Lineární algebra : Hodnost matic a Frobeniova věta

(4. přednáška)

Daniel Dombek, Luděk Kleprlík,
Karel Klouda

daniel.dombek@fit.cvut.cz, ludek.kleprlik@fit.cvut.cz,
karel.klouda@fit.cvut.cz

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií

České vysoké učení technické v Praze

LS 2021/2022

vytvořeno: 15. února 2022, 13:47

Hlavní body

Značení GEM

Definice

Nechť $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in T^{m,n}$*. Je-li možné matici* $\mathbb{A}$ *převést konečně mnoha řádkovými úpravami (G1)-(G3) Gaussovy eliminační metody na matici* $\mathbb{B}$*, budeme tuto skutečnost zkráceně zapisovat*

$$\mathbb{A} \sim \mathbb{B}\,.$$

- $\mathbb{A} \sim \mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{B} \sim \mathbb{A}$
- co s nulovými řádky?

Definice hodnosti, vliv GEM

Definice

Nechť $\mathbb{A} \in T^{m,n}$*.* ***Hodností matice*** $\mathbb{A}$ *nazýváme dimenzi lineárního obalu souboru řádků matice* $\mathbb{A}$ *(jako vektorů z* $T^{1,n}$*) a značíme ji* $h(\mathbb{A})$*. Tedy:*

$$h(\mathbb{A}) = \dim\langle \mathbb{A}_{1:}, \ldots, \mathbb{A}_{m:} \rangle.$$

Poznámka: $h(\mathbb{A}) \leq m$ pro každou $\mathbb{A} \in T^{m,n}$.

Pozorování

Nechť $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in T^{m,n}$ *a* $\mathbb{A} \sim \mathbb{B}$*, potom*

$$\langle \mathbb{A}_{1:}, \ldots, \mathbb{A}_{m:} \rangle = \langle \mathbb{B}_{1:}, \ldots, \mathbb{B}_{m:} \rangle.$$

Určení hodnosti

Věta

Buďte $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in T^{m,n}$. *Je-li* $\mathbb{A} \sim \mathbb{B}$, *potom* $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{B})$.

Tvrzení

Nechť $\mathbb{A} \in T^{m,n}$ *je matice v horním stupňovitém tvaru s právě* k *nenulovými řádky. Pak* $h(\mathbb{A}) = k$.

Výpočty pomocí hodnosti

1. **Výpočet hodnosti matice:**
   Máme-li spočítat $h(\mathbb{A})$, převedeme řádkovými úpravami GEM matici $\mathbb{A}$ na matici $\mathbb{B}$ v HST. Počet nenulových řádků matice $\mathbb{B}$ je roven $h(\mathbb{A})$.
2. **Výpočet dimenze lineárního obalu vektorů:**
   Potřebujeme-li pro zadané vektory $x_1, \ldots x_m \in T^n$ spočítat $\dim\langle x_1, \ldots, x_m\rangle$, stačí vektory napsat do řádků matice a určit její hodnost.
3. **Ověření, zda vektor patří do lineárního obalu:**
   Jsou dány $y, x_1, \ldots, x_m \in T^n$. Potřebujeme-li rozhodnout, zda
   $$y \in \langle x_1, \ldots, x_m\rangle,$$
   ověříme, zda hodnost matice, jejíž řádky jsou vektory $x_1, \ldots, x_m$, je stejná jako hodnost matice, ve které je navíc přidán řádek y.
4. **Ověření rovnosti lineárních obalů:**
   Jsou dány $x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s \in T^n$. Potřebujeme-li ověřit, zda
   $$\langle x_1, \ldots, x_r\rangle = \langle y_1, \ldots, y_s\rangle,$$
   porovnáme hodnosti několika matic. Jedné s řádky x_i, druhé s řádky y_i a třetí se všemi řádky dohromady.

Varování

Mezi smrtelné hříchy patří výroky:

- *„Hodnost je počet nenulových řádků potom, co udělám GEM."*
- *„Hodnost je maximální počet LN řádků matice."*
- *„Vyřeším matici."*

Při ověřování $y \in \langle x_1, \ldots, x_m \rangle$ nepleťme dva různé přístupy!

