BI-LIN, Lineární algebra – cvičení

Daniel Dombek, Luděk Kleprlík, Karel Klouda

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze

LS 2019/2020

vytvořeno: 15. února 2022, 13:46

7 Determinant, vlastní čísla a diagonalizace

7.1 Permutace

Definice 7.1. *Buď $n \in \mathbb{N}$. Každé bijektivní zobrazení $\pi : \hat{n} \to \hat{n}$ nazýváme* ***permutací množiny*** *$\hat{n}$.*

- *Každou dvojici $(\pi(i), \pi(j))$ takovou, že $i < j$ a $\pi(i) > \pi(j)$ (kde $i, j \in \hat{n}$), nazýváme* ***inverzí v permutaci*** *π.*
- *Číslo $(-1)^{I_\pi}$, kde I_π je počet inverzí v π, nazýváme* ***znaménko (signum)*** *permutace π, značíme jej $\operatorname{sgn} \pi$. Je-li $\operatorname{sgn} \pi = 1$, resp. -1, říkáme, že π je permutace* ***sudá****, resp.* ***lichá****.*
- *Množinu všech permutací množiny $\hat{n}$ značíme S_n.*
- *Permutaci $\tau_{ij} \in S_n$, kde $\tau_{ij}(j) = i$, $\tau_{ij}(i) = j$ a pro ostatní prvky $k \notin \{i, j\}$ platí $\tau_{ij}(k) = k$ nazýváme* ***transpozicí*** *čísel i a j.*

Permutace obvykle zadáváme výčtem uspořádané $n$tice $(\pi(1), \dots, \pi(n))$ (ve které se každé číslo z množiny $\hat{n}$ musí vyskytovat právě jednou) a platí následující:

- Složení permutací $\hat{n}$ je také permutace $\hat{n}$.
- Ke každé permutaci π existuje právě jedna permutace inverzní π^{-1}.
- Počet všech permutací množiny $\hat{n}$ je $n!$.
- Každou permutaci lze získat jako složení konečně mnoha transpozic.
- Pro libovolné $\pi_1, \pi_2 \in S_n$ platí $\operatorname{sgn}(\pi_1 \circ \pi_2) = \operatorname{sgn} \pi_1 \cdot \operatorname{sgn} \pi_2$.

Příklad 7.2. Určete počet inverzí v následujících permutacích:

a) $(2, 3, 5, 4, 1)$,

b) $(2, 3, 4, 6, 5, 1)$,

c) $(1, 9, 6, 3, 2, 5, 4, 7, 8)$,

d) $(n, n-1, n-2, \dots, 2, 1)$,

e) $(1, 3, 5, \dots, 2n-1, 2, 4, 6, \dots, 2n)$,

f) $(2, 4, 6, \dots, 2n, 1, 3, 5, \dots, 2n-1)$,

g) $(1, 4, 7, \dots, 3n-2, 2, 5, 8, \dots, 3n-1, 3, 6, 9, \dots, 3n)$,

h) $(2, 5, 8, \dots, 3n-1, 3, 6, 9, \dots, 3n, 1, 4, 7, \dots, 3n-2)$,

i) $(1, 2, \dots, j-1, k, j+1, \dots, k-1, j, k+1, \dots, n-1, n)$, je-li $1 < j < k < n$ (transpozice prvků j a k).

Řešení. Jelikož stačí postupovat kombinatorickou úvahou přesně podle definice, nebudeme čtenáře urážet podrobněji rozepsaným postupem řešení.

a) 5,

b) 6,

c) 13,

d) $n(n-1)/2$,

e) $n(n-1)/2$,

f) $n(n+1)/2$,

g) $3n(n-1)/2$,

h) $n(3n+1)/2$,

i) $2(k-j)-1$.

Příklad 7.3. Určete složenou permutaci $\pi \circ \sigma$, je-li

a) $\pi = (5, 3, 2, 4, 1)$, $\sigma = (2, 4, 5, 1, 3)$,

b) $\pi = (7, 3, 1, 2, 6, 4, 5)$, $\sigma = (4, 7, 1, 3, 6, 5, 2)$,

c) $\pi = (2, 7, 1, 4, 8, 6, 3, 5)$, $\sigma = (1, 3, 8, 7, 6, 2, 5, 4)$.

Řešení. Přímočarým rozepsáním obrazů obou permutací získáme

a) $\pi \circ \sigma = (3, 4, 1, 5, 2)$,

b) $\pi \circ \sigma = (2, 5, 7, 1, 4, 6, 3)$,

c) $\pi \circ \sigma = (2, 1, 5, 3, 6, 7, 8, 4)$.

Příklad 7.4. Určete inverzní permutaci k permutaci:

a) $(2, 6, 4, 3, 1, 5)$,

b) $(5, 8, 2, 1, 4, 7, 3, 6)$,

c) $(2, 3, 5, 9, 1, 8, 7, 4, 6)$.

Řešení. Inverzní permutace musí splňovat vztah

$$\forall i, j \in \hat{n} : \pi(i) = j \Leftrightarrow \pi^{-1}(j) = i\,.$$

V případě a) přímo z předpisu dostáváme

$$\pi(1) = 2,\ \pi(2) = 6,\ \pi(3) = 4,\ \pi(4) = 3,\ \pi(5) = 1,\ \pi(6) = 5\,,$$

tedy

$$\pi^{-1}(2) = 1,\ \pi^{-1}(6) = 2,\ \pi^{-1}(4) = 3,\ \pi^{-1}(3) = 4,\ \pi^{-1}(1) = 5,\ \pi^{-1}(5) = 6$$

a platí $\pi^{-1} = (5, 1, 4, 3, 6, 2)$. Podobně pak dostaneme

b) $(4, 3, 7, 5, 1, 8, 6, 2)$,

c) $(5, 1, 2, 8, 3, 9, 7, 6, 4)$.

Příklad 7.5. Jaký největší počet inverzí může mít permutace z S_n? Jaká je to permutace?

Řešení. Budeme postupovat postupnou úvahou od obrazu $\pi(1)$ po obraz $\pi(n)$ a v každém kroku maximalizujeme počet inverzí.

