Lineární algebra : Základní pojmy lineární algebry

(3. přednáška)

Daniel Dombek, Luděk Kleprlík,
Karel Klouda

daniel.dombek@fit.cvut.cz, ludek.kleprlik@fit.cvut.cz,
karel.klouda@fit.cvut.cz

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií

České vysoké učení technické v Praze

LS 2021/2022

vytvořeno: 15. února 2022, 13:47

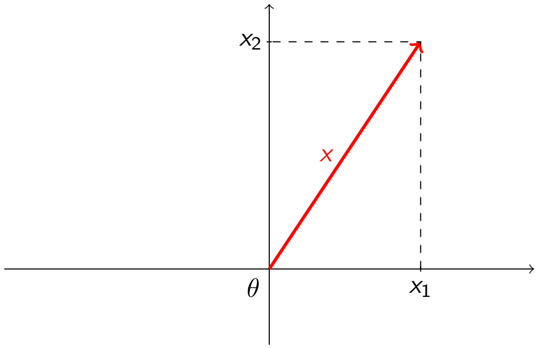
Hlavní body

Šipky v rovině

- uvažujme těleso $\mathbb{R}$ všech reálných čísel
- prvky $\mathbb{R}^2 \cdots$ uspořádané reálné dvojice
- umíme je sčítat mezi sebou a násobit reálným číslem (po složkách)
- opatrné značení: $\oplus$ a $\odot$

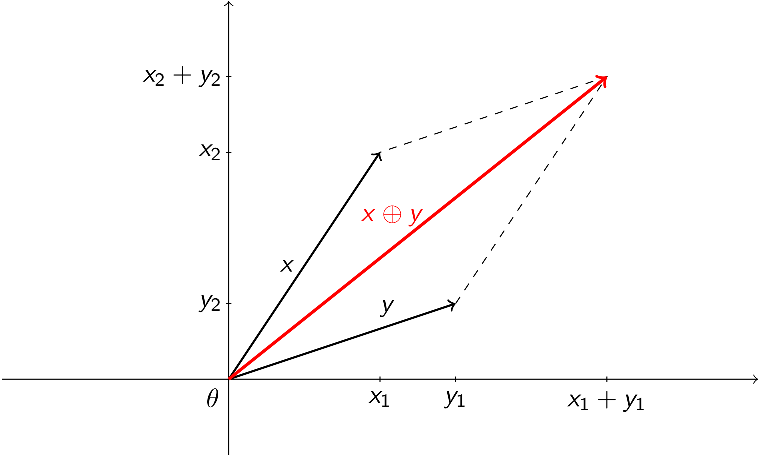
Geometrická představa

- $x = (x_1, x_2)$
- bod v rovině $\mathbb{R}^2$
- šipka (orientovaná úsečka) vedoucí z počátku $\theta = (0, 0)$ do (x_1, x_2)



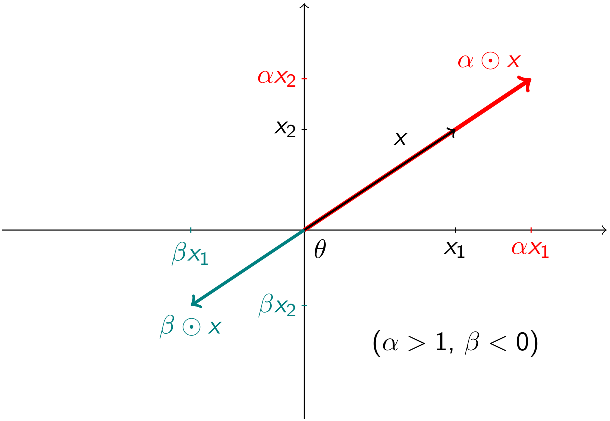
Sčítání v $\mathbb{R}^2$

$$x \oplus y = (x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2),$$



Násobení číslem v $\mathbb{R}^2$

$$\alpha \odot x = \alpha \odot (x_1, x_2) := (\alpha x_1, \alpha x_2),$$



$(\alpha > 1,\ \beta < 0)$

Velmi neformální pozorování o $\mathbb{R}^2$

Pozorování

*Prvky $\mathbb{R}^2$ nazvěme „vektory", operace $\oplus$, $\odot$ jsou definované po složkách. Množina vektorů v $\mathbb{R}^2$ je **uzavřená** na obě operace $\oplus, \odot$ a splňuje následující vlastnosti):*

