpha Ax$.

*Množinu všech lineárních zobrazení z P do Q značíme $\mathcal{L}(P,Q)$. Lineární zobrazení prostoru V do V nazýváme **lineární operátor** (transformace) na V. Množinu všech lineárních operátorů na V značíme krátce $\mathcal{L}(V)$. Lineární zobrazení prostoru V do tělesa T nazýváme **lineární funkcionál** na V.*

O zobrazeních $A \in \mathcal{L}(P,Q)$ jsme si dokázali různá důležitá tvrzení, například:

- inverze lineárního zobrazení (pokud existuje) je lineární, složení lineárních zobrazení taktéž,
- linearita zobrazení $A \in \mathcal{L}(P,Q)$ je ekvivalentní výroku

$$\forall \alpha \in T, \forall x, y \in P : A(\alpha x + y) = \alpha Ax + Ay\,,$$

- $\diamond$ obraz lineární kombinace je lineární kombinace obrazů, obdobné tvrzení platí i pro obraz lineárního obalu,
- $\diamond$ obraz i vzor libovolného podprostoru je také podprostor,
- $\diamond$ pro libovolné soubory $\mathcal{X} = (x_1, \dots, x_n)$ v P a $\mathcal{Y} = (y_1, \dots, y_n)$ v Q takové, že $Ax_i = y_i$ pro každé $i \in \hat{n}$, platí: je-li $\mathcal{X}$ LZ, pak i jeho obraz $\mathcal{Y}$ je LZ, nebo ekvivalentně: pokud je $\mathcal{Y}$ LN, pak i jeho vzor $\mathcal{X}$ je LN,
- $\diamond$ lineární zobrazení je jednoznačně určeno zadáním obrazů prvků nějaké báze, je-li pro bázi $\mathcal{X} = (x_1, \dots, x_n)$ prostoru P zadáno $\forall i \in \hat{n} : Ax_i = y_i$, musí platit

$$\forall z \in P: \ (z)_{\mathcal{X}} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \quad \Rightarrow \quad z = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \quad \Rightarrow \quad Az := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \,.$$

Definice 6.2. *Nechť $A \in \mathcal{L}(P, Q)$.* ***Hodností zobrazení*** *A rozumíme číslo*

$$h(A) := \dim A(P) \,.$$

Jádro zobrazení *A definujeme jako množinu*

$$\ker A := \{x \in P \mid Ax = \theta_Q\} \,,$$

a jeho dimenzi nazýváme ***defektem zobrazení*** *A. Defekt značíme*

$$d(A) := \dim \ker A \,.$$

Klíčovým tvrzením o hodnosti zobrazení $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ je pak **druhá věta o dimenzi**, která říká, že platí vztah

$$h(A) + d(A) = \dim P \,.$$

Poznámka: Zdůrazněme, že při řešení většiny typů příkladů v celém tomto tématu lze postupovat naivně (pouze dle základních definic, bez znalosti matic zobrazení a matic přechodu), s tím také v části 6.1 počítáme. Postup využívající matice zobrazení a matice přechodu, připomenuté v části 6.2, je však mnohem efektivnější, proto mu posléze začneme dávat přednost. Doporučujeme vyzkoušet oba možné postupy – jako šikovný trénink.

Příklad 6.3. Zjistěte, která z následujících zobrazení $A : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^4$ jsou lineární. U všech, která lineární jsou, nalezněte $\ker A$, $d(A)$, $h(A)$ a nějakou bázi oboru hodnot $A(\mathbb{C}^3)$.

a) $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1, \alpha_1, 2\alpha_2, 3\alpha_3)$,

b) $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, \alpha_3, \alpha_2, \alpha_1)$,

c) $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_3, \alpha_1^2, \alpha_3, \alpha_3)$,

d) $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, 0, 0)$,

e) $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1 + 1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$,

f) $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, \alpha_1\alpha_2, \alpha_2\alpha_3, \alpha_1\alpha_3)$,

g) $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_1, \alpha_1, \alpha_1)$,

h) $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\operatorname{Re} \alpha_1, \operatorname{Im} \alpha_1, \operatorname{Im} \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_1)$,

i) $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (2\alpha_1 - 3i\alpha_2 - \alpha_3, \alpha_1 - i\alpha_2 - \alpha_3, 3\alpha_1 + \alpha_2 - i\alpha_3, 4i\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3)$,

Řešení. Řešení několika prvních příkladů rozebereme podrobněji, u zbytku jen uvedeme výsledky.

a) Zobrazení není lineární, vyvrátíme například aditivitu. Pro libovolné $a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), b = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{C}^3$ platí

$$(Aa)_1 = 1, (Ab)_1 = 1, \text{ tedy } (A(a+b))_1 = 1 \neq 2 = (Aa)_1 + (Ab)_1 .$$

b) Ověříme, že pro libovolné $\gamma \in \mathbb{C}$ a $a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), b = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{C}^3$ platí $A(\gamma a + b) = \gamma Aa + Ab$:

$$\begin{aligned} A(\gamma\alpha_1 + \beta_1, \gamma\alpha_2 + \beta_2, \gamma\alpha_3 + \beta_3) &= (0, \gamma\alpha_3 + \beta_3, \gamma\alpha_2 + \beta_2, \gamma\alpha_1 + \beta_1) \\ &= (0, \gamma\alpha_3, \gamma\alpha_2, \gamma\alpha_1) + (0, \beta_3, \beta_2, \beta_1) \\ &= \gamma A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + A(\beta_1, \beta_2, \beta_3) . \end{aligned}$$

