BI-LIN, Lineární algebra – cvičení

Daniel Dombek, Luděk Kleprlík, Karel Klouda

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze

LS 2019/2020

vytvořeno: 15. února 2022, 13:46

1 Úvod

Značení:

- ◇ $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ .... množina přirozených čísel bez nuly
- ◇ $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ .... množina nezáporných celých čísel
- ◇ $\mathbb{Z}$ .... množina celých čísel
- ◇ $\mathbb{Q}$ .... množina racionálních čísel
- ◇ $\mathbb{R}$ .... množina reálných čísel
- ◇ $\mathbb{C}$ .... množina komplexních čísel
- ◇ $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$ .... reálná a imaginární část $z \in \mathbb{C}$
- ◇ $\emptyset$ .... prázdná množina
- ◇ $\mathbb{P}$ .... množina polynomů
- ◇ $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .... uspořádaná n-tice čísel
- ◇ i .... imaginární jednotka (nebo sčítací index, dle kontextu)
- ◇ $\hat{n} = \{1, 2, \dots, n\}$ pro $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=k}^{\ell} a_i = \begin{cases} a_k + a_{k+1} + \cdots + a_\ell & \text{pokud } k \le \ell, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

$$\prod_{i=k}^{\ell} a_i = \begin{cases} a_k \cdot a_{k+1} \cdots a_\ell & \text{pokud } k \le \ell, \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases}$$

1.1 Komplexní čísla

Množinu komplexních čísel definujeme jako

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\},$$

kde i značí tzv. **imaginární jednotku**, číslo s vlastností $i^2 = -1$. Koeficienty $a, b \in \mathbb{R}$ popořadě nazýváme **reálnou** a **imaginární částí** $z \in \mathbb{C}$ a značíme je $a = \operatorname{Re} z, b = \operatorname{Im} z$.

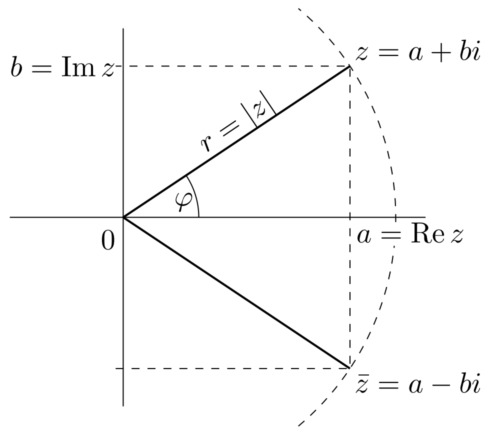
Pro dvě komplexní čísla triviálně (s využitím faktu $i^2 = -1$) platí:

$$(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i\,,$$
$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i\,.$$

Komplexní číslo $z = a + bi$ znázorňujeme v tzv. komplexní rovině jako bod o souřadnicích (a, b), viz obrázek 1. Číslem **komplexně sdruženým** k z nazveme číslo $\overline{z} = a - bi$.

Každý bod v rovině lze charakterizovat jednak souřadnicemi v kartézské soustavě souřadnic (a, b), jednak v tzv. **polárních souřadnicích**, jako bod, jehož vzdálenost od počátku $(0, 0)$ je rovna $r \geq 0$ a který svírá s osou x (zde s reálnou osou) úhel $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$. Z vlastností pravoúhlých trojúhelníků zřejmě plynou vztahy

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}\,, \quad a = r \cdot \cos\varphi\,, \quad b = r \cdot \sin\varphi\,.$$



Obrázek 1: Číslo $z \in \mathbb{C}$ v komplexní rovině

Tedy každé $z \in \mathbb{C}$ lze zapsat i v tomto **polárním tvaru** jako

$$z = a + bi = r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)\,,$$

kde $r \geq 0$ značí absolutní hodnotu (**velikost**) komplexního čísla a značíme ji $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Lze ověřit, že pro absolutní hodnotu a operaci komplexního sdružení platí jednoduché vlastnosti (kde $z, w \in \mathbb{C}$):

$$|z|^2 = z \cdot \overline{z}, \quad \overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}, \quad \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}\,.$$

Dále lze odvodit jednoduché pravidlo pro mocnění komplexních čísel, tzv. Moivreovu větu,

$$\begin{aligned} z^n &= \Big(r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)\Big)^n \\ &= r^n(\cos(n\varphi) + i \cdot \sin(n\varphi))\,, \end{aligned}$$

kde $n \in \mathbb{N}_0$.

Příklad 1.1. Nechť $z = 2 + 2\sqrt{3}i$. Převeďte z do polárního tvaru a poté vypočtěte

a) z^3,

b) $\sqrt{z}$.

Řešení. Nejprve vypočteme velikost čísla z, ta se rovná $|z| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = 4$. Tuto absolutní hodnotu pak vytkneme ze zadání a dále upravíme,

$$z = 2 + 2\sqrt{3}i = 4\big(\tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\big) = 4\big(\cos\tfrac{\pi}{3} + i\cdot\sin\tfrac{\pi}{3}\big)\,,$$

kde jsme využili známé tabulkové hodnoty funkcí sinus a kosinus.

a) $z^3 = 4^3\big(\cos(3\cdot\frac{\pi}{3}) + i\cdot\sin(3\cdot\frac{\pi}{3})\big)$, což se po úpravě rovná $z^3 = 64\big(\cos\pi + i\cdot\sin\pi\big) = 64(-1 + i\cdot 0)$, tedy $(2+2\sqrt{3}i)^3 = -64$.

b) Hledáme všechna $w \in \mathbb{C}$ taková, že $w^2 = z$. Označme velikost čísla w jako s a jemu příslušný úhel jako ψ. Tedy musí platit $s^2\big(\cos(2\psi) + i\cdot\sin(2\psi)\big) = 4\big(\cos\frac{\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{\pi}{3}\big)$. Z rovnosti absolutních hodnot plyne $s^2 = 4$, tedy $s = 2$. Další podmínkou je, aby dvojnásobek úhlu ψ měl stejnou hodnotu sinu a kosinu jako $\pi/3$ (tedy se může lišit jen o celočíselný násobek plného úhlu 2π). Dostáváme $2\psi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$, tedy $\psi = \frac{\pi}{6} + k\pi$. V intervalu $\langle 0, 2\pi)$ jsou jen dva úhly v takovém tvaru, a to $\psi \in \{\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\}$.

   Existují tedy dvě odmocniny w čísla $2 + 2\sqrt{3}i$, a to

$$w_1 = 2(\cos\tfrac{\pi}{6} + i\cdot\sin\tfrac{\pi}{6})\,, \quad w_2 = 2(\cos\tfrac{7\pi}{6} + i\cdot\sin\tfrac{7\pi}{6})\,,$$

   což ještě můžeme, se znalostí tabulkových hodnot, upravit na

$$\sqrt{2 + 2\sqrt{3}i} = \pm(\sqrt{3} + i)\,.$$

1.2 Polynomy

(Komplexním) **polynomem** je každé zobrazení $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, pro které existují $n \in \mathbb{N}_0$ a $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ takové, že

$$\forall x \in \mathbb{C} : p(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i\,.$$

Množinu všech polynomů značíme $\mathbb{P}$ a pro každý nenulový polynom definujeme jeho **stupeň** jako $\mathrm{st}(p) = \max\{j \in \mathbb{N}_0 : \alpha_j \neq 0\}$. Navíc stupeň **nulového polynomu** (všechny koeficienty $\alpha_i = 0$) definujeme -1.

Poznámka: Nulový polynom nemá stupeň nula, jak by se mohlo zdát! Stupeň nula mají totiž všechny nenulové konstantní polynomy, tj. polynomy s předpisem $p(x) = \alpha_0 \in \mathbb{C}$, kde $\alpha_0 \neq 0$.

Číslo $z \in \mathbb{C}$ nazveme **kořenem** polynomu $p \in \mathbb{P}$, platí-li $p(z) = 0$. Řekneme, že polynomy $p, q \in \mathbb{P}$ se **rovnají**, pokud platí $\forall x \in \mathbb{C} : p(x) = q(x)$. Díky faktu, že každý polynom je **jednoznačně** určen svými koeficienty, lze vyslovit ekvivalentní tvrzení, že polynomy se rovnají, pokud se rovnají jejich koeficienty (u příslušných mocnin samozřejmě).

Věta 1.2 (Základní vlastnosti polynomů)**.** *Základní věta algebry říká, že každý nekonstantní komplexní polynom má alespoň jeden komplexní kořen. Uvedeme několik upřesňujících tvrzení platných pro obecný komplexní polynom p stupně $n \geq 0$.*

1. *p má nejvýše n různých kořenů. Označíme-li je $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, existují jednoznačně určená čísla $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ (tzv. **násobnosti** kořenů) taková, že $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$ a platí*

$$\forall x \in \mathbb{C} : p(x) = \alpha_n \prod_{i=1}^{k} (x - \lambda_i)^{n_i}\,.$$

   *Tento zápis nazýváme **faktorizací** polynomu, nebo také jeho rozkladem na **kořenové činitele**.*

2. *Má-li p pouze reálné koeficienty, pak pro každé $\lambda \in \mathbb{C}$ platí: Je-li λ kořen p, pak i $\overline{\lambda}$ je kořenem p a oba mají stejnou násobnost.*
3. *Každý polynom s reálnými koeficienty lichého stupně má alespoň jeden reálný kořen.*
4. *Má-li p pouze celočíselné koeficienty a má-li alespoň jeden celočíselný kořen λ, pak konstantní koeficient polynomu α_0 je násobkem λ.*
5. *Každý polynom lze jednoznačně vydělit jiným nenulovým polynomem se zbytkem, tj.:*

$$\forall p, q \in \mathbb{P}, q \neq 0,\ \exists_1 r, z \in \mathbb{P} : (p = rq + z) \wedge (\mathrm{st}\,(z) < \mathrm{st}(q))\,.$$

Zdůrazněme, že se zde nebudeme podrobněji zabývat natolik elementárními pojmy, jako je násobení polynomů a jejich dělení se zbytkem – v tomto spoléháme na čtenáře a jeho vzpomínky na dřívější fáze vzdělávacího procesu! Typickým úkolem v této části kurzu bude nalézání všech kořenů zadaných polynomů, tedy jejich faktorizace. Jak budeme typicky postupovat:

- ◇ ($\mathrm{st}(p) = -1$) Nulový polynom má za kořen všechna komplexní čísla $\to$ triviální.
- ◇ ($\mathrm{st}(p) = 0$) Konstantní polynom (je nenulový!) žádný kořen nemá $\to$ triviální.
- ◇ ($\mathrm{st}(p) \in \{1, 2\}$) Pro lineární a kvadratické polynomy je to snadné, máme k dispozici elementární vzorečky,

$$\begin{aligned} p(x) &= \alpha_1 x + \alpha_0 && = \alpha_1(x - \lambda_1) && \Rightarrow \lambda_1 = -\tfrac{\alpha_0}{\alpha_1}\,, \\ p(x) &= \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0 && = \alpha_2(x - \lambda_1)(x - \lambda_2) && \Rightarrow \lambda_{1,2} = \tfrac{-\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_2\alpha_0}}{2\alpha_2}\,, \end{aligned}$$

  přičemž v kvadratickém případě lze také použít (i snadno odvodit) tzv. Viétovy vzorce:

$$\tfrac{\alpha_0}{\alpha_2} = \lambda_1\lambda_2\,, \quad \tfrac{-\alpha_1}{\alpha_2} = \lambda_1 + \lambda_2\,.$$

- ◇ ($\mathrm{st}(p) \in \{3, 4\}$) Pro kubické a kvartické polynomy vzorce sice existují, ale pro svou složitost jsou pro nás nepoužitelné.
- ◇ Pro obecné polynomy se $\mathrm{st}(p) \geq 5$ algebraické vzorce pro jejich kořeny neexistují!

S polynomy stupně ≥ 3 se budeme rutinně setkávat, jak tedy postupovat?

Příklad 1.3. Uveďme několik typových příkladů s polynomem vyššího stupně.

1. Nechť $p(x) = x^4 - 3x^2 - 4$. Jde o tzv. bikvadratický polynom, rovnici $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ lze řešit substitucí $t = x^2$, tedy $t^2 - 3t - 4 = 0$ s mezivýsledkem $t_1 = 4, t_2 = -1$. Zpětná substituce vede na dvě rovnice, $x^2 - 4 = 0$ s řešeními $x_1 = 2, x_2 = -2$ a $x^2 + 1 = 0$ s řešeními $x_3 = i, x_4 = -i$. Tedy
$$x^4 - 3x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)(x - i)(x + i)\,.$$
2. Nechť $q(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ a $r(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 6$. Při troše trpělivosti lze u obou polynomů rovnou odhalit jednoduchý rozklad na polynomy nižších stupňů (které pak už faktorizujeme triviálně)! Konkrétně,

$$\begin{aligned} q(x) =& (x^3 - x^2) - (x - 1) = x^2(x - 1) - (x - 1) = (x^2 - 1)(x - 1) \\ =& (x - 1)^2(x + 1)\,, \\ r(x) =& (x^3 + 2x) - (3x^2 + 6) = x(x^2 + 2) - 3(x^2 + 2) = (x - 3)(x^2 + 2) \\ =& (x - 3)(x - \sqrt{2}i)(x + \sqrt{2}i)\,. \end{aligned}$$

3. Nechť $s(x) = x^4 + x^3 - 6x^2 - 4x + 8$, žádný přímočarý rozklad na polynomy nižšího stupně nás pravděpodobně nenapadá. Jelikož jde o polynom s celočíselnými koeficienty, využijeme bod 4. věty 1.2 – pokud má polynom s nějaký celočíselný kořen (v to upřímně doufáme!), pak jde o dělitele konstantního koeficientu 8, kandidáty na kořen jsou tedy $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$.

   Postupným zkoušením ověřujeme kandidáty na kořeny, dokud neuspějeme, označme nalezený kořen jako λ. Pak z částí 1. a 5. věty 1.2 víme, že lze polynom s vydělit beze zbytku, $s(x) = (x - \lambda)s'(x)$ a získat polynom s' nižšího stupně. Tento postup opakujeme, dokud nezískáme kvadratický polynom, jehož rozklad je triviální,

$$\begin{aligned} s(x) =& x^4 + x^3 - 6x^2 - 4x + 8 && \textit{(kandidáti } \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \textit{ nalezeno } \lambda = 1\textit{)} \\ =& (x-1)(x^3 + 2x^2 - 4x - 8) && \textit{(stejní kandidáti, } 1 \textit{ už není kořenem, nalezeno } \lambda = -2\textit{)} \\ =& (x-1)(x+2)(x^2 - 4) && \textit{(rozklad zřejmý, } 2 \textit{ je nový kořen, } -2 \textit{ dvojnásobný)} \\ =& (x-1)(x-2)(x+2)^2 \end{aligned}$$

1.3 Lineární rovnice

Nechť $x, y \in \mathbb{R}$. Dvojici (x, y) lze interpretovat jako bod v $\mathbb{R}^2$ zadaný v pravoúhlém souřadném systému s počátkem $(0, 0)$. Každá lineární rovnice o dvou neznámých tvaru

$$a_1 x + a_2 y = b\,,$$

kde $a_1, a_2, b \in \mathbb{R}$ a současně neplatí $a_1 = a_2 = 0$, určuje **přímku** v rovině – množina všech jejích řešení (x, y) tvoří přímku.

Nechť je dána soustava více rovnic o dvou neznámých,

$$\begin{aligned} a_{1,1}x + a_{1,2}y &= b_1 \\ a_{2,1}x + a_{2,2}y &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m,1}x + a_{m,2}y &= b_m \end{aligned}$$

Pak hledáme dvojice (x, y), které splňují všechny dané rovnice, tedy body v rovině, které leží na všech příslušných přímkách současně (tj. v jejich průniku). Zřejmě mohou nastat tři možnosti,

1. neexistuje žádné řešení (přímky se neprotínají),
2. existuje právě jedno řešení (protínají se všechny v jednom bodě),
3. řešení existuje nekonečně mnoho a navíc tvoří přímku (pokud všechny rovnice určují jednu a tutéž přímku).

Podobně lze pracovat s trojicemi reálných čísel, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Každá lineární rovnice o třech neznámých tvaru

$$a_1 x + a_2 y + a_3 z = b\,,$$

kde $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ a současně neplatí $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, určuje **rovinu** v třírozměrném prostoru s počátkem $(0, 0, 0)$. Soustava více takových rovnic pak může mít množinu řešení rovnu prázdné množině (značené $\emptyset$), bodu, přímce, nebo rovině.

Analogicky, byť s notnou dávkou představivosti, lze i s n-ticemi reálných čísel (pro **libovolné** n přirozené!), značenými $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, pracovat jako se souřadnicemi bodů v n-rozměrném prostoru. Přitom i tady lze body, přímky, roviny, i další objekty (které budeme v pokročilé části kurzu nazývat lineárními varietami) popisovat pomocí soustav lineárních rovnic s neznámými $x_1, \ldots, x_n$.

Příklad 1.4. Nalezněte průnik následujících dvou přímek v $\mathbb{R}^2$:

$$p : y = 3 - 2x, \qquad q : x - 2y = 1\,.$$

Řešení. Soustavu lze přepsat do standardního tvaru

$$\begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & 3, \\ x & - & 2y & = & 1, \end{array}$$

můžeme ale rovnou dosadit z první zadané rovnice do druhé,

$$x - 2y = 1 \;\Rightarrow\; x - 2(3 - 2x) = 1 \;\Rightarrow\; 5x - 6 = 1 \;\Rightarrow x = \tfrac{7}{5} \;\Rightarrow\; y = 3 - 2 \cdot \tfrac{7}{5} \;\Rightarrow\; y = \tfrac{1}{5}\,.$$

Přímky se tedy protínají pouze v jednom bodě a platí $p \cap q = \{(\frac{7}{5}, \frac{1}{5})\}$.

Příklad 1.5. Sestavte lineární rovnici, jejímž řešením bude přímka v rovině procházející body $(1,1)$ a $(2,6)$.

Řešení. Hledáme rovnici ve tvaru $p : ax + by = c$. Ta musí platit, pokud dosadíme $(x,y) = (1,1)$ a podobně pro druhý zadaný bod, přitom našimi neznámými jsou aktuálně parametry $a, b, c \in \mathbb{R}$. Dostáváme následující soustavu, kterou snadno vyřešíme, například vhodným odečítáním získaných rovnic:

$$\begin{array}{l} (1,1) \in p \\ (2,6) \in p \end{array} \;\Rightarrow\; \begin{array}{rl} a \cdot 1 + b \cdot 1 & = c \\ a \cdot 2 + b \cdot 6 & = c \end{array} \;\Rightarrow\; \begin{array}{rl} a + b & = c \\ 2a + 6b - 2(a+b) & = c - 2c \end{array} \;\Rightarrow\; \begin{array}{rl} a + b & = c \\ 4b & = -c \end{array} \;\Rightarrow\; \begin{array}{rl} a + b & = c \\ b & = -\frac{c}{4}\,, \end{array}$$

z čehož plyne $a = \frac{5c}{4}$ a $b = -\frac{c}{4}$. Jelikož jsme použili obě zadané rovnice, poslední parametr $c \in \mathbb{R}$ si můžeme libovolně zvolit, tedy například $c = 4$ (pro „hezčí“ výsledek). Hledaná přímka je určená rovnicí

$$p : 5x - y = 4\,.$$

Příklad 1.6. Nalezněte průnik následujících dvou rovin v $\mathbb{R}^3$:

$$r : x + y = 0, \qquad s : z = x - 2y + 3\,.$$

Řešení. Z první rovnice plyne $y = -x$ a po dosazení do druhé dostáváme $z = x - 2y + 3 = x - 2(-x) + 3 = 3x + 3$. Jelikož další podmínku nemáme, proměnnou $x \in \mathbb{R}$ lze zvolit libovolně, jako tzv. **parametr**. Průnikem zadaných dvou rovin je tedy množina bodů, kterou lze zapsat např. jako

$$r \cap s = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = -x \wedge z = 3x + 3\big\}\,.$$

Po krátké úvaze lze dojít k závěru, že se jedná o přímku, kterou lze alternativně také zapsat

$$r \cap s = \{(t, -t, 3t+3) : t \in \mathbb{R}\} = \big\{(0,0,3) + t \cdot (1,-1,3) : t \in \mathbb{R}\big\}\,,$$

přičemž k vysvětlení posledního zvoleného způsobu zápisu se dostaneme později.

1.4 Počítání modulo

Všechny doposud prováděné výpočty, zápisy, problémy a tak dále se odehrávaly v tzv. **tělese** komplexních čísel, které značíme $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ – tím dáváme najevo, že pracujeme s prvky množiny komplexních čísel $\mathbb{C}$, na které aplikujeme výpočetní operace $+$ a $\cdot$, obyčejné sčítání a násobení. Ty splňují jisté vlastnosti/axiomy, ale o tom se dozvíme více až na přednáškách.

Přejdeme do „jiného světa“, do jiného tělesa. Nechť p je **prvočíslo**, tedy celé číslo $p \geq 2$, které je dělitelné ze všech přirozených čísel pouze jedničkou a samo sebou. Budeme pracovat v tělese

$$(\mathbb{Z}_p, +_p, \cdot_p), \text{ kde } \mathbb{Z}_p = \{0, 1, \ldots, p-1\}$$

a operace $+_p, \cdot_p$ se nazývají sčítání a násobení **modulo p**. Pro libovolné prvky $x, y \in \mathbb{Z}_p$ je výsledek $x +_p y$, resp. $x \cdot_p y$, definován jako zbytek součtu $x + y$, resp. součinu $x \cdot y$, po dělení prvočíslem p. Jediná zdánlivě problematická operace je dělení, tedy přesněji řešení rovnice $a \cdot_p x = 1$ pro zadané $a \in \mathbb{Z}_p$. Prozradíme, že je-li p prvočíslo, tato rovnice má vždy právě jedno řešení, tedy lze dělit jednoznačně. (My budeme tuto rovnici řešit dosazováním všech prvků pro malá p, obecné řešení necháme na předmět BI-ZDM.) Především z tohoto důvodu platí, že $\mathbb{Z}_p$ je těleso, právě když p je prvočíslo. (Zkuste odhalit, kterým prvkem nelze jednoznačně dělit v $\mathbb{Z}_4$.) Nebude-li hrozit nedorozumění, budeme v dalším používat značení $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ pro těleso $\mathbb{Z}_p$ s operacemi modulo p. Obě operace se dají přehledně ilustrovat tabulkou, viz příklad 1.7.

Příklad 1.7. Tabulky operací $+_p$ a $\cdot_p$ pro malá prvočíselná modula p:

$p = 2$:

$+_2$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot_2$	0	1
0	0	0
1	0	1

$p = 5$:

$+_5$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\cdot_5$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Příklad 1.8. V pokoji máme pět žárovek (značíme $z_1, \ldots, z_5$) a pět vypínačů (značíme $v_1, \ldots, v_5$), u všech jsou možné pouze dva stavy, vypnuto/zapnuto. Na zapojení všech žárovek jsme si najali elektrikáře, který je v rozverné náladě zapojil následovně:

- jsou-li všechny vypínače vypnuty, nesvítí ani jedna žárovka,
- v_1 přepíná žárovky z_1 a z_2,
- v_2 přepíná žárovky z_2, z_4 a z_5,
- v_3 přepíná žárovky z_1 a z_3,
- v_4 přepíná žárovky z_2, z_3 a z_4,
- v_5 přepíná žárovky z_2 a z_5.

Určete, které vypínače musíme zapnout, aby všechny žárovky svítily.

Řešení. Označíme-li stavy vypnuto/zapnuto jak u žárovek, tak u vypínačů 0, resp. 1, dostáváme úlohu v $\mathbb{Z}_2$ ve tvaru soustavy lineárních rovnic! Jelikož žárovku z_1 ovládají vypínače v_1 a v_3 a my chceme, aby svítila, dostáváme rovnici $v_1 + v_3 = 1$ (počítání modulo 2 přirozeně koresponduje s pozorováním z reálného života, že pokud něco dvakrát za sebou přepneme, nic se většinou nestane). Totéž opakujeme u dalších žárovek a dostáváme soustavu

$$\begin{array}{cccccl} v_1 & & +v_3 & & & = 1\,, \\ v_1 & +v_2 & & +v_4 & +v_5 & = 1\,, \\ & & v_3 & +v_4 & & = 1\,, \\ & v_2 & & +v_4 & & = 1\,, \\ & v_2 & & & +v_5 & = 1\,. \end{array}$$

Tato soustava se dá řešit různě, sčítáním rovnic s využitím faktu $1+1=0$, nebo například postupným dosazováním. Zkusíme druhý způsob. Z poslední rovnice plyne $v_5 = v_2 - 1$ (což je v $\mathbb{Z}_2$ totéž jako $v_5 = v_2 + 1$!), po dosazení do ostatních (do druhé rovnice) dostáváme

$$\begin{array}{ccccl} v_1 & & +v_3 & & = 1\,, \\ v_1 & & & +v_4 & = 0\,, \\ & & v_3 & +v_4 & = 1\,, \\ & v_2 & & +v_4 & = 1\,. \end{array}$$

Proceduru opakujeme s vyjádřením $v_4 = v_2 + 1$ ze čtvrté rovnice a dosazením

$$\begin{array}{cccl} v_1 & & +v_3 & = 1\,, \\ v_1 & +v_2 & & = 1\,, \\ & v_2 & +v_3 & = 0\,, \end{array}$$

z čehož už rovnou zjišťujeme, že $v_2 = v_3 = v_1 + 1$ a žádnou další podmínku nemáme. Zvolme v_1 za parametr, může nabývat dvou hodnot, 0 nebo 1. V závislosti na něm pak odvodíme ostatní proměnné:

$$v_1 = 1 \Rightarrow v_2 = v_3 = 0 \Rightarrow v_4 = 1 \Rightarrow v_5 = 1\,,$$
$$v_1 = 0 \Rightarrow v_2 = v_3 = 1 \Rightarrow v_4 = 0 \Rightarrow v_5 = 0\,.$$

Požadované řešení tedy splňuje $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) \in \{(1,0,0,1,1), (0,1,1,0,0)\}$ a řešením naší prekérní situace je sepnout buďto současně vypínače 1,4 a 5, nebo současně vypínače 2 a 3.

1.5 Cvičení

Příklad 1.9. Pro každé z následujících komplexních čísel $z \in \mathbb{C}$ vždy zjistěte jeho velikost $|z|$, převeďte jej do polárního tvaru a vypočítejte zadané mocniny nebo odmocniny:

a) $z = 1 + i$: $z^2 =?$, $z^3 =?$

b) $z = i$: $\sqrt{z} =?$, $\sqrt[3]{z} =?$

c) $z = \sqrt{3} + i$: $z^2 =?$, $z^3 =?$

d) $z = 1$: $\sqrt[3]{z} =?$, $\sqrt[4]{z} =?$

e) $z = -1$: $\sqrt[3]{z} =?$, $\sqrt[4]{z} =?$

Řešení. a)
$$\begin{aligned} 1+i &= \sqrt{2}\big(\cos(\tfrac{\pi}{4}) + i\sin(\tfrac{\pi}{4})\big), \\ (1+i)^2 &= 2\big(\cos(\tfrac{\pi}{2}) + i\sin(\tfrac{\pi}{2})\big) && = 2i, \\ (1+i)^3 &= 2\sqrt{2}\big(\cos(\tfrac{3\pi}{4}) + i\sin(\tfrac{3\pi}{4})\big) && = -2+2i. \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} i &= 1\big(\cos(\tfrac{\pi}{2}) + i\sin(\tfrac{\pi}{2})\big), \\ \sqrt{i} &= 1\big(\cos(\tfrac{\pi}{4} + k\pi) + i\sin(\tfrac{\pi}{4} + k\pi)\big) && \in \{\pm\tfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\}, \\ \sqrt[3]{i} &= 1\big(\cos(\tfrac{\pi}{6} + \tfrac{2}{3}k\pi) + i\sin(\tfrac{\pi}{6} + \tfrac{2}{3}k\pi)\big) && \in \{\pm\tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{1}{2}i, -i\}. \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}
\sqrt{3}+i &= 2\big(\cos(\tfrac{\pi}{6})+i\sin(\tfrac{\pi}{6})\big), \\
(\sqrt{3}+i)^2 &= 4\big(\cos(\tfrac{\pi}{3})+i\sin(\tfrac{\pi}{3})\big) &&= 2(1+\sqrt{3}i), \\
(\sqrt{3}+i)^3 &= 8\big(\cos(\tfrac{\pi}{2})+i\sin(\tfrac{\pi}{2})\big) &&= 8i.
\end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned}
1 &= 1\big(\cos 0+i\sin 0\big), \\
\sqrt[3]{1} &= 1\big(\cos(0+\tfrac{2}{3}k\pi)+i\sin(0+\tfrac{2}{3}k\pi)\big) &&\in \{1, -\tfrac{1}{2}\pm\tfrac{\sqrt{3}}{2}i\}, \\
\sqrt[4]{1} &= 1\big(\cos(0+\tfrac{1}{2}k\pi)+i\sin(0+\tfrac{1}{2}k\pi)\big) &&\in \{\pm 1, \pm i\}.
\end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned}
-1 &= 1\big(\cos\pi+i\sin\pi\big), \\
\sqrt[3]{-1} &= 1\big(\cos(\tfrac{\pi}{3}+\tfrac{2}{3}k\pi)+i\sin(\tfrac{\pi}{3}+\tfrac{2}{3}k\pi)\big) &&\in \{\tfrac{1}{2}\pm\tfrac{\sqrt{3}}{2}i, -1\}, \\
\sqrt[4]{-1} &= 1\big(\cos(\tfrac{\pi}{4}+\tfrac{1}{2}k\pi)+i\sin(\tfrac{\pi}{4}+\tfrac{1}{2}k\pi)\big) &&\in \{\pm\tfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i), \pm\tfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\}.
\end{aligned}$$

Příklad 1.10. Vyjádřete následující komplexní čísla ve tvaru $a+bi$ *(Tip: k výpočtu čísla tvaru $\frac{1}{z}$ využijte vlastnosti $z\cdot\overline{z}=|z|^2$)*:

a) $\frac{1}{3+i}$,

b) $\frac{1}{3+2i}$,

c) $\frac{1}{3-4i}$,

d) $\frac{10}{3i-1}$.

Řešení. a) $\frac{1}{3+i}=\frac{3}{10}-\frac{1}{10}i$,

b) $\frac{1}{3+2i}=\frac{3}{13}-\frac{2}{13}i$,

c) $\frac{1}{3-4i}=\frac{3}{25}+\frac{4}{25}i$,

d) $\frac{10}{3i-1}=-1-3i$.

Příklad 1.11. Najděte všechny kořeny (i s jejich násobnostmi) následujících polynomů:

a) x^3+4x^2+x-6,

b) x^3-3x^2+3x-1,

c) $x^3-7x^2+16x-12$,

d) x^4-1,

e) x^5-x^3-2x,

f) x^4+2x^2+1,

g) $x^4-2x^3-9x^2+18x$,

h) x^4-2x^3+2x-1.