1. *Nezáleží na pořadí, v jakém vektory sčítáme.*
2. *Sčítáme-li tři vektory, můžeme nejprve sečíst první dva a k výsledku přičíst třetí, nebo obráceně (první vektor přičíst k už provedenému součtu dalších dvou) a výsledek se nezmění.*
3. *Vynásobíme-li vektor jedním číslem a poté druhým, dostaneme totéž, jako bychom ho násobili najednou jejich součinem.*
4. *Vynásobíme-li dva vektory stejným číslem a výsledky sečteme, dostaneme totéž, jako bychom vektory nejprve sečetli a až pak tímto číslem vynásobili.*
5. *Vynásobíme-li stejný vektor zvlášť dvěma čísly a oba výsledky sečteme, dostaneme totéž, jako bychom tento vektor vynásobili součtem obou čísel.*
6. *Vynásobíme-li libovolný vektor jedničkou, nezmění se.*
7. *V rovině existuje vektor, který můžeme dostat vynásobením libovolného vektoru nulou, je to tzv. nulový vektor θ („šipka končící v počátku").*

Hlavní body

Motivace k abstrakci

- celou teorii lineární algebry lze „vybudovat“ jen na $\mathbb{R}^2$ (soustavy, zobrazení, geometrie,. . .)
- nebude stačit, přejdeme do $\mathbb{R}^3$ – vše podobné!
- $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4, \ldots \mathbb{R}^n \ldots$
- matice, posloupnosti, polynomy, funkce,. . .
- jiná číselná tělesa. . .
- exotické operace $\oplus$, $\odot$ . . .

Myšlenka

- pro každou volbu číselného tělesa, množiny „vektorů“ a vektorových operací je potřeba extra teorie
- pokud je splněno několik základních vlastností, vše funguje analogicky!
- abstrahujeme, zobecňujeme. . .
- těleso může být libovolné,
- množinu „vektorů“ a $\oplus$, $\odot$ volíme tak, aby byly splněny základní vlastnosti, **axiomy**
- $\rightarrow$ **vektorové prostory**

Definice VP

Definice

*Nechť T je libovolné **komutativní** těleso, jeho neutrální prvky vůči operacím sčítání resp. násobení označme 0, resp. 1. Nechť je dále dána neprázdná množina V a dvě zobrazení*

$$\oplus : V \times V \to V, \qquad \odot : T \times V \to V\,.$$

*Řekneme, že V je **vektorový prostor nad tělesem** T s vektorovými operacemi $\oplus$ a $\odot$, právě když platí následující **axiomy vektorového prostoru**:*

1. $\forall a, b \in V : a \oplus b = b \oplus a,$
2. $\forall a, b, c \in V : (a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c),$
3. $\forall \alpha, \beta \in T, \forall a \in V : \alpha \odot (\beta \odot a) = (\alpha\beta) \odot a,$
4. $\forall \alpha \in T, \forall a, b \in V : \alpha \odot (a \oplus b) = (\alpha \odot a) \oplus (\alpha \odot b),$
5. $\forall \alpha, \beta \in T, \forall a \in V : (\alpha + \beta) \odot a = (\alpha \odot a) \oplus (\beta \odot a),$
6. $\forall a \in V : 1 \odot a = a,$
7. $\exists \theta \in V, \forall a \in V : 0 \odot a = \theta.$

*Prvky vektorového prostoru nazýváme **vektory**, prvky tělesa T nazýváme **skaláry**.*

Poznámky k VP

- obvyklé značení: V, V nad T
- ale je-li nutný kontext, explicitně: $(V, T, \oplus, \odot)$
- pozor! dvě různá „plus“, dvě různá „krát“
- „hrušky s jablkama“, oblíbené hříchy
- v bezpečné situaci lze značení zjednodušit, $\oplus, \odot \to +, \cdot$
- skaláry řecky / vektory latinkou
- pozor na podobnost axiomů! VP budován ve dvou krocích

První tvrzení o nulovém vektoru

- co k důkazu potřebujeme?
- nezajímá nás konkrétní $(V, T, \oplus, \odot)$

Věta

Buď V vektorový prostor nad tělesem T. Potom platí:

1. *Ve V existuje právě jeden nulový vektor.*
2. $\forall \alpha \in T : \alpha\theta = \theta$.
3. $\forall a \in V : a + \theta = a$.
4. *Ke každému vektoru z V existuje právě jeden* ***vektor opačný****. Tzn.,*

$$\forall a \in V, \exists_1 b \in V : a + b = \theta.$$

5. $\forall \alpha \in T, \forall a \in V : (\alpha a = \theta \Rightarrow (\alpha = 0 \vee a = \theta))$.

Příklady VP

Přímo při počítání se omezíme na základní typy VP:

- $(T^n, T, +, \cdot)$, s operacemi po složkách
- $(T^{m,n}, T, +, \cdot)$, s operacemi po složkách
- $(T^\infty, T, +, \cdot)$, s operacemi po složkách
- Jen pro zajímavost: $(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}, \oplus, \odot)$, s operacemi násobení+mocnění

Definice podprostoru

Motivace – jaký je vztah mezi různými VP $\mathbb{R}^n$?