Jádro určíme z rovnice $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, \alpha_3, \alpha_2, \alpha_1) = (0, 0, 0, 0)$ pro neznámé $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$, z čehož rovnou plyne $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Tedy $\ker A = \{\theta\}$, $d(A) = 0$ a z druhé věty o dimenzi dostáváme $h(A) = \dim \mathbb{C}^3 - d(A) = 3$. Obraz libovolné množiny generátorů prostoru $\mathbb{C}^3$ generuje podprostor $A(\mathbb{C}^3)$, stačí z něj tedy vybrat bázi. Například pro standardní bázi $\mathbb{C}^3$ dostáváme

$$\begin{aligned} A(\mathbb{C}^3) = A\langle e_1, e_2, e_3\rangle &= \langle Ae_1, Ae_2, Ae_3\rangle \\ &= \langle A(1,0,0), A(0,1,0), A(0,0,1)\rangle \\ &= \langle (0,0,0,1), (0,0,1,0), (0,1,0,0)\rangle , \end{aligned}$$

kde generující soubor je zřejmě LN. Bázi $A(\mathbb{C}^3)$ lze tedy volit například (e_2, e_3, e_4).

c) Zobrazení není lineární, vyvrátíme například homogenitu. Pro libovolné $\gamma \in \mathbb{C}, |\gamma| \neq 1$ a $a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{C}^3$ platí

$$(A(\gamma a))_2 = (A(\gamma\alpha_1, \gamma\alpha_2, \gamma\alpha_3))_2 = (\gamma\alpha_1)^2 \neq \gamma\alpha_1^2 = (\gamma(Aa))_2 .$$

d) Zobrazení je lineární a rovnice $Aa = A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, 0, 0)$ je triviálně splněna pro libovolný vektor $a \in \mathbb{C}^3$. Tedy $\ker A = \mathbb{C}^3$, $d(A) = 3$, $h(A) = 0$ a báze $A(\mathbb{C}^3)$ neexistuje.

e) Není lineární.

f) Není lineární.

g) Je lineární, $\ker A = \langle e_2, e_3\rangle$, $d(A) = 2$, $h(A) = 1$ a báze $A(\mathbb{C}^3)$ je např. $((1, 1, 1, 1))$.

h) Není lineární.

i) Zobrazení je lineární. Jeho jádro opět získáme jako řešení soustavy

$$\begin{aligned} 2\alpha_1 - 3i\alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_1 - i\alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 - i\alpha_3 &= 0 \\ 4i\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

o které snadno zjistíme, že má jen triviální řešení. Tedy $\ker A = \{\theta\}, d(A) = 0$, $h(A) = 3$ a bází $A(\mathbb{C}^3)$ je například obraz standardní báze $(A(1,0,0), A(0,1,0), A(0,0,1))$, tj. soubor vektorů $((2, 1, 3, 4i), (-3i, -i, 1, 3), (-1, -1, -i, -1))$.

Příklad 6.4. Nechť $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3)$ je báze V_3 nad $\mathbb{C}$. Zjistěte, která z následujících zobrazení A jsou lineární operátory na V_3. U všech, která lineární jsou, nalezněte $\ker A$, $d(A)$, $h(A)$ a nějakou bázi obrazu hodnot $A(V_3)$. Pro libovolné $x \in V_3$ označme jeho souřadnice v bázi $\mathcal{X}$ jako $(x)_\mathcal{X} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$; je tedy $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3$.

a) $Ax = x_1 + \alpha_1 x_2 + (\alpha_1 - \alpha_3)x_3$,

b) $Ax = \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_2 + \alpha_1 x_3$,

c) $Ax = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)(x_1 + x_2 + x_3)$,

d) $Ax = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + |\alpha_3| x_3$,

Řešení. a) Zobrazení není lineární, například proto, že $A(\theta) = x_1 \neq \theta$.

b) Zobrazení je lineární. Zvolíme-li $x, y \in V_3$, $(x)_{\mathcal{X}} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $(y)_{\mathcal{X}} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, platí

$$\begin{aligned} A(\gamma x + y) &= A\big((\gamma\alpha_1 + \beta_1)x_1 + (\gamma\alpha_2 + \beta_2)x_2 + (\gamma\alpha_3 + \beta_3)x_3\big) \\ &= (\gamma\alpha_2 + \beta_2)x_1 + (\gamma\alpha_3 + \beta_3)x_2 + (\gamma\alpha_1 + \beta_1)x_3\big) \\ &= \gamma Ax + Ay\,. \end{aligned}$$

Při hledání jádra je nutné si uvědomit, že pracujeme se *souřadnicemi* vektorů. Pro $Ax = \theta$ je $\alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_2 + \alpha_1 x_3 = \theta$; přitom báze $\mathcal{X}$ je lineárně nezávislý soubor, takže $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Máme tedy $\ker A = \{\theta\}$, $d(A) = 0$, $h(A) = 3$ a $A(V_3) = V_3$. Za bázi $A(V_3)$ lze volit např. $\mathcal{X}$.