Řešení. a) $x^3+4x^2+x-6=(x+3)(x+2)(x-1)$
má tři jednoduché kořeny $-3,-2,1$.

b) $x^3-3x^2+3x-1=(x-1)^3$
má jeden trojnásobný kořen 1.

c) $x^3-7x^2+16x-12=(x-2)^2(x-3)$
má dvojnásobný kořen 2 a jednoduchý 3.

d) $x^4-1=(x+1)(x-1)(x+i)(x-i)$
má čtyři jednoduché kořeny $\pm1,\pm i$.

e) $x^5-x^3-2x=x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+i)(x-i)$
má pět jednoduchých kořenů $0,\pm\sqrt{2},\pm i$.

f) $x^4+2x^2+1=(x+i)^2(x-i)^2$
má dva dvojnásobné kořeny $\pm i$.

g) $x^4-2x^3-9x^2+18x=x(x-2)(x-3)(x+3)$
má čtyři jednoduché kořeny $0,2,\pm3$.

h) $x^4-2x^3+2x-1=(x+1)(x-1)^3$
má jednoduchý kořen -1 a trojnásobný 1.

Příklad 1.12. Nalezněte průniky následujících dvojic přímek v $\mathbb{R}^2$:

a) $\begin{aligned} p: &\quad x - 3y = 2, \\ q: &\quad 2x + y = 1. \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} p: &\quad x - y = 2, \\ q: &\quad 2y - 2x = 3. \end{aligned}$

Řešení. a) $\{(\frac{5}{7}, -\frac{3}{7})\}$ b) $\emptyset$

Příklad 1.13. Nalezněte průniky následujících dvojic/trojic rovin v $\mathbb{R}^3$:

a) $\begin{aligned} \rho: &\quad x + 2y + z = 1, \\ \sigma: &\quad 2x + 2z = 5 - 4y. \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} \rho: &\quad 2x - y - z = 0, \\ \sigma: &\quad x + 2y = 1, \\ \tau: &\quad y + z = 8. \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} \rho: &\quad x + y - z = 1, \\ \sigma: &\quad 3x + 2z = 5. \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} \rho: &\quad x - y + z = 1, \\ \sigma: &\quad y - x + z = 2, \\ \tau: &\quad 2x - 2y + 1 = 0. \end{aligned}$

Řešení. *a)* $\emptyset$, *b)* $\{(4, -\frac{3}{2}, \frac{19}{2})\}$, *c)* $\{(x, \frac{7}{2} - \frac{5}{2}x, \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x)\ ,\ x \in \mathbb{R}\}$, *d)* $\{(x, x + \frac{1}{2}, \frac{3}{2})\ ,\ x \in \mathbb{R}\}$.

Příklad 1.14. Sestavte rovnice

a) přímky v $\mathbb{R}^2$ procházející body $(0, 1)$ a $(3, 3)$,

b) přímky v $\mathbb{R}^2$ procházející body $(-1, 1)$ a $(2, 10)$,

c) roviny v $\mathbb{R}^3$ procházející body $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$ a $(0, 1, 1)$,

d) roviny v $\mathbb{R}^3$ procházející body $(2, 0, 0)$, $(0, -1, 1)$ a $(0, 1, 1)$.

Řešení. *a)* $2x - 3y = -3$, *b)* $3x - y = -4$, *c)* $x + y + z = 2$, *d)*$x + 2z = 2$.

Příklad 1.15. Vyřešte následující soustavy rovnic:

a) Pro $x, y, z \in \mathbb{Z}_2$: $\begin{aligned} x + y + z &= 1, \\ y + z &= 0. \end{aligned}$

b) Pro $x, y, z, t \in \mathbb{Z}_2$: $\begin{aligned} x + y &= 1, \\ x + t &= 0, \\ x + z + t &= 1. \end{aligned}$

c) Pro $x, y, z, t \in \mathbb{Z}_2$: $\begin{aligned} x + y + t &= 1, \\ x + t &= 0, \\ y + t &= 1. \end{aligned}$

d) Pro $x, y, z \in \mathbb{Z}_3$: $\begin{aligned} x + y &= 2, \\ y + z &= 1. \end{aligned}$

e) Pro $x, y, z \in \mathbb{Z}_3$: $\begin{aligned} x + 2y + z &= 0, \\ y + z &= 1, \\ x + z &= 2. \end{aligned}$

f) Pro $x, y, z, t \in \mathbb{Z}_3$: $\begin{aligned} x + y + z + t &= 0, \\ y + z &= 1, \\ z + t &= 1. \end{aligned}$

Řešení. a) v $\mathbb{Z}_2$: $(x, y, z) \in \{(1, 0, 0), (1, 1, 1)\}$,

b) v $\mathbb{Z}_2$: $(x, y, z, t) \in \{(0, 1, 1, 0), (1, 0, 1, 1)\}$,

c) v $\mathbb{Z}_2$: $(x, y, z, t) \in \{(0, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0)\}$,

d) v $\mathbb{Z}_3$: $(x, y, z) \in \{(1, 1, 0), (2, 0, 1), (0, 2, 2)\}$,

e) v $\mathbb{Z}_3$: $(x, y, z) \in \{(0, 2, 2)\}$,

f) v $\mathbb{Z}_3$: $(x, y, z, t) \in \{(2, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 1), (0, 2, 2, 2)\}$.

2 Matice a soustavy lineárních rovnic

Značení:

- $\mathbb{R}^{m,n}$ .... množina všech reálných matic o m řádcích a n sloupcích
- $a_{ij} = \mathbb{A}_{ij}$ .... prvek matice $\mathbb{A}$ v $i$tém řádku a $j$tém sloupci
- $\mathbb{A}^T \in \mathbb{R}^{n,m}$ .... matice transponovaná k $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$
- $\theta \in \mathbb{R}^{n,1}$ .... nulový vektor v $\mathbb{R}^{n,1}$, $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^T$

2.1 Základy maticového počtu

Zavedené operace sčítání matic a násobení matice číslem jsou jednoduché, definované tzv. po složkách. Definici maticového násobení raději připomeneme. Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ a $\mathbb{B} \in \mathbb{R}^{n,p}$ (s prvky značenými popořadě a_{ij}, resp. b_{ij}) pro nějaká $m, n, p \in \mathbb{N}$, pak pro součin těchto matic platí $\mathbb{AB} \in \mathbb{R}^{m,p}$ a

$$\forall i \in \hat{m}, \forall j \in \hat{p} : (\mathbb{AB})_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \,.$$

Doplňme ještě základní vlastnosti daných tří operací, kde vždy předpokládáme $\alpha \in \mathbb{R}$ a matice $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{D}$ s takovými rozměry, že všechny výrazy níže mají smysl:

1. $\mathbb{A} + \mathbb{B} = \mathbb{B} + \mathbb{A}$,
2. $\mathbb{A} + (\mathbb{B} + \mathbb{D}) = (\mathbb{A} + \mathbb{B}) + \mathbb{D}$,
3. $\alpha(\mathbb{A} + \mathbb{B}) = \alpha\mathbb{A} + \alpha\mathbb{B}$,
4. $\mathbb{A}(\mathbb{BD}) = (\mathbb{AB})\mathbb{D}$,
5. $\mathbb{A}(\mathbb{B} + \mathbb{D}) = \mathbb{AB} + \mathbb{AD}$,
6. $(\mathbb{A} + \mathbb{B})\mathbb{D} = \mathbb{AD} + \mathbb{BD}$,
7. $\alpha(\mathbb{AB}) = (\alpha\mathbb{A})\mathbb{B} = \mathbb{A}(\alpha\mathbb{B})$,
8. $(\mathbb{AB})^T = \mathbb{B}^T\mathbb{A}^T$.

Příklad 2.1. Pro zadané reálné matice

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{D} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

vypočtěte následující součiny a součty (jsou-li definovány):

a) $\mathbb{AB}$
b) $\mathbb{BA}$
c) $\mathbb{AD}$
d) $\mathbb{DA}$
e) $\mathbb{BD}$
f) $\mathbb{DB}$
g) $\mathbb{ABD}$
h) $\mathbb{DBA}$
i) $\mathbb{BDA}$
j) $\mathbb{BAD}$
k) $\mathbb{AD} + \mathbb{B}$
l) $\mathbb{DA} + \mathbb{B}$

Řešení.

a) $\mathbb{AB} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -1 \\ 24 & 14 & 0 \end{pmatrix}$,

b) $\mathbb{BA}$ není definován,

c) $\mathbb{AD} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 16 \end{pmatrix}$,

d) $\mathbb{DA} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 2 & 10 & 8 \\ 0 & 6 & 12 \end{pmatrix}$,

e) $\mathbb{BD} = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 2 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$,

f) $\mathbb{DB}$ není definován,

g) $\mathbb{ABD} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 28 & 4 \end{pmatrix}$,

h) $\mathbb{DBA}$ není definován,

i) $\mathbb{BDA} = \begin{pmatrix} -2 & -18 & -24 \\ 2 & 6 & 0 \\ 6 & 20 & 4 \end{pmatrix}$,

j) $\mathbb{BAD}$ není definován,

k) $\mathbb{AD} + \mathbb{B}$ není definován,

l) $\mathbb{DA} + \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 4 & 11 & 8 \\ 5 & 9 & 12 \end{pmatrix}$.

Příklad 2.2. Pro matici $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$ odvoďte předpis pro obecnou mocninu $\mathbb{A}^n$, kde $n \in \mathbb{N}$. Jeho správnost dokažte.

Řešení. Postupným napočítáváním mocnin $\mathbb{A}^n$,

$$\mathbb{A}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots$$

dojdeme k podezření, že by mohlo platit

$$\mathbb{A}^n \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Toto podezření dokážeme matematickou indukcí, důkaz provedeme ve dvou krocích:

1. Základní krok: Pro volbu $n = 1$ je tvrzení $\mathbb{A}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ triviálně splněno.

2. Indukční krok (platí-li tvrzení pro libovolné $n \geq 1$, platí i pro $n + 1$): Předpokládejme, že platí $\mathbb{A}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pak jednoduše odvodíme (IP značí použití indukčního předpokladu), že

$$\mathbb{A}^{n+1} \stackrel{def}{=} \mathbb{A} \cdot \mathbb{A}^n \stackrel{IP}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

tedy tvrzení platí i pro $n + 1$ a naše hypotéza je dokázána pro každé $n \in \mathbb{N}$.

2.2 Soustavy lineárních rovnic, GEM

V následující části budeme téměř výhradně řešit soustavy rovnic (obecně soustavy m rovnic pro n neznámých, kde $m, n \in \mathbb{N}$ jsou libovolné), ve tvaru

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & = & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m,
\end{array}
$$

přičemž namísto $x_1, x_2, \ldots, x_n$ lze často (při „malém konkrétním“ n) neznámé značit bez použití indexů, tj. $x, y, z, t, \ldots$.

Řešenou soustavu budeme vždy zapisovat v maticovém tvaru. Označíme-li

$$
\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m,n}, \qquad \mathbb{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n,1}, \qquad \mathbb{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m,1},
$$

daná soustava je pak (díky maticovému násobení) ekvivalentní rovnici

$$
\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}\,.
$$

Při samotném řešení pak pracujeme s **rozšířenou maticí soustavy**, tedy používáme zápis

$$
(\mathbb{A} \mid \mathbb{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).
$$

Na přednášce jsme dosud neprobrali všechnu potřebnou teorii ke struktuře množiny všech řešení soustav tvaru $\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$, z různých pozorování, která již máme k dispozici, jmenujme alespoň toto: *Je-li $\tilde{\mathbb{x}}$ nějaké řešení soustavy $\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$, potom pro tuto soustavu platí, že $S = \tilde{\mathbb{x}} + S_0$, kde S_0 je množina všech řešení přidružené homogenní rovnice $\mathbb{A}\mathbb{x} = \theta$.*

Proto kdykoliv bude v této části zadáno „vyřešit soustavu lineárních rovnic“, slovo **vyřešit** budeme chápat v následujícím významu:

1. Poznat, zda má soustava alespoň jedno řešení nebo nemá řešení žádné.

2. Poznat, jestli má daná soustava právě jedno řešení nebo jich má nekonečně mnoho.

3. V případě, že má soustava právě jedno řešení, toto řešení nalézt.

4. V případě, že má soustava více než jedno řešení, nalézt jich co nejvíce.

K ověření řešitelnosti a snadnému hledání řešení budeme používat **Gaussovu eliminační metodu (GEM)**, spočívající v opakované aplikaci tří elementárních úprav,

(G1) prohození dvou řádků,

(G2) vynásobení jednoho řádku matice nenulovým číslem,

(G3) přičtení libovolného násobku jednoho řádku k jinému,

na rozšířenou matici soustavy (tím neměníme množinu řešení), s cílem převést ji do tzv. horního stupňovitého tvaru, viz. následující definice. Aplikaci úprav $(G1) - (G3)$ můžeme značit buďto jednoduše vlnovkou $\sim$, nebo podrobněji viz. příklady níže.

Definice 2.3. *O matici $\mathbb{D} \in \mathbb{R}^{m,n}$ řekneme, že je v* ***horním stupňovitém tvaru****, jestliže všechny řádky jsou nulové, nebo existuje $k \in \{1, \ldots, m\}$ tak, že řádky 1 až k matice $\mathbb{D}$ jsou nenulové a řádky $k+1$ až m jsou nulové a jestliže platí následující:*

Označme pro každé $i \in \{1, 2 \ldots, k\}$ index nejlevějšího nenulového prvku v itém řádku jako j_i, tj.

$$j_i = \min\{\ell \in \{1, \ldots, n\} \mid \mathbb{D}_{i\ell} \neq 0\}.$$

Potom platí $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k$.

Je-li matice v horním stupňovitém tvaru, potom sloupcům s indexy $j_1, j_2, \ldots, j_k$ říkáme ***hlavní sloupce****, ostatním říkáme* ***vedlejší sloupce****.*

O soustavě $\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$ řekneme, že je v horním stupňovitém tvaru, pokud matice této soustavy $(\mathbb{A} \mid \mathbb{b})$ je v horním stupňovitém tvaru.

Řešitelnost soustavy, případně počet jejích řešení, vyhodnotíme přímo z horního stupňovitého tvaru dle následující věty. Samotná řešení nalezneme postupným vyhodnocováním příslušných rovnic odspoda nahoru.

Věta 2.4. *Mějme soustavu lineárních rovnic $\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$, kde $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ a matice $(\mathbb{A} \mid \mathbb{b})$ je v horním stupňovitém tvaru. Pak nastává právě jeden z následujících případů:*

(i) Je-li poslední sloupec matice $(\mathbb{A} \mid \mathbb{b})$ hlavní, soustava nemá řešení.

(ii) Je-li poslední sloupec matice $(\mathbb{A} \mid \mathbb{b})$ jediný vedlejší sloupec, má soustava právě jedno řešení.

(iii) Je-li poslední sloupec matice $(\mathbb{A} \mid \mathbb{b})$ vedlejší a existuje-li ještě jiný vedlejší sloupec, má soustava více než jedno řešení.

Příklad 2.5. Vyřešte v $\mathbb{R}$ soustavu

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
x & + & 2y & - & 3z & & & = & 1, \\
x & - & y & & & + & t & = & -1, \\
 & & 2y & - & 2z & & & = & 3, \\
2x & + & y & + & z & + & t & = & 0.
\end{array}$$

Řešení. Soustavu převedeme do maticového tvaru a upravujeme pomocí GEM, jejíž kroky budeme v tomto příkladu podrobně popisovat. Poznamenejme, že neexistuje jediný možný způsob postupu – můžeme se pouze snažit o „rozumný“ postup, především s cílem vyhnout se zbytečně velkým koeficientům a zlomkům v matici soustavy.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{ř1}-\text{ř3}]{G3} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{ř2}-\text{ř1},\text{ř4}-2*\text{ř1}]{G3} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-1*\text{ř2}]{G2} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{ř3}-2*\text{ř2},\text{ř4}-\text{ř2}]{G3} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{ř3}\leftrightarrow\text{ř2}]{G1} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{ř3}-\text{ř4}]{G3} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

Výsledná matice je v horním stupňovitém (dokonce trojúhelníkovém) tvaru, má jediný vedlejší sloupec (ten poslední) a má tedy právě jedno řešení. Vyhodnocováním rovnic a postupným dosazováním odspoda nahoru dostáváme

$$S = \{(-2, \tfrac{3}{2}, 0, \tfrac{5}{2})\}\,.$$

Příklad 2.6. Vyřešte v $\mathbb{R}$ soustavu

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x & - & y & - & z & & & = & 2, \\ x & - & y & & & + & t & = & 5, \\ & & y & - & 2z & + & 2t & = & 0, \\ -x & + & 3y & - & z & - & 4t & = & -1. \end{array}$$

Řešení. Postupujeme obdobně,

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 3 & -1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -4 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{ř1}\leftrightarrow\text{ř2}]{G1} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -4 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{ř2}-3\text{ř1},\text{ř4}+\text{ř1}]{G3} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & -3 & -13 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -3 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{ř2}\leftrightarrow\text{ř3}]{G1} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -3 & -13 \\ 0 & 2 & -1 & -3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{ř3}-2\text{ř2},\text{ř4}-2\text{ř2}]{G3} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -7 & -13 \\ 0 & 0 & 3 & -7 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{ř4}-\text{ř3}]{G3} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -7 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 17 \end{array}\right)$$

Jelikož je poslední sloupec rozšířené matice soustavy hlavní, poslední rovnice (a tedy i celá soustava) nemá řešení.

Příklad 2.7. Vyřešte v $\mathbb{R}$ soustavu

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 3y & - & z & + & 4t & = & 8, \\ x & + & y & - & z & - & 2t & = & 2, \\ x & + & 7y & - & z & + & 16t & = & 20. \end{array}$$

Řešení.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & -1 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & 7 & -1 & 16 & 20 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{ř1}\leftrightarrow\text{ř2}]{G1} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 4 & 8 \\ 1 & 7 & -1 & 16 & 20 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{ř2}-\text{ř1},\text{ř3}-\text{ř1}]{G3} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 6 & 0 & 18 & 18 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[1/2*\text{ř2}]{G2} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 6 & 0 & 18 & 18 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{ř3}-6*\text{ř2}]{G3} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Jelikož rozšířená matice soustavy má více než jeden vedlejší sloupec a poslední sloupec je jedním z nich, soustava má nekonečně mnoho řešení. Z tvaru soustavy vidíme, že pokud si libovolným způsobem zvolíme proměnné $z, t \in \mathbb{R}$, zbylé dvě bude možné dopočítat. Z druhé rovnice dostáváme $y = 3 - 3t$ a z první rovnice $x = 2 - y + z + 2t = 2 - (3 - 3t) + z + 2t = -1 + z + 5t$. Nemáme sice dokázáno, že takto najdeme všechna řešení, můžeme alespoň tvrdit, že

$$S \supseteq \{(-1 + z + 5t, 3 - 3t, z, t),\ \text{kde } z \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}\}\,.$$

Příklad 2.8. Nalezněte polynom p s reálnými koeficienty stupně nejvýše 3 takový, že platí $p(0) = 1$, $p(1) = 0$, $p'(1) = 0$ a $p'(-1) = 0$ ($'$ značí derivaci reálné funkce).

Řešení. Každý polynom stupně nejvýše 3 je tvaru $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ pro $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Triviálně pro každé reálné x platí $p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Dosadíme-li tento tvar do zadaných podmínek, dostáváme soustavu rovnic s neznámými $a, b, c, d \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} p(0) = 1 \;&\Rightarrow & d &= 1,\\ p(1) = 0 \;&\Rightarrow & a + b + c + d &= 0,\\ p'(1) = 0 \;&\Rightarrow & 3a + 2b + c &= 0,\\ p'(-1) = 0 \;&\Rightarrow & 3a - 2b + c &= 0. \end{aligned}$$

Jejím jediným řešením (to snadno ověříme) je čtveřice $(a, b, c, d) = (\frac{1}{2}, 0, -\frac{3}{2}, 1)$, tedy hledaný polynom má předpis

$$\forall x \in \mathbb{R}: \; p(x) = \tfrac{1}{2}x^3 - \tfrac{3}{2}x + 1\,.$$

2.3 Konečná tělesa

Prakticky vše, co jsme si řekli o maticích z $\mathbb{R}^{m,n}$ platí i pro matice s prvky z obecného tělesa T. Množinu matic typu $m \times n$ značíme analogicky $T^{m,n}$. Operace sčítání, násobení prvkem z T a násobení matic definujeme též naprosto analogicky, pouze namísto sčítání a násobení reálných čísel používáme sčítání a násobení definované v daném tělese T.

Příklad 2.9. Uvažujme následující matice:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_5^{3,1}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_5^{1,3}, \quad \mathbb{D} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_5^{3,3}.$$

Vypočtěte následující součiny a součty (jsou-li definovány):

a) $\mathbb{AB}$
b) $\mathbb{BA}$
c) $\mathbb{AD}$
d) $\mathbb{DA}$
e) $\mathbb{BD}$
f) $\mathbb{DB}$
g) $\mathbb{ABD}$
h) $\mathbb{DBA}$
i) $\mathbb{BDA}$
j) $\mathbb{BAD}$
k) $\mathbb{AD} + 3\mathbb{B}$
l) $\mathbb{DA} + 4\mathbb{A}$

Řešení. a) $\mathbb{AB} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$,

b) $\mathbb{BA} = \begin{pmatrix} 1 \cdot_5 2 +_5 3 \cdot_5 2 +_5 4 \cdot_5 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 +_5 1 +_5 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_5^{1,1}$,

c) $\mathbb{AD}$ není definováno,

d) $\mathbb{DA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$,

e) $\mathbb{BD} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$,

f) $\mathbb{DB}$ není definován,

g) $\mathbb{ABD} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$,

h) $\mathbb{DBA}$ není definován,

i) $\mathbb{BDA} = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$,

j) $\mathbb{BAD}$ není definován,

k) $\mathbb{AD} + 3\mathbb{B}$ není definován,

l) $\mathbb{DA} + 4\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Opět naprosto stejně, jako jsme řešili soustavy rovnic v $\mathbb{R}$, můžeme řešit soustavy v libovolném tělese T. Musíme jenom myslet na to, že se mohly změnit aritmetické operace.

Příklad 2.10. Vyřešte soustavu s rozšířenou maticí

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \in \mathbb{Z}_5^{3,4}$$

Řešení.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{ř2+ř1,ř3+3·ř1}]{G3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{ř2}\leftrightarrow\text{ř3}]{G1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{ř3+2·ř2}]{G3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right).$$

Tato matice je v horním stupňovitém tvaru a poslední sloupec je jediný vedlejší, má proto jediné řešení. Označme si neznámé jako $x, y, z \in \mathbb{Z}_5$. Potom z posledního řádku máme $z = 4$, po dosazení do druhého máme $y +_5 4 = 2$, z čehož plyne $y = 3$ a konečně po dosazení do prvního získáváme $2 \cdot_5 x +_5 1 +_5 4 = 2$, což znamená, že $x = 1$.

Příklad 2.11. Vyřešte soustavu s rozšířenou maticí

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \in \mathbb{Z}_5^{2,5}$$

Řešení.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{ř2+ř1}]{G3} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 2 \end{array}\right).$$

Tato matice je v horním stupňovitém tvaru a vedle posledního sloupce má ještě další dva vedlejší, soustava proto bude mít více než jedno řešení. Označme si neznámé $x, y, z, t \in \mathbb{Z}_5$. Najdeme partikulární řešení: položme např. $y = t = 0$, potom nutně $z = 3$ a $x = 2$. Máme tedy

$$(2, 0, 3, 0) \in S.$$

Nalezněme nějaká řešení přidružené homogenní soustavy. Položme $y = 0$ a $t = 1$, potom nutně musí být $z = 4$ a $x = 3$. Položme naopak $y = 1$ a $t = 0$, potom nutně musí být $z = 0$ a $x = 1$. Dostáváme tedy

$$(1, 1, 0, 0), (3, 0, 4, 1) \in S_0,$$

z čehož plyne, že

$$(2, 0, 3, 0) + \alpha(1, 1, 0, 0) + \beta(3, 0, 4, 1) \in S$$

pro všechna $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_5$. Celkem jsme nalezli 25 různých řešení (jak později uvidíme, více jich není).

2.4 Cvičení

Příklad 2.12. Vypočtěte součiny $\mathbb{AB}$ a $\mathbb{BA}$ (jsou-li definované) pro matice

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1,n}, \qquad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n,1},$$

kde $n \in \mathbb{N}$ je libovolné.

Řešení.

$$\mathbb{AB} = \begin{pmatrix} \frac{n^2+n}{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1,1}, \qquad \mathbb{BA} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ n & n & \cdots & n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n}.$$

Příklad 2.13. Pro zadané reálné matice odvoďte předpisy pro jejich $n$té mocniny ($n \in \mathbb{N}$). Správnost vašich odhadů dokažte.

a) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{A}^n = ?$

b) $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{B}^n = ?$

c) $\mathbb{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbb{C}^n = ?$

d) $\mathbb{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbb{D}^n = ?$

e) $\mathbb{E} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$, $\mathbb{E}^n = ?$
(spíše pro odvážné s povědomím o součtových vzorcích pro $\sin x$ a $\cos x$)

Řešení. a) $\mathbb{A}^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+(-1)^n & 1-(-1)^n \\ 1-(-1)^n & 1+(-1)^n \end{pmatrix}$
(lze rozepsat zvlášť pro n sudá a lichá),

b) $\mathbb{B}^n = \begin{pmatrix} n+1 & n \\ -n & 1-n \end{pmatrix}$,

c) $\mathbb{C}^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$,

d) $\mathbb{D}^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n^2+n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

e) $\mathbb{E}^n = \begin{pmatrix} \cos(n\varphi) & -\sin(n\varphi) \\ \sin(n\varphi) & \cos(n\varphi) \end{pmatrix}$.

Poznámka 2.1. *Výsledky uvedené u cvičení níže je třeba brát s rezervou, a to ze dvou důvodů. Jednak vždy uvádíme množinu **všech** řešení, ačkoli se to po nás v této kapitole nevyžaduje, jednak se běžně stává, že různé postupy vedou k „různě vypadajícím“ výsledkům, ačkoli jsou všechny správně! Tento problém nejedinečnosti zápisu množiny řešení si ovšem vysvětlíme až později na přednáškách – budeme potřebovat pojmy jako podprostor, báze, či dimenze.*

Příklad 2.14. Vyřešte v $\mathbb{R}$ následující homogenní SLR:

a) $\begin{array}{rcrcrcl} 9x & + & 3y & - & z & = & 0, \\ 5x & - & 2y & - & 3z & = & 0. \end{array}$

b) $\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x & + & y & & & + & t & = & 0, \\ 3x & + & y & & & - & 2t & = & 0, \\ -2x & - & 4y & + & 5z & - & 9t & = & 0. \end{array}$

c) $\begin{array}{rcrcrcrcrcl} -x & + & y & + & z & + & t & + & u & = & 0, \\ x & - & y & + & z & + & t & + & u & = & 0, \\ x & + & y & - & z & + & t & + & u & = & 0, \\ x & + & y & + & z & - & t & + & u & = & 0, \\ x & + & y & + & z & + & t & - & u & = & 0. \end{array}$

Řešení. a) Nekonečně mnoho řešení, $S = \{(x, -2x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

b) Nekonečně mnoho řešení, $S = \{(-\frac{1}{2}z, \frac{3}{2}z, z, 0) \mid z \in \mathbb{R}\}$.

c) Jedno řešení, $S = \{(0, 0, 0, 0, 0)\}$.

Příklad 2.15. Vyřešte v $\mathbb{R}$ následující nehomogenní SLR:

a) $\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & + & z & & & = & 2, \\ x & - & y & + & z & + & t & = & 1. \end{array}$

b) $\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & - & y & + & z & - & 3t & = & 4, \\ 2x & + & y & - & z & + & t & = & 1, \\ 3x & - & 2y & + & 2z & - & 3t & = & 2, \\ 5x & + & y & - & z & + & 2t & = & -1. \end{array}$

c) $\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & + & 4t & = & 11, \\ 2x & + & 3y & + & 4z & + & t & = & 12, \\ 3x & + & 4y & + & z & + & 2t & = & 13, \\ 4x & + & y & + & 2z & + & 3t & = & 14. \end{array}$

Řešení. a) Nekonečně mnoho řešení, $S = \{(2 - y - z, y, z, -1 + 2y) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$.

b) Řešení neexistuje, $S = \emptyset$.

c) Jedno řešení, $S = \{(2, 1, 1, 1)\}$.

Příklad 2.16. V následujících bodech vždy nalezněte nějaké polynomy daného maximálního stupně (reálné proměnné s reálnými koeficienty), splňující zadané podmínky ($'$ značí derivaci reálné funkce).

a) polynom p nejvýše kvadratický takový, že $\forall x \in \mathbb{R}: \ p(x) = p(x+1)$,

b) polynom q nejvýše kvadratický takový, že $q(1) = 1$ a $q'(1) = 1$,

c) polynom r nejvýše kubický takový, že $r(0) = 3$, $r(1) = 1$, $r'(1) = 0$ a $r''(1) = 4$.

Řešení. a) p je libovolný konstantní polynom, tj. $p(x) = c \in \mathbb{R}$,

b) $q(x) = cx^2 + (1 - 2c)x + c$ (pro každé $x \in \mathbb{R}$), kde $c \in \mathbb{R}$ lze zvolit libovolně,

c) $r(x) = 2x^2 - 4x + 3$ (pro každé $x \in \mathbb{R}$).

3 Základní pojmy lineární algebry

Značení a zkratky:

- VP .... zkr. pro *vektorový prostor*
- $P \subset\subset V$ .... P je podprostor vektorového prostoru V
- $(x_1, \dots, x_n)$ .... soubor vektorů délky n
- $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ .... lineární obal souboru $(x_1, \dots, x_n)$
- LN/LZ .... zkr. pro *lineárně nezávislý/závislý*

3.1 Vektorový prostor a podprostory

Podprostor je taková podmnožina VP, která je, stejně jako VP samotný, uzavřená vůči oběma binárním operacím VP (které tradičně značíme $+$ a $\cdot$):

Definice 3.1. *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a nechť $\emptyset \neq P \subset V$ (P je neprázdná podmnožina V). Říkáme, že P je* ***podprostor*** *prostoru V, právě když platí:*

1. $\forall x, y \in P\colon x + y \in P$,
2. $\forall \alpha \in T, \forall x \in P\colon \alpha x \in P$

Vztah „být podprostorem“ pak značíme

$$P \subset\subset V.$$

Příklad 3.2. Pro následující množiny $M \subset \mathbb{R}^4$ rozhodněte, zda se jedná o podprostor $\mathbb{R}^4$.

a) $M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_2 + 3x_3,\ x_2 = -x_4\}$,

b) $M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 < x_2\}$,

c) $M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 \neq x_2,\ 3x_3 = x_4\}$,

d) $M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = 1,\ x_2 = x_3 = x_4\}$,

e) $M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = 0\}$,

f) $M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_2 x_3\}$,

g) $M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid |x_1| = |x_2|,\ |x_3| = |x_4|\}$.

Řešení. Uvažujme množinu M z bodu *a*): pokusíme se ukázat, že se jedná o podprostor. Nechť $x = (x_1, x_2, x_3, x_4), y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in M$. Dle definice musí pro M platit, že $x + y$ je také z M, ověřme, zda to skutečně platí: dle definice sčítání vektorů v $\mathbb{R}^4$ máme

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4).$$

Aby tento vektor byl v M, musí splňovat podmínku, že jeho první souřadnice je rovna součtu druhé a trojnásobku třetí, neboli:

$$x_1 + y_1 = (x_2 + y_2) + 3(x_3 + y_3) = (x_2 + 3x_3) + (y_2 + 3y_3).$$

Tato rovnost zřejmě platí díky tomu, že x, y jsou z M, a tedy jistě $x_1 = x_2 + 3x_3$ a $y_1 = y_2 + 3y_3$.