Definice

*Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a nechť $\emptyset \neq P \subseteq V$. Říkáme, že P je **podprostor** prostoru V, právě když platí:*

1. $\forall x, y \in P$: $x + y \in P$,
2. $\forall \alpha \in T, \forall x \in P$: $\alpha x \in P$

*(tedy P je množina **uzavřená** na obě vektorové operace $+, \cdot$). Vztah „být podprostorem“ pak značíme*

$$P \subset\subset V.$$

Elegantněji:

$$P + P \subseteq P \quad \text{a} \quad T \cdot P \subseteq P.$$

Vlastnosti podprostorů

Věta

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T, nechť $P \subset\subset V$. Potom P se zúžením operace sčítání vektorů $+$ na $P \times P$ a operace násobení vektorů skalárem $\cdot$ na $T \times P$ je také vektorový prostor nad T.

Pozorování

Buď V vektorový prostor nad T a nechť $P \subset\subset V$. Pak platí:

1. $\theta \in P$.
2. $\{\theta\} \subset\subset V$ a $V \subset\subset V$.
3. *Pro každou podmnožinu $P_1 \subseteq P$ platí implikace: $P_1 \subset\subset P \Rightarrow P_1 \subset\subset V$.*

Poznámky

- Podprostory $\{\theta\}$ a V vektorového prostoru V nazýváme **triviálními podprostory**.
- Každý podprostor $P \subset\subset V$ pro který platí $P \neq V$ nazýváme **vlastním podprostorem**.
- Fakt $\theta \in P$ pro nějakou podmnožinu $P \subseteq V$ **nestačí** na to, aby $P \subset\subset V$!
- Obměněná implikace...

$$\theta \notin P \Rightarrow P \text{ není podprostorem } V \,.$$

Příklady podprostorů

Příklad

V $\mathbb{R}^2$ *jsou jedinými netriviálními podprostory přímky procházející počátkem* $\theta = (0,0)$, *například*

$$P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 0\} \subset\subset \mathbb{R}^2 \,.$$

Příklad

V $\mathbb{R}^3$ *jsou jedinými netriviálními podprostory přímky a roviny procházející počátkem* $\theta = (0,0,0)$, *například*

$$\begin{aligned} P_1 =& \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y = 0 \wedge z = 0\} \subset\subset \mathbb{R}^3 \,, \\ P_2 =& \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y = 0\} \subset\subset \mathbb{R}^3 \,, \\ P_3 =& \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 0\} \subset\subset \mathbb{R}^3 \,. \end{aligned}$$

- Naivní odvození v $\mathbb{R}^3$ postupným přidáváním vektorů – reklama na budoucí pojmy.

Operace s podprostory

Příklad

Uvažujme následující podprostory v $\mathbb{R}^2$*:*

$$E_1 := \mathbb{R} \times \{0\} = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}\,,$$
$$E_2 := \{0\} \times \mathbb{R} = \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}\,.$$

Dle definic snadno odvodíme, že

1. $E_1 \cap E_2$ *a* $E_1 + E_2$ *jsou podprostory.*
2. $E_1 \cup E_2$ *není podprostor.*

Jak to platí obecně? A co násobení podprostoru skalárem?

Operace s podprostory – věta

Věta

Buď V vektorový prostor nad tělesem T, nechť P a Q jsou libovolné podprostory V. Pak platí následující:

1. $P \cap Q \subset\subset V$.
2. $P \cup Q$ *nemusí být podprostorem.*
3. $P + Q \subset\subset V$.

Existuje přísnější podmínka pro sjednocení?

Hlavní body

Soubor vektorů

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n), \text{ kde } x_i \in V \text{ pro každé } i \in \hat{n}$$

nazýváme **souborem vektorů délky** n v VP V.

- soubor vektorů $\neq$ neuspořádaná množina vektorů
- zákeřnost ve značení
- $\in V$ není totéž co $\subseteq V$

Lineární kombinace

Definice

*Nechť V je vektorový prostor nad T, $x \in V$ a $(x_1, \ldots, x_n)$ je soubor vektorů z V. Říkáme, že vektor x je **lineární kombinací** souboru $(x_1, \ldots, x_n)$, právě když existují čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in T$ taková, že*

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i.$$

*Čísla α_i, $i \in \hat{n}$, nazýváme **koeficienty lineární kombinace**. Jestliže $\forall i \in \hat{n} : \alpha_i = 0$, nazýváme takovou lineární kombinaci **triviální**. V opačném případě jde o lineární kombinaci **netriviální**.*

- jaké operace v $\sum$?
- čemu se rovná triviální LK?