c) Zobrazení je lineární, to lze snadno ověřit podobně jako v b). Rovnice $Ax = \theta$ vede díky lineární nezávislosti báze $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3)$ na soustavu o jedné rovnici $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$, kde neznámými α_i jsou souřadnice hledaných vektorů v bázi $\mathcal{X}$. Tedy do jádra $\ker A$ padnou takové vektory $x \in V_3$, jejichž *souřadnice* padnou do $\langle(1, -1, 0), (1, 0, -1)\rangle$. To jsou právě vektory z $\langle x_1 - x_2, x_1 - x_3\rangle$, tedy $d(A) = 2$ a $h(A) = 1$. Bázi $A(V_3)$ dostaneme například dosazením

$$\begin{aligned} A(V_3) = A\langle x_1, x_2, x_3\rangle &= \langle Ax_1, Ax_2, Ax_3\rangle \\ &= \langle x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3\rangle \\ &= \langle x_1 + x_2 + x_3\rangle \end{aligned}$$

a jednoprvkovou bázi $A(V_3)$ lze volit například $(x_1 + x_2 + x_3)$.

d) Zobrazení není lineární.

6.2 Matice lineárního zobrazení

Definice 6.5. *Nechť $A \in \mathcal{L}(P_m, Q_n)$, buď $\mathcal{X} = (x_1, \ldots, x_m)$ a $\mathcal{Y} = (y_1, \ldots, y_n)$ báze P_m, respektive Q_n. Matici ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} \in T^{n,m}$ definovanou po sloupcích předpisem*

$$\forall j \in \hat{m} : ({}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}})_{:j} := (Ax_j)_{\mathcal{Y}},$$

nazveme ***maticí zobrazení*** *A* ***v bázích*** *$\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ (případně „z báze $\mathcal{X}$ do báze $\mathcal{Y}$“).*

Matici lineárního operátoru ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{X}}$ zkráceně označíme ${}^{\mathcal{X}}A := {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{X}}$.

Opět shrneme několik nejdůležitějších vlastností matic zobrazení.

◇ Nechť $A \in \mathcal{L}(P_m, Q_n)$ a $x \in P_m$, označme $(x)_{\mathcal{X}} := \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$ sloupcový vektor souřadnic x v bázi $\mathcal{X}$. Potom platí

$$(Ax)_{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} \cdot (x)_{\mathcal{X}}.$$

- $\diamond$ Nechť $A \in \mathcal{L}(Q_n, V_s)$, $B \in \mathcal{L}(P_m, Q_n)$. Potom pro matici složeného zobrazení $AB \in \mathcal{L}(P_m, V_s)$ platí
$$^{\mathcal{X}}(AB)^{\mathcal{W}} = {}^{\mathcal{Y}}A^{\mathcal{W}} \,.\, {}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}},$$
kde $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{W}$ jsou popořadě libovolné báze prostorů P_m, Q_n, V_s.
- $\diamond$ Matice ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$ je regulární právě tehdy, když $A \in \mathcal{L}(P_m, Q_n)$ je izomorfismus. V tom případě je $m = n$ a platí
$$\left({}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}\right)^{-1} = {}^{\mathcal{Y}}(A^{-1})^{\mathcal{X}}.$$
- $\diamond$ Platí $h(A) = h({}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}})$ pro libovolnou volbu bází $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$.

Definice 6.6. *Nechť $\mathcal{X} = (x_1, \dots, x_n)$ a $\mathcal{Y} = (y_1, \dots, y_n)$ jsou báze V_n. Matici identického operátoru ${}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{Y}} \in T^{n,n}$ nazýváme **maticí přechodu** od báze $\mathcal{X}$ k bázi $\mathcal{Y}$.*

Matice přechodu ${}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{Y}}$ tedy ve svých sloupcích obsahuje přímo prvky báze $\mathcal{X}$, ovšem zapsané svými souřadnicemi v bázi $\mathcal{Y}$. Triviálními důsledky vlastností matic zobrazení pak jsou:

- $\diamond$ matice ${}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{Y}}$ je regulární a platí $({}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{Y}})^{-1} = {}^{\mathcal{Y}}E^{\mathcal{X}}$,
- $\diamond$ pro $x \in V_n$ platí ${}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{Y}} \cdot (x)_{\mathcal{X}} = (x)_{\mathcal{Y}}$,
- $\diamond$ ${}^{\mathcal{Y}}E^{\mathcal{Z}} \,.\, {}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{Z}}$.
- $\diamond$ Nechť $A \in \mathcal{L}(P, Q)$, $\mathcal{X}$, $\tilde{\mathcal{X}}$ báze P a $\mathcal{Y}$, $\tilde{\mathcal{Y}}$ báze Q. Potom platí
$${}^{\tilde{\mathcal{X}}}A^{\tilde{\mathcal{Y}}} = {}^{\mathcal{Y}}E^{\tilde{\mathcal{Y}}} \,.\, {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} \,.\, {}^{\tilde{\mathcal{X}}}E^{\mathcal{X}}.$$

Příklad 6.7. Buď $A \in \mathcal{L}(\mathbb{Z}_3^3)$ zadané svými hodnotami na vektorech standardní báze $\mathbb{Z}_3^3$ následovně:
$$A(1,0,0) := (0,0,1), \quad A(0,1,0) := (2,0,0), \quad A(0,0,1) := (0,0,1).$$

Nalezněte:

a) matici ${}^{\mathcal{E}_3}A$,

b) $A(1,2,0)$,

c) $\ker A$, $d(A)$ a $h(A)$,

d) nějakou bázi prostoru $A(\mathbb{Z}_3^3)$.