- Maximální počet inverzí, ve kterých může být prvek $\pi(1)$ je přesně $n-1$ a to právě když je v inverzi se všemi ostatními prvky $\hat{n}$. Tedy musí být největší možný a platí $\pi(1) = n$.
- U každého dalšího obrazu $\pi(k)$ chceme zajistit nejvyšší možný počet inverzí se všemi obrazy následujícími $\pi(k+1), \ldots, \pi(n)$. Pro $\pi(k)$ tedy volíme nejvyšší možný prvek z $\hat{n}$ (tedy $\pi(2) = n-1, \pi(3) = n-2$ a tak dále).
- Nalezená permutace je $\pi = (n, n-1, n-2, \ldots, 2, 1)$ a počet inverzí v ní je roven

$$(n-1) + (n-2) + \cdots + 1 + 0 = \tfrac{n(n-1)}{2}\,.$$

7.2 Determinant

Definice 7.6. *Buď $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ se složkami $\mathbb{A}_{ij} = a_{i,j}$.* ***Determinant*** *matice $\mathbb{A}$ je číslo*

$$\det \mathbb{A} = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \cdot a_{1,\pi(1)} a_{2,\pi(2)} \cdots a_{n,\pi(n)}.$$

Každý sčítanec v definici determinantu tedy odpovídá nějaké permutaci množiny $\hat{n}$. Situaci si lze představit tak, že na základě této permutace v každém řádku matice (označme jeho index k) vybereme prvek v $\pi(k)$tém sloupci (každý sloupec je vybrán právě jednou) a tyto vybrané prvky mezi sebou vynásobíme. K tomuto součinu pouze přidáme znaménko použité permutace.

Příklad 7.7. Rozepište sumu z definice determinantu matice $\mathbb{A} = (a_{i,j}) \in \mathbb{C}^{n,n}$ pro $n = 2$ a $n = 3$.

Řešení. a) Pro $n = 2$ existují pouze dvě permutace množiny $\hat{2}$, sudá $(1, 2)$ lichá $(2, 1)$. Tedy

$$\det \mathbb{A} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}\,.$$

b) Existuje šest permutací množiny $\hat{3} = \{1, 2, 3\}$, z nich jsou tři sudé ($(1, 2, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$) a tři liché ($(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$, $(3, 2, 1)$). Tedy

$$\det \mathbb{A} = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1}\,.$$

Příklad 7.8. Pouze na základě definice determinantu zdůvodněte, proč je funkce $p(x)$ polynom nejvýše čtvrtého stupně a aniž byste determinant počítali, určete koeficient u nejvyšší mocniny polynomu $p(x)$, je-li

a) $p(x) = \begin{vmatrix} 1 & 3x & 2 & x \\ 0 & 4 & 5x & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2x \\ 4x & 8 & 3x & 2x \end{vmatrix}$, b) $p(x) = \begin{vmatrix} 3 & 6x & 2x & 5x \\ 3 & 4 & 7 & 3x \\ 2 & x & 1 & 2 \\ 4x & 8 & 4 & 2 \end{vmatrix}$,

c) $p(x) = \begin{vmatrix} x & 6 & 2 & 3 \\ 3 & 4x & 7x & 3x \\ 2 & 9 & x & 2 \\ 3 & 2x & 4 & 2 \end{vmatrix}$, d) $p(x) = \begin{vmatrix} 2x & 1 & 2 & 5 \\ -3 & -1 & x & 2 \\ 1 & 2 & 2x & 3 \\ -1 & x & 3 & -x \end{vmatrix}$.

Řešení. Jedná se o matice typu 4×4, a v každém prvku každé z matic je proměnná x nejvýše v první mocnině. Determinant je z definice roven součtu (lineární kombinaci) součinů tvaru „po jednom prvku z každého řádku matice“. Vidíme, že tak lze získat polynomy stupně nejvýše 4, resp. 3. Pro nalezení koeficientu u nejvyšší mocniny tedy stačí sečíst příspěvky odpovídajících permutací (s patřičnými znaménky).

a) $\alpha_4 = -120$,

b) $\alpha_4 = -24$,

c) $\alpha_4 = -6$,

d) $\alpha_3 = 6$.

Poznámka 7.1 (O výpočtu determinantu)**.** *Pro malé matice ($n \in \{2, 3\}$) lze determinant spočítat přímo z definice, pro předpisy odvozené v příkladu 7.7 existují mnemotechnická schémata, tzv.* ***křížové*** *a* ***Sarrusovo pravidlo****.*

Obecně je postup přímo z definice nepraktický a výpočetně náročný (determinant matice $n \times n$ je suma $n!$ sčítanců, kde každý je ve tvaru součinu n čísel. V následujícím si shrneme, co o determinantech užitečného víme.

- Je-li matice $\mathbb{A} = (a_{i,j})$ horní trojúhelníková nebo dolní trojúhelníková, platí $\det \mathbb{A} = a_{1,1} \cdots a_{n,n}$, tedy její determinant má pouze jeden nenulový sčítanec a to součin prvků na diagonále (což pochopitelně platí speciálně i pro diagonální matice).
- Řádkové úpravy GEM ovlivňují determinant následovně:
  - Úprava (G1) prohození dvou řádků mění znaménko determinantu, (resp. násobí determinant matice číslem opačným k 1).
    *(**Pozor** na složitější úpravy pořadí řádků, např „prohození všech řádků odspoda nahoru“ nebo „přesunutí prvního řádku na konec a každého dalšího řádku o jeden výše“. Pro určení jak se změní znaménko determinantu je třeba si přesně rozmyslet, kolik operací „prohození dvou řádků“ je pro daný krok potřeba!)*
  - Úprava (G2) vynásobení jednoho řádku číslem $\alpha \neq 0$ determinant matice změní vynásobením tímtéž číslem.
  - Úprava (G3) přičtení k jednomu řádku αnásobek druhého řádku determinant nemění.
    *(**Pozor** na úpravy typu „k dvojnásobku jednoho řádku přičteme trojnásobek druhého“, je v nich schovaná úprava (G2), která determinant mění!)*
- Jelikož platí $\det(\mathbb{A}^T) = \det \mathbb{A}$, lze na matici použít i **sloupcové** analogie úprav GEM, platí pro ně pak stejné zákonitosti jako pro ty řádkové, viz. výše.
- Matice $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ je regulární právě tehdy, když $\det \mathbb{A} \neq 0$. Pro regulární matice pak platí
$$\det(\mathbb{A}^{-1}) = (\det \mathbb{A})^{-1} .$$
- Označme jako $\mathbb{A}(k, l) \in T^{n-1,n-1}$ matici, která vznikne z matice $\mathbb{A}$ vynecháním $k$tého řádku a ℓtého sloupce. Číslo $(-1)^{k+\ell} \det \mathbb{A}(k, \ell)$ nazýváme **algebraický doplněk** prvku $a_{k,\ell}$. Věta o rozvoji determinantu podle $k$tého sloupce pak říká, že platí
$$\det \mathbb{A} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det \mathbb{A}(i, k) .$$