Lineární nezávislost

Definice

*Nechť $(x_1, \ldots, x_n)$ je soubor vektorů z V. Řekneme, že $(x_1, \ldots, x_n)$ je **lineárně nezávislý (LN)** soubor, právě když pouze triviální lineární kombinace tohoto souboru je rovna nulovému vektoru θ. V opačném případě nazýváme soubor **lineárně závislý (LZ)**.*

- $(x_1, \ldots, x_n)$ *je LN* $\Leftrightarrow$

$$\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in T : \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \theta \Rightarrow (\forall i \in \hat{n})(\alpha_i = 0) \right)$$

- $(x_1, \ldots, x_n)$ *je LZ* $\Leftrightarrow$

$$\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in T, \exists k \in \hat{n}, \alpha_k \neq 0 : \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \theta \right)$$

Poznámka: pozor na „alternativní definice“!

(Ne)závislost „malých“ souborů

Pozorování

1. *Lineární (ne)závislost nezávisí na pořadí vektorů v souboru.*
2. *Obsahuje-li soubor dva stejné vektory, potom je LZ.*
3. *Obsahuje-li soubor nulový vektor, potom je LZ.*
4. *Soubor délky* 1 *je LZ, právě když je tvořen nulovým vektorem.*
5. *Soubor délky* 2 *je LZ, právě když jeden vektor je násobkem druhého.*
6. *Přidáním vektoru do LZ souboru vznikne LZ soubor.*
7. *Odebráním vektoru z LN souboru délky alespoň dva vznikne LN soubor.*

Geometrická interpretace

Příklad

- *Dvě orientované úsečky v* $\mathbb{R}^2$ *(nebo* $\mathbb{R}^3$*) leží v jedné přímce, právě když jsou odpovídající vektory LZ.*
- *Tři orientované úsečky v* $\mathbb{R}^3$ *leží v jedné rovině, právě když jsou odpovídající vektory LZ.*
- *Soubor vektorů z* $\mathbb{R}^2$ *délky* 3 *je vždy LZ.*
- *Soubor vektorů z* $\mathbb{R}^3$ *délky* 4 *je vždy LZ.*

Vyšetřování lineární nezávislosti

Algoritmus (Ověření LN/LZ souboru vektorů)

Pro zadaný soubor vektorů $(x_1, \ldots, x_n)$ *ve VP* V *ověřte, zda je LN nebo LZ.*

1. *Hledáme, jestli existuje i jiná ntice koeficientů* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in T$ *než* $(0, \ldots, 0)$ *taková, že příslušná lineární kombinace je rovna nulovému vektoru.*
2. *Koeficienty* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in T$ *považujme za neznámé v rovnici*

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = \theta.$$

3. *Z definice vektorových operací rovnici výše převeďme na soustavu lineárních rovnic (přesný postup závisí na konkrétní volbě prostoru* $(V, T, +, \cdot)$*), tato soustava nám vyjde vždy homogenní.*
4. *Soustavu převeďme pomocí GEM do horního stupňovitého tvaru a určeme, kolik existuje řešení.*
5. *Existuje-li jediné řešení* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (0, \ldots, 0)$*, je zadaný soubor LN, v opačném případě je LZ.*

Příklady na LN/LZ

Příklad

Soubor $((1,2,3),(4,7,8),(3,4,2))$ *v* $\mathbb{R}^3$ *je lineárně nezávislý.*

Příklad

Soubor

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \text{ v } \mathbb{Z}_3^{2,2}$$

je lineárně závislý.

Lineární (ne)závislost množiny

Definice

Buď V vektorový prostor nad T, $\emptyset \neq M \subseteq V$. Řekneme, že M je ***lineárně závislá (LZ) množina****, právě když existují vektory $x_1, \ldots, x_n \in M$ takové, že $x_i \neq x_j$ pro $i \neq j$ a soubor $(x_1, \ldots, x_n)$ je LZ. V opačném případě je množina M* ***lineárně nezávislá (LN)****.*

- reformulace „množina je LN“
- LN množina $\stackrel{?}{\leftrightarrow}$ soubor

Hlavní body

Definice lineárního obalu

Definice

Buď $(x_1, \ldots, x_n)$ *soubor vektorů z* V*. Množinu všech lineárních kombinací tohoto souboru nazveme* ***lineárním obalem souboru*** $(x_1, \ldots, x_n)$ *a značíme ji*

$$\langle x_1, \ldots, x_n \rangle.$$

Buď $\emptyset \neq M \subseteq V$ *Množinu všech lineárních kombinací všech souborů vektorů z množiny* M *nazveme* ***lineárním obalem množiny*** M *a značíme ji* $\langle M \rangle$.