Analogicky ukážeme, že je pro $x + y$ splněna i druhá podmínka, tedy že čtvrtá souřadnice je rovna druhé s opačným znaménkem, tedy že

$$x_2 + y_2 = -(x_4 + y_4).$$

Platnost této rovnosti je opět přímým důsledkem toho, že pro $x, y \in M$ platí $x_2 = -x_4$ a $y_2 = -y_4$.

Zbývá ukázat, že pro všechna $\alpha \in \mathbb{R}$ je $\alpha x \in M$. Jelikož dle definice násobení vektoru číslem v $\mathbb{R}^4$ platí

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, \alpha x_4),$$

musí platit

$$\alpha x_1 = \alpha x_2 + 3\alpha x_3 = \alpha(x_2 + 3x_3),$$

to ale opět očividně platí, díky tomu že $x \in M$ a tedy $x_1 = x_2 + 3x_3$. Že je splněna i druhá podmínka z definice M, tedy že $\alpha x_2 = -(\alpha x_4)$, si laskavý čtenář dokáže sám.

Pro množinu M z bodu b) ukážeme, že netvoří podprostor. Když chceme ukázat, že něco neplatí, je možné odbýt celý důkaz nalezením protipříkladu[1]: v tomto případě si snadno můžeme všimnout, že např. $(1, 2, 3, 4)$ do množiny M patří, ale jeho -1 násobek $(-1, -2, -3, -4)$ již nikoli a o podprostor se tedy nejedná. Ještě kratší argument je poukázat na to, že v M neleží nulový vektor $(0, 0, 0, 0)$, a tedy se nemůže jednat o podprostor.

Shrňme si správné odpovědi na otázku „Je M podprostor?“:

a) ano, b) ne, c) ne, d) ne, e) ano, f) ne, g) ne.

Příklad 3.3. Nechť $\mathbb{A} \in T^{m,n}$ je matice s prvky z tělesa T. Označme $S_0 \subset T^n$ množinu řešení rovnice $\mathbb{A}\mathbb{x} = \theta$. Dokažte, že S_0 je podprostor T^n.

Řešení. Důkaz je jednoduchým důsledkem vlastností operací násobení a sčítání matic a násobení matice číslem.

Příklad 3.4. Pro následující množiny $M \subset T^3$ a tělesa T rozhodněte, zda se jedná o podprostor T^3.

a) $M = \{(0, 0, 0), (1, 1, 1)\}$ a $T = \mathbb{Z}_2$,

b) $M = \{(0, 0, 0), (1, 1, 1), (2, 2, 2)\}$ a $T = \mathbb{Z}_3$,

c) $M = \{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (2, 0, 0), (3, 0, 0), (4, 0, 0)\}$ a $T = \mathbb{Z}_5$,

d) $M = \{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ a $T = \mathbb{Z}_2$.

Je-li M podprostor, pokuste se najít matici $\mathbb{A} \in T^{m,n}$ odpovídajících rozměrů, aby M odpovídalo množině řešení soustavy $\mathbb{A}\mathbb{x} = \theta$.

Řešení. M z bodu *a*) je zřejmě podprostor. Abychom našli matici $\mathbb{A}$, všimneme si, že množinu M můžeme charakterizovat jako množinu vektorů (x_1, x_2, x_3) ze $\mathbb{Z}_2^3$ takových, že všechny jejich složky jsou stejné, tedy $x_1 = x_2 = x_3$. To můžeme zapsat pomocí dvou rovnic $x_1 +_2 x_2 = 0$ a $x_2 +_2 x_3 = 0$ a odtud už vidíme, že hledaná matice je

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pro bod *b*) je situace stejná: jedná se o podprostor a i hledaná matice $\mathbb{A}$ se získá podobně (jen je třeba si uvědomit, že $x_1 = x_2$ je ekvivalentní s $x_1 + 2x_2 = 0$):

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

M z bodu *c*) je také podprostor, matice $\mathbb{A}$ je např.

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

M z bodu *d*) není podprostor.

Poznámka 3.1. *Viděli jsme, že množina řešení homogenní soustavy vždy tvoří podprostor a v předchozím příkladě jsme si naznačili, že k podprostorům je někdy možné najít homogenní soustavu, jejíž množina řešení je shodná s daným podprostorem. Později si ukážeme, že takovou soustavu umíme najít pro libovolný podprostor T^n pro libovolné těleso T a libovolné přirozené n.*

[1] Důkaz platnosti nějakého tvrzení pomocí „propříkladu“ je naopak striktně zapovězen!

3.2 Lineární (ne)závislost

Základním pojmem následujících cvičení bude pojem **lineární kombinace** souboru $(x_1, \ldots, x_n)$: řekneme, že vektor x je lineární kombinací souboru $(x_1, \ldots, x_n)$, jestliže existují koeficienty $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ z příslušného tělesa tak, že

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i.$$

Příklad 3.5. Čemu se rovná lineární kombinace souboru vektorů

$$((1,1,1),(2,3,0),(2,1,0)) \subset \mathbb{R}^3$$

s koeficienty $1, 2$ a 3?

Jak se odpověď změní, jestliže se přesuneme do VP $\mathbb{Z}_5^3$?

Definice 3.6. *Nechť $(x_1, \ldots, x_n)$ je soubor vektorů z V. Řekneme, že $(x_1, \ldots, x_n)$ je **lineárně nezávislý (LN)** soubor, právě když pouze triviální lineární kombinace tohoto souboru je rovna nulovému vektoru θ. V opačném případě nazýváme soubor **lineárně závislý (LZ)**. Jinými slovy:*

- $\diamond$ $(x_1, \ldots, x_n)$ *je LN* $\Leftrightarrow$

$$\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in T : \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \theta \Rightarrow (\forall i \in \hat{n})(\alpha_i = 0) \right)$$

- $\diamond$ $(x_1, \ldots, x_n)$ *je LZ* $\Leftrightarrow$

$$\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in T, \exists k \in \hat{n}, \alpha_k \neq 0 : \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \theta \right)$$

Příklad 3.7. Rozhodněte, zda následující vektory tvoří LZ, nebo LN soubor:

a) $(1,3,0,-1),(0,2,-1,4),(1,-5,7,-2)$ v prostoru $\mathbb{R}^4$,

b) $(1,2,3,4),(2,1,-3,3),(1,5,12,9)$ v prostoru $\mathbb{R}^4$,

c) $(1,0,0,1),(1,1,0,0),(0,1,0,1)$ v prostoru $\mathbb{Z}_2^4$,

d) $(1,2,3),(2,3,1),(1,1,1)$ v prostoru $\mathbb{Z}_5^3$,

e) $(1,2,3),(2,3,1),(1,1,1)$ v prostoru $\mathbb{Z}_p^3$ pro prvočíslo $p > 5$,

f) $(i,1,1+i),(2,2+i,0),(0,3-3i,7)$ v prostoru $\mathbb{C}^3$.

Řešení. Postup při řešení takovýchto příkladů si ukážeme na souboru vektorů z bodu a). Dle definice LN resp. LZ souboru potřebujeme rozhodnout, zda

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \theta$$

má jediné řešení ($\alpha_i = 0$ pro všechna i je jistě vždy řešení). Tuto rovnici ale v případě vektorových prostorů T^n umíme vyjádřit maticově jako

$$\mathbb{A}\mathbb{x} = \theta,$$

kde $\mathbb{A}$ vznikne tak, že vektory x_1 až x_n napíšeme do sloupců. Pro vektory $(1,3,0,-1),(0,2,-1,4)$ a $(1,-5,7,-2)$ tak dostáváme soustavu s rozšířenou maticí

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & 0 \\ -1 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right).$$

Pomocí GEM snadno zjistíme, že soustava má jediné řešení $(0,0,0)$ a soubor je tedy dle definice LN.

Výsledky pro ostatní body získáme podobně:

b) LZ, c) LZ, d) LN, e) LN, f) LN

Příklad 3.8. Uvažujme LN soubor vektorů $((1,2,3),(1,0,-1))$ z $\mathbb{R}^3$. Rozhodněte, které z vektorů $(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0)$ můžeme k těmto dvěma vektorům přidat, aby vznikl LN soubor.

Řešení. Mohli bychom postupovat jako v předchozím příkladě a vytvořit postupně tři soustavy s maticí, jejíž první dva sloupce vzniknou z vektorů $((1,2,3),(1,0,-1))$ a třetí se po řadě doplní z vektorů $(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0)$. Snadno si ale rozmyslíme, že vše můžeme vyřešit najednou převedením násl. matice na horní stupňovitý tvar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tak zjistíme, že můžeme vybrat kterýkoli z nabízených vektorů.

Příklad 3.9. Nechť (x,y,z) je LN soubor vektorů ve vektorovém prostoru V nad tělesem $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zda jsou následující soubory LZ nebo LN.

a) $(x+y, 2x+z, y-z)$,

b) $(x+2y+z, 2x+y+5z, 3x+y+8z)$.

Řešení. Postupujeme přímo z definice: hledáme $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ tak, aby

$$\alpha(x+y)+\beta(2x+z)+\gamma(y-z)=\theta.$$

To upravíme na rovnici

$$(\alpha+2\beta)x+(\alpha+\gamma)y+(\beta-\gamma)z=\theta.$$

Tato rovnice je ale lineární kombinace LN souboru dávající nulový vektor, o té víme, že má pouze triviální řešení, tedy že všechny koeficienty jsou nula. To nám dává soustavu tří rovnic

$$\alpha+2\beta=0, \quad \alpha+\gamma=0, \quad \beta-\gamma=0,$$

kterou vyřešíme, a zjistíme, že musí být $\alpha=\beta=\gamma=0$ a soubor je LN.

Podobně zjistíme, že soubor z bodu b) je LZ.

3.3 Lineární obal

Lineární obal nějakého souboru vektorů je množina všech lineárních kombinací tohoto souboru. Je to tedy podmnožina VP (dokonce víme, že to je podprostor) a má tedy smysl se ptát, jestli do této množiny nějaký daný vektor patří či nikoli.

Příklad 3.10. Zjistěte, zda vektor x patří do $\langle M\rangle$, kde M a x jsou následující:

a) $M = ((1,2,3),(1,-1,5),(2,2,2))$ a $x = (4,4,12)$ (v prostoru $\mathbb{R}^3$),

b) $M = ((1,1,0,0),(0,0,1,0),(1,1,1,1),(0,0,0,1))$ a $x = (1,0,0,0)$ (v prostoru $\mathbb{Z}_2^4$),

c) $M = ((1,2,3),(2,3,1),(1,1,1),(2,2,0))$ a $x = (1,1,2)$ (v prostoru $\mathbb{Z}_5^3$),

Pokud $x \in \langle M\rangle$, najděte koeficienty nějaké lineární kombinace vektorů z M, která se rovná x.

Řešení. Ověřit, jestli je nějaký vektor v lineárním obalu souboru, znamená najít lineární kombinaci tohoto souboru, která dává tento vektor, příp. ukázat, že taková lineární kombinace neexistuje. Pro případ *a*) to znamená hledat reálná čísla $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tak, že

$$\alpha_1(1,2,3) + \alpha_2(1,-1,5) + \alpha_3(2,2,2) = (4,4,12).$$

Díky tomu, že v $\mathbb{R}^3$ jsou definovány obě vektorové binární operace po složkách, je rovnice výše ekvivalentní soustavě rovnic pro tři neznámé $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ s rozšířenou maticí

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 12 \end{array}\right).$$

Tu snadno vyřešíme pomocí GEM a zjistíme, že má jediné řešení a že x leží v $\langle M\rangle$, neboť

$$2(1,2,3) + 1(1,-1,5) + \frac{1}{2}(2,2,2)) = (4,4,12).$$

V případě *b*) zjistíme pro příslušnou soustavu 4 rovnic o 4 neznámých, že nemá řešení a x v $\langle M\rangle$ neleží.

V případě *c*) má naopak soustava 3 rovnic o 4 neznámých řešení více. Hledané koeficienty $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{Z}_5$ lineární kombinace vektorů z M, jejímž výsledkem je vektor x, jsou všechny násl. čtveřice čísel

$$(1+4\beta, 4+\beta, 2\beta, 1+\beta), \quad \text{pro všechna } \beta \in \mathbb{Z}_5.$$

Viděli jsme, že koeficienty lineární kombinace dávající x mohou i nemusí být jednoznačné. S tím, co víte o soustavách rovnic, by nemělo být těžké dokázat následující.

Příklad 3.11. Dokažte násl. tvrzení:

Nechť je $(x_1, \ldots, x_n)$ soubor vektorů z libovolného vektorového prostoru V nad tělesem T a nechť $z \in \langle x_1, \ldots, x_n\rangle$. Potom platí následující: $n$tice čísel $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ z tělesa T taková, že

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = z,$$

existuje právě jedna, právě když je $(x_1, \ldots, x_n)$ LN.

3.4 Báze a dimenze

První typ úlohy, se kterou se seznámíme, je rozhodnutí, zda daný soubor tvoří bázi daného VP.

Příklad 3.12. Rozhodněte, zda soubor

a) $\mathcal{X} = ((1,2,3),(3,2,1),(1,1,5))$ tvoří bázi $\mathbb{R}^3$,

b) $\mathcal{X} = ((1,2,3),(3,2,1))$ tvoří bázi $\mathbb{R}^3$,

c) $\mathcal{X} = (1,2,3),(3,2,1),(2,2,5),(3,3,0)$ tvoří bázi $\mathbb{R}^3$,

d) $\mathcal{X} = ((1,i,1),(0,1,i),(i,1,-i))$ tvoří bázi $\mathbb{C}^3$,

e) $\mathcal{X} = ((1,2,3),(3,2,1),(1,0,4))$ tvoří bázi $\mathbb{Z}_5^3$

V případě, že soubor bázi netvoří, určete dimenzi jeho lin. obalu.

Řešení. Potřebujeme ověřit dvě vlastnosti báze: jestli je soubor LN a jestli *generuje* celý VP (neboli jestli každý vektor VP leží v lin. obalu souboru). Jestli je soubor LN už ověřit umíme: stačí si napsat vektory do sloupců matice, provést GEM a koukat se, jestli ve výsledném horním stup. tvaru existují vedlejší sloupce (jen tehdy je soubor LZ). Umíme také rozhodnout, jestli je konkrétní vektor v lin. obalu, ale jak zjistit, jestli je tam *libovolný* vektor? Jednoduše, namísto konkrétního vektoru napíšeme vektor, jehož prvky budou proměnné.

Např. pro případ a) řešíme soustavu s rozšířenou maticí

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & x_1 \\ 2 & 2 & 1 & x_2 \\ 3 & 1 & 5 & x_3 \end{array}\right),$$

kde x_1, x_2, x_3 jsou libovolná reálná čísla. Je jasné, že pokud po úpravě na horní stupňovitý tvar bude pro libovolné hodnoty x_1, x_2, x_3 poslední sloupec jediný vedlejší, je soubor LN a vektor (x_1, x_2, x_3) leží v lin. obalu zadaného souboru (protože soustava má vždy řešení). Po úpravě na horní stupňovitý tvar pomocí GEM dostáváme (např.) tuto matici:

$$\left(\begin{array}{ccc|l} 1 & 3 & 1 & x_1 \\ 0 & 4 & 1 & 2x_1 - x_2 \\ 0 & 0 & 4 & x_1 - 2x_2 + x_3 \end{array}\right).$$

Z ní je vidět, že se skutečně jedná o bázi.

Pro další tři případy dostáváme tyto výsledky: b) není báze, $\dim\langle\mathcal{X}\rangle = 2$, c) není báze, $\mathcal{X}$ je LZ, $\dim\langle\mathcal{X}\rangle = 3$ d) je to báze.

Pro případ e) dostáváme soustavu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & x_1 \\ 2 & 2 & 0 & x_2 \\ 3 & 1 & 4 & x_3 \end{array}\right),$$

kterou upravíme na (sčítání a násobení je vždy sčítání a násobení modulo 5, pro přehlednost používáme $+$ namísto $+_5$ a prosté $\cdot$ namísto $\cdot_5$)

$$\left(\begin{array}{ccc|l} 1 & 3 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 3 & x_2 + 3x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 + 3x_2 + x_1 \end{array}\right).$$

Z této matice je vidět hned několik důležitých věcí: předně soubor není LN, neboť platí, že příslušná homogenní soustava má netriviální řešení (např. $(3,2,1)$). Soubor také negeneruje $\mathbb{Z}_5^3$, protože pokud pro nějaký vektor (x_1, x_2, x_3) neplatí, že $x_3 + 3x_2 + x_1 = 0$, nemá soustava řešení. Ekvivalentně můžeme říci, že v lineárním obalu zadaného souboru leží pouze vektory (x_1, x_2, x_3) splňující rovnici $x_3 + 3x_2 + x_1 = 0$. To pěkně koresponduje s tím, co víme z přednášky: lin. obal je vždy podprostor, stejně jako řešení homogenní soustavy (zde $x_3 + 3x_2 + x_1 = 0$).

Jak zjistíme dimenzi lin. obalu? Předně si uvědomíme, že lin. obal je podprostor, podprostor je sám o sobě VP, a tedy má smysl o dimenzi lin. obalu uvažovat. Pro výpočet dimenze nám postačí najít bázi, neboť víme, že dimenze lin. obalu tří nenulových vektorů je menší než tři[2] a větší než nula a v tom případě se délka báze rovná dimenzi. Vyjdeme z věty z přednášky, která nám říká následující:

> Buď $(y_1, \ldots, y_n)$ LZ soubor vektorů z V, $n \geq 2$. Potom $\exists k \in \hat{n}$ tak, že $y_k \in \langle y_1, \ldots, y_{k-1}, y_{k+1}, \ldots, y_n \rangle$. Pro takové k navíc platí $\langle y_1, \ldots, y_n \rangle = \langle y_1, \ldots, y_{k-1}, y_{k+1}, \ldots, y_n \rangle$.

Nyní roli vektoru y_k může hrát například vektor $(1,0,4)$, který dle matice výše lze napsat jako lin. kombinace prvních dvou vektorů: $(1,0,4) = 2(1,2,3) + 3(3,2,1)$. Proto také platí, že

$$\langle (1,2,3), (3,2,1), (1,0,4) \rangle = \langle (1,2,3), (3,2,1) \rangle.$$

Jelikož je soubor $((1,2,3), (3,2,1))$ LN a jelikož generuje lin. obal původního souboru, jedná se i o jeho bázi a dimenze je dva.

Příklad 3.13.

a) Doplňte soubor $((3,4,2,7), (1,2,1,0))$ na bázi prostoru $\mathbb{R}^4$.

b) Doplňte soubor $((1,2,0,0), (1,1,1,1))$ na bázi prostoru $\mathbb{Z}_3^4$.

Řešení. Oba soubory ze zadání příkladu jsou LN a tak dle Steinitzovy věty víme, že je lze doplnit (dvěma) vektory tak, aby vzniklý soubor tvořil bázi. Jak to provedeme: vezmeme si nějakou bázi, např. standardní $\mathcal{E} = ((1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1))$. Napíšeme původní dva vektory spolu s vektory této báze do sloupců matice: pro soubor z a) dostáváme

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

tuto matici upravíme na horní stupňovitý tvar a vybereme z posledních 4 sloupců dva tak, že budou spolu s prvními dvěma sloupci tvořit matici se čtyřmi hlavními sloupci (často je možné vybrat libovolné dva vektory). Dostáváme tak násl. řešení.

a) Např. $((3,4,2,7), (1,2,1,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1))$.

b) Např. $((1,2,0,0), (1,1,1,1), (1,0,0,0), (0,0,1,0))$.

Příklad 3.14. Pokud pro soubor vektorů $\mathcal{X}$ z vektorového prostoru V platí $\langle \mathcal{X} \rangle = V$, odeberte z $\mathcal{X}$ vektory tak, aby zbylý soubor byl bází V.

a) $V = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{X} = ((3,4,2), (1,0,-1), (1,1,0), (1,2,2), (2,3,2))$,

b) $V = \mathbb{R}^4$, $\mathcal{X} = ((1,2,0,6), (1,1,1,1), (0,1,0,3))$,

[2] Našli jsme tříčlenný soubor, který generuje daný podprostor a tento soubor je LZ: dle Steinitzovy věty víme, že délka LN souboru v tomto podprostoru nemůže být více než dva! Je také jasné, že dimenze není nula, neboť tu má pouze triviální podprostor $\{\theta\}$

c) $V = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{X} = ((1,1,0),(1,0,2),(0,-1,2),(4,2,4))$,

d) $V = \mathbb{Z}_2^4$, $\mathcal{X} = ((1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,0,0),(0,1,1,0),(1,1,1,1))$.

Řešení. a) Bází je např. $((3,4,2),(1,0,-1),(1,1,0))$,
b) $\langle \mathcal{X} \rangle \neq V$,
c) $\langle \mathcal{X} \rangle \neq V$,
d) bází je např. $((1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,0,0),(1,1,1,1))$.

Příklad 3.15. Uvažujme matici $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ a množinu M všech reálných matic typu $(2,2)$, které s $\mathbb{A}$ tzv. komutují. Tedy

$$M = \{\mathbb{X} \in \mathbb{R}^{2,2} \mid \mathbb{A}\mathbb{X} = \mathbb{X}\mathbb{A}\}.$$

Dokažte, že $M \subset\subset \mathbb{R}^{2,2}$, určete dimenzi M a nalezněte nějakou jeho bázi.

Řešení. Množina M je jistě neprázdná, definující rovnici splňuje například nulová matice $\Theta \in \mathbb{R}^{2,2}$ a samotná matice $\mathbb{A}$ (rozmyslete si). Uzavřenost množiny plyne z vlastností maticového násobení. Buďte $\alpha \in \mathbb{R}$ a $\mathbb{X}, \mathbb{Y} \in M$ (tedy platí $\mathbb{A}\mathbb{X} = \mathbb{X}\mathbb{A}$ a současně $\mathbb{A}\mathbb{Y} = \mathbb{Y}\mathbb{A}$). Z toho plyne

$$\mathbb{A}(\mathbb{X}+\mathbb{Y}) = \mathbb{A}\mathbb{X} + \mathbb{A}\mathbb{Y} = \mathbb{X}\mathbb{A} + \mathbb{Y}\mathbb{A} = (\mathbb{X}+\mathbb{Y})\mathbb{A}\,, \qquad \mathbb{A}(\alpha\mathbb{X}) = \alpha(\mathbb{A}\mathbb{X}) = \alpha(\mathbb{X}\mathbb{A}) = (\alpha\mathbb{X})\mathbb{A}\,,$$

tedy v množině M leží i matice $\mathbb{X}+\mathbb{Y}$ a $\alpha\mathbb{X}$.

Dále potřebujeme popsat všechny prvky množiny M, tedy všechny matice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$, které splňují rovnost

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

To vede na soustavu lineárních rovnic pro proměnné $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ s rozšířenou maticí

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

a s řešením

$$\begin{aligned}(a,b,c,d) \in \left\{(a,b,b,a+\tfrac{3}{2}b) \mid a,b \in \mathbb{R}\right\} &= \left\{a(1,0,0,1) + b(0,1,1,\tfrac{3}{2}) \mid a,b \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \langle (1,0,0,1),(0,1,1,\tfrac{3}{2}) \rangle \\ &= \langle (1,0,0,1),(0,2,2,3) \rangle\,.\end{aligned}$$

Z toho již plyne, že

$$M = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

tedy M je generována souborem délky 2. Ten je současně zřejmě LN (rozmyslete si), tedy se jedná o bázi a platí $\dim M = 2$.

Poznámka: Alternativně jsme řešení příkladu mohli rovnou začít popisem všech prvků $\mathbb{X} \in M$. Zjistili bychom, že M je lineárním obalem nějakého souboru, přičemž z přednášky víme, že všechny lineární obaly jsou současně podprostory – z toho by rovnou plynulo, že $M \subset\subset \mathbb{R}^{2,2}$).

V následujícím příkladě můžete využít násl. větu z přednášky:

Buďte $(x_1, \dots, x_n)$ a $(y_1, \dots, y_m)$ dva soubory vektorů z V. Potom

$$\langle x_1, \dots, x_n\rangle = \langle y_1, \dots, y_m\rangle$$

právě tehdy, když

$$\dim\langle x_1, \dots, x_n\rangle = \dim\langle y_1, \dots, y_m\rangle = \dim\langle x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m\rangle.$$

Úlohu rovnosti dvou lineárních obalů tak převádíme na úlohu určení dimenze, kterou již vyřešit umíme.

Příklad 3.16. Rozhodněte, zda soubory $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ generují stejný podprostor v T^3, je-li

a) $\mathcal{X} = ((2, -3, 3), (-1, 1, 2))$, $\mathcal{Y} = ((0, -1, 7), (3, -5, 8))$, $T = \mathbb{R}$,

b) $\mathcal{X} = ((1, 1, 2), (2, 1, 1))$, $\mathcal{Y} = ((1, 3, 1), (0, 1, -1))$, $T = \mathbb{R}$,

c) $\mathcal{X} = ((1, 2, 1), (2, 1, 0), (1, 5, 3))$, $\mathcal{Y} = ((-1, 1, 1), (0, 3, 2))$, $T = \mathbb{R}$,

d) $\mathcal{X} = ((1, 2, 1), (2, 1, 0), (1, 0, 3))$, $\mathcal{Y} = ((4, 1, 1), (0, 3, 2))$, $T = \mathbb{Z}_5$.

Řešení. a) Ano, b) ne, c) ano, d) ano.

3.5 Souřadnice vektoru v bázi

Z příkladu 3.11 víme, že pro vektory z z lin. obalu LN souboru je jednoznačně určena lineární kombinace tohoto souboru dávající z. Když toto tvrzení použijeme na bázi, dostáváme tvrzení, že pro libovolný vektor z z VP s bází $\mathcal{X} = (x_1, \dots, x_n)$ existuje jednoznačně určená $n$tice čísel $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ z T tak, že

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = z.$$

Souřadnicemi vektoru $z \in V_n$ v bázi $\mathcal{X}$ pak rozumíme sloupec

$$(z)_{\mathcal{X}} := \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

(na který lze v případě potřeby pohlížet i jako na obyčejnou $n$tici $(z)_{\mathcal{X}} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$).

Zobrazení $x_i^{\#} : V_n \to T$ přiřazující vektoru $i$tou souřadnici, tedy

$$x_i^{\#}(z) := \alpha_i\,,$$

nazýváme $i$tý souřadnicový funkcionál vzhledem k bázi $\mathcal{X}$.

Příklad 3.17. Soubor $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3)$ je báze prostoru $\mathbb{R}^3$, $x \in \mathbb{R}^3$, Nalezněte souřadnice x v bázi $\mathcal{X}$, je-li

a) $x_1 = (1, 1, 1)$, $x_2 = (1, 2, 1)$, $x_3 = (0, 0, 1)$, $x = (1, 0, 4)$,

b) $x_1 = (1, 0, 1)$, $x_2 = (0, 1, 0)$, $x_3 = (2, 3, 4)$, $x = (1, -3, -3)$,

c) $x_1 = (3, 1, -3)$, $x_2 = (-5, 2, -1)$, $x_3 = (7, 3, 4)$, $x = (11, -8, -4)$.

Řešení. Jedná se o jednoduchou úlohu, kterou už jsme vlastně řešili, když jsme ověřovali, zda nějaký vektor leží v lin. obalu daného souboru či nikoli. Pro případ a) řešíme soustavu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right).$$

Díky tomu, že $\mathcal{X}$ je báze, víme, že soustava bude mít jediné řešení.

Vyjdou nám násl souřadnice a) $(2,-1,3)$, b) $(5,3,-2)$, c) $(1,-3,-1)$.

Příklad 3.18. Uvažte bázi $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3) = ((1,3,2),(1,2,0),(1,0,0))$ vektorového prostoru $\mathbb{Z}_5^3$. Najděte předpis pro souřadnice $(v)_\mathcal{X}$ obecného vektoru $v \in \mathbb{Z}_5^3$.

Řešení. Postupujeme jako při hledání souřadnic konkrétního vektoru s tím rozdílem, že pravou stranou soustavy je obecný vektor $v = (v_1, v_2, v_3)$. Můžeme si také všimnout, že když napíšeme vektory z báze v opačném pořadí, dostaneme rovnou soustavu s maticí v horním stupňovitém tvaru:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & v_1 \\ 0 & 2 & 3 & v_2 \\ 0 & 0 & 2 & v_3 \end{array}\right).$$

Tu můžeme klasicky vyřešit, ale my si při této příležitosti ukážeme i jiný postup. Pomocí GEM postupujeme následovně:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & v_1 \\ 0 & 2 & 3 & v_2 \\ 0 & 0 & 2 & v_3 \end{array}\right) \xrightarrow{ř2+ř3,ř1+2\cdot ř3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & v_1+2v_3 \\ 0 & 2 & 0 & v_2+v_3 \\ 0 & 0 & 2 & v_3 \end{array}\right) \xrightarrow{ř1+2\cdot ř2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & v_1+2v_2+4v_3 \\ 0 & 2 & 0 & v_2+v_3 \\ 0 & 0 & 2 & v_3 \end{array}\right) \xrightarrow{3\cdot ř2,3\cdot ř3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & v_1+2v_2+4v_3 \\ 0 & 1 & 0 & 3v_2+3v_3 \\ 0 & 0 & 1 & 3v_3 \end{array}\right).$$

Takto upravená matice není jenom v horním stupňovitém tvaru — je diagonální, takže v posledním sloupci má přímo napsané řešení. Když si vzpomeneme, že třetí sloupec odpovídá prvnímu vektoru báze a ten první tomu třetímu, dostáváme

$$v = (v_1, v_2, v_3) \quad \Rightarrow \quad (v)_\mathcal{X} = (3v_3, 3v_2 + 3v_3, v_1 + 2v_2 + 4v_3).$$

3.6 Cvičení

Příklad 3.19. Uvažujme uspořádanou čtveřici $(V, T, \oplus, \odot)$, kde

- $V = \mathbb{R}^+$, vektory jsou kladná reálná čísla,
- $T = \mathbb{R}$, skaláry bereme z množiny všech reálných čísel,
- pro každé $x, y \in \mathbb{R}^+$ definujeme
$$x \oplus y := x \cdot y,$$
kde $\cdot$ značí klasické násobení reálných čísel,
- pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ a každé $x \in \mathbb{R}^+$ definujeme
$$\alpha \odot x := x^\alpha,$$
kde v předpisu používáme standardní umocnění kladného reálného čísla na reálnou mocninu.

Dokažte, že $(V, T, \oplus, \odot)$ je vektorový prostor.

Řešení. Abychom dokázali o nějaké struktuře $(V, T, \oplus, \odot)$, že se jedná o vektorový prostor, musíme nejprve ověřit, že množina V je uzavřená vůči binárním operacím $\oplus$ a $\odot$. V tomto případě je jasné, že množina $V = \mathbb{R}^+$ uzavřená je: součin dvou kladných čísel je kladné číslo a z kurzu ZMA[3] víme, že umocníme-li libovolné kladné číslo na libovolné reálné číslo, dostaneme kladné číslo (vzpomeňme graf exponenciální funkce).

Je-li množina V uzavřená vůči oběma operacím, zbývá ověřit splnění sedmi axiomů vektorového prostoru. Zde si ukážeme pro ilustraci dva z nich. Axiom 2 požaduje, aby platil asociativní zákon pro operaci $\oplus$:

$$\forall a, b, c \in V : (a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c).$$

Ten ale zřejmě platí, neb se po „dosazení“ za operaci $\oplus$ redukuje na tvrzení, že násobení reálných čísel je asociativní.