(*Tedy determinant matice $n\times n$ lze převést na součet determinantů menších matic, které vzniknou vynecháním jednoho zvoleného sloupce a různých řádků – to je mimořádně užitečné v případě, že zvolený ktý sloupec obsahuje málo nenulových prvků.*)

- ⋄ Díky vztahu $\det(\mathbb{A}^T) = \det \mathbb{A}$ lze obdobně provést rozvoj determinantu podle zvoleného řádku.

Příklad 7.9. Spočítejte determinanty následujících matic:

a) $\begin{vmatrix} \alpha & \alpha+1 \\ \alpha-1 & \alpha \end{vmatrix}$,

b) $\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix}$,

c) $\begin{vmatrix} 1 & \log_\alpha \beta \\ \log_\beta \alpha & 1 \end{vmatrix}$,

d) $\begin{vmatrix} 8 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 7 & 4 & 1 \end{vmatrix}$,

e) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & \alpha^2 \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \end{vmatrix}$,

f) $\begin{vmatrix} \alpha^2+1 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & \beta^2+1 & \beta\gamma \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2+1 \end{vmatrix}$,

g) $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos 2\alpha & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos 2\beta & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos 2\gamma & \cos^2\gamma \end{vmatrix}$.

Řešení. a) Použitím křížového pravidla dostaneme

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha+1 \\ \alpha-1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 - (\alpha+1)(\alpha-1) = 1\,.$$

b) Použitím křížového pravidla dostaneme

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} = \cos^2\varphi - (-\sin^2\varphi) = 1\,.$$

c) Podobně jako výše dostáváme

$$\begin{vmatrix} 1 & \log_\alpha \beta \\ \log_\beta \alpha & 1 \end{vmatrix} = 1 - \log_\alpha\beta \cdot \log_\beta\alpha = 1 - \tfrac{\ln\alpha}{\ln\beta}\cdot\tfrac{\ln\beta}{\ln\alpha} = 0\,.$$

d) Lze použít například Sarrusovo pravidlo, determinant se rovná -110.

e) Jedním z možných postupů je použití Sarrusova pravidla, alternativně lze použít řádkové/sloupcové úpravy, rozvoj determinantu a křížové pravidlo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & \alpha^2 \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \alpha-\alpha^2 \\ 1 & 1 & \alpha^2 \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \end{vmatrix} = (\alpha-\alpha^2)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha^2 & \alpha \end{vmatrix} = (\alpha-\alpha^2)\cdot(\alpha-\alpha^2) = \alpha^2(\alpha-1)^2\,.$$

f) Použitím Sarrusova pravidla dostaneme výsledek $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+1$.

g) Lze si povšimnout, že odečteme-li od třetího sloupce sloupec první, dostaneme sloupec rovný druhému sloupci. Matice s dvěma stejnými sloupci má pak zřejmě determinant roven nule (jeden lze od druhého odečíst, čímž vznikne matice s nulovým sloupcem).

Příklad 7.10. Spočítejte následující determinanty:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix} \alpha+1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \alpha+1 \end{vmatrix}$, e) $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & d_1 \\ b_2 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & c_2 \end{vmatrix}$,

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, d) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, f) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$.

Řešení. Z mnoha různých možných postupů vždy vybereme pouze jeden, další možnosti řešení si čtenář jistě promyslí sám.

a) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2)^3 = -8.$$

b) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =^{\dagger} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

(v kroku † jsme k prvnímu sloupci přičetli všechny ostatní sloupce).

c) $$\begin{vmatrix} \alpha+1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \alpha+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha+4 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha+4 & \alpha+1 & 1 & 1 \\ \alpha+4 & 1 & \alpha+1 & 1 \\ \alpha+4 & 1 & 1 & \alpha+1 \end{vmatrix} = (\alpha+4) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \alpha+1 \end{vmatrix} =$$
$$(\alpha+4) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^3(\alpha+4).$$

Další výsledky již uvedeme bez postupu řešení:

d) 5.

e) $(a_1a_2 - b_1b_2)(c_1c_2 - d_1d_2)$.

f) 195.

Příklad 7.11. Spočítejte následující determinanty, $n \in \mathbb{N}$:

a) $\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ -\alpha & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -\alpha & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -\alpha & 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\alpha & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & n & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n \end{vmatrix}_{n\times n}$,

d) $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & \alpha & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & -1 & \alpha & 1 & \dots & 1 \\ -1 & -1 & 1 & \alpha & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & 1 & 1 & \dots & \alpha \end{vmatrix}_{n\times n}$, e) $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 0 & \dots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 & \dots & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & 0 & \dots & 0 \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & \dots & a_{4,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$.

Řešení.

a) $$\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ -\alpha & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -\alpha & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -\alpha & 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\alpha & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha+\alpha\cdot(n-1) & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ -\alpha+\alpha\cdot 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -\alpha+\alpha\cdot 1 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -\alpha+\alpha\cdot 1 & 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\alpha+\alpha\cdot 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha n & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$
$= \alpha n\,.$

b) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & n-2 \end{vmatrix} =^{\dagger} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1$$
(v kroku † jsme se zamysleli nad tím, že úpravu „odečtení vybraného řádku od všech pod ním“ lze opakovat postupně pro všechny řádky odshora dolů a tak vyrobit horní trojúhelníkovou matici).

c) $$\begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & n & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n \end{vmatrix}_{n\times n} = \begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1-n & n-1 & 0 & \dots & 0 \\ 1-n & 0 & n-1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1-n & 0 & 0 & \dots & n-1 \end{vmatrix}_{n\times n} = \begin{vmatrix} 2n-1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & n-1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & n-1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 \end{vmatrix}_{n\times n}$$
$= (2n-1)(n-1)^{n-1}$.