Poznámka: konečné součty

Jednoduché vlastnosti lineárního obalu

Pozorování

Nechť M je libovolná neprázdná podmnožina vektorového prostoru V. Pak platí:

1. $\theta \in \langle M \rangle$,
2. $M \subseteq \langle M \rangle$,
3. $x \in \langle M \rangle \Rightarrow \langle M \rangle = \langle M \cup \{x\} \rangle$,
4. $M \subseteq N \Rightarrow \langle M \rangle \subseteq \langle N \rangle$,
5. $x, y \in \langle M \rangle \wedge \alpha \in T \Rightarrow x + y \in \langle M \rangle \wedge \alpha x \in \langle M \rangle$.

Příklady

Příklad

Lineární obaly souborů vektorů v prostorech $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ vypadají následovně:

- *Lineární obal nulového vektoru (počátku) je množina pouze s počátkem.*
- *Lineární obal nenulového vektoru z $\mathbb{R}^2$ (nebo z $\mathbb{R}^3$) je množina všech vektorů ležících ve společné přímce.*
- *Lineární obal LN souboru dvou vektorů z $\mathbb{R}^2$ je celé $\mathbb{R}^2$.*
- *Lineární obal LN souboru dvou vektorů z $\mathbb{R}^3$ je množina všech vektorů ležících ve společné rovině.*
- *Lineární obal LN souboru tří vektorů z $\mathbb{R}^3$ je celé $\mathbb{R}^3$.*

Příklad

Odvoďme $\langle(1,0,1,0),(0,1,1,0)\rangle$ ve VP T^4 v závislosti na T.

Jak souvisí lineární obaly a podprostory?

Lineární obaly a podprostory

Věta

Buď $\emptyset \neq M \subseteq V$*, potom platí:*

1. $\langle M \rangle \subset\subset V$.
2. $M \subset\subset V \Leftrightarrow M = \langle M \rangle$.

Množiny uzavřené na „lineární obalení“ $\leftrightarrow$ lineární obaly $\leftrightarrow$ podprostory!

Ekvivalentní charakterizace LN/LZ

Věta

Buď $(x_1, \ldots, x_n)$ *soubor vektorů z* V *a* $n \geq 2$. *Potom* $(x_1, \ldots, x_n)$ *je LZ právě tehdy, když*

$$\exists k \in \hat{n} : x_k \in \langle x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n \rangle \,.$$

- různé zdroje, různé definice
- užitečnost?
- na dalším slajdu důsledek

Zvětšování a zmenšování souborů

Důsledek

Buď $(x_1, \ldots, x_n)$ *LZ soubor vektorů z* V, $n \geq 2$. *Potom*

$$\exists k \in \hat{n} : \langle x_1, \ldots, x_n \rangle = \langle x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n \rangle \,.$$

Věta

Buď $(x_1, \ldots, x_n)$ *LN soubor vektorů z* V *a* $y \notin \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$. *Potom soubor* $(x_1, \ldots, x_n, y)$ *je také LN.*

Lineární kombinace v maticovém součinu

Věta

Mějme matice $\mathbb{A} \in T^{m,n}$ a $\mathbb{B} \in T^{n,k}$. Potom sloupce matice $\mathbb{AB}$ jsou lineárními kombinacemi souboru sloupců matice $\mathbb{A}$ a řádky matice $\mathbb{AB}$ jsou lineární kombinací souboru řádků matice $\mathbb{B}$.

Speciálně pro libovolné $\mathbb{a} = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n) \in T^{1,n}, \mathbb{b} = (b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_n)^T \in T^{n,1}$ platí vztahy

$$\mathbb{a} \cdot \mathbb{B} = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{B}_{i:}\,, \qquad \mathbb{A} \cdot \mathbb{b} = \sum_{j=1}^{n} b_j \mathbb{A}_{:j}\,.$$

Hlavní body

Definice báze

- Ilustrace v $\mathbb{R}^2$.

Definice

*O množině vektorů M z vektorového prostoru V řekneme, že **generuje** prostor V, právě když platí:*

$$\langle M \rangle = V.$$

Definice

Existuje-li ve V uspořádaná množina vektorů B taková, že

1. *B je LN,*
2. *B generuje V,*

*nazýváme B **bází** vektorového prostoru V.*

Ověření druhé vlastnosti báze

Algoritmus (Ověření zda konečný soubor generuje V)

Pro zadaný soubor vektorů $M = (x_1, \ldots, x_n)$ ve vektorovém prostoru V ověřte, zda generuje celý VP.

1. *Hledáme, jestli pro libovolný vektor $v \in V$ existuje nějaká ntice koeficientů $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in T$ taková, že příslušná lineární kombinace je rovna vektoru v.*
2. *Koeficienty $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in T$ považujme za neznámé v rovnici*

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = v.$$

3. *Z definice vektorových operací rovnici výše převeďme na soustavu lineárních rovnic (přesný postup závisí na konkrétní volbě prostoru $(V, T, +, \cdot)$). Vektor v do této soustavy (do její pravé strany) vnese nějaké parametry z T.*
4. *Soustavu převeďme pomocí GEM do horního stupňovitého tvaru a určeme, kolik existuje řešení.*
5. *Existuje-li pro libovolné hodnoty parametrů (tj. pro libovolný vektor v) alespoň jedno řešení, zadaný soubor generuje prostor V.*

Příklady na ověření báze

Poznámka: obě vlastnosti bází lze ověřovat současně!