Axiom 3 požaduje, aby

$$\forall \alpha, \beta \in T, \forall a \in V : \alpha \odot (\beta \odot a) = (\alpha\beta) \odot a.$$

Po přepsání pro naši volbu $\odot$ se rovnost změní na

$$(a^\beta)^\alpha = a^{(\alpha\beta)},$$

o které opět díky ZMA víme, že platí.

Příklad 3.20. Tvoří $\mathbb{R}$ vektorový prostor nad $\mathbb{Z}_2$, pokud sčítání vektorů je obvyklé sčítání reálných čísel, a násobení skalárem definujeme jako $0 \odot x = 0$, $1 \odot x = x$?

Příklad 3.21. Na množině $\mathbb{R}$ definujme operace $\oplus$ a $\odot$ následovně:

$$x \oplus y := x + y + 2, \quad \alpha \odot x := \alpha x + 2\alpha - 2.$$

Dokažte, že $\mathbb{R}$ s těmito operacemi je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$. Co je nulový vektor v tomto prostoru?

Řešení. Nulovým vektorem je číslo -2.

Příklad 3.22. Označme jako $\mathbb{R}^\infty$ vektorový prostor všech reálných posloupností, a uvažme následující podmnožiny $M \subset \mathbb{R}^\infty$ sestávající z takových posloupností $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, pro které platí:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,

c) $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ je konvergentní,

d) $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ je omezená,

e) $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ je ostře rostoucí,

f) $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ je neostře restoucí,

g) $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ je neostře monotónní,

h) $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ je od jistého indexu neostře monotónní,

[3] Pro ty, kteří snad zapomněli, příp. to vytěsnili: ZMA je zkratka pro základy matematické analýzy.

i) $a_{2n} \geq 0 \geq a_{2n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,

j) $a_{2n} \geq 0 \geq a_{2n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, nebo $a_{2n} \leq 0 \leq a_{2n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,

k) $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,

l) $a_{n+2} = 12a_{n+1} + 17a_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,

m) $a_n = 0$ pro $n \notin A$, při nějaké dané $A \subset \mathbb{N}$,

n) $a_n \neq 0$ jen pro konečně mnoho $n \in \mathbb{N}$,

o) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je geometrická, tj. existuje číslo $q \in \mathbb{R}$ tak, že každé $a_n = a_0 q^n$.

Které z těchto množin M jsou podprostory $\mathbb{R}^{\infty}$?

Řešení. a) ne, b) ano, c) ano, d) ano, e) ne, f) ne, g) ne, h) ne, i) ne, j) ne, k) ano, l) ano, m) ano, n) ano, o) ne

Příklad 3.23. Pro následující množiny $M \subset \mathbb{R}^{2,2}$ rozhodněte, zda se jedná o podprostor $\mathbb{R}^{2,2}$.

a)

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \;\middle|\; a - 2d = 0 \wedge c \in \mathbb{Z} \right\},$$

b)

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \;\middle|\; a = b \wedge c = 1 \right\},$$

c)

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \;\middle|\; a = -c \wedge b = -d \right\},$$

d)

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \;\middle|\; a + b = c + d \right\}.$$

Řešení. a) ne, b) ne, c) ano, d) ano.

Příklad 3.24. Ukažte, že množina všech symetrických matic

$$S = \{\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n} \mid (\forall i, j \in \hat{n})(\mathbb{A}_{i,j} = \mathbb{A}_{j,i})\}$$

je podprostor prostoru $\mathbb{C}^{n,n}$.

Příklad 3.25. Nechť (x, y, z) je LN soubor vektorů ve vektorovém prostoru V nad $\mathbb{R}$. Zjistěte, pro která $\lambda \in \mathbb{R}$ je soubor vektorů $(x + 2y, 2x + 3z, x + \lambda y - z)$ LN.

Řešení. Pro $\lambda \neq \frac{10}{3}$.

Příklad 3.26. Zjistěte, zda je soubor vektorů $(\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3, \mathbb{A}_4)$ z prostoru $\mathbb{R}^{2,2}$ LN, nebo LZ, je-li:

a)
$$\mathbb{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A}_2 = \begin{pmatrix} 17 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A}_3 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

b)
$$\mathbb{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A}_2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}.$$

Řešení. a) LN, b) LZ.

Příklad 3.27. Nalezněte všechna $\alpha \in \mathbb{R}$, pro které je soubor $((\alpha, 1, 0), (1, \alpha, 1), (0, 1, \alpha)) \subset \mathbb{R}^3$ LZ.

Řešení. $\alpha \in \{0, \pm\sqrt{2}\}$.

Příklad 3.28. Nechť (x, y, z) je LN soubor vektorů v lineárním prostoru V nad tělesem $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zda jsou následující soubory LZ nebo LN.

a) $(x + y, x + z, x)$,

b) $(x + y, x - y)$,

c) $(x + y, x - y, x - z, x + z)$,

d) $(x + y, y + z, x + z)$,

e) $(x - 2y + z, 4x - y - z, 4x + 13y - 11z)$,

f) $(x, 2x, x - 2y + z)$,

g) $(x, y + z)$.

Řešení. a) LN, b) LN, c) LZ, d) LN, e) LZ, f) LZ, g) LN.

Příklad 3.29. Nechť (x, y, z) je soubor vektorů z vektorového prostoru V takový, že $x + y + z = \theta$. Potom $\langle x, y \rangle = \langle y, z \rangle = \langle x, z \rangle$. Dokažte.

Příklad 3.30. Nechť (x_1, x_2, x_3, x_4) je soubor vektorů z $\mathbb{R}^4$. Určete dimenzi podprostoru $P = \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$ v závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$, je-li

a) $x_1 = (3, 1, 1, 4)$, $x_2 = (\alpha, 4, 10, 1)$, $x_3 = (1, 7, 17, 3)$, $x_4 = (2, 2, 4, 1)$,

b) $x_1 = (\alpha, 1, 1, 1)$, $x_2 = (1, \alpha, 1, 1)$, $x_3 = (1, 1, \alpha, 1)$, $x_4 = (1, 1, 1, \alpha)$.

Řešení. a)$\dim P = 3$ pro $\alpha = 0$, $\dim P = 4$ pro $\alpha \neq 0$, b) $\dim P = 1$ pro $\alpha = 1$, $\dim P = 3$ pro $\alpha = -3$, $\dim P = 4$ pro ostatní α.

Příklad 3.31. Soubory $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3)$ a $\mathcal{Y} = (y_1, y_2, y_3)$ jsou báze prostoru $\mathbb{R}^3$. Určete souřadnice x v bázi $\mathcal{Y}$, je-li

a) $x_1 = (1, 1, 1)$, $x_2 = (2, -1, 2)$, $x_3 = (3, 1, -1)$, $y_1 = (1, 0, 0)$, $y_2 = (-1, 0, 2)$, $y_3 = (0, 1, 1)$ a souřadnice x v bázi $\mathcal{X}$ jsou $(4, 2, -2)$,

b) $x_1 = (3, 1, -1)$, $x_2 = (2, 3, 1)$, $x_3 = (1, -2, -3)$, $y_1 = (1, 2, 2)$, $y_2 = (1, 3, 5)$, $y_3 = (1, 2, 3)$ a souřadnice x v bázi $\mathcal{X}$ jsou $(2, 0, -1)$.

Řešení. souřadnice x v bázi $\mathcal{Y}$ jsou a) $(7, 5, 0)$, b) $(2, -6, 9)$.

Příklad 3.32. Nechť V_n je vektorový prostor dimenze $n \in \mathbb{N}$, $P \subset\subset V_n$, $Q \subset\subset V_n$, $\dim P + \dim Q > n$. Potom existuje $\theta \neq x \in P \cap Q$. Dokažte.

Nápověda: Použijte 1. větu o dimenzi.

Příklad 3.33. (∗∗) Ověřte, že $\mathbb{R}$ je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{Q}$ (vůči přirozeným operacím) a ukažte, že množina $\{\log p; p \text{ prvočíslo}\}$ je lineárně nezávislá. (Návod: jednoznačnost prvočíselných rozkladů.)

Příklad 3.34. Určete dimenzi prostorů $\mathbb{C}$ a $\mathbb{C}^3$ nad tělesem $\mathbb{R}$

Řešení. Víme, že každé komplexní číslo z lze jednoznačeně vyjádřit jako $z = a + b \cdot i$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Tedy dvouprvkový soubor $(1, i)$ tvoří bázi $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{R}$ a dimenze $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{R}$ je dva.

Podobně soubor $((1, 0, 0), (i, 0, 0), (0, 1, 0), (0, i, 0), (0, 0, 1), (0, 0, i))$ tvoří bázi prostoru $\mathbb{C}^3$ nad $\mathbb{R}$, takže jeho dimenze je šest.

4 Hodnost matic a Frobeniova věta

Značení a zkratky:

- $h(\mathbb{A})$ .... hodnost matice $\mathbb{A}$
- $\mathbb{A}^{-1}$ .... inverzní matice k matici $\mathbb{A}$

4.1 Hodnost matice

Hodnost matice jsme definovali následovně:

Definice 4.1. *Nechť $\mathbb{A} \in T^{m,n}$. **Hodností matice** $\mathbb{A}$ nazýváme dimenzi lineárního obalu souboru řádků matice $\mathbb{A}$ (jako vektorů z $T^{1,n}$) a značíme ji $h(\mathbb{A})$. Tedy:*

$$h(\mathbb{A}) = \dim\langle \mathbb{A}_{1:}, \ldots, \mathbb{A}_{m:} \rangle.$$

Na přednášce jsme si ovšem také ukázali, jak hodnost matice spočítat a čemu všemu se ještě rovná:

- hodnost matice se rovná hodnosti transponované matice, tedy $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{A}^T)$,
- nechť $\mathbb{B}$ je matice v horním stupňovitém tvaru, kterou jsme pomocí GEM získali z matice $\mathbb{A}$, potom $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{B})$,
- hodnost matice v horním stupňovitém tvaru je rovna počtu nenulových řádků,
- hodnost matice v horním stupňovitém tvaru je rovna počtu hlavních sloupců.

Poslední dva body nám vlastně říkají, jak hodnost spočítat: stačí převést matici do horního stupňovitého tvaru a spočítat nenulové řádky (nebo hlavní sloupce, což je ale vlastně totéž).

Příklad 4.2. Určete hodnosti následujících matic:

$$
\text{a) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5,5}, \quad \text{b) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}, \quad \text{c) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_5^{3,3},
$$

$$
\text{d) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{6,4}, \quad \text{e) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4,7}.
$$

Řešení. Všechny příklady lze vyřešit prachobyčejným GEM, takže zde vzorová řešení ani neuvádíme, pouze sdělujeme výsledky:

a) $h(\mathbb{A}) = 4$, b) $h(\mathbb{A}) = 2$, c) $h(\mathbb{A}) = 2$, d) $h(\mathbb{A}) = 4$, e) $h(\mathbb{A}) = 3$.

Příklad 4.3. V závislosti na parametru $\alpha \in T$ určete hodnosti následujících matic z $T^{m,n}$:

$$
\text{a) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \alpha & 2 & 3 \\ 2 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_5^{3,3}, \quad \text{b) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \alpha & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}, \quad \text{c) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2},
$$

$$
\text{d) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \alpha & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,4}, \quad \text{e) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}, \quad \text{f) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \alpha+2 & 2\alpha & 2\alpha & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & \alpha+1 & \alpha+1 & 1 \\ \alpha+2 & \alpha+1 & 2 & 2 \\ \alpha+2 & \alpha+1 & \alpha+1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5,4}.
$$

Řešení. Zde je úloha lehce zpestřena přítomností parametru $\alpha \in T$, a proto si předvedeme jedno řešení podrobněji, i když se stále jedná o pouhé provedení GEM.

Prohodíme řádky matice $\mathbb{A}$ z a) tak, abychom dostali

$$
\begin{pmatrix} 2 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & 2 \\ \alpha & 2 & 3 \end{pmatrix}.
$$

Abychom se zbavili α v posledním řádku, musíme přičíst β násobek prvního řádku, kde

$$
\alpha + 2\beta = 0,
$$

připomínáme, že sčítání i násobení čísel ze $\mathbb{Z}_5$ opět automaticky chápeme jako *modulo* 5. Řešení této rovnice je jistě $\beta = 2\alpha$. Výsledkem této úpravy je matice

$$
\begin{pmatrix} 2 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & 2 \\ 5\alpha & 2+2\alpha & 3+2\alpha^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2+2\alpha & 3+2\alpha^2 \end{pmatrix}.
$$

Nyní bychom chtěli k třetímu řádku přičíst β násobek druhého, aby platilo

$$2 + 2\alpha + \beta = 0.$$

Rovnice je jistě splněna pro $\beta = 3 + 3\alpha$, což vede na matici

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 + \alpha + 2\alpha^2 \end{pmatrix}.$$

Hodnost matice $\mathbb{A}$ je tedy buď 2 (je-li $4 + \alpha + 2\alpha^2 = 0$) nebo 3 (je-li $4 + \alpha + 2\alpha^2 \neq 0$). Prostým dosazením zjistíme, že $h(\mathbb{A}) = 2$ platí pro $\alpha \in \{3, 4\}$, pro $\alpha \in \{0, 1, 2\}$ je $h(\mathbb{A}) = 3$

Výsledky ostatních úloh: b) $h(\mathbb{A}) = 3$ pro $\alpha = 0$, $h(\mathbb{A}) = 4$ jinak, c) $h(\mathbb{A}) = 1$ pro $\alpha = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$, $h(\mathbb{A}) = 2$ jinak, d) $h(\mathbb{A}) = 2$ pro $\alpha = 3$, $h(\mathbb{A}) = 3$ jinak, e) $h(\mathbb{A}) = 1$ pro $\alpha = 1$, $h(\mathbb{A}) = 2$ pro $\alpha = -\frac{1}{2}$, $h(\mathbb{A}) = 3$ jinak, f) $h(\mathbb{A}) = 3$ pro $\alpha \in \{0, 1\}$, $h(\mathbb{A}) = 4$ jinak.

4.2 Regularita a inverzní matice

Čtvercovou matici $\mathbb{A} \in T^{n,n}$ nazýváme **regulární**, jestliže k ní existuje tzv. **inverzní matice**, značená $\mathbb{A}^{-1} \in T^{n,n}$, splňující rovnice

$$\mathbb{A}^{-1}\mathbb{A} = \mathbb{A}\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{E},$$

kde $\mathbb{E}$ je **jednotková matice** s jedničkami na diagonále a ostatními prvky nulovými. Dokonce víme, že platí-li pro nějakou matici $\mathbb{B} \in T^{n,n}$, že $\mathbb{B}\mathbb{A} = \mathbb{E}$, potom musí platit $\mathbb{B} = \mathbb{A}^{-1}$.

Abychom poznali, jestli je matice regulární, můžeme využít následující fakt dokázaný na přednášce:

Matice $\mathbb{A} \in T^{n,n}$ je regulární, právě když $h(\mathbb{A}) = n$.

Chceme-li tedy zjistit, zda je matice regulární, vyčteme z horního stupňovitého tvaru, jestli jsou všechny sloupce hlavní; je-li alespoň jeden sloupec vedlejší, matice regulární není.

K regulární matici budeme potom chtít najít matici inverzní. K tomu nám opět dopomůže GEM. Každá z úprav, které při GEM používáme, je totiž ekvivalentní násobení matice, kterou upravujeme, nějakou vhodnou regulární maticí zleva.[4] To znamená, že umíme-li převést pomocí GEM matici $\mathbb{A}$ na matici $\mathbb{B}$, existuje regulární matice $\mathbb{P}$ taková, že $\mathbb{B} = \mathbb{P}\mathbb{A}$. Jak si snadno rozmyslíte, regulární matice je právě taková, kterou lze pomocí GEM úprav převést na jednotkovou; to jest, existuje regulární matice $\mathbb{P}$ tak, že $\mathbb{P}\mathbb{A} = \mathbb{E}$. To ale znamená, že $\mathbb{P}$ je hledaná inverzní matice. Abychom takovou matici $\mathbb{P}$ našli, budeme všechny úpravy, které aplikujeme na $\mathbb{A}$, aplikovat zároveň na jednotkovou matici. Tak získáme $\mathbb{P}\mathbb{A} = \mathbb{E}$ a zároveň $\mathbb{P}\mathbb{E} = \mathbb{P}$.

---

[4] Například upravit matici $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ na matici $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, totiž vyměnit první a druhý řádek, znamená právě přenásobit původní matici zleva regulární maticí $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; podobně upravit matici $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ na matici $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, totiž zdvojnásobit druhý řádek, obnáší právě přenásobit původní matici zleva regulární maticí $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; a provést obě tyto úpravy znamená právě násobit zleva regulární maticí $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Podobně přičtení násobku jednoho řádku k jinému řádku, jakož i každá jiná GEM úprava, je zachycena takovým násobením nějakou regulární maticí zleva (rozmyslete si jak přesně), a součin takových matic, což je opět regulární matice, pak odpovídá právě kumulaci takových úprav, jako výše. Takto se úpravy prováděné na zadané matici $\mathbb{A}$ zároveň promítají do jednotkové matice (viz příklad).

Příklad 4.4. Rozhodněte, zda jsou následující matice regulární a v kladném případě k nim nalezněte matice inverzní:

$$\text{a) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_5^{3,3}, \quad \text{b) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_5^{3,3}, \quad \text{c) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_2^{2,2}$$

Řešení. Pro případ a) vyjdeme z matice $(\mathbb{A} \mid \mathbb{E}) \in T^{3,6}$ (svislá čára opět nemá jiný význam, než že vizuálně odděluje původní matici a matici jednotkovou). Tuto matici se pokusíme upravit na matici $(\mathbb{E} \mid \mathbb{B})$. Pokud to půjde, je matice $\mathbb{A}$ regulární a $\mathbb{B}$ je hledaná inverze $\mathbb{A}^{-1}$. Matici

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

snadno upravíme[5] na matici

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Odtud vidíme, že hodnost matice $\mathbb{A}$ je tři, a tedy se jedná o regulární matici. Pomocí dalších kroků GEM dostaneme

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

a matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

je hledanou inverzí $\mathbb{A}^{-1}$, jak si snadno můžete ověřit vyčíslením $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{A}$.

Pro případ b) upravíme matici

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

pomocí GEM na

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right).$$

Z toho vidíme, že hodnost matice $\mathbb{A}$ je dva a ona není regulární.

V případě matice c) snadno ověříme, že je sama sobě inverzí.

4.3 Soustavy lineárních rovnic

Soustavám lineárních rovnic jsme se věnovali ve cvičení č. 2, a proto zde uvedeme pouze ukázku výpočtu posledního nedořešeného případu: tím je situace, kdy nám vyjde, že soustava má více jak jedno řešení. Již víme, že množina všech řešení S se dá zapsat ve tvaru

$$S = \tilde{x} + S_0,$$

[5] Všimněte si opět, jak pravá strana zachycuje provedené úpravy: vyměnili jsme první a druhý řádek, a přičetli dvojnásobek druhého řádku ke třetímu řádku.

kde $\tilde{x}$ je tzv. *partikulární* řešení a S_0 je *podprostor* tvořený řešeními přidružené homogenní soustavy. Jak najít partikulární řešení už víme, zbývá nám problém, jak popsat podprostor S_0.

Díky tomu, že S_0 je podprostor, musí mít bázi. Pokud tuto bázi najdeme, získáme velice kompaktní zápis množiny S_0, neboť víme, že S_0 je rovna lineárnímu obalu této báze. Návod, jak najít tuto bázi, vyplyne z tvrzení **Frobeniovy** věty, která mj. říká toto:

> Soustava s rozšířenou maticí $(\mathbb{A} \mid \mathbb{b})$ má řešení právě tehdy, když hodnost této rozšířené matice je rovna hodnosti matice[6] $\mathbb{A}$.
>
> Má-li soustava řešení, převedeme rozšířenou matici do horního stupňovitého tvaru. Potom platí, že dimenze podprostoru S_0 je rovna počtu vedlejších sloupců (nepočítaje sloupec pravých stran).

Řešení soustavy tedy spočívá, jako obvykle, v převodu rozšířené matice do horního stupňovitého tvaru. Z výsledku poznáme, jestli nemá soustava řešení, jestli má právě jedno (a dimenze S_0 je nula) nebo jestli jich má více. V takovém případě umíme i najít příp. partikulární řešení a nyní již i víme, že existuje báze S_0, která má k prvků, kde k je počet vedlejších sloupců matice soustavy (tj. vedlejší sloupec vzniklý z $\mathbb{b}$ nepočítáme).

Najít tuto bázi je poměrně prosté: označme $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ proměnné soustavy a nechť $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}$ jsou proměnné, které odpovídají vedlejším sloupcům (tzv. **volné proměnné**) získaným pomocí GEM. Je jasné, že pokud za těchto k volných proměnných dosadíme nějaká čísla z daného tělesa, zbylé proměnné už jednoznačně dopočítáme. Není již těžké si domyslet, že dosadíme-li za tuto $k$tici volných proměnných postupně vektory libovolné báze prostoru T^k, přičemž vázané proměnné po každém dosazení dopočítáme, dostaneme kčlenný LN soubor vektorů z $k$dimenzionálního podprostoru $S_0 \subset\subset T^n$. Z toho co víme o bázi a dimenzi pak již plyne, že těchto k vektorů tvoří bázi S_0.

Ukažme si tento postup na příkladu.

Příklad 4.5. Vyřešte soustavu s maticí $\mathbb{A}$ a pravou stranou $\mathbb{b}$, kde:

$$\text{a) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_5^{3,5} \text{ a } \mathbb{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_5^{3,4} \text{ a } \mathbb{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Řešení. Rozšířenou matici soustavy upravíme do horního stupňovitého tvaru:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 4 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Vidíme, že soustava má řešení, protože poslední sloupec je vedlejší. Snadno najdeme nějaké partikulární řešení, např.

$$\tilde{x} = (1, 2, 0, 1, 0).$$

V upravené rozšířené matici soustavy existují ještě další dva vedlejší sloupce, a proto soustava bude mít více než jedno řešení. Tyto sloupce odpovídají proměnným x_3 a x_5, tyto dvě proměnné jsou tedy volné. Z Frobeniovy věty víme, že podprostor S_0 bude mít dvoučlennou bázi. Tuto bázi dostaneme tak, že za x_3 a x_5 dosadíme vektory nějaké báze $\mathbb{Z}_5^2$, můžeme vzít např. standardní bázi $((1,0),(0,1))$. Dosadíme $x_3 = 1$ a $x_5 = 0$ a dopočítáme zbylé proměnné tak, abychom dostali řešení přidružené homogenní rovnice $\mathbb{A}\mathbb{x} = \theta$. Dostaneme $x_4 = 0, x_2 = 1$ a $x_1 = 3$. Podobně pro $x_3 = 0$ a $x_5 = 1$ dostaneme $x_4 = 1, x_2 = 0$ a $x_1 = 0$.

[6] To je jinými slovy řečeno to, co už víme ze cvičení č. 2: soustava s rozšířenou maticí v horním stupňovitém tvaru má řešení právě tehdy, když pravá strana je vedlejší sloupec. Že je to to samé si uvědomíte, když si připomenete, jak se počítá hodnost matice.

Celkově tak dostáváme množinu všech řešení

$$S = (1, 2, 0, 1, 0) + \langle (3, 1, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 1) \rangle.$$

Pro soustavu b) zjistíme, že má řešení a jednu volnu proměnnou. Množinu S pak můžeme zapsat např. v tomto tvaru:

$$S = (1, 1, 0, 4) + \langle (1, 3, 1, 0) \rangle.$$

4.4 Lineární variety

Lineární varieta ve vektorovém prostoru T^n je libovolná množina zapsatelná ve tvaru

$$W = a + P,$$

kde $a \in T^n$ je vektor posunutí a $P \subset\subset T^n$ je zaměření. Každou varietu umíme zapsat dvěma způsoby. První jsou tzv. **parametrické rovnice**, které získáme tak, že najdeme bázi P. Ta existuje, pokud se nejedná o bod, tedy varietu s $P = \{\theta\}$, jejíž parametrické rovnice jsou triviálně $u = a$ (chápáno jako u je prvek variety právě když splňuje rovnici $u = a$). Buď tedy $(y_1, \dots, y_k)$ báze P. Potom parametrické rovnice jsou

$$u \in W \Leftrightarrow \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in T: \; u = a + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i y_i \,.$$

Jako **neparametrické rovnice** variety pak označujeme jakoukoli soustavu rovnic $\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$, jejíž množina řešení je právě rovna $a + P$, tedy platí, že a je partikulární řešení a $P = S_0$. V tomto cvičení si ukážeme, jak přejít od parametrických rovnic k neparametrickým, což lze chápat tak, že k množině řešení budeme hledat soustavu lineárních rovnic. Přechod od neparametrických rovnic k parametrickým je vlastně ekvivalentní problému, který už vyřešit umíme: nalezení množiny řešení soustavy lineárních rovnic.

Příklad 4.6. Nalezněte neparametrické rovnice variety $W \subset \mathbb{R}^n$, je-li:

a) $n = 2$, $\quad W = (1, -1) + \langle (2, 1) \rangle \quad$ b) $n = 2$, $\quad W:$
```
x=3 -3t
y=1+2t
```

c) $n = 3$, $\quad W:$
```
x=1 - t
y=2+3t
z=  2t
```
d) $n = 3$, $\quad W:$
```
x=1+3t -r
y=    t+r
z=3     -r
```

e) $n = 4$, $\quad W:$
```
x= 1+ t
y= 2 -3t
z=-1+2t
u= 1
```
f) $n = 4$, $\quad W:$
```
x=-2 -3t+3r -4s
y= 3+ t     + s
z= 1+ t+5r+2s
u=-1+2t+2r+3s
```

Řešení. Vyřešíme případ f) a použijeme přesně postup popsaný v sekci 3.5 studijního textu. Varietu z f) můžeme zapsat v násl. tvaru:

$$W = (-2, 3, 1, -1) + \langle (-3, 1, 1, 2), (3, 0, 5, 2), (-4, 1, 2, 3) \rangle.$$

Hledáme tedy matici $\mathbb{A}$ a vektor pravých stran $\mathbb{b}$ tak, že množina řešení soustavy $\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$ je rovna varietě W, tedy že $(-2, 3, 1, -1)$ je partikulární řešení a podprostor S_0 je roven podprostoru $\langle (-3, 1, 1, 2), (3, 0, 5, 2), (-4, 1, 2, 3) \rangle$, neboli že vektory $(-3, 1, 1, 2), (3, 0, 5, 2), (-4, 1, 2, 3)$ tvoří bázi (že jsou LN víme ze zadání, příp. si snadno ověříme). Díky Frobeniově větě víme, že matice bude muset mít hodnost jedna, neb $\dim S_0 = 3$ a jedná se o body ve čtyřdimenzionálním prostoru. Napišme tři vektory z báze zaměření variety do sloupců matice, získáme tak matici

$$\mathbb{Y} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Pro hledanou matici $\mathbb{A}$ tedy musí platit

$$\mathbb{A}\mathbb{Y} = \Theta,$$

kde Θ je nulová matice příslušných rozměrů. Transponováním tak můžeme získat rovnici pro řádky matice $\mathbb{A}$: každý řádek $\mathbb{a} = (a_1, \ldots, a_4)$ musí splňovat

$$\mathbb{Y}^T \mathbb{a}^T = \theta.$$

Odpovídající rozšířená matice soustavy je

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -3 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right).$$

Soustavu vyřešíme a zjistíme, že $S_0 = \langle (3, -2, -5, 8) \rangle$. Jako matici $\mathbb{A}$ tedy můžeme volit

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Zbývá najít pravou stranu $\mathbb{b}$. Tu zvolíme k dané matici $\mathbb{A}$ prostě tak, aby zadaný vektor posunutí $(-2, 3, 1, -1)$ byl partikulárním řešením soustavy $\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$, neboli

$$\mathbb{b} = (3(-2) + (-2)3 + (-5)1 + 8(-1)) = (-25).$$

Hledané neparametrické rovnice mají tedy tvar soustavy jedné rovnice o čtyřech neznámých

$$3x - 2y - 5z + 8u = -25.$$

Pro ostatní případy dostaneme pomocí stejného postupu následující výsledky: a) $x - 2y = 3$, b) $2x + 3y = 9$, c) $2x + z = 2$, $3x + y = 5$, d) $x - 3y - 4z = -11$, e) $3x + y = 5$, $2x - z = 3$, $u = 1$.

4.5 Cvičení

Příklad 4.7. Jak je třeba volit parametry $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, aby následující matice měly hodnost rovnou třem:

$$\text{a) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \alpha & \beta & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ \alpha & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -2 & 1 \\ \beta & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{c) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & \alpha \\ 1 & 4 & -2 & 2 & \beta \\ 1 & -12 & 8 & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

Řešení. a) $\alpha + 2 \neq \beta$, b) $\alpha + 2\beta + 2 = 0$, c) $2\alpha \neq 3\beta + \gamma$.

Příklad 4.8. Nalezněte všechny parametry $\alpha \in \mathbb{R}$, tak aby následující matice měly minimální hodnost:

$$\text{a) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 1 & \alpha+2 & \alpha+4 \\ 2 & \alpha+4 & \alpha(\alpha+2) \end{pmatrix}, \text{b) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha+1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & \alpha+3 \end{pmatrix}, \text{c) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & \alpha & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 10 & -5 & 5 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Řešení. a) $\alpha \in \{-2, 0, 2\}$, b) $\alpha = 0$, c) $\alpha \in \{-2, 15\}$.

Příklad 4.9. V závislosti na parametrech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ určete hodnosti následujících matic:

$$\text{a) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \beta \\ -1 & \beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 1 \\ 1 & \alpha\beta & 1 \\ 1 & \beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad \text{c) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta^2 & \alpha\beta^2 \\ 1 & \beta & \alpha\beta \\ 1 & \beta & \beta^2 \end{pmatrix}.$$

Řešení. a) $h(\mathbb{A}) = 2$ pro $\alpha = \pm\beta$, $h(\mathbb{A}) = 3$ jinak, b) $h(\mathbb{A}) = 1$ pro $\alpha = 1$, $h(\mathbb{A}) = 2$ pro $\alpha = -2 \vee (\alpha \neq 1 \wedge \beta = 0)$, $h(\mathbb{A}) = 3$ jinak, c) $h(\mathbb{A}) = 1$ pro $\beta = 0 \vee \alpha = \beta$, $h(\mathbb{A}) = 3$ jinak.

Příklad 4.10.

Buď $n \geq 2$. Určete pravdivostní hodnotu následujících tvrzení:

a) $(\forall \mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{C}^{n,n})(\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{A})$,

b) $(\forall \mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{C}^{n,n})(\mathbb{A}\mathbb{B} = \Theta \ \Rightarrow \ \mathbb{B}\mathbb{A} = \Theta)$,

c) $(\forall \mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{C}^{n,n})(\mathbb{A} \neq \Theta \wedge \mathbb{B} \neq \Theta \ \Rightarrow \ \mathbb{A}\mathbb{B} \neq \Theta)$,

d) $(\forall \mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{C}^{n,n})((\mathbb{A} + \mathbb{B})^2 = \mathbb{A}^2 + 2\mathbb{A}\mathbb{B} + \mathbb{B}^2)$,

e) $(\forall \mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{C}^{n,n})(\mathbb{A}^2 - \mathbb{B}^2 = (\mathbb{A} + \mathbb{B})(\mathbb{A} - \mathbb{B}))$.

Řešení. Ani jedno z tvrzení neplatí. (Najděte protipříklady!)