Další výsledky již uvedeme bez postupu řešení:

d) $-(\alpha-1)^{n-1}$,

e) 0.

Příklad 7.12. Pouze na základě vlastností determinantu spočítejte
$$\begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ b+c & a & 1 \\ c+a & b & 1 \end{vmatrix}.$$

Řešení. Snadno si povšimneme, že přičtením druhého sloupce k prvnímu získáme sloupec $(a+b+c,\ a+b+c,\ a+b+c)^T$. Dostaneme tak determinant matice, jejíž jeden sloupec je konstantním násobkem jiného a taková má vždy determinant roven nule (k čemuž můžeme dospět různě, například úvahou o hodnosti a regularitě matice).

Příklad 7.13. Čísla $1189, 2665, 6437, 4961$ jsou dělitelná 41. Dokažte, že

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 8 & 9 \\ 2 & 6 & 6 & 5 \\ 6 & 4 & 3 & 7 \\ 4 & 9 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

je rovněž dělitelný 41, aniž spočítáte jeho hodnotu.

Řešení. Vhodnou myšlenkou na začátek budiž například fakt, že k libovolnému sloupci lze přičíst desetinásobek druhého, stonásobek třetího a současně tisícinásobek čtvrtého sloupce. Současně lze z řádků i sloupců při výpočtu determinantu „vytýkat“.

7.3 Vlastní čísla, vlastní vektory a diagonalizovatelnost

Definice 7.14. *Řekneme, že $\lambda \in \mathbb{C}$ je **vlastní číslo operátoru** $A \in \mathcal{L}(V)$ právě když existuje $x \in V$, $x \neq \theta$, takový, že $Ax = \lambda x$. Vektor x pak nazýváme **vlastním vektorem operátoru** A příslušejícím vlastnímu číslu λ. Množinu všech vlastních čísel A nazýváme **spektrem** A a značíme $\sigma(A)$.*

Analogicky definujeme vlastní čísla, vlastní vektory a spektrum matic $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ (každá taková matice určuje lineární operátor vztahem $\mathbb{A} = {}^{\mathcal{E}}A$).

- Vlastní číslo λ operátoru A s vlastním vektorem x splňují

  $$Ax = \lambda x \Leftrightarrow Ax - \lambda x = \theta \Leftrightarrow (A - \lambda E)x = \theta\,,$$

  tedy pro každé $\lambda \in \mathbb{C}$ a pro libovolnou bázi $\mathcal{X}$ prostoru V platí:

  $$\begin{aligned} \lambda \in \sigma(A) &\Leftrightarrow (\exists x \neq \theta : (A - \lambda E)x = \theta) \\ &\Leftrightarrow (A - \lambda E) \text{ není bijekce} \\ &\Leftrightarrow {}^{\mathcal{X}}(A - \lambda E) \text{ není regulární matice} \\ &\Leftrightarrow \det({}^{\mathcal{X}}(A - \lambda E)) = 0\,. \end{aligned}$$

- Pro nalezení spektra tedy sestavíme matici ${}^{\mathcal{X}}(A - \lambda E)$ (typicky ve standardní bázi $\mathcal{X} = \mathcal{E}$) a spočítáme její determinant (jde o polynom s komplexními koeficienty v proměnné λ, nazýváme ho **charakteristický polynom** operátoru A a značíme $p_A(\lambda)$). Spektrum $\sigma(A)$ je tvořeno všemi kořeny charakteristického polynomu.

- Množina všech vlastních vektorů operátoru A příslušejících pevně zvolenému $\lambda \in \mathbb{C}$ je rovna

  $$\ker(A - \lambda E) \setminus \{\theta\}\,.$$

- Jádro $\ker(A - \lambda E)$ nazýváme **vlastním podprostorem operátoru** A příslušejícím vlastnímu číslu λ.

- Zadání „nalezněte vlastní čísla a vlastní vektory operátoru/matice“ znamená:

  → nalézt spektrum $\sigma(A)$,

  → ke každému vlastnímu číslu λ nalézt bázi jeho vlastního podprostoru $\ker(A - \lambda E)$.

Definice 7.15. *Nechť $A \in \mathcal{L}(V_n)$, $\lambda_0 \in \sigma(A)$. Násobnost čísla λ_0 jako kořene charakteristického polynomu p_A operátoru A nazýváme **algebraickou násobností** vlastního čísla λ_0 a značíme ji $\nu_a(\lambda_0)$.*

*Číslo $d(A - \lambda_0 E)$ nazýváme **geometrickou násobností** vlastního čísla λ_0 a značíme ji $\nu_g(\lambda_0)$.*

- ⋄ Číslo $\nu_g(\lambda_0)$ je dimenze vlastního podprostoru a tedy maximální velikost LN souboru vlastních vektorů k vlastnímu číslu λ_0.
- ⋄ Pro každé $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ platí $\nu_g(\lambda_0) \leq \nu_a(\lambda_0)$.

Definice 7.16. *Matice $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{C}^{n,n}$ nazveme* ***podobné****, právě když existuje $\mathbb{P} \in \mathbb{C}^{n,n}$ regulární tak, že platí*

$$\mathbb{A} = \mathbb{P}^{-1}\mathbb{B}\mathbb{P}\,.$$

Ekvivalentně platí, že matice $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{C}^{n,n}$ jsou podobné právě tehdy, když jsou obě maticemi stejného lineárního operátoru (v nějakých bázích), tedy když existuje $A \in \mathcal{L}(V_n)$ a báze $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ takové, že

$${}^{\mathcal{X}}A = \mathbb{A} \quad \text{a současně} \quad {}^{\mathcal{Y}}A = \mathbb{B}\,.$$

Operátor $A \in \mathcal{L}(V_n)$ nazveme ***diagonalizovatelný****, jestliže existuje báze $\mathcal{X}$ prostoru V_n taková, že matice ${}^{\mathcal{X}}A$ je diagonální (matice je diagonalizovatelná, je-li podobná diagonální matici).*