- řádkový
- sloupcový

Hodnost transpozice a součinu

Věta

Nechť $\mathbb{A} \in T^{m,n}$. *Potom*

$$h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{A}^T).$$

Důsledek

Nechť $\mathbb{A} \in T^{m,n}$. *Potom* $h(\mathbb{A}) \leq \min\{m, n\}$.

Věta

Je-li $\mathbb{A} \in T^{m,n}$ *a* $\mathbb{B} \in T^{n,p}$, *potom*

$$h(\mathbb{A}\mathbb{B}) \leq \min\left\{h(\mathbb{A}), h(\mathbb{B})\right\}.$$

Hlavní body

Jednotková matice

V této části jen **čtvercové** matice.

Definujeme tzv. **Kroneckerovo delta**:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{pro } i = j, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Definice

Jednotkovou maticí *ntého řádu rozumíme čtvercovou matici* $\mathbb{E} \in T^{n,n}$ *splňující*

$$\mathbb{E}_{ij} = \delta_{ij}\,, \quad i,j \in \hat{n}\,.$$

Diagonální maticí *ntého řádu nazveme libovolnou čtvercovou matici* $\mathbb{A} \in T^{n,n}$ *splňující*

$$i \neq j \Rightarrow \mathbb{A}_{ij} = 0\,.$$

Diagonálou *čtvercové matice* $\mathbb{A} \in T^{n,n}$ *nazveme vektor* $(\mathbb{A}_{11}, \mathbb{A}_{22}, \ldots, \mathbb{A}_{nn})$.

Regulární a inverzní matice

Pozorování

Pokud $\mathbb{A}, \mathbb{E} \in T^{n,n}$*, pak* $\mathbb{A}\mathbb{E} = \mathbb{E}\mathbb{A} = \mathbb{A}$*.*

Definice

Buď $\mathbb{A} \in T^{n,n}$*. Existuje-li matice* $\mathbb{B} \in T^{n,n}$ *taková, že platí*

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{A} = \mathbb{E},$$

nazýváme matici $\mathbb{A}$ ***regulární*** *a* $\mathbb{B}$ ***inverzní maticí*** *k matici* $\mathbb{A}$*. Značíme* $\mathbb{B} = \mathbb{A}^{-1}$*.*
Pokud $\mathbb{A}$ *není regulární, nazýváme matici* $\mathbb{A}$ ***singulární****.*

O inverzních maticích

Věta

Je-li $\mathbb{A} \in T^{n,n}$ *regulární, potom je inverzní matice k* $\mathbb{A}$ *určena jednoznačně.*

Věta

Nechť $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in T^{n,n}$ *jsou regulární, potom* $\mathbb{A}\mathbb{B}$ *je také regulární a platí*

$$(\mathbb{A}\mathbb{B})^{-1} = \mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}^{-1}.$$

Věta

Nechť $\mathbb{A} \in T^{n,n}$ *je regulární, potom* $\mathbb{A}^T$ *je také regulární a platí*

$$(\mathbb{A}^T)^{-1} = (\mathbb{A}^{-1})^T.$$

Maticová interpretace GEM

Poznámka: pozor na zjednodušené značení $\mathbb{A}$, často pracujeme s $(\mathbb{A}|\mathbb{b})$.

Řádkové úpravy Gaussovy eliminační metody v matici $\mathbb{A} \in T^{m,n}$ lze realizovat tak, že $\mathbb{A}$ vynásobíme **zleva** vhodnou regulární maticí $\mathbb{P} \in T^{m,m}$.:

Maticově (G1)

1. Prohození $i$tého a $j$tého řádku: Matici $\mathbb{P}(i,j) \in T^{m,m}$ definujeme:

$$[\mathbb{P}(i,j)]_{k\ell} := \begin{cases} 1, & \text{pokud } (\, k = \ell \notin \{i,j\}\,) \vee (k = i \wedge \ell = j) \vee (k = j \wedge \ell = i) \\ 0, & \text{jinak,} \end{cases}$$

tedy $\mathbb{P}(i,j)$ je matice vzniklá z jednotkové matice $\mathbb{E} \in T^{m,m}$ prohozením $i$tého a $j$tého řádku.