Příklad

Soubor $((1,2,3),(4,7,8),(3,4,2))$ *v* $\mathbb{R}^3$ *generuje celé* $\mathbb{R}^3$ *a je dokonce bází.*

Příklad

Soubor

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \text{ v } \mathbb{Z}_3^{2,2}$$

negeneruje celé $\mathbb{Z}_3^{2,2}$*, nejde tedy o bázi.*

Standardní báze

Příklad

Nechť T je libovolné těleso s neutrálními prvky $0, 1$.

- *V T^n je bází např. soubor $\mathcal{E}_n = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$, kde*

$$e_1 := (1, 0, 0, \ldots, 0), e_2 := (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n := (0, 0, 0, \ldots, 1).$$

- *V $T^{m,n}$ lze zavést bázi analogicky. Označíme-li jako e_{ij} matici, která má na pozici s indexy ij jedničku a všude jinde nuly, je bází např. soubor*

$$\mathcal{E}_{mn} = (e_{11}, \ldots, e_{1n}, e_{21}, \ldots, e_{2n}, \ldots, e_{m1}, \ldots, e_{mn}).$$

Všechny tyto báze nazýváme ***standardní báze*** *a značíme je jako výše, případně $\mathcal{E}$.*

Definice dimenze

Definice

Buď V vektorový prostor nad T. Řekneme, že dimenze vektorového V prostoru je rovna

- $\mathbf{0}$, *pokud ve V neexistuje LN soubor délky* 1.
- $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$, *pokud ve V existuje LN soubor délky n, ale každý soubor délky $n+1$ a delší už je nutně LZ.*
- $\boldsymbol{\infty}$, *pokud ve V existuje LN soubor libovolné délky.*

Dimenzi vektorového prostoru V označujeme symbolem $\dim V$.
Je-li $\dim V = \infty$, *říkáme, že V **má nekonečnou dimenzi**, naopak pokud* $\dim V < \infty$ *říkáme, že V **má konečnou dimenzi**.*

Poznámka - Definice je korektní.

Komentář k „alternativní definici“...

Jednoduché vlastnosti dimenze

Příklad

- *Pro* $\mathbb{R}^2$ *platí* $\dim \mathbb{R}^2 = 2$*.*
- *Pro* $\mathbb{R}^3$ *platí* $\dim \mathbb{R}^3 = 3$*.*

Věta

1. $\dim V = 0 \Leftrightarrow$ *ve* V *neexistuje LN soubor délky* 1*, tj. ve* V *je pouze* θ*.*
2. *Triviální prostor* $\{\theta\}$ *nemá bázi.*
3. *Buď* $n \in \mathbb{N}$ *a nechť ve* V *existuje* n*-členný LN soubor. Potom*
$$\dim V \geq n.$$
4. *Buď* $n \in \mathbb{N}$ *a nechť je ve* V *každý* n*-členný soubor LZ. Potom*
$$\dim V \leq n - 1.$$

Pomocný výsledek do budoucna

Lemma (Steinitzovo o výměně)

Nechť $(x_1, \ldots, x_n)$ *a* $(y_1, \ldots, y_m)$ *jsou soubory vektorů z* V*. Předpokládejme, že je soubor* $(x_1, \ldots, x_n)$ *LN a současně je generován souborem* $(y_1, \ldots, y_m)$*, tedy* $\forall i \in \hat{n} : x_i \in \langle y_1, \ldots, y_m \rangle$*. Potom platí:*

1. $n \leq m$*, tedy délka LN souboru nesmí převýšit počet jeho generátorů.*
2. *Existují navzájem různé indexy* $i_1, i_2, \ldots, i_n \in \hat{m}$ *takové, že*

$$\langle y_1, \ldots, y_m \rangle = \langle x_1, \ldots, x_n, (y_i \mid i \in \hat{m} \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}) \rangle.$$

Důkaz tohoto lemmatu neuvádíme a nebude vyžadován.

Důsledek (Důsledek Steinitzova lemmatu)

Generuje-li soubor $(y_1, \ldots, y_n)$ *vektorový prostor* V*, potom* $\dim V \leq n$*.*

V konečné dimenzi si lze ušetřit trochu práce

Věta

Nechť $(x_1, \ldots, x_n)$ *je soubor vektorů délky* n *z* V *a* $\dim V = n \in \mathbb{N}$. *Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

1. *Soubor* $(x_1, \ldots, x_n)$ *je báze* V.
2. *Soubor* $(x_1, \ldots, x_n)$ *je LN.*
3. *Soubor* $(x_1, \ldots, x_n)$ *generuje* V.