Řešení. I když lze postupovat stejně jako u příkladů v části 6.1, ilustrujeme postup využívající matice zobrazení.

a) Hledaná matice ${}^{\mathcal{E}_3}A$ má ve svých sloupcích obrazy vektorů standardní báze (zapsané také souřadnicemi ve standardní bázi), tedy
$${}^{\mathcal{E}_3}A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Jelikož
$$(A(1,2,0))_{\mathcal{E}_3} = {}^{\mathcal{E}_3}A \cdot ((1,2,0))_{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$
platí $A(1,2,0) = (1,0,1)$.

c) Pro nalezení jádra stačí vyřešit homogenní soustavu s maticí ${}^{\mathcal{E}_3}A$ a výsledek interpretovat jako souřadnice ve standardní bázi. Tedy $\ker A = \langle (2,0,1) \rangle = \{(0,0,0),(2,0,1),(1,0,2)\}$, $d(A) = 1$ a $h(A) = 2$.

d) Podprostor $A(\mathbb{Z}_3^3)$ je generován obrazy libovolné báze $\mathbb{Z}_3^3$, například té standardní. Z definice matice zobrazení vyplývá, že tyto obrazy jsou (pomocí souřadnic ve standardní bázi) rovnou zapsané ve sloupcích matice ${}^{\mathcal{E}_3}A$. Tedy

$$A(\mathbb{Z}_3^3) = \langle (0,0,1),(2,0,0),(0,0,1) \rangle = \langle (0,0,1),(1,0,0) \rangle$$

a máme dvouprvkovou bázi (jeden přebytečný vektor jsme vynechali a jeden jsme vynásobili dvěma).

Příklad 6.8. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ je definované předpisem:

$$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) = (\alpha_1, \alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_3, \alpha_4).$$

Sestavte ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$, kde

$$\mathcal{X} = (x_1,x_2,x_3,x_4) = ((1,0,-1,1),(2,1,0,-1),(0,2,-1,1),(2,-1,1,0))$$

a

$$\mathcal{Y} = (y_1,y_2,y_3,y_4) = ((0,0,0,1),(0,0,-1,1),(0,1,-1,1),(1,1,1,1))$$

jsou báze $\mathbb{R}^4$. Řešte příklad dvojím způsobem. Nejprve matici určete přímo a poté použijte matice přechodu.

Řešení. $\diamond$ Hledaná matice musí ve svých sloupcích obsahovat souřadnice obrazů Ax_i vzhledem k bázi $\mathcal{Y}$. Dosazením do předpisu zobrazení A rovnou dostáváme

$$\begin{aligned} Ax_1 &= A(1,0,-1,1) = (1,1,-1,1)\,, \\ Ax_2 &= A(2,1,0,-1) = (2,1,2,-1)\,, \\ Ax_3 &= A(0,2,-1,1) = (0,-2,-2,1)\,, \\ Ax_4 &= A(2,-1,1,0) = (2,3,4,0)\,. \end{aligned}$$

Ke všem čtyřem nalezeným vektorům je třeba nalézt jejich souřadnice v bázi $\mathcal{Y}$, tedy řešit lineární rovnice tvaru $\alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3 + \delta y_4 = Ax_i$, ty vedou na soustavy lineárních rovnic, které se liší pouze pravou stranou. Můžeme je vyřešit současně, různé pravé strany pro přehlednost oddělíme. Po úpravě matice soustavy na vhodný tvar pak pro každý vektor Ax_i soustavu zvlášť vyřešíme,

$$\left(\begin{array}{rrrr|r|r|r|r} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & 2 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r|r|r|r} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Dostáváme tedy

$${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

◇ Přímo z definice získáme dosazením vektorů standardní báze matici

$$ {}^{\mathcal{E}_4}A = {}^{\mathcal{E}_4}A^{\mathcal{E}_4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. $$

K zadaným bázím můžeme také snadno sestrojit matice přechodu, stačí jejich prvky zapsat postupně do sloupců (souřadnicemi ve standardní bázi),

$$ {}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{E}_4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad {}^{\mathcal{Y}}E^{\mathcal{E}_4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. $$

Hledanou matici pak získáme pomocí maticového násobení a inverze, a to dle předpisu

$$ \begin{aligned} {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} &= {}^{\mathcal{E}_4}E^{\mathcal{Y}} \cdot {}^{\mathcal{E}_4}A \cdot {}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{E}_4} \\ &= ({}^{\mathcal{Y}}E^{\mathcal{E}_4})^{-1} \cdot {}^{\mathcal{E}_4}A \cdot {}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{E}_4}. \end{aligned} $$

Příklad 6.9. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{Z}_5^3)$, $A(1,1,1) = (1,0,0)$, $A(0,1,1) = (1,1,0)$, $A(0,0,1) = (1,1,1)$. Sestavte ${}^{\mathcal{E}_3}A$.