- ⋄ Operátor $A \in \mathcal{L}(V_n)$ je diagonalizovatelný právě když

$$\forall \lambda_0 \in \sigma(A) : \nu_a(\lambda_0) = \nu_g(\lambda_0)\,.$$

- ⋄ Libovolný soubor vlastních vektorů, ve kterém každý přísluší jinému vlastnímu číslu, je vždy LN.
- ⋄ Zadání „ověřte, zda je operátor diagonalizovatelný, a nalezněte bázi, ve které je jeho matice diagonální“ tedy znamená:
  - → nalézt spektrum $\sigma(A)$,
  - → ke každému vlastnímu číslu nalézt bázi vlastního podprostoru,
  - → porovnat algebraické a geometrické násobnosti u každého $\lambda \in \sigma(A)$,
  - → rovnají-li se pro každé $\lambda \in \sigma(A)$, bázi $\mathcal{X}$ sestavíme popořadě z bazických vektorů všech vlastních podprostorů. Matice přechodu ${}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{E}}$ je bude obsahovat ve sloupcích, diagonální matice operátoru ${}^{\mathcal{X}}A$ bude na diagonále obsahovat v odpovídajícím pořadí všechna vlastní čísla (každé zopakované tolikrát, kolik je jeho násobnost).
- ⋄ Máme-li rozhodnout o podobnosti dvou zadaných matic $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{C}^{n,n}$, můžeme se pokusit nalézt regulární matici $\mathbb{P} \in \mathbb{C}^{n,n}$ splňující

$$\mathbb{A} = \mathbb{P}^{-1}\mathbb{B}\mathbb{P} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}\mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{P}$$

  ručně, případně ukázat, že neexistuje. Pokud ale ukážeme, že obě matice $\mathbb{A}$ i $\mathbb{B}$ jsou diagonalizovatelné a mají stejná vlastní čísla, jejichž násobnosti se navíc shodují, plyne z toho automaticky, že jsou podobné.
- ⋄ Konkrétně, předpokládejme, že $\sigma(\mathbb{A}) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ a že pro každé λ_i platí rovnost $\nu_a(\lambda_i) = \nu_g(\lambda_i)$. Sestavme
  - diagonální matici $\mathbb{D} \in \mathbb{C}^{n,n}$ umístěním všech vlastních čísel matice $\mathbb{A}$ na diagonálu (každé tolikrát, kolik je jeho násobnost),
  - matici $\mathbb{P} \in \mathbb{C}^{n,n}$ po sloupcích z vlastních vektorů matice $\mathbb{A}$ (z bází vlastních podprostorů ve stejném pořadí jako jsou vlastní čísla v matici $\mathbb{D}$).

– Chápeme-li zadanou matici jako $\mathbb{A} = {}^{\mathcal{E}}A$ a soubor vlastních vektorů z bází vlastních podprostorů jako novou bázi $\mathcal{X}$, pak sestavené matice odpovídají maticím zobrazení a přechodu $\mathbb{D} = {}^{\mathcal{X}}A$ a $\mathbb{P} = {}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{E}}$. Ze vlastností matic zobrazení jistě plyne

$$ {}^{\mathcal{X}}A = {}^{\mathcal{E}}E^{\mathcal{X}} \cdot {}^{\mathcal{E}}A \cdot {}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{E}} \,. $$

– Tedy platí vztah

$$ \mathbb{D} = \mathbb{P}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{P} \,. $$

Příklad 7.17. Nalezněte vlastní čísla a vlastní vektory matice $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{3,3}$ a rozhodněte o její diagonalizovatelnosti, je-li:

a) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix}$, c) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$, e) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

b) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, d) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, f) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Řešení. Většina postupu řešení staví na schopnostech, které bychom již měli mít, a to na výpočtu determinantu, hledání kořenů polynomu a řešení homogenních soustav. Proto podrobně vyřešíme jen několik prvních příkladů a postupně uvedená řešení zestručníme.

a) $p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & -3 \\ 4 & 5-\lambda & -4 \\ 6 & 4 & -4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3),$

tedy platí $\sigma(\mathbb{A}) = \{1, 2, 3\}$ a všechna vlastní čísla jsou jednoduchá ($\nu_a(\lambda) = 1$). Odpovídající vlastní podprostory operátoru A s maticí $\mathbb{A}$ odvodíme řešením soustav:

$\diamond$ $\lambda = 1$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -3 & 0 \\ 4 & 4 & -4 & 0 \\ 6 & 4 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \ker(A - 1E) = \langle(1,1,2)\rangle, \nu_g(1) = \nu_a(1) = 1,$

$\diamond$ $\lambda = 2$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -3 & 0 \\ 4 & 3 & -4 & 0 \\ 6 & 4 & -6 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \ker(A - 2E) = \langle(1,0,1)\rangle, \nu_g(2) = \nu_a(2) = 1,$

$\diamond$ $\lambda = 3$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & -4 & 0 \\ 6 & 4 & -7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \ker(A - 3E) = \langle(1,2,2)\rangle, \nu_g(3) = \nu_a(3) = 1$

a matice $\mathbb{A}$ je diagonalizovatelná.

b) $p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \lambda & 2\lambda-\lambda^2 \\ 0 & -\lambda & \lambda \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 2\lambda-\lambda^2 \\ -\lambda & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 \begin{vmatrix} 1 & 2-\lambda \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2(3-\lambda),$

tedy platí $\sigma(\mathbb{A}) = \{0, 3\}$, $\nu_a(0) = 2$ a $\nu_a(3) = 1$. Odpovídající vlastní podprostory operátoru A s maticí $\mathbb{A}$ odvodíme řešením soustav:

$\diamond$ $\lambda = 0$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \ker(A - 0E) = \langle(1,-1,0), (1,0,-1)\rangle,$

$\nu_g(0) = \nu_a(0) = 2,$

- $\lambda = 3$: $\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \ker(A - 3E) = \langle (1,1,1) \rangle$,

  $\nu_g(3) = \nu_a(3) = 1$,

a matice $\mathbb{A}$ je diagonalizovatelná.

c) $p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 & 2 \\ 5 & -7-\lambda & 3 \\ 6 & -9 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda^3 = \lambda^2(1-\lambda)$,

tedy platí $\sigma(\mathbb{A}) = \{0, 1\}$, $\nu_a(0) = 2$ a $\nu_a(1) = 1$. Odpovídající vlastní podprostory operátoru A s maticí $\mathbb{A}$ odvodíme řešením soustav:

- $\lambda = 0$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -5 & 2 & 0 \\ 5 & -7 & 3 & 0 \\ 6 & -9 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \ker(A - 0E) = \langle (1,2,3) \rangle$, $\nu_g(0) = 1 \neq \nu_a(0)$,
- $\lambda = 1$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 2 & 0 \\ 5 & -8 & 3 & 0 \\ 6 & -9 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \ker(A - 1E) = \langle (1,1,1) \rangle$,

  $\nu_g(1) = \nu_a(1) = 1$,

a matice $\mathbb{A}$ není diagonalizovatelná.