Jak je to s existencí bází

Věta

Nechť $\dim V = n \in \mathbb{N}$. *Potom ve* V *existuje* n*-členná báze.*

Věta

Nechť $n \in \mathbb{N}$ *a nechť ve* V *existuje* n*-členná báze. Potom* $\dim V = n$. *Existuje-li ve* V *nekonečná báze, pak* $\dim V = \infty$.

Důsledek

Všechny báze vektorového prostoru V *mají stejný počet prvků, roven* $\dim V$.

Jak vyrobit bázi

Věta

Nechť $\{\theta\} \neq V = \langle y_1, \ldots, y_n \rangle$. *Potom* $\dim V = k \leq n$ *a existují navzájem různé indexy* $i_1, \ldots, i_k \in \hat{n}$ *takové, že* $(y_{i_1}, \ldots, y_{i_k})$ *je báze* V.

Jinými slovy: z každého generujícího souboru lze vybrat bázi.

Věta

Nechť $(x_1, \ldots, x_k)$ *je LN soubor vektorů z* V *a* $\dim V = n \in \mathbb{N}$. *Potom existují vektory* $x_{k+1}, \ldots, x_n \in V$ *takové, že* $(x_1, \ldots, x_n)$ *je báze* V.

Jinými slovy: každý lineárně nezávislý soubor lze doplnit na bázi.

Co VP nekonečné dimenze?

Na temné kouty teorie množin bohužel nemáme prostor...

Poznámka

I když to v textu formálně nedokazujeme, důležitá tvrzení platí i pro prostory nekonečné dimenze:

1. *Ve vektorovém prostoru o* $\dim V = \infty$ *existuje báze (nekonečná).*
2. *Z nekonečné množiny generátorů lze vždy vybrat bázi.*
3. *Ve vektorovém prostoru o* $\dim V = \infty$ *lze každý LN soubor doplnit na bázi.*

Dimenze známých VP

Příklad

Z existence standardních bází lze rovnou vyvodit následující poznatky:

- dim $T^n = n$.
- dim $T^{m,n} = mn$.

Speciálně tedy $\dim(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot) = n$ *a* $\dim(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}, +, \cdot) = n$.

Zajímavým příkladem je prostor $(\mathbb{C}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$. *Ověřte, že se jedná o VP a že navíc platí*

$$\dim(\mathbb{C}^n, \mathbb{R}, +, \cdot) = 2n$$

(například tím, že naleznete nějakou bázi tohoto prostoru).
V prostoru T^∞ *nedokážeme nalézt explicitní zápis pro bázi* T^∞, *ale přesto jsme schopni ukázat, že*

- dim $T^\infty = \infty$.

Dimenze podprostorů

Věta

Nechť V je VP a $P \subset\subset V$. Potom

$$\dim P \leq \dim V.$$

Je-li navíc P vlastní podprostor V a $\dim V < \infty$, potom

$$\dim P < \dim V.$$

Důsledek

Buď $P \subset\subset V$ a $\dim P = \dim V < \infty$. Potom $P = V$.

Poznámka: předpoklad konečnosti dimenze je nutný!

Direktní součet množin

Definice

Buď V vektorový prostor a $\emptyset \neq A \subseteq V$, $\emptyset \neq B \subseteq V$. Součet $A + B$ nazveme ***direktní****, právě když pro každý vektor $x \in A + B$ existuje jediné $a \in A$ a jediné $b \in B$ takové, že*

$$x = a + b\,.$$

Direktní součet značíme $A \oplus B$.

Příklad

Volme ve VP $\mathbb{R}^2$ podprostory: $E_1 := \mathbb{R} \times \{0\}$ a $E_2 := \{0\} \times \mathbb{R}$. Už víme, že platí $E_1 + E_2 = \mathbb{R}^2$, dokonce ale platí i

$$E_1 \oplus E_2 = \mathbb{R}^2\,.$$

Na druhou stranu, ve VP $\mathbb{R}^3$ následující součet

$$\langle (1,0,0),(0,1,0)\rangle + \langle (1,0,0),(0,0,1)\rangle = \mathbb{R}^3$$

direktní ***není****.*

Vlastnost direktního součtu a 1. věta o dimenzi

Věta

Buďte $P \subset\subset V$, $Q \subset\subset V$. *Potom* $P + Q$ *je direktní právě tehdy, když*

$$P \cap Q = \{\theta\}.$$

Věta (1. o dimenzi)

Buďte $P, Q \subset\subset V$. *Potom platí:*

$$\dim(P + Q) + \dim(P \cap Q) = \dim P + \dim Q,$$

speciálně pro direktní součet platí:

$$\dim(P \oplus Q) = \dim P + \dim Q.$$

Rovnost dvou lineárních obalů

Problém nejednoznačného řešení:

- soustavy (nejen) homogenních lineárních rovnic,
- hledání báze podprostoru.