Řešení. Zobrazení A máme zadáno obrazy vektorů soboru $x_1 = (1,1,1), x_2 = (0,1,1), x_3 = (0,0,1)$. Snadno ukážeme (ověřte!), že $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3)$ je LN a tedy báze $\mathbb{Z}_5^3$. Napíšeme-li zadané obrazy po sloupcích do matice, dostaneme sice matici dotyčného zobrazení, ale v „nesprávných“ bázích,

$$ {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, $$

tu potřebujeme převést na matici ze standardní do standardní báze, pomocí matice přechodu, podle pravidla

$$ \begin{aligned} {}^{\mathcal{E}_3}A &= {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_3} \cdot {}^{\mathcal{E}_3}E^{\mathcal{X}} \\ &= {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_3} \cdot ({}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{E}_3})^{-1}. \end{aligned} $$

Jak snadno spočítáme, platí

$$ {}^{\mathcal{E}_3}E^{\mathcal{X}} = ({}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{E}_3})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}, $$

tedy

$$ {}^{\mathcal{E}_3}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}. $$

Příklad 6.10. O zobrazení $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ víme, že $\ker A = \langle (1,2,0), (2,0,1) \rangle$ a $A(1,1,1) = (3,2)$. Zdůvodněte, proč tyto informace určují A jednoznačně, najděte obecný výraz pro $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ a určete $d(A)$ a $h(A)$.

Řešení. Vektory $(1,2,0),(2,0,1),(1,1,1)$ tvoří bázi $\mathbb{R}^3$ (ověřte!), a zobrazení A je pomocí obrazů na bázi určeno jednoznačně. Jádro má očividně dimenzi 2, takže $d(A) = 2$ a $h(A) = \dim \mathbb{R}^3 - d(A) = 1$.

Označíme-li

$$\mathcal{X} = ((1,1,1),(1,2,0),(2,0,1)),$$

můžeme rovnou napsat matici zobrazení z báze $\mathcal{X}$ do standardní báze $\mathbb{R}^2$,

$$^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Platí

$$\begin{aligned} ^{\mathcal{E}_3}A^{\mathcal{E}_2} &= {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_2\,\mathcal{E}_3}E^{\mathcal{X}} \\ &= {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_2}({}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{E}_3})^{-1}. \end{aligned}$$

Potřebnou matici přechodu získáme inverzí jako

$$({}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{E}_3})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

z čehož vynásobením získáme matici zobrazení A ve standardních bázích:

$$^{\mathcal{E}_3}A^{\mathcal{E}_2} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 3 & 12 \\ -4 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Obraz libovolného $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ pak lze získat vynásobením

$$A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = {}^{\mathcal{E}_3}A^{\mathcal{E}_2} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 3 & 12 \\ -4 & 2 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 \\ -\frac{4}{3}\alpha_1 + \frac{2}{3}\alpha_2 + \frac{8}{3}\alpha_3 \end{pmatrix},$$

tedy $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (-2\alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3, -\frac{4}{3}\alpha_1 + \frac{2}{3}\alpha_2 + \frac{8}{3}\alpha_3)$.

Příklad 6.11. Standardní bázi vektorového prostoru $\mathbb{Z}_3^{2,2}$ označme $\mathcal{E} = (e_{1,1}, e_{1,2}, e_{2,1}, e_{2,2})$. Nechť $\mathcal{B}$ je báze definovaná jako $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4) := (e_{1,1}, e_{1,1} + e_{1,2}, e_{1,1} + e_{2,1}, e_{1,1} + e_{2,2})$, tedy

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, b_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nechť je lineární operátor $A \in \mathcal{L}(\mathbb{Z}_3^{2,2})$ zadán svými obrazy na bázi $\mathcal{B}$,

$$Ab_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, Ab_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, Ab_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, Ab_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Odvoďte:

a) matici ${}^{\mathcal{E}}A$ operátoru A ve standardní bázi $\mathcal{E}$,

b) předpis pro obraz Ax obecného vektoru $x = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3^{2,2}$,

c) $\ker A$, $h(A)$ a $d(A)$,

d) nějakou bázi podprostoru $A(\mathbb{Z}_3^{2,2})$.

Řešení. a) Ze zadání rovnou dostáváme matici[1]

$$ {}^{\mathcal{B}}A^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}. $$

Jelikož platí

$$ \begin{aligned} {}^{\mathcal{E}}A &= {}^{\mathcal{B}}A^{\mathcal{E}} \,.\, {}^{\mathcal{E}}E^{\mathcal{B}} \\ &= {}^{\mathcal{B}}A^{\mathcal{E}} \cdot ({}^{\mathcal{B}}E^{\mathcal{E}})^{-1}, \end{aligned} $$

potřebujeme sestavit příslušnou matici přechodu. Matici ${}^{\mathcal{B}}E^{\mathcal{E}}$ sestavíme rovnou ze zadání báze $\mathcal{B}$ a následně ji snadno invertujeme:

$$ {}^{\mathcal{B}}E^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \to \quad {}^{\mathcal{E}}E^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. $$

Vynásobením pak dostáváme

$$ {}^{\mathcal{E}}A = {}^{\mathcal{B}}A^{\mathcal{E}} \,.\, {}^{\mathcal{E}}E^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}. $$

b) Z výsledku předchozího bodu odvodíme předpis pro obraz obecného vektoru:

$$ \left(A \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \right)_{\mathcal{E}} = {}^{\mathcal{E}}A \cdot \left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \right)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\beta + 2\gamma \\ \beta + \delta \\ \alpha + 2\beta + \gamma \end{pmatrix}, $$

tedy pro libovolné $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z}_3$ platí

$$ A \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2\beta + 2\gamma \\ \beta + \delta & \alpha + 2\beta + \gamma \end{pmatrix}. $$

c) Jádro $\ker A$ získáme jako řešení rovnice $A \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, která vede na homogenní soustavu

$$ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. $$

Řešením této soustavy je $S = \langle (1,2,1,1) \rangle$; interpretací tohoto výsledku jako souřadnic ve standardní bázi dostáváme

$$ \ker A = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle, $$

tedy $d(A) = 1$ a $h(A) = 3$.