Příklad 4.11. * **Stopou** $\operatorname{tr}\mathbb{A}$ čtvercové matice $\mathbb{A}$ rozumíme součet jejích prvků na diagonále. Dokažte, že pro matice $\mathbb{B} \in T^{m,n}$ a $\mathbb{C} \in T^{n,m}$ platí

$$\operatorname{tr}(\mathbb{B}\mathbb{C}) = \operatorname{tr}(\mathbb{C}\mathbb{B}).$$

Příklad 4.12. S využitím výsledku předchozího cvičení dokažte, že neexistují matice $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in T^{n,n}$ takové, aby $\mathbb{A}\mathbb{B} - \mathbb{B}\mathbb{A} = \mathbb{E}$.

Příklad 4.13. Je množina čtvercových matic s nulovou stopou podprostor $T^{n,n}$? Pokud ano, jakou má tento podprostor dimenzi?

Řešení. Ano, $n^2 - 1$.

Příklad 4.14. Matice $\mathbb{A} \in T^{n,n}$ je **symetrická**, právě když $(\forall i, j \in \hat{n})(\mathbb{A}_{ij} = \mathbb{A}_{ji})$. Je množina symetrických matic podprostor $T^{n,n}$? Pokud ano, jakou má tento podprostor dimenzi?

Řešení. Ano, $n(n+1)/2$.

Příklad 4.15. Rozhodněte, zda jsou následující matice (s prvky z tělesa $\mathbb{R}$ resp $\mathbb{C}$) regulární a v kladném případě k nim nalezněte matice inverzní:

$$\text{a) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{c) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad \text{d) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

$$\text{e) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{f) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{g) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3i & 1 & 2-i \\ 0 & 3 & 5 \\ 2i & i & 3+i \end{pmatrix}.$$

Řešení.

$$\text{a) } \mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{c) } \mathbb{A} \text{ není regulární,}$$

$$\text{d) } \mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad \text{e) } \mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{f) } \mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 2 \\ -4 & 1 & 5 & 1 \\ -8 & -3 & 5 & 7 \\ 0 & -5 & 5 & 5 \end{pmatrix}, \quad \text{g) } \mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} -2-9i & 1+2i & 3+i \\ 10 & 5+5i & -15 \\ -6 & 2-3i & 9 \end{pmatrix}.$$

Příklad 4.16. Zjistěte, pro které hodnoty parametru $\alpha \in \mathbb{C}$ jsou následující matice regulární, a nalezněte k nim matice inverzní:

$$\text{a) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}, \quad \text{c) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \text{d) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix},$$

$$\text{e) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{f) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{g) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \text{h) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení.

$$\text{a) } \forall \alpha \in \mathbb{C},\ \mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \nexists \alpha \in \mathbb{C}, \quad \text{c) } \alpha \neq 0,\ \mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/\alpha & 1/\alpha \end{pmatrix},$$

$$\text{d) } \alpha \neq \pm 1,\ \mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{\alpha^2 - 1}\begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix},$$

$$\text{e) } \alpha \neq \pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ \mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{2\alpha^2 - 1}\begin{pmatrix} -\alpha^2 & \alpha & \alpha^2 - 1 \\ \alpha & -1 & \alpha \\ \alpha^2 - 1 & \alpha & -\alpha^2 \end{pmatrix},$$

$$\text{f) } \alpha \notin \{0, \pm\sqrt{2}\},\ \mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{\alpha(2 - \alpha^2)}\begin{pmatrix} -1 & \alpha & 1 - \alpha^2 \\ \alpha & -\alpha^2 & \alpha \\ 1 - \alpha^2 & \alpha & -1 \end{pmatrix},$$

$$\text{g) } \alpha \notin \left\{-1, \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\},\ \mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{\alpha^3 + 1}\begin{pmatrix} \alpha^2 & -\alpha & 1 \\ 1 & \alpha^2 & -\alpha \\ -\alpha & 1 & \alpha^2 \end{pmatrix},$$

$$\text{h) } \alpha \neq 1,\ \mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{\alpha - 1}\begin{pmatrix} \alpha + 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Příklad 4.17. Nalezněte neznámou matici $\mathbb{X}$ vyhovující rovnici

a) $\mathbb{X}\mathbb{A} = (\mathbb{X} - \mathbb{B})\mathbb{B}$, je-li

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

b) $\mathbb{X}\mathbb{B} - \mathbb{A} = \mathbb{B}$, je-li

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

c) $\mathbb{A}\mathbb{X} - \mathbb{B} = \mathbb{X}$, je-li

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

d) $\mathbb{A}\mathbb{X} + 2\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{X} - 2\mathbb{C}$, je-li

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 8 \end{pmatrix},$$

e) $\mathbb{A}\mathbb{X} + i\mathbb{X} = \mathbb{B}$, je-li

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 5 & i-1 \\ 0 & 3i \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 13+i & 4i \\ -8 & -4i \end{pmatrix}.$$

Řešení.

$$\text{a) } \mathbb{X} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 7 & 14 & 9 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \mathbb{X} = \begin{pmatrix} 17 & 13 & -7 \\ -8 & -6 & 4 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{c) } \mathbb{X} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -12 & -5 \\ 1 & 3 & 1 \\ -4 & 3 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\text{d) } \mathbb{X} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{e) } \mathbb{X} = \begin{pmatrix} 3 & i \\ 2i & -1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 4.18. * Dokažte, že matice $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ je regulární a najděte $\mathbb{A}^{-1}$, je-li

$$\text{a) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{c) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{d) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{e) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 & \dots & \alpha^{n-1} \\ 0 & 1 & \alpha & \alpha^2 & \dots & \alpha^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & \dots & \alpha^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení.

$$\text{a) } \mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2-n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix},$$

$$\text{c) } \mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (-1)^{n-1} & (-1)^n & (-1)^{n-1} & (-1)^n & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{d)} \mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & \alpha^2 & -\alpha^3 & \dots & (-\alpha)^{n-1} \\ 0 & 1 & -\alpha & \alpha^2 & \dots & (-\alpha)^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & -\alpha & \dots & (-\alpha)^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \text{e) } \mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\alpha & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 4.19. Buďte $\mathbb{A} \in T^{n,n}$ regulární a $\mathbb{B} \in T^{n,n}$ singulární. Potom obě matice $\mathbb{AB}$, $\mathbb{BA}$ jsou singulární. Dokažte.

Příklad 4.20. Musí být součet dvou regulárních matic regulární matice? Může být součet dvou matic, z nichž jedna, resp. žádná není regulární, regulární matice? Uveďte vhodné příklady.

Řešení. Ne, ano.

Příklad 4.21. Nechť $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in T^{n,n}$. Potom matice $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ jsou obě regulární, právě když matice $\mathbb{AB}, \mathbb{BA}$ jsou obě regulární. Dokažte.

Příklad 4.22. Nechť $\mathbb{A} \in T^{n,n}$ vyhovuje rovnici $\mathbb{A}^2 - \mathbb{A} + \mathbb{E} = \Theta$. Dokažte, že $\mathbb{A}$ je regulární. Co musí platit pro matici $\mathbb{A}^{-1}$?

Řešení. $\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{E} - \mathbb{A}$.

Příklad 4.23. * Nechť pro matici $\mathbb{A} \in T^{n,n}$ existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $\mathbb{A}^k = \Theta$ (taková $\mathbb{A}$ se nazývá **nilpotentní** matice). Potom je matice $\mathbb{E} - \mathbb{A}$ regulární a platí $(\mathbb{E} - \mathbb{A})^{-1} = \mathbb{E} + \mathbb{A} + \mathbb{A}^2 + \dots + \mathbb{A}^{k-1}$. Dokažte.

Příklad 4.24. * Nechť $\mathbb{A} \in T^{n,n}$ je regulární. Jak se změní matice $\mathbb{A}^{-1}$, jestliže v matici $\mathbb{A}$:

a) prohodíme i-tý a j-tý řádek,

b) i-tý řádek vynásobíme číslem $\alpha \in T \setminus \{0\}$,

c) k i-tému řádku přičteme j-tý řádek, $i \neq j$?

Jak se změní inverzní matice při podobných transformacích sloupců?

Řešení. a) Zamění se i-tý a j-tý sloupec, b) i-tý sloupec se vynásobí číslem $1/\alpha$, c) od j-tého sloupce se odečte i-tý. Varianta pro sloupce: jako a), b), c) ale s řádky.

Příklad 4.25. Nalezněte množinu řešení následujících homogenních soustav lineárních rovnic:

$$
\text{a)}\ x-y+z-t=0 \qquad
\text{b)}\ \begin{array}{l} 9x+3y-z=0 \\ 5x-2y-3z=0 \end{array} \qquad
\text{c)}\ \begin{array}{l} 3x+y+t=0 \\ 3x+y-2t=0 \\ -2x-4y+5z-9t=0 \end{array}
$$

$$
\text{d)}\ \begin{array}{r} x+y+z=0 \\ 3x+10y+2z=0 \\ 6x+16y+11z=0 \\ 2x-2y-z=0 \end{array} \qquad
\text{e)}\ \begin{array}{r} -x+y+z+t+u=0 \\ x-y+z+t+u=0 \\ x+y-z+t+u=0 \\ x+y+z-t+u=0 \\ x+y+z+t-u=0 \end{array}
$$

$$
\text{f)}\ \begin{array}{l} x-z+v=0 \\ y+t-u=0 \\ x-y-t+v=0 \\ y-z+t=0 \\ x-u+v=0 \end{array} \qquad
\text{g)}\ \begin{array}{r} 2x+3y-z-2t+2u=0 \\ -3y+z+6t+2u=0 \\ 5x+6y-2z+7t+4u=0 \\ 9x+12y-4z+9t+8u=0 \end{array}
$$

Řešení. a) $\langle(1,1,0,0),(-1,0,1,0),(1,0,0,1)\rangle$,

b) $\langle(1,-2,3)\rangle$,

c) $\langle(1,-3,-2,0)\rangle$,

d) $\{(0,0,0)\}$,

e) $\{(0,0,0,0,0)\}$,

f) $\langle(1,1,1,0,1,0),(-1,0,0,0,0,1),(0,-1,0,1,0,0)\rangle$,

g) $\langle(0,1,3,0,0)\rangle$.

Příklad 4.26. Nalezněte množinu řešení následujících nehomogenních soustav lineárních rovnic:

$$
\text{a)}\ x+y+z+t+u=1 \qquad
\text{b)}\ \begin{array}{l} x+y+z=2 \\ x-y+z+t=1 \end{array} \qquad
\text{c)}\ \begin{array}{l} 2x-y+z-3t=4 \\ 2x+y-z+t=1 \\ 3x-2y+2z-3t=2 \\ 5x+y-z+2t=-1 \end{array}
$$

$$
\text{d)}\ \begin{array}{r} x+2y+3z+4t=11 \\ 2x+3y+4z+t=12 \\ 3x+4y+z+2t=13 \\ 4x+y+2z+3t=14 \end{array} \qquad
\text{e)}\ \begin{array}{l} x+3y-z+4t=8 \\ x+y-z-2t=2 \\ x+7y-z+16t=20 \end{array} \qquad
\text{f)}\ \begin{array}{l} 2x+7y+3z+t=6 \\ 3x+5y+2z+2t=4 \\ 9x+4y+z+7t=2 \end{array}
$$

Řešení. a) $(1,0,0,0,0)+\langle(-1,1,0,0,0),(-1,0,1,0,0),(-1,0,0,1,0),(-1,0,0,0,1)\rangle$,

b) $(1,0,1,-1)+\langle(-1,1,0,2),(-1,0,1,0)\rangle$,

c) nemá řešení,

d) $\{(2,1,1,1)\}$,

e) $(0,3,1,0)+\langle(1,0,1,0),(5,-3,0,1)\rangle$,

f) $(-1,1,0,1)+\langle(1,-1,2,-1),(1,-5,11,0)\rangle$.

Příklad 4.27. Nalezněte množinu řešení následujících soustav lineárních rovnic v závislosti na parametru $\alpha\in\mathbb{R}$:

$$\text{a)}\ \begin{array}{l} x+y+z=1\\ x+\alpha y+z=\alpha\\ x+y+\alpha z=\alpha \end{array}\qquad \text{b)}\ \begin{array}{l} x+y+\alpha z=\alpha\\ x+\alpha y+z=1\\ \alpha x+y+z=1 \end{array}\qquad \text{c)}\ \begin{array}{l} x-5y-7z=0\\ -2x+y+\alpha z=-3\\ -x+\alpha y+3z=-1 \end{array}$$

$$\text{d)}\ \begin{array}{l} \alpha x+y+2z=1\\ x+\alpha y+2z=1\\ x+2y+z=0 \end{array}\qquad \text{e)}\ \begin{array}{l} x+2y+z=3\\ 2x-2y-z=3\\ x+\alpha y+2z=\alpha \end{array}\qquad \text{f)}\ \begin{array}{l} \alpha x-y+z=1\\ x+y+\alpha z=-1\\ x+y+z=-\alpha \end{array}$$

$$\text{g)}\ \begin{array}{l} \alpha x+y+\alpha z=1\\ \alpha x+\alpha y+z=\alpha^2\\ x+\alpha y+z=\alpha \end{array}\qquad \text{h)}\ \begin{array}{l} \alpha x+y+z=1\\ x+\alpha y+z=\alpha\\ x+y+\alpha z=\alpha^2 \end{array}\qquad \text{i)}\ \begin{array}{l} \alpha x+2\alpha y+z=1\\ 2x+\alpha^2 y+(\alpha+1)z=\alpha \end{array}$$

Řešení. a) Pro $\alpha=1$ je $M=(1,0,0)+\langle(-1,1,0),(-1,0,1)\rangle$, pro $\alpha\neq1$ je $M=\{(-1,1,1)\}$,

b) pro $\alpha\notin\{1,-2\}$ je $M=\{(0,0,1)\}$, pro $\alpha=1$ je $M=(1,0,0)+\langle(-1,1,0),(-1,0,1)\rangle$, pro $\alpha=-2$ je $M=(-1,-1,0)+\langle(1,1,1)\rangle$,

c) pro $\alpha\notin\{2,17\}$ je $M=(\frac{26}{17-\alpha},\frac{1}{17-\alpha},\frac{3}{17-\alpha})$, pro $\alpha=17$ je $M=\emptyset$, pro $\alpha=2$ je $M=(\frac{5}{3},\frac{1}{3},0)+\langle(1,-4,3)\rangle$,

d) pro $\alpha=5$ je $M=\emptyset$, pro $\alpha=1$ je $M=(2,-1,0)+\langle(-3,1,1)\rangle$, pro $\alpha\notin\{1,5\}$ je $M=(\frac{1}{\alpha-5},\frac{1}{\alpha-5},\frac{-3}{\alpha-5})$,

e) pro $\alpha=4$ je $M=(2,\frac{1}{2},0)+\langle(0,-1,2)\rangle$, pro $\alpha\neq4$ je $M=\{(2,1,-1)\}$,

f) pro $\alpha=1$ je $M=(0,-1,0)+\langle(-1,0,1)\rangle$, pro $\alpha=-1$ je $M=(0,0,1)+\langle(-1,1,0)\rangle$, pro $\alpha\notin\{\pm1\}$ je $M=\{(-1,-\alpha,1)\}$,

g) pro $\alpha=-1$ je $M=(-1,0,0)+\langle(0,1,1)\rangle$, pro $\alpha=1$ je $M=(1,0,0)+\langle(-1,0,1),(-1,1,0)\rangle$, pro $\alpha\notin\{\pm1\}$ je $M=\{(\alpha,1,-\alpha)\}$,

h) pro $\alpha\notin\{1,-2\}$ je $M=(-\frac{\alpha+1}{\alpha+2},\frac{1}{\alpha+2},\frac{(\alpha+1)^2}{\alpha+2})$, pro $\alpha=-2$ je $M=\emptyset$, pro $\alpha=1$ je $M=(1,0,0)+\langle(-1,1,0),(-1,0,1)\rangle$,

i) pro $\alpha\notin\{0,-2\}$ je $M=(0,\frac{1}{\alpha(\alpha+2)},\frac{\alpha}{\alpha+2})+\langle(\alpha,1-\alpha,\alpha(\alpha+2))\rangle$, pro $\alpha=-2$ je $M=\emptyset$, pro $\alpha=0$ je $M=(-\frac{1}{2},0,1)+\langle(0,1,0)\rangle$.

5 Lineární kódy

5.1 Hammingova vzdálenost a řetězce nad konečnými tělesy

Kódování, v tom nejobecnějším smyslu, je přepisování řetězců znaků z jedné abecedy na jiné řetězce znaků z jiné nebo stejné abecedy. Abecedou myslíme libovolnou konečnou množinu a znaky jsou pak prvky této množiny. My budeme v tomto cvičení uvažovat výhradně abecedy totožné s konečnými tělesy $\mathbb{Z}_p$.

Konečné řetězce znaků se často nazývají slova. Množinu všech konečných neprázdných řetězců nad abecedou $\mathcal{A}$ značíme $\mathcal{A}^+$. Jako délku slova bereme počet znaků slova a množinu všech slov nad abecedou $\mathcal{A}$, která mají délku $n \in \mathbb{N}$, značíme $\mathcal{A}^n$.

Vezmeme-li za abecedu např. těleso $\mathbb{Z}_2$, značí množina $(\mathbb{Z}_2)^3$ množinu všech binárních slov délky 3:

$$000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111.$$

My budeme využívat jednoznačné korespondence mezi slovem nad $\mathbb{Z}_p$ délky n a uspořádanou $n$ticí z vektorového prostoru $\mathbb{Z}_p^n$. Např. slovo 010 budeme někdy považovat za vektor $(0,1,0)$ ze $\mathbb{Z}_2^3$ a ten zase někdy za slovo délky 3 nad abecedou $\mathbb{Z}_2$.

Na množině stejně dlouhých slov si zavedeme **Hammingovu vzdálenost**, která je jednou z nejpoužívanějších (resp. nejzákladnějších) měr podobnosti slov:

> Pro dvě slova $u = u_1 u_2 \dots u_n$ a $v = v_1 v_2 \dots v_n$ stejné délky n a nad stejnou abecedou definujeme Hammingovu vzdálenost jako
>
> $$d(u,v) = \text{ počet indexů } i \in \hat{n} \text{ takových, že } u_i \neq v_i.$$

Příklad 5.1. V množině slov M najděte dva různé prvky, jejichž Hammingova vzdálenost je nejmenší.

a) $M = \{00100, 11101, 10100, 11111, 00000\}$.

b) Množina všech slov ze $\mathbb{Z}_2^5$, obsahující sudý počet jedniček.

c) Množina všech slov ze $\mathbb{Z}_2^{10}$, které vznikly spojením (zřetězením) jednoho slova ze $\mathbb{Z}_2^5$ se sebou samým.

Řešení. a) Hammingova vzdálenost je 1. Slova s touto vzdáleností jsou 00100 a 00000, 11101 a 11111, 00100 a 10100.

b) Hammingova vzdálenost dvou různých slov je 2 nebo 4. Slova se vzdáleností 2 jsou např. 11000 a 10100.

c) Min. Hammingova vzdálenost je opět dva, např. pro řetězce 0000000000 a 1000010000. □

Lineární kódy, kterými se budeme později zejména zabývat, budou definovány jako podprostory vektorových prostorů $\mathbb{Z}_p^n$ (které chápeme také jako množiny slov délky n). Prozkoumejme tedy ještě trochu slova a podprostory z těchto VP.

Příklad 5.2. Rozhodněte, jestli jsou následující množiny M podprostory zadaných vektorových prostorů V. Pokud ano, najděte matici $\mathbb{A}$ takovou, že množina M odpovídá řešení soustavy $\mathbb{A}\mathbb{x} = \theta$.

a) M je množina prvků $\mathbb{Z}_2^5$, které obsahují sudý počet jedniček.

b) M je množina prvků $\mathbb{Z}_2^n, n \in \mathbb{N}$, které obsahují sudý počet jedniček.

c) M je množina prvků $\mathbb{Z}_2^6$ takových, že počet jedniček v nich je násobek tří.

d) M je množina prvků $\mathbb{Z}_3^6$ takových, že součet jejich znaků (ciferný součet) je násobek tří.

e) M je množina prvků $\mathbb{Z}_2^6$, které vznikly spojením jednoho slova ze $\mathbb{Z}_2^3$ se sebou samým.

f) M je množina prvků $\mathbb{Z}_2^{3n}$, které vznikly spojením jednoho slova ze $\mathbb{Z}_2^n$ se sebou samým třikrát.

Řešení. Příklad a) bychom mohli vyřešit tak, že ověříme vlastnosti podprostoru, tedy uzavřenost na sčítání a násobení číslem z tělesa. Existuje ale jednodušší způsob: stačí si uvědomit, že vektor/slovo $x_1x_2x_3x_4x_5$ patří do M, právě když v $\mathbb{Z}_2$ platí[7]

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0.$$

To ale není nic jiného, než homogenní soustava rovnic v $\mathbb{Z}_2^5$ a tedy M, jakožto množina jejich řešení, je podprostor. Navíc máme rovnou odpověď na druhou otázku: hledaná matice je matice

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Výsledky ostatních příkladů: b) M je podprostor a

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_2^{1,n}.$$

c) M není podprostor.
d) M je podprostor a

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

e) M je podprostor a

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

f) M je podprostor a matice $\mathbb{A}$ je s využitím blokového zápisu rovna

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{E} & \Theta & \mathbb{E} \\ \Theta & \mathbb{E} & \mathbb{E} \end{pmatrix},$$

kde $\mathbb{E}$ je jednotková a Θ nulová matice rozměrů $n \times n$. □

Příklad 5.3. Najděte báze podprostorů z předchozího příkladu.

Řešení. Vzhledem k tomu, že jsme našli matice homogenních soustav, jejichž je M množina řešení, je úloha najít bázi M shodná s úlohou řešit soustavy rovnic (přesněji hledat bázi S_0) a to již máme v paži.

V případě slov nad abecedami $\mathbb{Z}_p$ si zavádíme vedle Hammingovy vzdálenosti ještě **Hammingovu váhu** slova/vektoru $u \in \mathbb{Z}_p^n$, která je rovna počtu nenulových znaků. Pro Hammingovu váhu platí, že je rovna vzdálenosti od nulového vektoru:

$$\|u\| = d(u, 0^n).$$

Příklad 5.4. Dokažte následující tvrzení: Nechť P je podprostor vektorového prostoru $\mathbb{Z}_p^n$. Pak

$$\min\{d(u,v) \mid u,v \in P, u \neq v\} = \min\{\|u\| \mid u \in P, u \neq \theta\}.$$

To jest, minimální vzdálenost mezi slovy z P je právě minimální možná váha nenulového slova z P.

[7] Takhle pod čarou připomínáme, že všechno sčítání je modulo 2 a být sudý tedy odpovídá v $\mathbb{Z}_2$ tomu, být rovný nule.

5.2 Lineární kódy

Lineární (n,k)-kód K je podprostor T^n dimenze k, kde T je nějaké konečné těleso (pro nás tedy $\mathbb{Z}_p$ pro nějaké prvočíslo p). Jakožto podprostor jej můžeme zadat pomocí báze (resp. generující matice, jejíž řádky jsou tato báze), nebo pomocí kontrolní matice H_K takové, že $u \in K$, právě když $H_K \cdot u = \theta$.

Poznamenejme, že u množin M v příkladu 5.2, které byly podprostory, hrály roli kontrolních matic právě hledané matice $\mathbb{A}$.

Jedním z klíčových parametrů kódu je **minimální vzdálenost**, neboť na ní závisí, kolik chyb kód objevuje resp. opravuje. Pro lineární kód K je minimální vzdálenost rovna (viz předchozí cvičení)

$$\mu(K) = \min\{d(u,v) \mid u,v \in K, u \neq v\} = \min\{\|u\| \mid u \in K, u \neq \theta\}.$$

Je-li $\mu(K) = m$, potom kód K objevuje $m-1$ (a menší) chyby a opravuje $\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor$ (a menší) chyby.

Z přednášky víme, že lineární (n,k)-kód je **systematický**, právě když jeho generující matici můžeme volit ve tvaru

$$G_K = \begin{pmatrix} \mathbb{E}_k & \mathbb{B} \end{pmatrix},$$

kde $\mathbb{E}_k$ je jednotková matice typu $k \times k$.

Příklad 5.5. Dokažte, že pro systematický lineární (n,k)-kód s generující maticí

$$G_K = \begin{pmatrix} \mathbb{E}_k & \mathbb{B} \end{pmatrix},$$

platí, že matice $(-\mathbb{B}^T \; \mathbb{E}_{n-k})$ je maticí kontrolní. Určete rozměry všech uvedených matic.

Příklad 5.6. Pro kód $K \subset \mathbb{Z}_2^7$ zadaný generující maticí

$$G_K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

najděte kontrolní matici a minimální vzdálenost. Rozhodněte, jestli se jedná o systematický kód.

Řešení. Dle definice generující matice je

$$K = \langle (1,0,1,1,0,1,1), (0,1,1,1,1,0,1), (1,1,1,0,0,0,1) \rangle.$$

Jak k podprostoru najít matici H_K takovou, že tento podprostor odpovídá množině řešení homogenní soustavy s touto maticí, víme z předchozího cvičení: podprostor je také varieta a my vlastně hledáme její neparametrické rovnice!

Můžeme ale postupovat i jinak. Pokusíme se nejdříve ověřit, jestli je zadaný kód systematický. Pomocí GEM se pokusíme matici G_K upravit na matici ve tvaru

$$\begin{pmatrix} \mathbb{E} & \mathbb{B} \end{pmatrix}.$$

Jelikož GEM nemění lineární obal řádků (viz přednášku k tématu hodnost matice), jedná se stále o generující matici téhož kódu. Úprava pomocí GEM se podaří a dostaneme tak jinou generující matici

$$G'_K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a kód je tedy systematický. Dle předchozího cvičení je kontrolní matice rovna

$$H'_K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

což můžeme ověřit tak, že zkontrolujeme platnost rovnice

$$H'_K(G'_K)^T = \Theta.$$

Minimální vzdálenost můžeme spočítat dvěma způsoby: buď tak, že si projdeme všechna nenulová kódová slova a spočítáme minimální Hammingovu váhu, nebo tak, že najdeme minimální počet sloupců kontrolní matice, které tvoří LZ soubor.

První způsob znamená najít všechny netriviální lin. kombinace báze. Těch je $2^3 - 1 = 7$:

$$(1,0,1,1,0,1,1), (0,1,1,1,1,0,1), (1,1,1,0,0,0,1), (1,0,0,1,1,0,0),$$
$$(0,1,0,1,0,1,0), (0,0,1,0,1,1,1), (1,1,0,0,1,1,0).$$

Toto jsou všechna kódová slova (mimo $(0,0,0,0,0,0,0)$) a minimální vzdálenost je tedy 3.

Druhý způsob vyžaduje zkušené oko dívající se na kontrolní matici: vidíme, že žádné dva sloupce nejsou stejné, což nad tělesem $\mathbb{Z}_2$ znamená, že libovolné dva sloupce tvoří LN soubor. Také si snadno všimneme, že první sloupec je součtem 4. a 5. sloupce a tedy tyto tři sloupce tvoří LZ soubor. Minimální vzdálenost kódu je tedy 3. $\square$

Mějme lineární (n,k)-kód $K \subset\subset \mathbb{Z}_p^n$. Dekódování je zobrazení, které libovolnému slovu ze $\mathbb{Z}_p^n$ přiřadí kódové slovo s tím, že kódovému slovu u přiřadí vždy u. Jelikož se snažíme při dekódování zjistit, jaké slovo bylo původně odesláno, snažíme se dekódování definovat tak, aby nekódovému slovu, které vzniklo z kódového kvůli nějaké chybě, bylo přiřazeno nějaké nejbližší kódové slovo. Jedním ze způsobů jak to udělat, je použít tzv. standardní dekódování (viz přednáška). To stojí na násl. myšlence.

Příklad 5.7. Je-li $K \subset\subset \mathbb{Z}_p^n$ lineární (n,k)-kód, pak každá varieta W se zaměřením K má právě p^k prvků. Každé dvě takové variety jsou buďto stejné, nebo disjunktní. To znamená, že $\mathbb{Z}_p^n$ se rozkládá na variety tvaru $u + K$; každý prvek $x \in \mathbb{Z}_p^n$ leží právě v jedné z nich. Takových variet je p^{n-k}.

Zvolme v každé varietě $u + K$ slovo π_u s nejnižší možnou Hammingovou váhou, tzv. *pivot*. Pro dané u a jeho pivot π_u je tedy $u - \pi_u \in K$. Přitom podprostor K je sám o sobě varietou se zaměřením K, jeho pivotem je nulový vektor, a pro kódová slova $u \in K$ je tedy $u - \pi_u = u$.

Příklad 5.8. Pro kód $K \subset \mathbb{Z}_2^5$ zadaný generující maticí

$$G_K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

najděte kontrolní matici a minimální vzdálenost. Rozhodněte, jestli se jedná o systematický kód a vytvořte dekódovací tabulku definující standardní dekódování.

Řešení. Z tvaru generující matice vidíme, že K je systematický kód, a dostáváme kontrolní matici

$$H_K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Kódová slova jsou čtyři:

$$K = \{(0,0,0,0,0),(1,0,1,0,1),(0,1,1,1,1),(1,1,0,1,0)\}.$$

Z toho je hned vidět, že minimální vzdálenost kódu je 3.

Z dřívějšího již víme, že libovolný prvek lineární variety lze zvolit jejím vektorem posunutí. Tedy všechna slova ležící ve stejné varietě jako zadané $u \in \mathbb{Z}_p^n$ nalezneme jako součty slova u s kódovými slovy $w \in K$. Například lineární varietou obsahující slovo 01110 je $\{01110, 11011, 00001, 10100\}$, jejím pivotem je slovo 00001.

Každá lineární varieta $u+K$ tedy obsahuje 4 prvky a různých lineárních variet je nutně 8. Zapíšeme je do dekódovací tabulky tak, že každá varieta tvoří jeden řádek, první řádek je přímo kód K, v prvním sloupci jsou pivoty a platí, že prvek v j-tém sloupci je součtem pivotu dané třídy a kódového slova z prvního řádku a j-tého sloupce.

00000	10101	01111	11010
00001	10100	01110	11011
00010	10111	01101	11000
00100	10001	01011	11110
01000	11101	00111	10010
10000	00101	11111	01010
00011	10110	01100	11001
01001	11100	00110	10011

Přijaté slovo 00111 potom standardně dekódujeme jako kódové slovo 01111 z prvního řádku ve stejném sloupci. Pivot 01000 ve stejném řádku a prvním sloupci říká, že přijaté slovo se od tohoto kódového slova liší právě ve druhém znaku. □

Dekódovací tabulku lze ještě zjednodušit díky definici kontrolní matice, vlastnostem lineárních variet a maticového násobení: uvažujme lineární varietu $v+K$ a libovolné slovo $u \in v+K$. Pak nutně existuje $w \in K$ takové, že $u = v + w$ a dále

$$H_K u = H_K(v+w) = H_K v + H_K w = H_K v + \theta = H_K v.$$

Vektoru $H_K u$ budeme říkat **příznak** (**syndrom**) slova u. Slova ve stejné lineární varietě $u+K$ potom mají stejný příznak! Pro každý řádek tabulky tedy ve skutečnosti stačí znát pivot a jeho příznak; přijaté slovo u pak můžeme dekódovat následovně: spočítáme jeho příznak $H_K u$, z tabulky vyčteme jeho pivot π_u, a získáme kódové slovo $u - \pi_u \in K$.

Příklad 5.9. Najděte syndromovou dekódovací tabulku pro kód z předchozího příkladu.