Další výsledky již uvedeme bez postupu řešení:

d) Vlastními čísly jsou

- $\lambda_1 = 0$, $\nu_a(0) = 1$, $\ker(A - 0E) = \langle (1,1,1) \rangle$,
- $\lambda_2 = 1$, $\nu_a(1) = 2$, $\ker(A - 1E) = \langle (1,0,-1), (3,1,0) \rangle$

a matice $\mathbb{A}$ je diagonalizovatelná.

e) Jediným vlastním číslem je $\lambda_1 = 2$, $\nu_a(2) = 3$, $\ker(A - 2E) = \langle (1,0,1), (-1,1,0\rangle$. Tedy $\nu_g(2) = 2 \neq \nu_a(2)$ a matice $\mathbb{A}$ není diagonalizovatelná.

f) Vlastními čísly jsou

- $\lambda_1 = 2$, $\nu_a(2) = 1$, $\ker(A - 2E) = \langle (5,6,-2) \rangle$,
- $\lambda_2 = 2 + i\sqrt{7}$, $\nu_a(2 + i\sqrt{7}) = 1$, $\ker(A - (2 + i\sqrt{7})E) = \langle (-1, \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{7}), 1) \rangle$
- $\lambda_3 = 2 - i\sqrt{7}$, $\nu_a(2 - i\sqrt{7}) = 1$, $\ker(A - (2 - i\sqrt{7})E) = \langle (-1, \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{7}), 1) \rangle$

a matice $\mathbb{A}$ je diagonalizovatelná.

Příklad 7.18. Zjistěte, zda následující matice $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{C}^{3,3}$ jsou podobné:

a) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

b) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

c) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$,

d) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\omega} \end{pmatrix}$, kde $\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Řešení. a) Snadno ověříme, že platí $\sigma(\mathbb{A}) = \sigma(\mathbb{B}) = \{0\}$, u obou matic má vlastní číslo $\lambda = 0$ algebraickou násobnost 3. Pokud budou i geometrické násobnosti u obou matic rovny třem, zadané matice budou podobné.

Jelikož mají obě matice na první pohled stejnou hodnost, $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{B}) = 2$, z Frobeniovy věty plyne, že dimenze podprostorů řešení soustav $(\mathbb{A} \mid \theta)$ a $(\mathbb{B} \mid \theta)$ je rovna jedné, tedy ani jedna z matic není diagonalizovatelná a jejich podobnost musíme ověřit jinak, „ručně“.

Přímo z definice se pokusíme najít regulární matici $\mathbb{P} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ splňující rovnost $\mathbb{PA} = \mathbb{BP}$.

Po dosazení všech matic dostaneme rovnost vedoucí na soustavu rovnic v neznámých $a, \ldots, i$, ze které získáme podmínky

$$d = g = h = 0\,, \quad a = e = i\,, \quad f = 2a + b\,,$$

hledaná matice tedy existuje a je tvaru

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

pro nějaké parametry $a, b, c \in \mathbb{C}$. Aby byla regulární, zjevně stačí, aby platilo $a \neq 0$.

b) Platí $\sigma(\mathbb{A}) = \sigma(\mathbb{B}) = \{0, 3\}$, kde $\lambda_1 = 0$ má u obou matic obě násobnosti rovné dvěma a $\lambda_2 = 3$ má obě násobnosti rovné jedné. Matice $\mathbb{A}$ je už sama diagonální, matice $\mathbb{B}$ je podle části b) příkladu 7.17 diagonalizovatelná, jsou si tedy navzájem podobné.

Regulární matici $\mathbb{P} \in \mathbb{C}^{3,3}$ splňující vztah $\mathbb{A} = \mathbb{P}^{-1}\mathbb{BP}$ získáme tak, že do sloupců popořadě napíšeme vlastní vektory matice $\mathbb{B}$, a to zleva doprava nejprve vlastní vektor k $\lambda = 3$ a poté dva LN vlastní vektory k $\lambda = 0$. Tedy

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

c) Nejsou podobné.

d) Jsou podobné.

Příklad 7.19. Nechť $A \in \mathcal{L}(V)$, $V \neq \{\theta\}$. Dokažte, že platí následující tvrzení:

a) je-li $A^2 = A$, je $\sigma(A) \subseteq \{0, 1\}$;

b) je-li $A^2 = E$, je $\sigma(A) \subseteq \{-1, 1\}$;

c) je-li $A = 0$ (nulový operátor), je $\sigma(A) = \{0\}$.

Řešení. a) Nechť $\lambda \in \sigma(A)$, pak existuje $x \neq \theta$ takový, že $Ax = \lambda x$. Z linearity operátoru odvodíme

$$(A^2)x = A(Ax) = A(\lambda x) = \lambda Ax = \lambda^2 x\,.$$

Současně ale předpokládáme $A^2 = A$, tedy

$$(A^2)x = Ax = \lambda x\,.$$

Má-li pro nějaký nenulový vektor $x \in V$ platit $\lambda^2 x = \lambda x$, pak platí i $(\lambda^2 - \lambda)x = \theta$ a nutně také $\lambda^2 - \lambda = 0$, tedy $\lambda \in \{0, 1\}$.

b) Nechť $\lambda \in \sigma(A)$, pak existuje $x \neq \theta$ takový, že $Ax = \lambda x$. Z linearity operátoru odvodíme

$$(A^2)x = A(Ax) = A(\lambda x) = \lambda Ax = \lambda^2 x\,.$$

Současně ale předpokládáme $A^2 = E$, tedy

$$(A^2)x = Ex = x\,.$$

Má-li pro nějaký nenulový vektor $x \in V$ platit $\lambda^2 x = x$, pak platí i $(\lambda^2 - 1)x = \theta$ a nutně také $\lambda^2 - 1 = 0$, tedy $\lambda \in \{-1, 1\}$.

c) Předpokládáme, že platí $Ax = \theta$ pro každé $x \in V$. Nechť $\lambda \in \sigma(A)$, pak existuje $x \neq \theta$ takový, že $Ax = \lambda x$. Pro nějaký nenulový vektor x tedy musí platit

$$\lambda x = Ax = \theta\,,$$

z čehož nutně plyne, že $\lambda = 0$.