[1] Skutečně se jedná o matici 4×4, jsme totiž na prostoru o dimenzi 4 s čtyřprvkovou standardní bází!

d) Matice ${}^{\mathcal{E}}A$ ve svých sloupcích obsahuje obrazy vektorů standardní báze (resp. jejich souřadnice). Z předchozího bodu víme, že jen tři z těchto čtyř obrazů jsou nezávislé, takže

$$A(\mathbb{Z}_3^{2,2}) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

a máme tříprvkovou bázi prostoru $A(\mathbb{Z}_3^{2,2})$.

6.3 Cvičení

Příklad 6.12. Zjistěte, která z následujících zobrazení $A : \mathbb{R}^{2,2} \to \mathbb{R}^4$ jsou lineární. U všech, která lineární jsou, nalezněte $\ker A$, $d(A)$, $h(A)$ a nějakou bázi oboru hodnot $A(\mathbb{R}^{2,2})$.

a) $A\mathbb{X} = (\alpha_1, \alpha_1 - 2\alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_4, 3\alpha_4)$,

b) $A\mathbb{X} = (1, 1, 1, 1)$,

c) $A\mathbb{X} = (\alpha_2 - \alpha_1, 0, \alpha_4 - \alpha_3, 0)$,

d) $A\mathbb{X} = (\alpha_1, |\alpha_2|, \alpha_3, \alpha_4)$,

kde

$$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix}.$$

Řešení. a) Zobrazení je lineární, to snadno ověříme dosazením libovolných $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix}$, $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix}$ a $\gamma \in \mathbb{R}$. Rovnice $A\mathbb{X} = \theta$ vede na homogenní soustavu

$$\alpha_1 = 0, \alpha_1 - 2\alpha_3 = 0, \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_4 = 0, 3\alpha_4 = 0\,,$$

jejímž jediným řešením je nulová matice, tedy $\ker A = \{\Theta\}$, $d(A) = 0$, $h(A) = 4$ a $A(\mathbb{R}^{2,2}) = \mathbb{R}^4$. Jinými slovy, A je isomorfismus mezi $\mathbb{R}^{2,2}$ a $\mathbb{R}^4$. Jakákoli báze $\mathbb{R}^4$ je bází $A(\mathbb{R}^{2,2})$.

b) Zobrazení není lineární. Pro libovolné matice $\mathbb{X}, \mathbb{Y} \in \mathbb{R}^{2,2}$ platí

$$A(\mathbb{X} + \mathbb{Y}) = (1, 1, 1, 1) \neq (2, 2, 2, 2) = A\mathbb{X} + A\mathbb{Y}\,.$$

c) Zobrazení je lineární a platí $\ker A = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, $d(A) = 2$, $h(A) = 2$, báze $A(\mathbb{R}^{2,2})$ je např. (e_1, e_3).

d) Není lineární.

Příklad 6.13. Definujme zobrazení $A : \mathbb{Z}_2^{n,n} \to \mathbb{Z}_2^{n,n}$, $A\mathbb{X} := \mathbb{X}^T$ pro každé $\mathbb{X} \in \mathbb{Z}_2^{n,n}$. Ukažte, že $A \in \mathcal{L}(\mathbb{Z}_2^{n,n})$, najděte $\ker A$, $d(A)$, $h(A)$ a určete obor hodnot $A(\mathbb{Z}_2^{n,n})$.

Řešení. Zobrazení je lineární, platí $\ker A = \{\Theta\}$, $d(A) = 0$, $h(A) = n^2$ a $A(\mathbb{Z}_2^{n,n}) = \mathbb{Z}_2^{n,n}$.

Příklad 6.14. Nechť $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ je lineární zobrazení zadané svou maticí vzhledem ke standardním bázím následovně:

$$\text{a) } {}^{\mathcal{E}}A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } {}^{\mathcal{E}}A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 6 & 10 \end{pmatrix}, \quad \text{c) } {}^{\mathcal{E}}A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\text{d) } {}^{\mathcal{E}}A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 7 \\ 1 & 9 & -3 \\ 8 & 3 & 15 \end{pmatrix}, \quad \text{e) } {}^{\mathcal{E}}A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{f) } {}^{\mathcal{E}}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Určete dimenze m a n, $\ker A$, $d(A)$, $h(A)$ a nějakou bázi podprostoru $A(\mathbb{R}^m)$.