Řešení. Násobením kontrolní maticí počítáme příznaky pivotů z předchozí tabulky.

pivot	příznak
00000	000
00001	001
00010	010
00100	100
01000	111
10000	101
00011	011
01001	110

Kdybychom nyní chtěli standardně dekódovat slovo 00111, spočítáme

$$H_K \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Hledaný pivot je tedy dle tabulky 01000 a slovo dekódujeme jako

$$00111 - 01000 = 01111 \in K.$$

□

Příklad 5.10. Po drátě přišla následující zpráva dejvického agenta, poškozená šumem:

```
11010 11011 10101 00111 11001
01010 11010 00001 10101 11000
10101 10110 11111 10111 10001
01101 11011 10101 00001 10000
```

S použitím kódu popsaného výše dekódujte původně odeslanou zprávu. Pro zvýšení rozkoše ji pak přečtěte jako morseovku, kde `10101` je tečka, `11010` je čárka, `01111` je konec písmene a `00000` je konec slova.

Příklad 5.11. Dekódujte tutéž zprávu s použitím téhož kódu, ovšem pomocí dekódovací tabulky

00000	10101	01111	11010
00001	10100	01110	11011
00010	10111	01101	11000
00100	10001	01011	11110
01000	11101	00111	10010
10000	00101	11111	01010
01100	11001	00011	10110
00110	10011	01001	11100

Taková tabulka se od původní dekódovací tabulky liší jen volbou pivotů — například `01100` je stejně dobrým pivotem své rozkladové třídy jako `00011`, totiž oba mají minimální váhu 2. Všimněte si, že v rozkladových třídách s vahou 1 je naopak volba pivotu jednoznačná. S použitím této tabulky se zpráva dekóduje jinak; použitý kód opravuje 1-chyby, ale nikoli 2-chyby, přitom zpráva 2-chyby obsahuje.

6 Lineární zobrazení

Osnova:

6.1 Lineární zobrazení a základní pojmy

6.2 Matice lineárního zobrazení

Značení a zkratky:

- ⋄ $\mathcal{L}(P,Q)$ .... množina všech lineárních zobrazení $A : P \to Q$
- ⋄ $\mathcal{L}(V) = \mathcal{L}(V,V)$ .... množina všech lineárních operátorů na V
- ⋄ $(z)_{\mathcal{X}}$ ... souřadnice vektoru $z \in V$ v bázi $\mathcal{X}$ (zapisovány dle potřeby jako $n$tice nebo sloupcový vektor)
- ⋄ ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$ .... matice zobrazení $A \in \mathcal{L}(P,Q)$ v bázích $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ (z $\mathcal{X}$ do $\mathcal{Y}$)
- ⋄ ${}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{Y}}$ .... matice přechodu od báze $\mathcal{X}$ k bázi $\mathcal{Y}$ (matice identického operátoru)

6.1 Lineární zobrazení a základní pojmy

Definice 6.1. *Buďte P a Q dva vektorové prostory nad stejným tělesem T, nechť $A : P \to Q$. Zobrazení A nazveme **lineární** právě když současně platí:*

1. *(aditivita): $\forall x, y \in P : A(x + y) = Ax + Ay$,*
2. *(homogenita): $\forall \alpha \in T, \forall x \in P : A(\alpha x) = \alpha Ax$.*

*Množinu všech lineárních zobrazení z P do Q značíme $\mathcal{L}(P, Q)$. Lineární zobrazení prostoru V do V nazýváme **lineární operátor** (transformace) na V. Množinu všech lineárních operátorů na V značíme krátce $\mathcal{L}(V)$. Lineární zobrazení prostoru V do tělesa T nazýváme **lineární funkcionál** na V.*

O zobrazeních $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ jsme si dokázali různá důležitá tvrzení, například:

- inverze lineárního zobrazení (pokud existuje) je lineární, složení lineárních zobrazení taktéž,
- linearita zobrazení $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ je ekvivalentní výroku
$$\forall \alpha \in T, \forall x, y \in P : A(\alpha x + y) = \alpha Ax + Ay\,,$$
- obraz lineární kombinace je lineární kombinace obrazů, obdobné tvrzení platí i pro obraz lineárního obalu,
- obraz i vzor libovolného podprostoru je také podprostor,
- pro libovolné soubory $\mathcal{X} = (x_1, \ldots, x_n)$ v P a $\mathcal{Y} = (y_1, \ldots, y_n)$ v Q takové, že $Ax_i = y_i$ pro každé $i \in \hat{n}$, platí: je-li $\mathcal{X}$ LZ, pak i jeho obraz $\mathcal{Y}$ je LZ, nebo ekvivalentně: pokud je $\mathcal{Y}$ LN, pak i jeho vzor $\mathcal{X}$ je LN,
- lineární zobrazení je jednoznačně určeno zadáním obrazů prvků nějaké báze, je-li pro bázi $\mathcal{X} = (x_1, \ldots, x_n)$ prostoru P zadáno $\forall i \in \hat{n} : Ax_i = y_i$, musí platit
$$\forall z \in P : \; (z)_{\mathcal{X}} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \quad \Rightarrow \quad z = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \quad \Rightarrow \quad Az := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i\,.$$

Definice 6.2. *Nechť $A \in \mathcal{L}(P, Q)$. **Hodností zobrazení** A rozumíme číslo*
$$h(A) := \dim A(P)\,.$$
***Jádro zobrazení** A definujeme jako množinu*
$$\ker A := \{x \in P \mid Ax = \theta_Q\}\,,$$
*a jeho dimenzi nazýváme **defektem zobrazení** A. Defekt značíme*
$$d(A) := \dim \ker A\,.$$

Klíčovým tvrzením o hodnosti zobrazení $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ je pak **druhá věta o dimenzi**, která říká, že platí vztah
$$h(A) + d(A) = \dim P\,.$$

Poznámka: Zdůrazněme, že při řešení většiny typů příkladů v celém tomto tématu lze postupovat naivně (pouze dle základních definic, bez znalosti matic zobrazení a matic přechodu), s tím také v části 6.1 počítáme. Postup využívající matice zobrazení a matice přechodu, připomenuté v části 6.2, je však mnohem efektivnější, proto mu posléze začneme dávat přednost. Doporučujeme vyzkoušet oba možné postupy – jako šikovný trénink.

Příklad 6.3. Zjistěte, která z následujících zobrazení $A : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^4$ jsou lineární. U všech, která lineární jsou, nalezněte $\ker A$, $d(A)$, $h(A)$ a nějakou bázi oboru hodnot $A(\mathbb{C}^3)$.

a) $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1, \alpha_1, 2\alpha_2, 3\alpha_3)$,

b) $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, \alpha_3, \alpha_2, \alpha_1)$,

c) $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_3, \alpha_1^2, \alpha_3, \alpha_3)$,

d) $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, 0, 0)$,

e) $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1 + 1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$,

f) $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, \alpha_1\alpha_2, \alpha_2\alpha_3, \alpha_1\alpha_3)$,

g) $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_1, \alpha_1, \alpha_1)$,

h) $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\operatorname{Re}\alpha_1, \operatorname{Im}\alpha_1, \operatorname{Im}\alpha_2 - \alpha_3, \alpha_1)$,

i) $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (2\alpha_1 - 3i\alpha_2 - \alpha_3, \alpha_1 - i\alpha_2 - \alpha_3, 3\alpha_1 + \alpha_2 - i\alpha_3, 4i\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3)$,

Řešení. Řešení několika prvních příkladů rozebereme podrobněji, u zbytku jen uvedeme výsledky.

a) Zobrazení není lineární, vyvrátíme například aditivitu. Pro libovolné $a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), b = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{C}^3$ platí

$$\left(Aa\right)_1 = 1, \left(Ab\right)_1 = 1, \text{ tedy } \left(A(a+b)\right)_1 = 1 \neq 2 = \left(Aa\right)_1 + \left(Ab\right)_1 .$$

b) Ověříme, že pro libovolné $\gamma \in \mathbb{C}$ a $a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), b = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{C}^3$ platí $A(\gamma a + b) = \gamma Aa + Ab$:

$$\begin{aligned} A(\gamma\alpha_1 + \beta_1, \gamma\alpha_2 + \beta_2, \gamma\alpha_3 + \beta_3) &= (0, \gamma\alpha_3 + \beta_3, \gamma\alpha_2 + \beta_2, \gamma\alpha_1 + \beta_1) \\ &= (0, \gamma\alpha_3, \gamma\alpha_2, \gamma\alpha_1) + (0, \beta_3, \beta_2, \beta_1) \\ &= \gamma A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + A(\beta_1, \beta_2, \beta_3) . \end{aligned}$$

Jádro určíme z rovnice $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, \alpha_3, \alpha_2, \alpha_1) = (0, 0, 0, 0)$ pro neznámé $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$, z čehož rovnou plyne $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Tedy $\ker A = \{\theta\}$, $d(A) = 0$ a z druhé věty o dimenzi dostáváme $h(A) = \dim \mathbb{C}^3 - d(A) = 3$. Obraz libovolné množiny generátorů prostoru $\mathbb{C}^3$ generuje podprostor $A(\mathbb{C}^3)$, stačí z něj tedy vybrat bázi. Například pro standardní bázi $\mathbb{C}^3$ dostáváme

$$\begin{aligned} A(\mathbb{C}^3) = A\langle e_1, e_2, e_3\rangle &= \langle Ae_1, Ae_2, Ae_3\rangle \\ &= \langle A(1,0,0), A(0,1,0), A(0,0,1)\rangle \\ &= \langle (0,0,0,1), (0,0,1,0), (0,1,0,0)\rangle , \end{aligned}$$

kde generující soubor je zřejmě LN. Bázi $A(\mathbb{C}^3)$ lze tedy volit například (e_2, e_3, e_4).

c) Zobrazení není lineární, vyvrátíme například homogenitu. Pro libovolné $\gamma \in \mathbb{C}, |\gamma| \neq 1$ a $a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{C}^3$ platí

$$\left(A(\gamma a)\right)_2 = \left(A(\gamma\alpha_1, \gamma\alpha_2, \gamma\alpha_3)\right)_2 = (\gamma\alpha_1)^2 \neq \gamma\alpha_1^2 = \left(\gamma(Aa)\right)_2 .$$

d) Zobrazení je lineární a rovnice $Aa = A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, 0, 0)$ je triviálně splněna pro libovolný vektor $a \in \mathbb{C}^3$. Tedy $\ker A = \mathbb{C}^3$, $d(A) = 3$, $h(A) = 0$ a báze $A(\mathbb{C}^3)$ neexistuje.

e) Není lineární.

f) Není lineární.

g) Je lineární, $\ker A = \langle e_2, e_3 \rangle$, $d(A) = 2$, $h(A) = 1$ a báze $A(\mathbb{C}^3)$ je např. $((1,1,1,1))$.

h) Není lineární.

i) Zobrazení je lineární. Jeho jádro opět získáme jako řešení soustavy

$$\begin{aligned} 2\alpha_1 - 3i\alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_1 - i\alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 - i\alpha_3 &= 0 \\ 4i\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

o které snadno zjistíme, že má jen triviální řešení. Tedy $\ker A = \{\theta\}, d(A) = 0$, $h(A) = 3$ a bází $A(\mathbb{C}^3)$ je například obraz standardní báze $(A(1,0,0), A(0,1,0), A(0,0,1))$, tj. soubor vektorů $((2,1,3,4i), (-3i,-i,1,3), (-1,-1,-i,-1))$.

Příklad 6.4. Nechť $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3)$ je báze V_3 nad $\mathbb{C}$. Zjistěte, která z následujících zobrazení A jsou lineární operátory na V_3. U všech, která lineární jsou, nalezněte $\ker A$, $d(A)$, $h(A)$ a nějakou bázi obrazu hodnot $A(V_3)$. Pro libovolné $x \in V_3$ označme jeho souřadnice v bázi $\mathcal{X}$ jako $(x)_{\mathcal{X}} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$; je tedy $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3$.

a) $Ax = x_1 + \alpha_1 x_2 + (\alpha_1 - \alpha_3)x_3$,

b) $Ax = \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_2 + \alpha_1 x_3$,

c) $Ax = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)(x_1 + x_2 + x_3)$,

d) $Ax = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + |\alpha_3| x_3$,

Řešení. a) Zobrazení není lineární, například proto, že $A(\theta) = x_1 \neq \theta$.

b) Zobrazení je lineární. Zvolíme-li $x, y \in V_3, (x)_{\mathcal{X}} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), (y)_{\mathcal{X}} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, platí

$$\begin{aligned} A(\gamma x + y) &= A((\gamma\alpha_1 + \beta_1)x_1 + (\gamma\alpha_2 + \beta_2)x_2 + (\gamma\alpha_3 + \beta_3)x_3) \\ &= (\gamma\alpha_2 + \beta_2)x_1 + (\gamma\alpha_3 + \beta_3)x_2 + (\gamma\alpha_1 + \beta_1)x_3) \\ &= \gamma Ax + Ay\,. \end{aligned}$$

Při hledání jádra je nutné si uvědomit, že pracujeme se *souřadnicemi* vektorů. Pro $Ax = \theta$ je $\alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_2 + \alpha_1 x_3 = \theta$; přitom báze $\mathcal{X}$ je lineárně nezávislý soubor, takže $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Máme tedy $\ker A = \{\theta\}$, $d(A) = 0$, $h(A) = 3$ a $A(V_3) = V_3$. Za bázi $A(V_3)$ lze volit např. $\mathcal{X}$.

c) Zobrazení je lineární, to lze snadno ověřit podobně jako v b). Rovnice $Ax = \theta$ vede díky lineární nezávislosti báze $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3)$ na soustavu o jedné rovnici $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$, kde neznámými α_i jsou souřadnice hledaných vektorů v bázi $\mathcal{X}$. Tedy do jádra $\ker A$ padnou takové vektory $x \in V_3$, jejichž *souřadnice* padnou do $\langle (1,-1,0), (1,0,-1) \rangle$. To jsou právě vektory z $\langle x_1 - x_2, x_1 - x_3 \rangle$, tedy $d(A) = 2$ a $h(A) = 1$. Bázi $A(V_3)$ dostaneme například dosazením

$$\begin{aligned} A(V_3) = A\langle x_1, x_2, x_3 \rangle &= \langle Ax_1, Ax_2, Ax_3 \rangle \\ &= \langle x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3 \rangle \\ &= \langle x_1 + x_2 + x_3 \rangle \end{aligned}$$

a jednoprvkovou bázi $A(V_3)$ lze volit například $(x_1 + x_2 + x_3)$.

d) Zobrazení není lineární.

6.2 Matice lineárního zobrazení

Definice 6.5. *Nechť $A \in \mathcal{L}(P_m, Q_n)$, buď $\mathcal{X} = (x_1, \ldots, x_m)$ a $\mathcal{Y} = (y_1, \ldots, y_n)$ báze P_m, respektive Q_n. Matici ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} \in T^{n,m}$ definovanou po sloupcích předpisem*

$$\forall j \in \hat{m} : ({}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}})_{:j} := (Ax_j)_{\mathcal{Y}},$$

*nazveme **maticí zobrazení** A **v bázích** $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ (případně „z báze $\mathcal{X}$ do báze $\mathcal{Y}$“).*

Matici lineárního operátoru ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{X}}$ zkráceně označíme ${}^{\mathcal{X}}A := {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{X}}$.

Opět shrneme několik nejdůležitějších vlastností matic zobrazení.

- Nechť $A \in \mathcal{L}(P_m, Q_n)$ a $x \in P_m$, označme $(x)_{\mathcal{X}} := \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$ sloupcový vektor souřadnic x v bázi $\mathcal{X}$. Potom platí
$$(Ax)_{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} \cdot (x)_{\mathcal{X}}.$$
- Nechť $A \in \mathcal{L}(Q_n, V_s)$, $B \in \mathcal{L}(P_m, Q_n)$. Potom pro matici složeného zobrazení $AB \in \mathcal{L}(P_m, V_s)$ platí
$${}^{\mathcal{X}}(AB)^{\mathcal{W}} = {}^{\mathcal{Y}}A^{\mathcal{W}} \cdot {}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}},$$
kde $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{W}$ jsou popořadě libovolné báze prostorů P_m, Q_n, V_s.
- Matice ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$ je regulární právě tehdy, když $A \in \mathcal{L}(P_m, Q_n)$ je izomorfismus. V tom případě je $m = n$ a platí
$$\left({}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}\right)^{-1} = {}^{\mathcal{Y}}(A^{-1})^{\mathcal{X}}.$$
- Platí $h(A) = h({}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}})$ pro libovolnou volbu bází $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$.

Definice 6.6. *Nechť $\mathcal{X} = (x_1, \ldots, x_n)$ a $\mathcal{Y} = (y_1, \ldots, y_n)$ jsou báze V_n. Matici identického operátoru ${}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{Y}} \in T^{n,n}$ nazýváme **maticí přechodu** od báze $\mathcal{X}$ k bázi $\mathcal{Y}$.*

Matice přechodu ${}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{Y}}$ tedy ve svých sloupcích obsahuje přímo prvky báze $\mathcal{X}$, ovšem zapsané svými souřadnicemi v bázi $\mathcal{Y}$. Triviálními důsledky vlastností matic zobrazení pak jsou:

- matice ${}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{Y}}$ je regulární a platí $({}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{Y}})^{-1} = {}^{\mathcal{Y}}E^{\mathcal{X}}$,
- pro $x \in V_n$ platí ${}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{Y}} \cdot (x)_{\mathcal{X}} = (x)_{\mathcal{Y}}$,
- ${}^{\mathcal{Y}}E^{\mathcal{Z}} \cdot {}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{Z}}$.
- Nechť $A \in \mathcal{L}(P, Q)$, $\mathcal{X}$, $\tilde{\mathcal{X}}$ báze P a $\mathcal{Y}$, $\tilde{\mathcal{Y}}$ báze Q. Potom platí
$${}^{\tilde{\mathcal{X}}}A^{\tilde{\mathcal{Y}}} = {}^{\mathcal{Y}}E^{\tilde{\mathcal{Y}}} \cdot {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} \cdot {}^{\tilde{\mathcal{X}}}E^{\mathcal{X}}.$$

Příklad 6.7. Buď $A \in \mathcal{L}(\mathbb{Z}_3^3)$ zadané svými hodnotami na vektorech standardní báze $\mathbb{Z}_3^3$ následovně:

$$A(1,0,0) := (0,0,1), \quad A(0,1,0) := (2,0,0), \quad A(0,0,1) := (0,0,1).$$

Nalezněte:

a) matici ${}^{\mathcal{E}_3}A$,

b) $A(1,2,0)$,

c) $\ker A$, $d(A)$ a $h(A)$,

d) nějakou bázi prostoru $A(\mathbb{Z}_3^3)$.

Řešení. I když lze postupovat stejně jako u příkladů v části 6.1, ilustrujeme postup využívající matice zobrazení.

a) Hledaná matice ${}^{\mathcal{E}_3}A$ má ve svých sloupcích obrazy vektorů standardní báze (zapsané také souřadnicemi ve standardní bázi), tedy

$$ {}^{\mathcal{E}_3}A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. $$

b) Jelikož

$$ (A(1,2,0))_{\mathcal{E}_3} = {}^{\mathcal{E}_3}A \cdot ((1,2,0))_{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, $$

platí $A(1,2,0) = (1,0,1)$.

c) Pro nalezení jádra stačí vyřešit homogenní soustavu s maticí ${}^{\mathcal{E}_3}A$ a výsledek interpretovat jako souřadnice ve standardní bázi. Tedy $\ker A = \langle(2,0,1)\rangle = \{(0,0,0),(2,0,1),(1,0,2)\}$, $d(A) = 1$ a $h(A) = 2$.

d) Podprostor $A(\mathbb{Z}_3^3)$ je generován obrazy libovolné báze $\mathbb{Z}_3^3$, například té standardní. Z definice matice zobrazení vyplývá, že tyto obrazy jsou (pomocí souřadnic ve standardní bázi) rovnou zapsané ve sloupcích matice ${}^{\mathcal{E}_3}A$. Tedy

$$ A(\mathbb{Z}_3^3) = \langle(0,0,1),(2,0,0),(0,0,1)\rangle = \langle(0,0,1),(1,0,0)\rangle $$

a máme dvouprvkovou bázi (jeden přebytečný vektor jsme vynechali a jeden jsme vynásobili dvěma).

Příklad 6.8. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ je definované předpisem:

$$ A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) = (\alpha_1, \alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_3, \alpha_4). $$

Sestavte ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$, kde

$$ \mathcal{X} = (x_1,x_2,x_3,x_4) = ((1,0,-1,1),(2,1,0,-1),(0,2,-1,1),(2,-1,1,0)) $$

a

$$ \mathcal{Y} = (y_1,y_2,y_3,y_4) = ((0,0,0,1),(0,0,-1,1),(0,1,-1,1),(1,1,1,1)) $$

jsou báze $\mathbb{R}^4$. Řešte příklad dvojím způsobem. Nejprve matici určete přímo a poté použijte matice přechodu.

Řešení. ◇ Hledaná matice musí ve svých sloupcích obsahovat souřadnice obrazů Ax_i vzhledem k bázi $\mathcal{Y}$. Dosazením do předpisu zobrazení A rovnou dostáváme

$$ \begin{aligned} Ax_1 &= A(1,0,-1,1) = (1,1,-1,1)\,, \\ Ax_2 &= A(2,1,0,-1) = (2,1,2,-1)\,, \\ Ax_3 &= A(0,2,-1,1) = (0,-2,-2,1)\,, \\ Ax_4 &= A(2,-1,1,0) = (2,3,4,0)\,. \end{aligned} $$

Ke všem čtyřem nalezeným vektorům je třeba nalézt jejich souřadnice v bázi $\mathcal{Y}$, tedy řešit lineární rovnice tvaru $\alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3 + \delta y_4 = Ax_i$, ty vedou na soustavy lineárních rovnic, které se liší pouze pravou stranou. Můžeme je vyřešit současně, různé pravé strany pro přehlednost oddělíme. Po úpravě matice soustavy na vhodný tvar pak pro každý vektor Ax_i soustavu zvlášť vyřešíme,

$$\left(\begin{array}{cccc|c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & 2 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Dostáváme tedy

$${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

◇ Přímo z definice získáme dosazením vektorů standardní báze matici

$${}^{\mathcal{E}_4}A = {}^{\mathcal{E}_4}A^{\mathcal{E}_4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

K zadaným bázím můžeme také snadno sestrojit matice přechodu, stačí jejich prvky zapsat postupně do sloupců (souřadnicemi ve standardní bázi),

$${}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{E}_4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad {}^{\mathcal{Y}}E^{\mathcal{E}_4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hledanou matici pak získáme pomocí maticového násobení a inverze, a to dle předpisu

$$\begin{aligned} {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} &= {}^{\mathcal{E}_4}E^{\mathcal{Y}} \cdot {}^{\mathcal{E}_4}A \cdot {}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{E}_4} \\ &= ({}^{\mathcal{Y}}E^{\mathcal{E}_4})^{-1} \cdot {}^{\mathcal{E}_4}A \cdot {}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{E}_4}. \end{aligned}$$

Příklad 6.9. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{Z}_5^3)$, $A(1,1,1) = (1,0,0)$, $A(0,1,1) = (1,1,0)$, $A(0,0,1) = (1,1,1)$. Sestavte ${}^{\mathcal{E}_3}A$.

Řešení. Zobrazení A máme zadáno obrazy vektorů soboru $x_1 = (1,1,1), x_2 = (0,1,1), x_3 = (0,0,1)$. Snadno ukážeme (ověřte!), že $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3)$ je LN a tedy báze $\mathbb{Z}_5^3$. Napíšeme-li zadané obrazy po sloupcích do matice, dostaneme sice matici dotyčného zobrazení, ale v „nesprávných“ bázích,

$${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

tu potřebujeme převést na matici ze standardní do standardní báze, pomocí matice přechodu, podle pravidla

$$\begin{aligned} {}^{\mathcal{E}_3}A &= {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_3} \cdot {}^{\mathcal{E}_3}E^{\mathcal{X}} \\ &= {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_3} \cdot ({}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{E}_3})^{-1}. \end{aligned}$$

Jak snadno spočítáme, platí

$$ {}^{\mathcal{E}_3}E^{\mathcal{X}} = ({}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{E}_3})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}, $$

tedy

$$ {}^{\mathcal{E}_3}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}. $$

Příklad 6.10. O zobrazení $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ víme, že $\ker A = \langle (1,2,0),(2,0,1) \rangle$ a $A(1,1,1) = (3,2)$. Zdůvodněte, proč tyto informace určují A jednoznačně, najděte obecný výraz pro $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ a určete $d(A)$ a $h(A)$.

Řešení. Vektory $(1,2,0),(2,0,1),(1,1,1)$ tvoří bázi $\mathbb{R}^3$ (ověřte!), a zobrazení A je pomocí obrazů na bázi určeno jednoznačně. Jádro má očividně dimenzi 2, takže $d(A) = 2$ a $h(A) = \dim \mathbb{R}^3 - d(A) = 1$.

Označíme-li

$$ \mathcal{X} = ((1,1,1),(1,2,0),(2,0,1)), $$

můžeme rovnou napsat matici zobrazení z báze $\mathcal{X}$ do standardní báze $\mathbb{R}^2$,

$$ {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}. $$

Platí

$$ \begin{aligned} {}^{\mathcal{E}_3}A^{\mathcal{E}_2} &= {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_2}\,{}^{\mathcal{E}_3}E^{\mathcal{X}} \\ &= {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_2}({}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{E}_3})^{-1}. \end{aligned} $$

Potřebnou matici přechodu získáme inverzí jako

$$ ({}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{E}_3})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, $$

z čehož vynásobením získáme matici zobrazení A ve standardních bázích:

$$ {}^{\mathcal{E}_3}A^{\mathcal{E}_2} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 3 & 12 \\ -4 & 2 & 8 \end{pmatrix}. $$

Obraz libovolného $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ pak lze získat vynásobením

$$ A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = {}^{\mathcal{E}_3}A^{\mathcal{E}_2} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 3 & 12 \\ -4 & 2 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 \\ -\frac{4}{3}\alpha_1 + \frac{2}{3}\alpha_2 + \frac{8}{3}\alpha_3 \end{pmatrix}, $$

tedy $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (-2\alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3, -\frac{4}{3}\alpha_1 + \frac{2}{3}\alpha_2 + \frac{8}{3}\alpha_3)$.

Příklad 6.11. Standardní bázi vektorového prostoru $\mathbb{Z}_3^{2,2}$ označme $\mathcal{E} = (e_{1,1}, e_{1,2}, e_{2,1}, e_{2,2})$. Nechť $\mathcal{B}$ je báze definovaná jako $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4) := (e_{1,1}, e_{1,1} + e_{1,2}, e_{1,1} + e_{2,1}, e_{1,1} + e_{2,2})$, tedy

$$ b_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, b_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} $$

Nechť je lineární operátor $A \in \mathcal{L}(\mathbb{Z}_3^{2,2})$ zadán svými obrazy na bázi $\mathcal{B}$,

$$Ab_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, Ab_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, Ab_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, Ab_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Odvoďte:

a) matici ${}^{\mathcal{E}}A$ operátoru A ve standardní bázi $\mathcal{E}$,

b) předpis pro obraz Ax obecného vektoru $x = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3^{2,2}$,

c) $\ker A$, $h(A)$ a $d(A)$,

d) nějakou bázi podprostoru $A(\mathbb{Z}_3^{2,2})$.

Řešení. a) Ze zadání rovnou dostáváme matici[8]

$$ {}^{\mathcal{B}}A^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jelikož platí

$$\begin{aligned} {}^{\mathcal{E}}A &= {}^{\mathcal{B}}A^{\mathcal{E}} \cdot {}^{\mathcal{E}}E^{\mathcal{B}} \\ &= {}^{\mathcal{B}}A^{\mathcal{E}} \cdot ({}^{\mathcal{B}}E^{\mathcal{E}})^{-1}, \end{aligned}$$

potřebujeme sestavit příslušnou matici přechodu. Matici ${}^{\mathcal{B}}E^{\mathcal{E}}$ sestavíme rovnou ze zadání báze $\mathcal{B}$ a následně ji snadno invertujeme:

$$ {}^{\mathcal{B}}E^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad {}^{\mathcal{E}}E^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vynásobením pak dostáváme

$$ {}^{\mathcal{E}}A = {}^{\mathcal{B}}A^{\mathcal{E}} \cdot {}^{\mathcal{E}}E^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Z výsledku předchozího bodu odvodíme předpis pro obraz obecného vektoru:

$$\left(A \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\right)_{\mathcal{E}} = {}^{\mathcal{E}}A \cdot \left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\right)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\beta + 2\gamma \\ \beta + \delta \\ \alpha + 2\beta + \gamma \end{pmatrix},$$

tedy pro libovolné $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z}_3$ platí

$$A \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2\beta + 2\gamma \\ \beta + \delta & \alpha + 2\beta + \gamma \end{pmatrix}.$$

[8] Skutečně se jedná o matici 4×4, jsme totiž na prostoru o dimenzi 4 s čtyřprvkovou standardní bází!

c) Jádro $\ker A$ získáme jako řešení rovnice $A\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, která vede na homogenní soustavu

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Řešením této soustavy je $S = \langle(1,2,1,1)\rangle$; interpretací tohoto výsledku jako souřadnic ve standardní bázi dostáváme

$$\ker A = \left\langle \begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix} \right\rangle,$$

tedy $d(A) = 1$ a $h(A) = 3$.

d) Matice ${}^{\mathcal{E}}A$ ve svých sloupcích obsahuje obrazy vektorů standardní báze (resp. jejich souřadnice). Z předchozího bodu víme, že jen tři z těchto čtyř obrazů jsou nezávislé, takže

$$A(\mathbb{Z}_3^{2,2}) = \left\langle \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix} \right\rangle$$

a máme tříprvkovou bázi prostoru $A(\mathbb{Z}_3^{2,2})$.

6.3 Cvičení

Příklad 6.12. Zjistěte, která z následujících zobrazení $A : \mathbb{R}^{2,2} \to \mathbb{R}^4$ jsou lineární. U všech, která lineární jsou, nalezněte $\ker A$, $d(A)$, $h(A)$ a nějakou bázi oboru hodnot $A(\mathbb{R}^{2,2})$.

a) $A\mathbb{X} = (\alpha_1, \alpha_1 - 2\alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_4, 3\alpha_4)$,

b) $A\mathbb{X} = (1,1,1,1)$,

c) $A\mathbb{X} = (\alpha_2 - \alpha_1, 0, \alpha_4 - \alpha_3, 0)$,

d) $A\mathbb{X} = (\alpha_1, |\alpha_2|, \alpha_3, \alpha_4)$,

kde

$$\mathbb{X} = \begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \alpha_3 & \alpha_4\end{pmatrix}.$$

Řešení. a) Zobrazení je lineární, to snadno ověříme dosazením libovolných $\mathbb{X} = \begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \alpha_3 & \alpha_4\end{pmatrix}$, $\mathbb{X} = \begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2\\ \beta_3 & \beta_4\end{pmatrix}$ a $\gamma \in \mathbb{R}$. Rovnice $A\mathbb{X} = \theta$ vede na homogenní soustavu

$$\alpha_1 = 0, \alpha_1 - 2\alpha_3 = 0, \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_4 = 0, 3\alpha_4 = 0\,,$$

jejímž jediným řešením je nulová matice, tedy $\ker A = \{\Theta\}$, $d(A) = 0$, $h(A) = 4$ a $A(\mathbb{R}^{2,2}) = \mathbb{R}^4$. Jinými slovy, A je isomorfismus mezi $\mathbb{R}^{2,2}$ a $\mathbb{R}^4$. Jakákoli báze $\mathbb{R}^4$ je bází $A(\mathbb{R}^{2,2})$.

b) Zobrazení není lineární. Pro libovolné matice $\mathbb{X}, \mathbb{Y} \in \mathbb{R}^{2,2}$ platí

$$A(\mathbb{X} + \mathbb{Y}) = (1,1,1,1) \neq (2,2,2,2) = A\mathbb{X} + A\mathbb{Y}\,.$$

c) Zobrazení je lineární a platí $\ker A = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, $d(A) = 2$, $h(A) = 2$, báze $A(\mathbb{R}^{2,2})$ je např. (e_1, e_3).

d) Není lineární.