7.4 Cvičení

Příklad 7.20. Určete čísla i, k tak, aby permutace z S_9 byla lichá:

a) $(1, 2, 7, 4, i, 5, 6, k, 9)$,

b) $(1, i, 2, 5, k, 4, 8, 9, 7)$.

Řešení. a) $i = 3$, $k = 8$, b) $i = 3$, $k = 6$.

Příklad 7.21. Buďte $\pi_1 = (4, 2, 6, 3, 1, 5)$, $\pi_2 = (2, 6, 1, 3, 4, 5)$ permutace množiny $\hat{6}$. Nalezněte permutaci $\sigma \in S_6$ vyhovující rovnici:

a) $\pi_1 \circ \sigma = \pi_2$,

b) $\sigma \circ \pi_1 = \pi_2$.

Řešení. a) $\sigma = (2, 3, 5, 4, 1, 6)$, b) $\sigma = (4, 6, 3, 2, 5, 1)$.

Příklad 7.22. Nechť v permutaci $\pi \in S_n$ je k inverzí. Určete, kolik inverzí je v permutaci

$$(\pi(n), \pi(n-1), \ldots, \pi(1))\,.$$

Řešení. $n(n-1)/2 - k$.

Příklad 7.23. Kolik inverzí je ve všech permutacích z S_n dohromady?

Řešení. $\frac{n(n-1)}{2}\frac{n!}{2}$.

Příklad 7.24. Vstup `1234` lze pomocí zásobníkových operací `push` (vložit na vrchol zásobníku) a `pop` (vyjmout z vrcholu zásobníku) zpracovat například takto: `push(1), push(2), pop(2), push(3), pop(3), pop(1), push(4), pop(4)`. Výstupem je potom `2314`. Říkáme, že permutaci `2314` množiny `1234` lze *realizovat zásobníkem*. Otázka: které permutace vstupu `1...n` lze realizovat zásobníkem?

Příklad 7.25. Zjistěte, které z následujících součinů jsou členy determinantu matice $\mathbb{A} = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{6,6}$ a určete, jakým znaménkem jsou opatřeny:

a) $a_{1,3}a_{2,2}a_{3,4}a_{4,1}a_{5,6}a_{6,5}$,

b) $a_{1,6}a_{2,5}a_{3,1}a_{4,2}a_{5,5}a_{6,4}$,

c) $a_{1,4}a_{2,2}a_{3,1}a_{4,3}a_{5,6}a_{6,5}$.

d) Kolik sčítanců ještě zbývá k platným členům napsat, aby byl součet podle definice úplný?

Řešení.

a) Ano, -1,

b) ne,

c) ano, -1,

d) $6! - 2 = 718$.

Příklad 7.26. Vypište všechny členy determinantu matice $\mathbb{A} = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{5,5}$, které jsou tvaru

$$-a_{1,4}a_{2,3}a_{3,i}a_{4,j}a_{5,k}\,.$$

Řešení. $-a_{1,4}a_{2,3}\,(a_{3,1}a_{4,2}a_{5,5} + a_{3,2}a_{4,5}a_{5,1} + a_{3,5}a_{4,1}a_{5,2})$.

Příklad 7.27. Spočítejte následující determinanty matic obecného rozměru $n \times n$:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}_{n\times n}$,

c) $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_n \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$,

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & n \end{vmatrix}$,

d) $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \beta & \dots & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & \dots & \beta \\ \beta & \beta & \alpha & \dots & \beta \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta & \beta & \beta & \dots & \alpha \end{vmatrix}_{n\times n}$,

e) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & \alpha & 1 \end{vmatrix}_{n\times n}$,

f) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$,

g) $\begin{vmatrix} x+\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1 & x+\alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & x+\alpha_3 & \dots & \alpha_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & x+\alpha_n \end{vmatrix}$,

h) $\begin{vmatrix} x & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-1} & 1 \\ \alpha_1 & x & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-1} & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & x & \dots & \alpha_{n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & x & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_n & 1 \end{vmatrix}$.

Řešení. a) $(-1)^{n+1}$,

b) $(n-1)!$,

c) $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$,

d) $(\alpha+(n-1)\beta)(\alpha-\beta)^{n-1}$,

e) $(1-\alpha)^{n-1}$,

f) $n!$,

g) $x^n + x^{n-1}\sum_{k=1}^{n} \alpha_k$,

h) $\prod_{k=1}^{n}(x-\alpha_k)$.

Příklad 7.28. Rozložte polynom $p(x)$ na kořenové činitele, aniž byste determinant počítali (použitím vlastností determinantu matice):

a) $p(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 4-x & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2-x & 0 \\ 4 & 8 & 3 & 3-x \end{vmatrix}$,

b) $p(x) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 5-x \\ 6-x & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2-x & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3-x & 2 & 2 \end{vmatrix}$,

c) $p(x) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ x & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & x & 3 & \dots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & x & n \end{vmatrix}$,

d) $p(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n-x \end{vmatrix}$,

e) $p(x) = \begin{vmatrix} a & a & a & a & a \\ a & a-x & a & a & a \\ a & a & 2a-x & a & a \\ a & a & a & 3a-x & a \\ 2a & 2a & 2a & 2a & 8a-2x \end{vmatrix}$,

kde $a \in \mathbb{R}$ je parametr ,

Řešení. a) $p(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$,

b) $p(x) = 2x(x-1)(x-3)(x-4)$,

c) $p(x) = (-1)^{n+1}n(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)$,

d) $p(x) = (-1)^n x(x-1)\dots(x-n+1)$.

e) $p = 0$ pro $a = 0$, $p(x) = 2ax(x-a)(x-2a)(x-3a)$ pro $a \neq 0$,

Příklad 7.29. Nechť $\mathbb{A} \in T^{n,n}$ je regulární. Nalezněte všechna čísla $\alpha \in T$ taková, že $\det(\alpha\mathbb{A}) = \det \mathbb{A}$, je-li a) $T = \mathbb{R}$, b) $T = \mathbb{C}$.