Řešení. a) $m = 3$, $n = 2$, $\ker A = \langle(5, -4, 1)\rangle$, $d(A) = 1$, $h(A) = 2$, báze $A(\mathbb{R}^3)$ je např. $((1, 0), (0, 1))$,

b) $m = 3$, $n = 3$, $\ker A = \langle(4, -7, 5)\rangle$, $d(A) = 1$, $h(A) = 2$, báze $A(\mathbb{R}^3)$ je např. $((1, 2, 6), (0, 1, 4))$,

c) $m = 2$, $n = 3$, $\ker A = \{\theta\}$, $d(A) = 0$, $h(A) = 2$, báze $A(\mathbb{R}^2)$ je např. $((0, 1, 3), (1, 2, 4))$,

d) $m = 3$, $n = 3$, $\ker A = \langle(-48, 13, 23)\rangle$, $d(A) = 1$, $h(A) = 2$, báze $A(\mathbb{R}^3)$ je např. $((2, 1, 8), (0, 1, 2))$,

e) $m = 3$, $n = 2$, $\ker A = \langle(-2, 1, 2)\rangle$, $d(A) = 1$, $h(A) = 2$, báze $A(\mathbb{R}^3)$ je např. $((1, 0), (0, 1))$,

f) $m = 2$, $n = 4$, $\ker A = \langle(-1, 1)\rangle$, $d(A) = 1$, $h(A) = 1$, báze $A(\mathbb{R}^2)$ je např. $((1, 1, 1, 1))$.

Příklad 6.15. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^4)$ je definované předpisem:

$$A(\alpha_1, \alpha_2) = (3\alpha_1 - 2\alpha_2, 0, 0, \alpha_1 - 2\alpha_2).$$

Sestavte matice zobrazení A v různých bázích: ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$, kde $\mathcal{X} = ((2, -3), (1, 1))$ je báze $\mathbb{R}^2$ a $\mathcal{Y} = (e_4, -3e_1, e_2, -2e_3)$ je báze $\mathbb{R}^4$ (e_i značí prvky standardní báze $\mathbb{R}^4$).

Řešení.

$${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -4 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Příklad 6.16. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^2)$ definované předpisem:

$$A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (2\alpha_2 - i\alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3).$$

Sestavte ,${}^{\mathcal{E}_3}A^{\mathcal{E}_2}$, ${}^{\mathcal{E}_3}A^{\mathcal{Y}}$,${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_2}$, ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$, kde $\mathcal{X} = ((1, 0, 1), (1, -1, 1), (0, -1, 1)))$ je báze $\mathbb{C}^3$ a $\mathcal{Y} = ((i, 0), (1, 1))$ je báze $\mathbb{C}^2$.

Řešení.

$${}^{\mathcal{E}_3}A^{\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -i \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad {}^{\mathcal{E}_3}A^{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} i & -i & -1+i \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} -i & -2-i & -2-i \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} -1+2i & -1+3i & -1+2i \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Příklad 6.17. Nalezněte matici operátoru $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ ve standardní bázi, je-li $Ax_i = y_i$, $i \in \hat{3}$, kde

a)
$$x_1 = (2,3,5),\ x_2 = (0,1,2),\ x_3 = (1,0,0),$$
$$y_1 = (1,1,1),\ y_2 = (1,1,-1),\ y_3 = (2,1,2),$$

b)
$$x_1 = (2,0,3),\ x_2 = (4,1,5),\ x_3 = (3,1,2),$$
$$y_1 = (1,2,-1),\ y_2 = (4,5,-2),\ y_3 = (1,-1,1).$$

Řešení.
$$\text{a) } {}^{\mathcal{E}_3}A = \begin{pmatrix} 2 & -11 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{b) } {}^{\mathcal{E}_3}A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -6 & 11 & 5 \\ -12 & 13 & 10 \\ 6 & -5 & -5 \end{pmatrix}.$$

Příklad 6.18. Buď $A \in \mathcal{L}(\mathbb{Z}_2^3)$ zadaný maticí
$$^{\mathcal{E}}A^{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
kde $\mathcal{E}$ je standardní báze a $\mathcal{X} = ((1,0,1),(0,1,0),(0,1,1))$. Nalezněte všechny vektory $x \in \mathbb{Z}_2^3$, které vyhovují rovnici:

a) $Ax = (1,0,0)$,

b) $Ax = (1,0,1)$.

Řešení. a) $x = (1,1,0)$, b) $x = (0,0,1)$.
Tip: zadanou matici zobrazení nemusíte nutně převádět na tvar „ze standardní do standardní báze“! Můžete využít toho, že vztah $(Ax)_{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} \cdot (x)_{\mathcal{X}}$ platí pro libovolné báze.

Příklad 6.19. Soubor $\mathcal{X} = ((1,0),(2,1))$ je báze prostoru $\mathbb{R}^2$ a zobrazení $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ jsou zadaná maticemi
$$^{\mathcal{E}_2}A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad {}^{\mathcal{X}}B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$
Najděte matici a) součtu zobrazení $A + B$ ve standardní bázi $\mathcal{E}_2$, b) složeného zobrazení AB ve standardní bázi $\mathcal{E}_2$.

Řešení.
$$\text{a) } {}^{\mathcal{E}_2}(A+B) = \begin{pmatrix} 0 & 21 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}, \qquad \text{b) } {}^{\mathcal{E}_2}(AB) = \begin{pmatrix} -1 & 31 \\ -2 & 56 \end{pmatrix}.$$

Příklad 6.20. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^4, \mathbb{C}^3)$ je zadané hodnotami na bázi takto:
$$A(1,1,-1,0) = (0,0,0), \quad A(1,2,-1,-2) = (-1,-3,1),$$
$$A(1,0,0,-1) = (0,0,0), \quad A(1,1,1,1) = (5,8,2).$$
Nalezněte všechna řešení rovnice $Ax = (13,21,5)$.