Příklad 6.13. Definujme zobrazení $A : \mathbb{Z}_2^{n,n} \to \mathbb{Z}_2^{n,n}$, $A\mathbb{X} := \mathbb{X}^T$ pro každé $\mathbb{X} \in \mathbb{Z}_2^{n,n}$. Ukažte, že $A \in \mathcal{L}(\mathbb{Z}_2^{n,n})$, najděte $\ker A$, $d(A)$, $h(A)$ a určete obor hodnot $A(\mathbb{Z}_2^{n,n})$.

Řešení. Zobrazení je lineární, platí $\ker A = \{\Theta\}$, $d(A) = 0$, $h(A) = n^2$ a $A(\mathbb{Z}_2^{n,n}) = \mathbb{Z}_2^{n,n}$.

Příklad 6.14. Nechť $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ je lineární zobrazení zadané svou maticí vzhledem ke standardním bázím následovně:

$$\text{a) } {}^{\mathcal{E}}A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } {}^{\mathcal{E}}A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 6 & 10 \end{pmatrix}, \quad \text{c) } {}^{\mathcal{E}}A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\text{d) } {}^{\mathcal{E}}A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 7 \\ 1 & 9 & -3 \\ 8 & 3 & 15 \end{pmatrix}, \quad \text{e) } {}^{\mathcal{E}}A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{f) } {}^{\mathcal{E}}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Určete dimenze m a n, $\ker A$, $d(A)$, $h(A)$ a nějakou bázi podprostoru $A(\mathbb{R}^m)$.

Řešení. a) $m = 3$, $n = 2$, $\ker A = \langle (5, -4, 1) \rangle$, $d(A) = 1$, $h(A) = 2$, báze $A(\mathbb{R}^3)$ je např. $((1, 0), (0, 1))$,

b) $m = 3$, $n = 3$, $\ker A = \langle (4, -7, 5) \rangle$, $d(A) = 1$, $h(A) = 2$, báze $A(\mathbb{R}^3)$ je např. $((1, 2, 6), (0, 1, 4))$,

c) $m = 2$, $n = 3$, $\ker A = \{\theta\}$, $d(A) = 0$, $h(A) = 2$, báze $A(\mathbb{R}^2)$ je např. $((0, 1, 3), (1, 2, 4))$,

d) $m = 3$, $n = 3$, $\ker A = \langle (-48, 13, 23) \rangle$, $d(A) = 1$, $h(A) = 2$, báze $A(\mathbb{R}^3)$ je např. $((2, 1, 8), (0, 1, 2))$,

e) $m = 3$, $n = 2$, $\ker A = \langle (-2, 1, 2) \rangle$, $d(A) = 1$, $h(A) = 2$, báze $A(\mathbb{R}^3)$ je např. $((1, 0), (0, 1))$,

f) $m = 2$, $n = 4$, $\ker A = \langle (-1, 1) \rangle$, $d(A) = 1$, $h(A) = 1$, báze $A(\mathbb{R}^2)$ je např. $((1, 1, 1, 1))$.

Příklad 6.15. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^4)$ je definované předpisem:

$$A(\alpha_1, \alpha_2) = (3\alpha_1 - 2\alpha_2, 0, 0, \alpha_1 - 2\alpha_2).$$

Sestavte matice zobrazení A v různých bázích: ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$, kde $\mathcal{X} = ((2, -3), (1, 1))$ je báze $\mathbb{R}^2$ a $\mathcal{Y} = (e_4, -3e_1, e_2, -2e_3)$ je báze $\mathbb{R}^4$ (e_i značí prvky standardní báze $\mathbb{R}^4$).

Řešení.

$${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -4 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Příklad 6.16. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^2)$ definované předpisem:

$$A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (2\alpha_2 - i\alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3).$$

Sestavte ,${}^{\mathcal{E}_3}A^{\mathcal{E}_2}$, ${}^{\mathcal{E}_3}A^{\mathcal{Y}}$,${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_2}$, ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$, kde $\mathcal{X} = ((1, 0, 1), (1, -1, 1), (0, -1, 1))$ je báze $\mathbb{C}^3$ a $\mathcal{Y} = ((i, 0), (1, 1))$ je báze $\mathbb{C}^2$.

Řešení.

$$ {}^{\mathcal{E}_3}A^{\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -i \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad {}^{\mathcal{E}_3}A^{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} i & -i & -1+i \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, $$

$$ {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} -i & -2-i & -2-i \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} -1+2i & -1+3i & -1+2i \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}. $$

Příklad 6.17. Nalezněte matici operátoru $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ ve standardní bázi, je-li $Ax_i = y_i$, $i \in \hat{3}$, kde

a)

$$ x_1 = (2,3,5),\ x_2 = (0,1,2),\ x_3 = (1,0,0), $$
$$ y_1 = (1,1,1),\ y_2 = (1,1,-1),\ y_3 = (2,1,2), $$

b)

$$ x_1 = (2,0,3),\ x_2 = (4,1,5),\ x_3 = (3,1,2), $$
$$ y_1 = (1,2,-1),\ y_2 = (4,5,-2),\ y_3 = (1,-1,1). $$

Řešení.

$$ \text{a) } {}^{\mathcal{E}_3}A = \begin{pmatrix} 2 & -11 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{b) } {}^{\mathcal{E}_3}A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -6 & 11 & 5 \\ -12 & 13 & 10 \\ 6 & -5 & -5 \end{pmatrix}. $$

Příklad 6.18. Buď $A \in \mathcal{L}(\mathbb{Z}_2^3)$ zadaný maticí

$$ {}^{\mathcal{E}}A^{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, $$

kde $\mathcal{E}$ je standardní báze a $\mathcal{X} = ((1,0,1),(0,1,0),(0,1,1))$. Nalezněte všechny vektory $x \in \mathbb{Z}_2^3$, které vyhovují rovnici:

a) $Ax = (1,0,0)$,

b) $Ax = (1,0,1)$.

Řešení. a) $x = (1,1,0)$, b) $x = (0,0,1)$.
Tip: zadanou matici zobrazení nemusíte nutně převádět na tvar „ze standardní do standardní báze“! Můžete využít toho, že vztah $(Ax)_{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} \cdot (x)_{\mathcal{X}}$ platí pro libovolné báze.

Příklad 6.19. Soubor $\mathcal{X} = ((1,0),(2,1))$ je báze prostoru $\mathbb{R}^2$ a zobrazení $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ jsou zadaná maticemi

$$ {}^{\mathcal{E}_2}A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad {}^{\mathcal{X}}B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}. $$

Najděte matici a) součtu zobrazení $A + B$ ve standardní bázi $\mathcal{E}_2$, b) složeného zobrazení AB ve standardní bázi $\mathcal{E}_2$.

Řešení.

$$ \text{a) } {}^{\mathcal{E}_2}(A+B) = \begin{pmatrix} 0 & 21 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}, \qquad \text{b) } {}^{\mathcal{E}_2}(AB) = \begin{pmatrix} -1 & 31 \\ -2 & 56 \end{pmatrix}. $$

Příklad 6.20. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^4, \mathbb{C}^3)$ je zadané hodnotami na bázi takto:

$$\begin{aligned} A(1,1,-1,0) &= (0,0,0), \quad & A(1,2,-1,-2) &= (-1,-3,1), \\ A(1,0,0,-1) &= (0,0,0), \quad & A(1,1,1,1) &= (5,8,2). \end{aligned}$$

Nalezněte všechna řešení rovnice $Ax = (13,21,5)$.

Řešení. $S = (8,5,0,0) + \langle(-1,-1,1,0),(-1,0,0,1)\rangle$.

Příklad 6.21. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, kde

$$^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ a & -a \\ a & -a^2 \end{pmatrix},$$

$\mathcal{X} = ((0,1),(1,-1))$ a $a \in \mathbb{R}$ je parametr. V závislosti na a najděte ker$A$, obor hodnot $A(\mathbb{R}^2)$ a určete hodnost $h(A)$.

Řešení. Pro $a \notin \{0,1\}$ je ker$A = \{\theta\}$, $h(A) = 2$ a $A(\mathbb{R}^2) = \langle(1,a,a),(1,a,a^2)\rangle$,
pro $a \in \{0,1\}$ je ker$A = \langle(1,0)\rangle$, $h(A) = 1$,
pro $a = 0$ je $A(\mathbb{R}^2) = \langle(1,0,0)\rangle$,
pro $a = 1$ je $A(\mathbb{R}^2) = \langle(1,1,1)\rangle$.

Příklad 6.22. Buďte $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, kde $A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \alpha_3)$ a

$$^{\mathcal{E}_2}B^{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} a & -a \\ a^2 & -a \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$a \in \mathbb{R}$ je parametr. Rozhodněte, v jakém pořadí lze zobrazení skládat. Pro složená zobrazení nalezněte v závislosti na $a \in \mathbb{R}$ hodnost a jádro.

Řešení. Pro $a \notin \{0,1\}$ je $h(AB) = 2$, $\ker(AB) = \{\theta\}$,
pro $a \in \{0,1\}$ je $h(AB) = 1$ a $\ker(AB) = \langle(1,1)\rangle$,
pro $a \notin \{0,1\}$ je $h(BA) = 2$, $\ker(BA) = \langle(1,-1,0)\rangle$,
pro $a \in \{0,1\}$ je $h(BA) = 1$ a $\ker(BA) = \langle(-1,1,0),(0,0,1)\rangle$.

Příklad 6.23. Buď $\phi \in \langle 0, 2\pi)$. Najděte matici $^{\mathcal{E}_2}A_\phi$ lineárního operátoru $A_\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, který otočí vektor $x = (x_1,x_2)$ v rovině $\mathbb{R}^2$ kolem počátku o úhel ϕ (proti směru hodinových ručiček). Dále určete $\ker A_\phi$, $d(A_\phi)$, $h(A_\phi)$ a matici složeného zobrazení $A_\psi \circ A_\phi$ ve standardní bázi $\mathcal{E}_2$, kde $\psi \in \langle 0, 2\pi)$.

Řešení.

$$^{\mathcal{E}_2}A_\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix},$$

ker$A_\phi = \{\theta\}$, $d(A_\phi) = 0$, $h(A_\phi) = 2$,

$$^{\mathcal{E}_2}(A_\psi A_\phi) = \begin{pmatrix} \cos(\phi+\psi) & -\sin(\phi+\psi) \\ \sin(\phi+\psi) & \cos(\phi+\psi) \end{pmatrix}.$$

Příklad 6.24. (∗) Buďte $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha\beta \neq 1$ a definujme lineární operátor $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ maticí

$$^{\mathcal{E}_2}A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Vyšetřete, na jakou množinu se zobrazí čtverec $\langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$ při zobrazení.

b) Ukažte, že pokud $\alpha = \beta$, lze operátor získat složením operátorů rotace o úhel $\pm\pi/4$ a změny měřítka (s odpovídajícími parametry).

Řešení. a) $A(\langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x - \alpha y \leq 1 - \alpha\beta,\ 0 \leq y - \beta x \leq 1 - \alpha\beta\}$. Tato množina představuje rovnoběžník v $\mathbb{R}^2$ s vrcholy $(0,0)$, $(1,\beta)$, $(\alpha,1)$ a $(1+\alpha, 1+\beta)$. Geometricky tedy operátor A realizuje **zkosení** v $\mathbb{R}^2$.

b) $A = A_{\pi/4} B A_{-\pi/4}$, kde $A_{\pm\pi/4}$ je operátor rotace z příkladu 6.23 a B je operátor změny měřítka v $\mathbb{R}^2$ s maticí

$$^{\mathcal{E}_2}B = \begin{pmatrix} 1+\alpha & 0 \\ 0 & 1-\alpha \end{pmatrix}.$$

Příklad 6.25. Jak se změní matice lineárního zobrazení A v bázích $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$, jestliže:

a) v bázi $\mathcal{X}$ zaměníme $i$tý a $j$tý vektor;

b) v bázi $\mathcal{Y}$ zaměníme $i$tý a $j$tý vektor;

c) $i$tý vektor báze $\mathcal{X}$ vynásobíme číslem $\alpha \neq 0$;

d) $i$tý vektor báze $\mathcal{Y}$ vynásobíme číslem $\alpha \neq 0$?

Řešení. a) Zamění se $i$tý a $j$tý sloupec,

b) zamění se $i$tý a $j$tý řádek,

c) $i$tý sloupec se vynásobí α,

d) $i$tý řádek se vydělí α.

7 Determinant, vlastní čísla a diagonalizace

7.1 Permutace

Definice 7.1. *Buď $n \in \mathbb{N}$. Každé bijektivní zobrazení $\pi : \hat{n} \to \hat{n}$ nazýváme **permutací množiny** $\hat{n}$.*

- *Každou dvojici $(\pi(i), \pi(j))$ takovou, že $i < j$ a $\pi(i) > \pi(j)$ (kde $i, j \in \hat{n}$), nazýváme **inverzí v permutaci** π.*
- *Číslo $(-1)^{I_\pi}$, kde I_π je počet inverzí v π, nazýváme **znaménko (signum)** permutace π, značíme jej $\operatorname{sgn}\pi$. Je-li $\operatorname{sgn}\pi = 1$, resp. -1, říkáme, že π je permutace **sudá**, resp. **lichá**.*
- *Množinu všech permutací množiny $\hat{n}$ značíme S_n.*
- *Permutaci $\tau_{ij} \in S_n$, kde $\tau_{ij}(j) = i$, $\tau_{ij}(i) = j$ a pro ostatní prvky $k \notin \{i,j\}$ platí $\tau_{ij}(k) = k$ nazýváme **transpozicí** čísel i a j.*

Permutace obvykle zadáváme výčtem uspořádané $n$tice $(\pi(1), \dots, \pi(n))$ (ve které se každé číslo z množiny $\hat{n}$ musí vyskytovat právě jednou) a platí následující:

- ◇ Složení permutací $\hat{n}$ je také permutace $\hat{n}$.
- ◇ Ke každé permutaci π existuje právě jedna permutace inverzní π^{-1}.
- ◇ Počet všech permutací množiny $\hat{n}$ je $n!$.
- ◇ Každou permutaci lze získat jako složení konečně mnoha transpozic.
- ◇ Pro libovolné $\pi_1, \pi_2 \in S_n$ platí $\operatorname{sgn}(\pi_1 \circ \pi_2) = \operatorname{sgn} \pi_1 \cdot \operatorname{sgn} \pi_2$.

Příklad 7.2. Určete počet inverzí v následujících permutacích:

a) $(2, 3, 5, 4, 1)$,

b) $(2, 3, 4, 6, 5, 1)$,

c) $(1, 9, 6, 3, 2, 5, 4, 7, 8)$,

d) $(n, n-1, n-2, \dots, 2, 1)$,

e) $(1, 3, 5, \dots, 2n-1, 2, 4, 6, \dots, 2n)$,

f) $(2, 4, 6, \dots, 2n, 1, 3, 5, \dots, 2n-1)$,

g) $(1, 4, 7, \dots, 3n-2, 2, 5, 8, \dots, 3n-1, 3, 6, 9, \dots, 3n)$,

h) $(2, 5, 8, \dots, 3n-1, 3, 6, 9, \dots, 3n, 1, 4, 7, \dots, 3n-2)$,

i) $(1, 2, \dots, j-1, k, j+1, \dots, k-1, j, k+1, \dots, n-1, n)$, je-li $1 < j < k < n$ (transpozice prvků j a k).

Řešení. Jelikož stačí postupovat kombinatorickou úvahou přesně podle definice, nebudeme čtenáře urážet podrobněji rozepsaným postupem řešení.

a) 5,

b) 6,

c) 13,

d) $n(n-1)/2$,

e) $n(n-1)/2$,

f) $n(n+1)/2$,

g) $3n(n-1)/2$,

h) $n(3n+1)/2$,

i) $2(k-j)-1$.

Příklad 7.3. Určete složenou permutaci $\pi \circ \sigma$, je-li

a) $\pi = (5, 3, 2, 4, 1)$, $\sigma = (2, 4, 5, 1, 3)$,

b) $\pi = (7, 3, 1, 2, 6, 4, 5)$, $\sigma = (4, 7, 1, 3, 6, 5, 2)$,

c) $\pi = (2, 7, 1, 4, 8, 6, 3, 5)$, $\sigma = (1, 3, 8, 7, 6, 2, 5, 4)$.

Řešení. Přímočarým rozepsáním obrazů obou permutací získáme

a) $\pi \circ \sigma = (3, 4, 1, 5, 2)$,

b) $\pi \circ \sigma = (2, 5, 7, 1, 4, 6, 3)$,

c) $\pi \circ \sigma = (2, 1, 5, 3, 6, 7, 8, 4)$.

Příklad 7.4. Určete inverzní permutaci k permutaci:

a) $(2,6,4,3,1,5)$,

b) $(5,8,2,1,4,7,3,6)$,

c) $(2,3,5,9,1,8,7,4,6)$.

Řešení. Inverzní permutace musí splňovat vztah

$$\forall i,j \in \hat{n} : \pi(i) = j \Leftrightarrow \pi^{-1}(j) = i\,.$$

V případě a) přímo z předpisu dostáváme

$$\pi(1) = 2,\ \pi(2) = 6,\ \pi(3) = 4,\ \pi(4) = 3,\ \pi(5) = 1,\ \pi(6) = 5\,,$$

tedy

$$\pi^{-1}(2) = 1,\ \pi^{-1}(6) = 2,\ \pi^{-1}(4) = 3,\ \pi^{-1}(3) = 4,\ \pi^{-1}(1) = 5,\ \pi^{-1}(5) = 6$$

a platí $\pi^{-1} = (5,1,4,3,6,2)$. Podobně pak dostaneme

b) $(4,3,7,5,1,8,6,2)$,

c) $(5,1,2,8,3,9,7,6,4)$.

Příklad 7.5. Jaký největší počet inverzí může mít permutace z S_n? Jaká je to permutace?

Řešení. Budeme postupovat postupnou úvahou od obrazu $\pi(1)$ po obraz $\pi(n)$ a v každém kroku maximalizujeme počet inverzí.

- ⋄ Maximální počet inverzí, ve kterých může být prvek $\pi(1)$ je přesně $n-1$ a to právě když je v inverzi se všemi ostatními prvky $\hat{n}$. Tedy musí být největší možný a platí $\pi(1) = n$.
- ⋄ U každého dalšího obrazu $\pi(k)$ chceme zajistit nejvyšší možný počet inverzí se všemi obrazy následujícími $\pi(k+1), \dots, \pi(n)$. Pro $\pi(k)$ tedy volíme nejvyšší možný prvek z $\hat{n}$ (tedy $\pi(2) = n-1, \pi(3) = n-2$ a tak dále).
- ⋄ Nalezená permutace je $\pi = (n, n-1, n-2, \dots, 2, 1)$ a počet inverzí v ní je roven

$$(n-1) + (n-2) + \dots + 1 + 0 = \tfrac{n(n-1)}{2}\,.$$

7.2 Determinant

Definice 7.6. *Buď $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ se složkami $\mathbb{A}_{ij} = a_{i,j}$. **Determinant** matice $\mathbb{A}$ je číslo*

$$\det \mathbb{A} = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \cdot a_{1,\pi(1)} a_{2,\pi(2)} \dots a_{n,\pi(n)}.$$

Každý sčítanec v definici determinantu tedy odpovídá nějaké permutaci množiny $\hat{n}$. Situaci si lze představit tak, že na základě této permutace v každém řádku matice (označme jeho index k) vybereme prvek v $\pi(k)$tém sloupci (každý sloupec je vybrán právě jednou) a tyto vybrané prvky mezi sebou vynásobíme. K tomuto součinu pouze přidáme znaménko použité permutace.

Příklad 7.7. Rozepište sumu z definice determinantu matice $\mathbb{A} = (a_{i,j}) \in \mathbb{C}^{n,n}$ pro $n = 2$ a $n = 3$.

Řešení. a) Pro $n = 2$ existují pouze dvě permutace množiny $\hat{2}$, sudá $(1,2)$ lichá $(2,1)$. Tedy

$$\det \mathbb{A} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} .$$

b) Existuje šest permutací množiny $\hat{3} = \{1,2,3\}$, z nich jsou tři sudé ($(1,2,3)$, $(2,3,1)$, $(3,1,2)$) a tři liché ($(1,3,2)$, $(2,1,3)$, $(3,2,1)$). Tedy

$$\det \mathbb{A} = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} .$$

Příklad 7.8. Pouze na základě definice determinantu zdůvodněte, proč je funkce $p(x)$ polynom nejvýše čtvrtého stupně a aniž byste determinant počítali, určete koeficient u nejvyšší mocniny polynomu $p(x)$, je-li

a) $p(x) = \begin{vmatrix} 1 & 3x & 2 & x \\ 0 & 4 & 5x & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2x \\ 4x & 8 & 3x & 2x \end{vmatrix}$,

c) $p(x) = \begin{vmatrix} x & 6 & 2 & 3 \\ 3 & 4x & 7x & 3x \\ 2 & 9 & x & 2 \\ 3 & 2x & 4 & 2 \end{vmatrix}$,

b) $p(x) = \begin{vmatrix} 3 & 6x & 2x & 5x \\ 3 & 4 & 7 & 3x \\ 2 & x & 1 & 2 \\ 4x & 8 & 4 & 2 \end{vmatrix}$,

d) $p(x) = \begin{vmatrix} 2x & 1 & 2 & 5 \\ -3 & -1 & x & 2 \\ 1 & 2 & 2x & 3 \\ -1 & x & 3 & -x \end{vmatrix}$.

Řešení. Jedná se o matice typu 4×4, a v každém prvku každé z matic je proměnná x nejvýše v první mocnině. Determinant je z definice roven součtu (lineární kombinaci) součinů tvaru „po jednom prvku z každého řádku matice“. Vidíme, že tak lze získat polynomy stupně nejvýše 4, resp. 3. Pro nalezení koeficientu u nejvyšší mocniny tedy stačí sečíst příspěvky odpovídajících permutací (s patřičnými znaménky).

a) $\alpha_4 = -120$,

c) $\alpha_4 = -6$,

b) $\alpha_4 = -24$,

d) $\alpha_3 = 6$.

Poznámka 7.1 (O výpočtu determinantu)**.** *Pro malé matice ($n \in \{2,3\}$) lze determinant spočítat přímo z definice, pro předpisy odvozené v příkladu 7.7 existují mnemotechnická schémata, tzv.* ***křížové*** *a* ***Sarrusovo pravidlo****.*

Obecně je postup přímo z definice nepraktický a výpočetně náročný (determinant matice $n \times n$ je suma $n!$ sčítanců, kde každý je ve tvaru součinu n čísel. V následujícím si shrneme, co o determinantech užitečného víme.

- ◇ Je-li matice $\mathbb{A} = (a_{i,j})$ horní trojúhelníková nebo dolní trojúhelníková, platí $\det \mathbb{A} = a_{1,1} \cdots a_{n,n}$, tedy její determinant má pouze jeden nenulový sčítanec a to součin prvků na diagonále (což pochopitelně platí speciálně i pro diagonální matice).
- ◇ Řádkové úpravy GEM ovlivňují determinant následovně:
  - Úprava (G1) prohození dvou řádků mění znaménko determinantu, (resp. násobí determinant matice číslem opačným k 1).
    *(**Pozor** na složitější úpravy pořadí řádků, např „prohození všech řádků odspoda nahoru“ nebo „přesunutí prvního řádku na konec a každého dalšího řádku o jeden výše“. Pro určení jak se změní znaménko determinantu je třeba si přesně rozmyslet, kolik operací „prohození dvou řádků“ je pro daný krok potřeba!)*

– Úprava (G2) vynásobení jednoho řádku číslem $\alpha \neq 0$ determinant matice změní vynásobením tímtéž číslem.

– Úprava (G3) přičtení k jednomu řádku αnásobek druhého řádku determinant nemění. *(**Pozor** na úpravy typu „k dvojnásobku jednoho řádku přičteme trojnásobek druhého“, je v nich schovaná úprava (G2), která determinant mění!)*

◇ Jelikož platí $\det(\mathbb{A}^T) = \det \mathbb{A}$, lze na matici použít i **sloupcové** analogie úprav GEM, platí pro ně pak stejné zákonitosti jako pro ty řádkové, viz. výše.

◇ Matice $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ je regulární právě tehdy, když $\det \mathbb{A} \neq 0$. Pro regulární matice pak platí

$$\det(\mathbb{A}^{-1}) = (\det \mathbb{A})^{-1} .$$

◇ Označme jako $\mathbb{A}(k,l) \in T^{n-1,n-1}$ matici, která vznikne z matice $\mathbb{A}$ vynecháním $k$tého řádku a ℓtého sloupce. Číslo $(-1)^{k+\ell} \det \mathbb{A}(k,\ell)$ nazýváme **algebraický doplněk** prvku $a_{k,\ell}$. Věta o rozvoji determinantu podle $k$tého sloupce pak říká, že platí

$$\det \mathbb{A} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det \mathbb{A}(i,k) .$$

(*Tedy determinant matice $n\times n$ lze převést na součet determinantů menších matic, které vzniknou vynecháním jednoho zvoleného sloupce a různých řádků – to je mimořádně užitečné v případě, že zvolený ktý sloupec obsahuje málo nenulových prvků.*)

◇ Díky vztahu $\det(\mathbb{A}^T) = \det \mathbb{A}$ lze obdobně provést rozvoj determinantu podle zvoleného řádku.

Příklad 7.9. Spočítejte determinanty následujících matic:

a) $\begin{vmatrix} \alpha & \alpha+1 \\ \alpha-1 & \alpha \end{vmatrix}$,

b) $\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix}$,

c) $\begin{vmatrix} 1 & \log_\alpha \beta \\ \log_\beta \alpha & 1 \end{vmatrix}$,

d) $\begin{vmatrix} 8 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 7 & 4 & 1 \end{vmatrix}$,

e) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & \alpha^2 \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \end{vmatrix}$,

f) $\begin{vmatrix} \alpha^2+1 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & \beta^2+1 & \beta\gamma \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2+1 \end{vmatrix}$,

g) $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos 2\alpha & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos 2\beta & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos 2\gamma & \cos^2\gamma \end{vmatrix}$.

Řešení. a) Použitím křížového pravidla dostaneme

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha+1 \\ \alpha-1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 - (\alpha+1)(\alpha-1) = 1 .$$

b) Použitím křížového pravidla dostaneme

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} = \cos^2\varphi - (-\sin^2\varphi) = 1 .$$

c) Podobně jako výše dostáváme

$$\begin{vmatrix} 1 & \log_\alpha \beta \\ \log_\beta \alpha & 1 \end{vmatrix} = 1 - \log_\alpha \beta \cdot \log_\beta \alpha = 1 - \tfrac{\ln \alpha}{\ln \beta} \cdot \tfrac{\ln \beta}{\ln \alpha} = 0\,.$$

d) Lze použít například Sarrusovo pravidlo, determinant se rovná -110.

e) Jedním z možných postupů je použití Sarrusova pravidla, alternativně lze použít řádkové/sloupcové úpravy, rozvoj determinantu a křížové pravidlo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & \alpha^2 \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \alpha-\alpha^2 \\ 1 & 1 & \alpha^2 \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \end{vmatrix} = (\alpha - \alpha^2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha^2 & \alpha \end{vmatrix} = (\alpha-\alpha^2)\cdot(\alpha-\alpha^2) = \alpha^2(\alpha-1)^2\,.$$

f) Použitím Sarrusova pravidla dostaneme výsledek $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+1$.

g) Lze si povšimnout, že odečteme-li od třetího sloupce sloupec první, dostaneme sloupec rovný druhému sloupci. Matice s dvěma stejnými sloupci má pak zřejmě determinant roven nule (jeden lze od druhého odečíst, čímž vznikne matice s nulovým sloupcem).

Příklad 7.10. Spočítejte následující determinanty:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix} \alpha+1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \alpha+1 \end{vmatrix}$, e) $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & d_1 \\ b_2 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & c_2 \end{vmatrix}$,

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, d) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, f) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$.

Řešení. Z mnoha různých možných postupů vždy vybereme pouze jeden, další možnosti řešení si čtenář jistě promyslí sám.

a) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1\cdot(-2)^3 = -8.$$

b) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =^{\dagger} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

(v kroku † jsme k prvnímu sloupci přičetli všechny ostatní sloupce).

c) $$\begin{vmatrix} \alpha+1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \alpha+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha+4 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha+4 & \alpha+1 & 1 & 1 \\ \alpha+4 & 1 & \alpha+1 & 1 \\ \alpha+4 & 1 & 1 & \alpha+1 \end{vmatrix} = (\alpha{+}4)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \alpha+1 \end{vmatrix} =$$

$$(\alpha+4)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^3(\alpha+4).$$

Další výsledky již uvedeme bez postupu řešení:

d) 5.

e) $(a_1a_2 - b_1b_2)(c_1c_2 - d_1d_2)$.

f) 195.

Příklad 7.11. Spočítejte následující determinanty, $n \in \mathbb{N}$:

a) $\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ -\alpha & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -\alpha & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -\alpha & 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\alpha & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$,
c) $\begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & n & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n \end{vmatrix}_{n\times n}$,
e) $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 0 & \dots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 & \dots & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & 0 & \dots & 0 \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & \dots & a_{4,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$.

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{vmatrix}$,
d) $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & \alpha & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & -1 & \alpha & 1 & \dots & 1 \\ -1 & -1 & 1 & \alpha & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & 1 & 1 & \dots & \alpha \end{vmatrix}_{n\times n}$,

Řešení.

a) $$\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ -\alpha & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -\alpha & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -\alpha & 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\alpha & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha+\alpha\cdot(n-1) & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ -\alpha+\alpha\cdot 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -\alpha+\alpha\cdot 1 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -\alpha+\alpha\cdot 1 & 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\alpha+\alpha\cdot 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha n & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$
$= \alpha n\,.$

b) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & n-2 \end{vmatrix} =^{\dagger} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1$$
(v kroku † jsme se zamysleli nad tím, že úpravu „odečtení vybraného řádku od všech pod ním“ lze opakovat postupně pro všechny řádky odshora dolů a tak vyrobit horní trojúhelníkovou matici).

c) $$\begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & n & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n \end{vmatrix}_{n\times n} = \begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1-n & n-1 & 0 & \dots & 0 \\ 1-n & 0 & n-1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1-n & 0 & 0 & \dots & n-1 \end{vmatrix}_{n\times n} = \begin{vmatrix} 2n-1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & n-1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & n-1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 \end{vmatrix}_{n\times n}$$
$= (2n-1)(n-1)^{n-1}\,.$

Další výsledky již uvedeme bez postupu řešení:

d) $-(\alpha-1)^{n-1}$,

e) 0.