Jak poznat rovnost dvou „jiných“ lineárních obalů?

Pozorování

Buďte $(x_1, \ldots, x_n)$ *a* $(y_1, \ldots, y_m)$ *dva soubory vektorů z* V*. Potom*

$$\langle x_1, \ldots, x_n \rangle = \langle y_1, \ldots, y_m \rangle$$

právě tehdy, když

$$\dim\langle x_1, \ldots, x_n \rangle = \dim\langle y_1, \ldots, y_m \rangle = \dim\langle x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m \rangle.$$

Hlavní body

Jednoznačné vyjádření vektoru pomocí prvků báze

Poznámka

Budeme-li chtít zdůraznit, že vektorový prostor V má dimenzi n (a přitom šetřit místem), budeme jej značit V_n.

Věta

Nechť $\mathcal{X} = (x_1, \ldots, x_n)$ je báze V_n. Potom ke každému $z \in V_n$ ***existuje právě jedna*** *uspořádaná ntice $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in T^n$ taková, že*

$$z = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i.$$

Souřadnice v bázi

Definice

Nechť $\mathcal{X} = (x_1, \ldots, x_n)$ *je báze* V_n *a vektor* $z \in V_n$ *splňuje*

$$z = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \,.$$

Souřadnicemi vektoru $z \in V_n$ ***v bázi*** $\mathcal{X}$ *nazveme uspořádanou ntici*

$$(z)_{\mathcal{X}} := \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in T^{n,1} \,.$$

Číslo $\alpha_i \in T$ *je* ***itá souřadnice vektoru*** z ***v bázi*** $\mathcal{X}$, *často značíme*

$$x_i^{\#}(z) := \alpha_i.$$

(Toto $x_i^{\#}$ *nazýváme* ***itý souřadnicový funkcionál v bázi*** $\mathcal{X}$*.)*

- Pojmy jsou dobře definovány, obě vlastnosti bází jsou potřeba.

Algoritmus (Nalezení souřadnic vektoru v bázi)

Pro zadaný vektor $z \in V$ *a bázi* $\mathcal{X} = (x_1, \dots, x_n)$ *vektorového prostoru* V_n *nalezněte souřadnice* z *v bázi* $\mathcal{X}$*.*

1. *Hledáme ntici koeficientů* $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in T$ *takovou, že příslušná lineární kombinace prvků báze je rovna vektoru* z*.*
2. *Koeficienty* $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in T$ *považujme za neznámé v rovnici*

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = z\,.$$

3. *Z definice vektorových operací rovnici výše převeďme na soustavu lineárních rovnic (přesný postup závisí na konkrétní volbě prostoru* $(V_n, T, +, \cdot)$*). Pravá strana soustavy bude určena vektorem* z*.*
4. *Soustavu převeďme pomocí GEM do horního stupňovitého tvaru. Jelikož* $\mathcal{X} = (x_1, \dots, x_n)$ *je báze, musí existovat právě jedno řešení* $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ *této soustavy – a to jsou hledané souřadnice vektoru* z *v bázi* $\mathcal{X}$*.*

Triviální příklad

Příklad

Ve standardní bázi $\mathcal{E}_3 = (e_1, e_2, e_3)$ *prostoru* $\mathbb{R}^3$ *má vektor* $z = (a, b, c)$ *souřadnice* (a, b, c)*. Triviálně platí*

$$z = ae_1 + be_2 + ce_3$$

a pro souřadnice máme:

$$z = (a, b, c) \quad \Rightarrow \quad (z)_{\mathcal{E}_3} = (a, b, c)\,.$$

Netriviální příklad

Příklad

Soubor $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3)$, *kde*

$$x_1 = (1,1,1), \quad x_2 = (1,1,2), \quad x_3 = (1,2,3),$$

je jiná báze $\mathbb{R}^3$. *Souřadnice vektoru* $z = (a,b,c)$ *nalezneme řešením rovnice*

$$\alpha(1,1,1) + \beta(1,1,2) + \gamma(1,2,3) = z = (a,b,c)\,,$$

s parametry $a,b,c \in \mathbb{R}$ *a neznámými* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. *Výsledek je*

$$z = (a+b-c)x_1 + (a-2b+c)x_2 + (-a+b)x_3$$

a pro souřadnice platí

$$z = (a,b,c) \quad \Rightarrow \quad (z)_{\mathcal{X}} = (a+b-c, a-2b+c, -a+b)\,.$$