Řešení. $S = (8,5,0,0) + \langle(-1,-1,1,0),(-1,0,0,1)\rangle$.

Příklad 6.21. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, kde

$$^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ a & -a \\ a & -a^2 \end{pmatrix},$$

$\mathcal{X} = ((0,1),(1,-1))$ a $a \in \mathbb{R}$ je parametr. V závislosti na a najděte ker$A$, obor hodnot $A(\mathbb{R}^2)$ a určete hodnost $h(A)$.

Řešení. Pro $a \notin \{0,1\}$ je $\ker A = \{\theta\}$, $h(A) = 2$ a $A(\mathbb{R}^2) = \langle (1,a,a),(1,a,a^2)\rangle$,
pro $a \in \{0,1\}$ je $\ker A = \langle (1,0)\rangle$, $h(A) = 1$,
pro $a = 0$ je $A(\mathbb{R}^2) = \langle (1,0,0)\rangle$,
pro $a = 1$ je $A(\mathbb{R}^2) = \langle (1,1,1)\rangle$.

Příklad 6.22. Buďte $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, kde $A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \alpha_3)$ a

$$^{\mathcal{E}_2}B^{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} a & -a \\ a^2 & -a \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$a \in \mathbb{R}$ je parametr. Rozhodněte, v jakém pořadí lze zobrazení skládat. Pro složená zobrazení nalezněte v závislosti na $a \in \mathbb{R}$ hodnost a jádro.

Řešení. Pro $a \notin \{0,1\}$ je $h(AB) = 2$, $\ker(AB) = \{\theta\}$,
pro $a \in \{0,1\}$ je $h(AB) = 1$ a $\ker(AB) = \langle (1,1)\rangle$,
pro $a \notin \{0,1\}$ je $h(BA) = 2$, $\ker(BA) = \langle (1,-1,0)\rangle$,
pro $a \in \{0,1\}$ je $h(BA) = 1$ a $\ker(BA) = \langle (-1,1,0),(0,0,1)\rangle$.

Příklad 6.23. Buď $\phi \in \langle 0, 2\pi)$. Najděte matici $^{\mathcal{E}_2}A_\phi$ lineárního operátoru $A_\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, který otočí vektor $x = (x_1, x_2)$ v rovině $\mathbb{R}^2$ kolem počátku o úhel ϕ (proti směru hodinových ručiček). Dále určete $\ker A_\phi$, $d(A_\phi)$, $h(A_\phi)$ a matici složeného zobrazení $A_\psi \circ A_\phi$ ve standardní bázi $\mathcal{E}_2$, kde $\psi \in \langle 0, 2\pi)$.

Řešení.

$$^{\mathcal{E}_2}A_\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix},$$

$\ker A_\phi = \{\theta\}$, $d(A_\phi) = 0$, $h(A_\phi) = 2$,

$$^{\mathcal{E}_2}(A_\psi A_\phi) = \begin{pmatrix} \cos(\phi+\psi) & -\sin(\phi+\psi) \\ \sin(\phi+\psi) & \cos(\phi+\psi) \end{pmatrix}.$$

Příklad 6.24. $(*)$ Buďte $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha\beta \neq 1$ a definujme lineární operátor $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ maticí

$$^{\mathcal{E}_2}A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Vyšetřete, na jakou množinu se zobrazí čtverec $\langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$ při zobrazení.

b) Ukažte, že pokud $\alpha = \beta$, lze operátor získat složením operátorů rotace o úhel $\pm\pi/4$ a změny měřítka (s odpovídajícími parametry).

Řešení. a) $A(\langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x - \alpha y \le 1 - \alpha\beta,\ 0 \le y - \beta x \le 1 - \alpha\beta\}$. Tato množina představuje rovnoběžník v $\mathbb{R}^2$ s vrcholy $(0,0)$, $(1,\beta)$, $(\alpha,1)$ a $(1+\alpha, 1+\beta)$. Geometricky tedy operátor A realizuje **zkosení** v $\mathbb{R}^2$.

b) $A = A_{\pi/4} B A_{-\pi/4}$, kde $A_{\pm\pi/4}$ je operátor rotace z příkladu 6.23 a B je operátor změny měřítka v $\mathbb{R}^2$ s maticí

$$ {}^{\mathcal{E}_2}B = \begin{pmatrix} 1+\alpha & 0 \\ 0 & 1-\alpha \end{pmatrix}. $$

Příklad 6.25. Jak se změní matice lineárního zobrazení A v bázích $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$, jestliže:

a) v bázi $\mathcal{X}$ zaměníme $i$tý a $j$tý vektor;

b) v bázi $\mathcal{Y}$ zaměníme $i$tý a $j$tý vektor;

c) $i$tý vektor báze $\mathcal{X}$ vynásobíme číslem $\alpha \ne 0$;

d) $i$tý vektor báze $\mathcal{Y}$ vynásobíme číslem $\alpha \ne 0$?

Řešení. a) Zamění se $i$tý a $j$tý sloupec,

b) zamění se $i$tý a $j$tý řádek,

c) $i$tý sloupec se vynásobí α,

d) $i$tý řádek se vydělí α.