Příklad 7.12. Pouze na základě vlastností determinantu spočítejte

$$\begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ b+c & a & 1 \\ c+a & b & 1 \end{vmatrix}.$$

Řešení. Snadno si povšimneme, že přičtením druhého sloupce k prvnímu získáme sloupec $(a+b+c,\ a+b+c,\ a+b+c)^T$. Dostaneme tak determinant matice, jejíž jeden sloupec je konstantním násobkem jiného a taková má vždy determinant roven nule (k čemuž můžeme dospět různě, například úvahou o hodnosti a regularitě matice).

Příklad 7.13. Čísla $1189, 2665, 6437, 4961$ jsou dělitelná 41. Dokažte, že

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 8 & 9 \\ 2 & 6 & 6 & 5 \\ 6 & 4 & 3 & 7 \\ 4 & 9 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

je rovněž dělitelný 41, aniž spočítáte jeho hodnotu.

Řešení. Vhodnou myšlenkou na začátek budiž například fakt, že k libovolnému sloupci lze přičíst desetinásobek druhého, stonásobek třetího a současně tisícinásobek čtvrtého sloupce. Současně lze z řádků i sloupců při výpočtu determinantu „vytýkat“.

7.3 Vlastní čísla, vlastní vektory a diagonalizovatelnost

Definice 7.14. *Řekneme, že $\lambda \in \mathbb{C}$ je **vlastní číslo operátoru** $A \in \mathcal{L}(V)$ právě když existuje $x \in V$, $x \neq \theta$, takový, že $Ax = \lambda x$. Vektor x pak nazýváme **vlastním vektorem operátoru** A příslušejícím vlastnímu číslu λ. Množinu všech vlastních čísel A nazýváme **spektrem** A a značíme $\sigma(A)$.*

Analogicky definujeme vlastní čísla, vlastní vektory a spektrum matic $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ (každá taková matice určuje lineární operátor vztahem $\mathbb{A} = {}^{\mathcal{E}}A$).

- ◇ Vlastní číslo λ operátoru A s vlastním vektorem x splňují

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow Ax - \lambda x = \theta \Leftrightarrow (A - \lambda E)x = \theta\,,$$

tedy pro každé $\lambda \in \mathbb{C}$ a pro libovolnou bázi $\mathcal{X}$ prostoru V platí:

$$\begin{aligned} \lambda \in \sigma(A) &\Leftrightarrow (\exists x \neq \theta : (A - \lambda E)x = \theta) \\ &\Leftrightarrow (A - \lambda E) \text{ není bijekce} \\ &\Leftrightarrow {}^{\mathcal{X}}(A - \lambda E) \text{ není regulární matice} \\ &\Leftrightarrow \det({}^{\mathcal{X}}(A - \lambda E)) = 0\,. \end{aligned}$$

- ◇ Pro nalezení spektra tedy sestavíme matici ${}^{\mathcal{X}}(A - \lambda E)$ (typicky ve standardní bázi $\mathcal{X} = \mathcal{E}$) a spočítáme její determinant (jde o polynom s komplexními koeficienty v proměnné λ, nazýváme ho **charakteristický polynom** operátoru A a značíme $p_A(\lambda)$). Spektrum $\sigma(A)$ je tvořeno všemi kořeny charakteristického polynomu.

- $\diamond$ Množina všech vlastních vektorů operátoru A příslušejících pevně zvolenému $\lambda \in \mathbb{C}$ je rovna

$$\ker(A - \lambda E) \setminus \{\theta\}.$$

- $\diamond$ Jádro $\ker(A - \lambda E)$ nazýváme **vlastním podprostorem operátoru** A příslušejícím vlastnímu číslu λ.
- $\diamond$ Zadání „nalezněte vlastní čísla a vlastní vektory operátoru/matice“ znamená:
  - $\rightarrow$ nalézt spektrum $\sigma(A)$,
  - $\rightarrow$ ke každému vlastnímu číslu λ nalézt bázi jeho vlastního podprostoru $\ker(A - \lambda E)$.

Definice 7.15. *Nechť $A \in \mathcal{L}(V_n)$, $\lambda_0 \in \sigma(A)$. Násobnost čísla λ_0 jako kořene charakteristického polynomu p_A operátoru A nazýváme **algebraickou násobností** vlastního čísla λ_0 a značíme ji $\nu_a(\lambda_0)$.*

*Číslo $d(A - \lambda_0 E)$ nazýváme **geometrickou násobností** vlastního čísla λ_0 a značíme ji $\nu_g(\lambda_0)$.*

- $\diamond$ Číslo $\nu_g(\lambda_0)$ je dimenze vlastního podprostoru a tedy maximální velikost LN souboru vlastních vektorů k vlastnímu číslu λ_0.
- $\diamond$ Pro každé $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ platí $\nu_g(\lambda_0) \leq \nu_a(\lambda_0)$.

Definice 7.16. *Matice $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{C}^{n,n}$ nazveme **podobné**, právě když existuje $\mathbb{P} \in \mathbb{C}^{n,n}$ regulární tak, že platí*

$$\mathbb{A} = \mathbb{P}^{-1}\mathbb{B}\mathbb{P}.$$

Ekvivalentně platí, že matice $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{C}^{n,n}$ jsou podobné právě tehdy, když jsou obě maticemi stejného lineárního operátoru (v nějakých bázích), tedy když existuje $A \in \mathcal{L}(V_n)$ a báze $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ takové, že

$$^{\mathcal{X}}A = \mathbb{A} \quad \text{a současně} \quad ^{\mathcal{Y}}A = \mathbb{B}.$$

*Operátor $A \in \mathcal{L}(V_n)$ nazveme **diagonalizovatelný**, jestliže existuje báze $\mathcal{X}$ prostoru V_n taková, že matice $^{\mathcal{X}}A$ je diagonální (matice je diagonalizovatelná, je-li podobná diagonální matici).*

- $\diamond$ Operátor $A \in \mathcal{L}(V_n)$ je diagonalizovatelný právě když

$$\forall \lambda_0 \in \sigma(A) : \nu_a(\lambda_0) = \nu_g(\lambda_0).$$

- $\diamond$ Libovolný soubor vlastních vektorů, ve kterém každý přísluší jinému vlastnímu číslu, je vždy LN.
- $\diamond$ Zadání „ověřte, zda je operátor diagonalizovatelný, a nalezněte bázi, ve které je jeho matice diagonální“ tedy znamená:
  - $\rightarrow$ nalézt spektrum $\sigma(A)$,
  - $\rightarrow$ ke každému vlastnímu číslu nalézt bázi vlastního podprostoru,
  - $\rightarrow$ porovnat algebraické a geometrické násobnosti u každého $\lambda \in \sigma(A)$,
  - $\rightarrow$ rovnají-li se pro každé $\lambda \in \sigma(A)$, bázi $\mathcal{X}$ sestavíme popořadě z bazických vektorů všech vlastních podprostorů. Matice přechodu $^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{E}}$ je bude obsahovat ve sloupcích, diagonální matice operátoru $^{\mathcal{X}}A$ bude na diagonále obsahovat v odpovídajícím pořadí všechna vlastní čísla (každé zopakované tolikrát, kolik je jeho násobnost).

- $\diamond$ Máme-li rozhodnout o podobnosti dvou zadaných matic $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{C}^{n,n}$, můžeme se pokusit nalézt regulární matici $\mathbb{P} \in \mathbb{C}^{n,n}$ splňující

$$\mathbb{A} = \mathbb{P}^{-1}\mathbb{B}\mathbb{P} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}\mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{P}$$

ručně, případně ukázat, že neexistuje. Pokud ale ukážeme, že obě matice $\mathbb{A}$ i $\mathbb{B}$ jsou diagonalizovatelné a mají stejná vlastní čísla, jejichž násobnosti se navíc shodují, plyne z toho automaticky, že jsou podobné.

- $\diamond$ Konkrétně, předpokládejme, že $\sigma(\mathbb{A}) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ a že pro každé λ_i platí rovnost $\nu_a(\lambda_i) = \nu_g(\lambda_i)$. Sestavme
  - diagonální matici $\mathbb{D} \in \mathbb{C}^{n,n}$ umístěním všech vlastních čísel matice $\mathbb{A}$ na diagonálu (každé tolikrát, kolik je jeho násobnost),
  - matici $\mathbb{P} \in \mathbb{C}^{n,n}$ po sloupcích z vlastních vektorů matice $\mathbb{A}$ (z bází vlastních podprostorů ve stejném pořadí jako jsou vlastní čísla v matici $\mathbb{D}$).
  - Chápeme-li zadanou matici jako $\mathbb{A} = {}^{\mathcal{E}}A$ a soubor vlastních vektorů z bází vlastních podprostorů jako novou bázi $\mathcal{X}$, pak sestavené matice odpovídají maticím zobrazení a přechodu $\mathbb{D} = {}^{\mathcal{X}}A$ a $\mathbb{P} = {}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{E}}$. Ze vlastností matic zobrazení jistě plyne

$$^{\mathcal{X}}A = {}^{\mathcal{E}}E^{\mathcal{X}} \cdot {}^{\mathcal{E}}A \cdot {}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{E}} \,.$$

  - Tedy platí vztah

$$\mathbb{D} = \mathbb{P}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{P} \,.$$

Příklad 7.17. Nalezněte vlastní čísla a vlastní vektory matice $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{3,3}$ a rozhodněte o její diagonalizovatelnosti, je-li:

a) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix}$, c) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$, e) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

b) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, d) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, f) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Řešení. Většina postupu řešení staví na schopnostech, které bychom již měli mít, a to na výpočtu determinantu, hledání kořenů polynomu a řešení homogenních soustav. Proto podrobně vyřešíme jen několik prvních příkladů a postupně uvedená řešení zestručníme.

a) $p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & -3 \\ 4 & 5-\lambda & -4 \\ 6 & 4 & -4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$,

tedy platí $\sigma(\mathbb{A}) = \{1, 2, 3\}$ a všechna vlastní čísla jsou jednoduchá ($\nu_a(\lambda) = 1$). Odpovídající vlastní podprostory operátoru A s maticí $\mathbb{A}$ odvodíme řešením soustav:

- $\diamond$ $\lambda = 1$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -3 & 0 \\ 4 & 4 & -4 & 0 \\ 6 & 4 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \ker(A - 1E) = \langle(1,1,2)\rangle, \nu_g(1) = \nu_a(1) = 1$,
- $\diamond$ $\lambda = 2$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -3 & 0 \\ 4 & 3 & -4 & 0 \\ 6 & 4 & -6 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \ker(A - 2E) = \langle(1,0,1)\rangle, \nu_g(2) = \nu_a(2) = 1$,

- $\diamond$ $\lambda = 3$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & -4 & 0 \\ 6 & 4 & -7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \ker(A - 3E) = \langle (1,2,2) \rangle, \nu_g(3) = \nu_a(3) = 1$

a matice $\mathbb{A}$ je diagonalizovatelná.

b) $p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \lambda & 2\lambda-\lambda^2 \\ 0 & -\lambda & \lambda \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 2\lambda-\lambda^2 \\ -\lambda & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 \begin{vmatrix} 1 & 2-\lambda \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2(3-\lambda),$

tedy platí $\sigma(\mathbb{A}) = \{0,3\}$, $\nu_a(0) = 2$ a $\nu_a(3) = 1$. Odpovídající vlastní podprostory operátoru A s maticí $\mathbb{A}$ odvodíme řešením soustav:

- $\diamond$ $\lambda = 0$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \ker(A - 0E) = \langle (1,-1,0), (1,0,-1) \rangle,$
  $\nu_g(0) = \nu_a(0) = 2,$
- $\diamond$ $\lambda = 3$: $\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \ker(A - 3E) = \langle (1,1,1) \rangle,$
  $\nu_g(3) = \nu_a(3) = 1,$

a matice $\mathbb{A}$ je diagonalizovatelná.

c) $p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 & 2 \\ 5 & -7-\lambda & 3 \\ 6 & -9 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda^3 = \lambda^2(1-\lambda),$

tedy platí $\sigma(\mathbb{A}) = \{0,1\}$, $\nu_a(0) = 2$ a $\nu_a(1) = 1$. Odpovídající vlastní podprostory operátoru A s maticí $\mathbb{A}$ odvodíme řešením soustav:

- $\diamond$ $\lambda = 0$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -5 & 2 & 0 \\ 5 & -7 & 3 & 0 \\ 6 & -9 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \ker(A - 0E) = \langle (1,2,3) \rangle$, $\nu_g(0) = 1 \neq \nu_a(0),$
- $\diamond$ $\lambda = 1$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 2 & 0 \\ 5 & -8 & 3 & 0 \\ 6 & -9 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \ker(A - 1E) = \langle (1,1,1) \rangle,$
  $\nu_g(1) = \nu_a(1) = 1,$

a matice $\mathbb{A}$ není diagonalizovatelná.

Další výsledky již uvedeme bez postupu řešení:

d) Vlastními čísly jsou

- $\diamond$ $\lambda_1 = 0$, $\nu_a(0) = 1$, $\ker(A - 0E) = \langle (1,1,1) \rangle$,
- $\diamond$ $\lambda_2 = 1$, $\nu_a(1) = 2$, $\ker(A - 1E) = \langle (1,0,-1), (3,1,0) \rangle$

a matice $\mathbb{A}$ je diagonalizovatelná.

e) Jediným vlastním číslem je $\lambda_1 = 2$, $\nu_a(2) = 3$, $\ker(A - 2E) = \langle (1,0,1), (-1,1,0) \rangle$. Tedy $\nu_g(2) = 2 \neq \nu_a(2)$ a matice $\mathbb{A}$ není diagonalizovatelná.

f) Vlastními čísly jsou

- ⋄ $\lambda_1 = 2$, $\nu_a(2) = 1$, $\ker(A - 2E) = \langle(5, 6, -2)\rangle$,
- ⋄ $\lambda_2 = 2 + i\sqrt{7}$, $\nu_a(2 + i\sqrt{7}) = 1$, $\ker(A - (2 + i\sqrt{7})E) = \langle(-1, \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{7}), 1)\rangle$
- ⋄ $\lambda_3 = 2 - i\sqrt{7}$, $\nu_a(2 - i\sqrt{7}) = 1$, $\ker(A - (2 - i\sqrt{7})E) = \langle(-1, \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{7}), 1)\rangle$

a matice $\mathbb{A}$ je diagonalizovatelná.

Příklad 7.18. Zjistěte, zda následující matice $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{C}^{3,3}$ jsou podobné:

a) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$

b) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$

c) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$

d) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\omega} \end{pmatrix}, \quad$ kde $\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Řešení. a) Snadno ověříme, že platí $\sigma(\mathbb{A}) = \sigma(\mathbb{B}) = \{0\}$, u obou matic má vlastní číslo $\lambda = 0$ algebraickou násobnost 3. Pokud budou i geometrické násobnosti u obou matic rovny třem, zadané matice budou podobné.

Jelikož mají obě matice na první pohled stejnou hodnost, $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{B}) = 2$, z Frobeniovy věty plyne, že dimenze podprostorů řešení soustav $(\mathbb{A} \mid \theta)$ a $(\mathbb{B} \mid \theta)$ je rovna jedné, tedy ani jedna z matic není diagonalizovatelná a jejich podobnost musíme ověřit jinak, „ručně“.

Přímo z definice se pokusíme najít regulární matici $\mathbb{P} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ splňující rovnost $\mathbb{PA} = \mathbb{BP}$.

Po dosazení všech matic dostaneme rovnost vedoucí na soustavu rovnic v neznámých $a, \ldots, i$, ze které získáme podmínky

$$d = g = h = 0\,, \quad a = e = i\,, \quad f = 2a + b\,,$$

hledaná matice tedy existuje a je tvaru

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & 2a + b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

pro nějaké parametry $a, b, c \in \mathbb{C}$. Aby byla regulární, zjevně stačí, aby platilo $a \neq 0$.

b) Platí $\sigma(\mathbb{A}) = \sigma(\mathbb{B}) = \{0, 3\}$, kde $\lambda_1 = 0$ má u obou matic obě násobnosti rovné dvěma a $\lambda_2 = 3$ má obě násobnosti rovné jedné. Matice $\mathbb{A}$ je už sama diagonální, matice $\mathbb{B}$ je podle části b) příkladu 7.17 diagonalizovatelná, jsou si tedy navzájem podobné.

Regulární matici $\mathbb{P} \in \mathbb{C}^{3,3}$ splňující vztah $\mathbb{A} = \mathbb{P}^{-1}\mathbb{B}\mathbb{P}$ získáme tak, že do sloupců popořadě napíšeme vlastní vektory matice $\mathbb{B}$, a to zleva doprava nejprve vlastní vektor k $\lambda = 3$ a poté dva LN vlastní vektory k $\lambda = 0$. Tedy

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

c) Nejsou podobné.

d) Jsou podobné.

Příklad 7.19. Nechť $A \in \mathcal{L}(V)$, $V \neq \{\theta\}$. Dokažte, že platí následující tvrzení:

a) je-li $A^2 = A$, je $\sigma(A) \subseteq \{0, 1\}$;

b) je-li $A^2 = E$, je $\sigma(A) \subseteq \{-1, 1\}$;

c) je-li $A = 0$ (nulový operátor), je $\sigma(A) = \{0\}$.

Řešení. a) Nechť $\lambda \in \sigma(A)$, pak existuje $x \neq \theta$ takový, že $Ax = \lambda x$. Z linearity operátoru odvodíme

$$(A^2)x = A(Ax) = A(\lambda x) = \lambda Ax = \lambda^2 x\,.$$

Současně ale předpokládáme $A^2 = A$, tedy

$$(A^2)x = Ax = \lambda x\,.$$

Má-li pro nějaký nenulový vektor $x \in V$ platit $\lambda^2 x = \lambda x$, pak platí i $(\lambda^2 - \lambda)x = \theta$ a nutně také $\lambda^2 - \lambda = 0$, tedy $\lambda \in \{0, 1\}$.

b) Nechť $\lambda \in \sigma(A)$, pak existuje $x \neq \theta$ takový, že $Ax = \lambda x$. Z linearity operátoru odvodíme

$$(A^2)x = A(Ax) = A(\lambda x) = \lambda Ax = \lambda^2 x\,.$$

Současně ale předpokládáme $A^2 = E$, tedy

$$(A^2)x = Ex = x\,.$$

Má-li pro nějaký nenulový vektor $x \in V$ platit $\lambda^2 x = x$, pak platí i $(\lambda^2 - 1)x = \theta$ a nutně také $\lambda^2 - 1 = 0$, tedy $\lambda \in \{-1, 1\}$.

c) Předpokládáme, že platí $Ax = \theta$ pro každé $x \in V$. Nechť $\lambda \in \sigma(A)$, pak existuje $x \neq \theta$ takový, že $Ax = \lambda x$. Pro nějaký nenulový vektor x tedy musí platit

$$\lambda x = Ax = \theta\,,$$

z čehož nutně plyne, že $\lambda = 0$.

7.4 Cvičení

Příklad 7.20. Určete čísla i, k tak, aby permutace z S_9 byla lichá:

a) $(1,2,7,4,i,5,6,k,9)$,

b) $(1,i,2,5,k,4,8,9,7)$.

Řešení. a) $i=3$, $k=8$, b) $i=3$, $k=6$.

Příklad 7.21. Buďte $\pi_1=(4,2,6,3,1,5)$, $\pi_2=(2,6,1,3,4,5)$ permutace množiny $\hat{6}$. Nalezněte permutaci $\sigma\in S_6$ vyhovující rovnici:

a) $\pi_1\circ\sigma=\pi_2$,

b) $\sigma\circ\pi_1=\pi_2$.

Řešení. a) $\sigma=(2,3,5,4,1,6)$, b) $\sigma=(4,6,3,2,5,1)$.

Příklad 7.22. Nechť v permutaci $\pi\in S_n$ je k inverzí. Určete, kolik inverzí je v permutaci

$$(\pi(n),\pi(n-1),\ldots,\pi(1))\,.$$

Řešení. $n(n-1)/2-k$.

Příklad 7.23. Kolik inverzí je ve všech permutacích z S_n dohromady?

Řešení. $\frac{n(n-1)}{2}\frac{n!}{2}$.

Příklad 7.24. Vstup `1234` lze pomocí zásobníkových operací `push` (vložit na vrchol zásobníku) a `pop` (vyjmout z vrcholu zásobníku) zpracovat například takto: `push(1), push(2), pop(2), push(3), pop(3), pop(1), push(4), pop(4)`. Výstupem je potom `2314`. Říkáme, že permutaci `2314` množiny `1234` lze *realizovat zásobníkem*. Otázka: které permutace vstupu `1...n` lze realizovat zásobníkem?

Příklad 7.25. Zjistěte, které z následujících součinů jsou členy determinantu matice $\mathbb{A}=(a_{i,j})\in\mathbb{R}^{6,6}$ a určete, jakým znaménkem jsou opatřeny:

a) $a_{1,3}a_{2,2}a_{3,4}a_{4,1}a_{5,6}a_{6,5}$,

b) $a_{1,6}a_{2,5}a_{3,1}a_{4,2}a_{5,5}a_{6,4}$,

c) $a_{1,4}a_{2,2}a_{3,1}a_{4,3}a_{5,6}a_{6,5}$.

d) Kolik sčítanců ještě zbývá k platným členům napsat, aby byl součet podle definice úplný?

Řešení.

a) Ano, -1,

b) ne,

c) ano, -1,

d) $6!-2=718$.

Příklad 7.26. Vypište všechny členy determinantu matice $\mathbb{A}=(a_{i,j})\in\mathbb{R}^{5,5}$, které jsou tvaru

$$-a_{1,4}a_{2,3}a_{3,i}a_{4,j}a_{5,k}\,.$$

Řešení. $-a_{1,4}a_{2,3}\,(a_{3,1}a_{4,2}a_{5,5}+a_{3,2}a_{4,5}a_{5,1}+a_{3,5}a_{4,1}a_{5,2})$.

Příklad 7.27. Spočítejte následující determinanty matic obecného rozměru $n\times n$:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}_{n\times n}$,

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & n \end{vmatrix}$,

c) $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_n \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$,

d) $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \beta & \dots & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & \dots & \beta \\ \beta & \beta & \alpha & \dots & \beta \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta & \beta & \beta & \dots & \alpha \end{vmatrix}_{n\times n}$,

e) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & \alpha & 1 \end{vmatrix}_{n\times n}$,

f) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$,

g) $\begin{vmatrix} x+\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1 & x+\alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & x+\alpha_3 & \dots & \alpha_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & x+\alpha_n \end{vmatrix}$,

h) $\begin{vmatrix} x & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-1} & 1 \\ \alpha_1 & x & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-1} & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & x & \dots & \alpha_{n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & x & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_n & 1 \end{vmatrix}$.

Řešení. a) $(-1)^{n+1}$,

b) $(n-1)!$,

c) $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$,

d) $(\alpha + (n-1)\beta)(\alpha-\beta)^{n-1}$,

e) $(1-\alpha)^{n-1}$,

f) $n!$,

g) $x^n + x^{n-1}\sum_{k=1}^{n} \alpha_k$,

h) $\prod_{k=1}^{n}(x-\alpha_k)$.

Příklad 7.28. Rozložte polynom $p(x)$ na kořenové činitele, aniž byste determinant počítali (použitím vlastností determinantu matice):

a) $p(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 4-x & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2-x & 0 \\ 4 & 8 & 3 & 3-x \end{vmatrix}$,

c) $p(x) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ x & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & x & 3 & \dots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & x & n \end{vmatrix}$,

b) $p(x) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 5-x \\ 6-x & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2-x & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3-x & 2 & 2 \end{vmatrix}$,

d) $p(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n-x \end{vmatrix}$,

$$\text{e) } p(x)=\begin{vmatrix} a & a & a & a & a\\ a & a-x & a & a & a\\ a & a & 2a-x & a & a\\ a & a & a & 3a-x & a\\ 2a & 2a & 2a & 2a & 8a-2x\end{vmatrix}, \qquad \text{kde } a\in\mathbb{R} \text{ je parametr},$$

Řešení. a) $p(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$,

b) $p(x) = 2x(x-1)(x-3)(x-4)$,

c) $p(x) = (-1)^{n+1}n(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)$,

d) $p(x) = (-1)^n x(x-1)\dots(x-n+1)$.

e) $p = 0$ pro $a = 0$, $p(x) = 2ax(x-a)(x-2a)(x-3a)$ pro $a \neq 0$,

Příklad 7.29. Nechť $\mathbb{A} \in T^{n,n}$ je regulární. Nalezněte všechna čísla $\alpha \in T$ taková, že $\det(\alpha\mathbb{A}) = \det\mathbb{A}$, je-li a) $T = \mathbb{R}$, b) $T = \mathbb{C}$.

Řešení. a) $\alpha = 1$, je-li n liché, $\alpha = \pm 1$, je-li n sudé. b) $\alpha \in \{e^{2ik\pi/n} \mid k \in \hat{n}\}$.

Příklad 7.30. Využijte linearitu determinantu jako funkci sloupců, resp. řádků a spočítejte determinant

$$\begin{vmatrix} \alpha_1+\beta_1 & \alpha_1+\beta_2 & \alpha_1+\beta_3 & \dots & \alpha_1+\beta_n\\ \alpha_2+\beta_1 & \alpha_2+\beta_2 & \alpha_2+\beta_3 & \dots & \alpha_2+\beta_n\\ \alpha_3+\beta_1 & \alpha_3+\beta_2 & \alpha_3+\beta_3 & \dots & \alpha_3+\beta_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha_n+\beta_1 & \alpha_n+\beta_2 & \alpha_n+\beta_3 & \dots & \alpha_n+\beta_n\end{vmatrix}.$$

Řešení. 0 pro $n > 2$, $(\alpha_1-\alpha_2)(\beta_2-\beta_1)$ pro $n = 2$, $\alpha_1+\beta_1$ pro $n = 1$.

Příklad 7.31. Spočítejte $\det\mathbb{A}$, je-li $\mathbb{A} = (a_{i,j}) \in T^{n,n}$,

$$\text{a) } a_{i,j} = \min(i,j), \qquad \text{b) } a_{i,j} = \max(i,j), \qquad \text{c) } a_{i,j} = |i-j|.$$

Řešení. a) 1, b) $(-1)^{n+1}n$, c) $(-1)^{n+1}(n-1)2^{n-2}$.

Příklad 7.32. Rozhodněte, zda matice $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{4,4}$, kde

$$\text{a) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}, \quad \text{b) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} -1&1&1&1\\1&-1&1&1\\1&1&-1&1\\1&1&1&-1\end{pmatrix}, \quad \text{c) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3&-1&0&0\\1&1&0&0\\3&0&5&-3\\4&-1&3&-1\end{pmatrix}$$

je podobná diagonální matici. V kladném případě najděte $\mathbb{P} \in \mathbb{C}^{4,4}$ regulární a $\mathbb{D} \in \mathbb{C}^{4,4}$ diagonální tak, aby $\mathbb{A} = \mathbb{P}\mathbb{D}\mathbb{P}^{-1}$.

Řešení. a) Ano,

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\0&1&0&1\\1&0&1&0\end{pmatrix}, \qquad \mathbb{D} = \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}.$$

b) Ano,

$$\mathbb{P}=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\1&0&0&1\\1&0&1&0\\1&1&0&0\end{pmatrix},\qquad \mathbb{D}=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&-2&0&0\\0&0&-2&0\\0&0&0&-2\end{pmatrix}.$$

c) Ne.

Příklad 7.33. Buď A zobrazení zrcadlení v $\mathbb{R}^2$ podle přímky, která svírá s osou x úhel $\frac{\pi}{4}$. Sestavte matici $\mathbb{A} = {}^{\mathcal{E}_2}A$ zobrazení A vzhledem ke standardní bázi $\mathbb{R}^2$ a zjistěte, zda je matice $\mathbb{A}$ podobná diagonální matici. Pokud ano, napište relaci podobnosti (tzn. najděte $\mathbb{P} \in \mathbb{R}^{2,2}$ regulární a $\mathbb{D} \in \mathbb{R}^{2,2}$ diagonální tak, aby $\mathbb{A}\mathbb{P} = \mathbb{P}\mathbb{D}$).

Řešení.

$$\mathbb{A}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\qquad \mathbb{D}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\qquad \mathbb{P}=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}.$$

Příklad 7.34 (*)**.** Nechť $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3)$ je báze prostoru V_3 nad $\mathbb{C}$, $A \in \mathcal{L}(V_3)$. Zjistěte, zda je A diagonalizovatelný operátor; v kladném případě nalezněte diagonalizující bázi $\mathcal{Y} = (y_1, y_2, y_3)$ a určete ${}^{\mathcal{Y}}A$, je-li:

$$\text{a) } {}^{\mathcal{X}}A=\begin{pmatrix}5&-2&-2\\-2&1&-1\\14&-6&-4\end{pmatrix};\quad \text{b) } {}^{\mathcal{X}}A=\begin{pmatrix}4&7&-5\\-4&5&0\\1&9&-4\end{pmatrix};\quad \text{c) } {}^{\mathcal{X}}A=\begin{pmatrix}1&-3&4\\4&-7&8\\6&-7&7\end{pmatrix}.$$

Řešení. Metoda řešení je zde obdobná jako v klasické úloze nalezení vlastních čísel a vlastních vektorů. Nicméně musíme počítat s tím, že je zadána matice zobrazení v jiné než standardní bázi! Výpočet spektra to nijak neovlivní, ovšem při hledání vlastních podprostorů musíme zpozornět – řešíme-li homogenní soustavy s maticí $(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{E} \mid \theta)$, v bázi řešení nefigurují přímo vlastní vektory operátoru ale jejich souřadnice v bázi $\mathcal{X}$!

a) $y_1 = -x_2 + x_3$, $y_2 = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3$, $y_3 = -x_1 - 4x_2 + 2x_3$,
   ${}^{\mathcal{Y}}A = \operatorname{diag}(2, -1, 1)$,

b) $y_1 = x_1 + x_2 + 2x_3$, $y_2 = 3(4 - i)x_1 + 2(5 + 3i)x_2 + 17x_3$, $y_3 = 3(4 + i)x_1 + 2(5 - 3i)x_2 + 17x_3$,
   ${}^{\mathcal{Y}}A = \operatorname{diag}(1, 2 + 3i, 2 - 3i)$,

c) není.

Příklad 7.35. Nechť $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in T^{n,n}$ jsou podobné. Dokažte, že platí následující tvrzení:

a) $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{B})$;

b) $\mathbb{A}^m, \mathbb{B}^m$ jsou podobné pro libovolné $m \in \mathbb{N}$;

c) Jsou-li navíc $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ regulární, potom jsou $\mathbb{A}^{-1}$, $\mathbb{B}^{-1}$ podobné.

Příklad 7.36. Dokažte, že libovolná matice $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ je regulární, právě když $0 \notin \sigma(\mathbb{A})$.

Příklad 7.37. Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ jsou vlastní čísla $\mathbb{A}$ (opakující se podle své algebraické násobnosti). Označme pomocí $\mathrm{Tr}\ \mathbb{A}$ stopu, tj. součet diagonálních prvků matice $\mathbb{A}$. Dokažte, že platí následující tvrzení:

a) $\det \mathbb{A} = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$;

b) $\mathrm{Tr}\,\mathbb{A} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

Příklad 7.38. Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ je regulární, $\sigma(\mathbb{A}) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$. Dokažte, že platí následující tvrzení:

a) $\sigma(\mathbb{A}^{-1}) = \{\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_k^{-1}\}$;

b) každý vlastní vektor matice $\mathbb{A}$ je vlastním vektorem matice $\mathbb{A}^{-1}$;

c) $\mathbb{A}$ je diagonalizovatelná, právě když $\mathbb{A}^{-1}$ je diagonalizovatelná.