Řešení. a) $\alpha = 1$, je-li n liché, $\alpha = \pm 1$, je-li n sudé. b) $\alpha \in \{e^{2ik\pi/n} \mid k \in \hat{n}\}$.

Příklad 7.30. Využijte linearitu determinantu jako funkci sloupců, resp. řádků a spočítejte determinant

$$\begin{vmatrix} \alpha_1+\beta_1 & \alpha_1+\beta_2 & \alpha_1+\beta_3 & \dots & \alpha_1+\beta_n \\ \alpha_2+\beta_1 & \alpha_2+\beta_2 & \alpha_2+\beta_3 & \dots & \alpha_2+\beta_n \\ \alpha_3+\beta_1 & \alpha_3+\beta_2 & \alpha_3+\beta_3 & \dots & \alpha_3+\beta_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n+\beta_1 & \alpha_n+\beta_2 & \alpha_n+\beta_3 & \dots & \alpha_n+\beta_n \end{vmatrix}.$$

Řešení. 0 pro $n > 2$, $(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_2 - \beta_1)$ pro $n = 2$, $\alpha_1 + \beta_1$ pro $n = 1$.

Příklad 7.31. Spočítejte $\det \mathbb{A}$, je-li $\mathbb{A} = (a_{i,j}) \in T^{n,n}$,

$$\text{a) } a_{i,j} = \min(i,j), \qquad \text{b) } a_{i,j} = \max(i,j), \qquad \text{c) } a_{i,j} = |i-j|.$$

Řešení. a) 1, b) $(-1)^{n+1}n$, c) $(-1)^{n+1}(n-1)2^{n-2}$.

Příklad 7.32. Rozhodněte, zda matice $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{4,4}$, kde

$$\text{a) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{c) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

je podobná diagonální matici. V kladném případě najděte $\mathbb{P} \in \mathbb{C}^{4,4}$ regulární a $\mathbb{D} \in \mathbb{C}^{4,4}$ diagonální tak, aby $\mathbb{A} = \mathbb{P}\mathbb{D}\mathbb{P}^{-1}$.

Řešení. a) Ano,

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Ano,

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

c) Ne.

Příklad 7.33. Buď A zobrazení zrcadlení v $\mathbb{R}^2$ podle přímky, která svírá s osou x úhel $\frac{\pi}{4}$. Sestavte matici $\mathbb{A} = {}^{\mathcal{E}_2}A$ zobrazení A vzhledem ke standardní bázi $\mathbb{R}^2$ a zjistěte, zda je matice $\mathbb{A}$ podobná diagonální matici. Pokud ano, napište relaci podobnosti (tzn. najděte $\mathbb{P} \in \mathbb{R}^{2,2}$ regulární a $\mathbb{D} \in \mathbb{R}^{2,2}$ diagonální tak, aby $\mathbb{A}\mathbb{P} = \mathbb{P}\mathbb{D}$).

Řešení.

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 7.34 (*)**.** Nechť $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3)$ je báze prostoru V_3 nad $\mathbb{C}$, $A \in \mathcal{L}(V_3)$. Zjistěte, zda je A diagonalizovatelný operátor; v kladném případě nalezněte diagonalizující bázi $\mathcal{Y} = (y_1, y_2, y_3)$ a určete ${}^{\mathcal{Y}}A$, je-li:

$$\text{a) } {}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 14 & -6 & -4 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } {}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & -4 \end{pmatrix}; \quad \text{c) } {}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Metoda řešení je zde obdobná jako v klasické úloze nalezení vlastních čísel a vlastních vektorů. Nicméně musíme počítat s tím, že je zadána matice zobrazení v jiné než standardní bázi! Výpočet spektra to nijak neovlivní, ovšem při hledání vlastních podprostorů musíme zpozornět – řešíme-li homogenní soustavy s maticí $(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{E} \mid \theta)$, v bázi řešení nefigurují přímo vlastní vektory operátoru ale jejich souřadnice v bázi $\mathcal{X}$!

a) $y_1 = -x_2 + x_3$, $y_2 = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3$, $y_3 = -x_1 - 4x_2 + 2x_3$,
${}^{\mathcal{Y}}A = \operatorname{diag}(2, -1, 1)$,

b) $y_1 = x_1 + x_2 + 2x_3$, $y_2 = 3(4-i)x_1 + 2(5+3i)x_2 + 17x_3$, $y_3 = 3(4+i)x_1 + 2(5-3i)x_2 + 17x_3$,
${}^{\mathcal{Y}}A = \operatorname{diag}(1, 2+3i, 2-3i)$,

c) není.

Příklad 7.35. Nechť $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in T^{n,n}$ jsou podobné. Dokažte, že platí následující tvrzení:

a) $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{B})$;

b) $\mathbb{A}^m, \mathbb{B}^m$ jsou podobné pro libovolné $m \in \mathbb{N}$;

c) Jsou-li navíc $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ regulární, potom jsou $\mathbb{A}^{-1}$, $\mathbb{B}^{-1}$ podobné.

Příklad 7.36. Dokažte, že libovolná matice $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ je regulární, právě když $0 \notin \sigma(\mathbb{A})$.

Příklad 7.37. Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ a $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ jsou vlastní čísla $\mathbb{A}$ (opakující se podle své algebraické násobnosti). Označme pomocí Tr $\mathbb{A}$ stopu, tj. součet diagonálních prvků matice $\mathbb{A}$. Dokažte, že platí následující tvrzení:

a) $\det \mathbb{A} = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$;

b) $\operatorname{Tr} \mathbb{A} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

Příklad 7.38. Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ je regulární, $\sigma(\mathbb{A}) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$. Dokažte, že platí následující tvrzení:

a) $\sigma(\mathbb{A}^{-1}) = \{\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_k^{-1}\}$;

b) každý vlastní vektor matice $\mathbb{A}$ je vlastním vektorem matice $\mathbb{A}^{-1}$;

c) $\mathbb{A}$ je diagonalizovatelná, právě když $\mathbb{A}^{-1}$ je diagonalizovatelná.