- Matice $\mathbb{P}(i,j)\mathbb{A}$ je matice $\mathbb{A}$ s prohozeným $i$tým a $j$tým řádkem. (Ověřte!)
- Matice $\mathbb{P}(i,j)$ je regulární a platí

$$\big(\mathbb{P}(i,j)\big)^{-1} = \mathbb{P}(i,j).$$

2. Vynásobení *i*tého řádku číslem $\alpha \neq 0$: Matici $\mathbb{P}_i(\alpha) \in T^{m,m}$ definujeme:

$$[\mathbb{P}_i(\alpha)]_{k\ell} := \begin{cases} \alpha, & \text{pokud } k = \ell = i \\ 1, & \text{pokud } k = \ell \neq i \\ 0, & \text{jinak,} \end{cases}$$

tedy $\mathbb{P}_i(\alpha)$ je matice vzniklá z jednotkové matice $\mathbb{E} \in T^{m,m}$ nahrazením čísla 1 na *i*té pozici na diagonále číslem α.

- Matice $\mathbb{P}_i(\alpha)\mathbb{A}$ je matice $\mathbb{A}$ s *i*tým řádkem vynásobeným číslem α.
- Matice $\mathbb{P}_i(\alpha)$ je regulární (pro $\alpha \neq 0$) a platí

$$\big(\mathbb{P}_i(\alpha)\big)^{-1} = \mathbb{P}_i(\alpha^{-1}).$$

Maticově (G3)

3. Přičtení αnásobku $i$tého řádku k $j$tému řádku: Matici $\mathbb{Q}_{i,j}(\alpha) \in T^{m,m}$ pro $i \neq j$ definujeme takto:

$$[\mathbb{Q}_{i,j}(\alpha)]_{k\ell} := \begin{cases} \alpha & \text{pokud } k = j \wedge \ell = i \\ 1, & \text{pokud } k = \ell \\ 0, & \text{jinak,} \end{cases}$$

tedy $\mathbb{Q}_{i,j}(\alpha)$ je matice vzniklá z jednotkové matice $\mathbb{E} \in T^{m,m}$ přidáním čísla $\alpha \in T$ na (j, i)-tou pozici.

- Matice $\mathbb{Q}_{i,j}(\alpha)\mathbb{A}$ je matice $\mathbb{A}$ po přičtení αnásobku $i$tého řádku k j-tému. Tedy
$$\left(\mathbb{Q}_{i,j}(\alpha)\mathbb{A}\right)_{j:} = \mathbb{A}_{j:} + \alpha\mathbb{A}_{i:}\,.$$
- Matice $\mathbb{Q}_{i,j}(\alpha)$ je regulární a platí
$$\left(\mathbb{Q}_{i,j}(\alpha)\right)^{-1} = \mathbb{Q}_{i,j}(-\alpha).$$

GEM je jen násobení regulární maticí

Důsledek

Nechť $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in T^{m,n}$ *a* $\mathbb{A} \sim \mathbb{B}$*. Potom* $\exists \mathbb{P} \in T^{m,m}$ *regulární taková, že* $\mathbb{B} = \mathbb{P}\mathbb{A}$*.*

Co analogické sloupcové úpravy?

- Lze je realizovat obdobně.
- Užitečnost a smysl?

Vlastnosti ekvivalentní regularitě matice

Věta

Buď $\mathbb{A} \in T^{n,n}$*. Následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

1. $\mathbb{A}$ *je regulární.*
2. *Soubor řádků matice* $\mathbb{A}$ *je LN.*
3. $h(\mathbb{A}) = n$.
4. $\mathbb{A} \sim \mathbb{E}$.

Poznámka

Díky vztahu $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{A}^T)$ *platí také ekvivalence:*

$$\mathbb{A} \text{ regulární } \Leftrightarrow \text{ soubor sloupců matice } \mathbb{A} \text{ je LN.}$$

Inverze matice pomocí GEM

Algoritmus (Ověření regularity a nalezení inverzní matice)

Nechť $\mathbb{A} \in T^{n,n}$*. Ověřte, zda je matice regulární a pokud ano, nalezněte k ní matici inverzní* $\mathbb{A}^{-1}$*.*

1. *Hledáme matici* $\mathbb{A}^{-1}$ *s vlastností* $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{A} = \mathbb{A}\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{E}$*.*
2. *Doplněním zadané matice o jednotkovou matici stejného rozměru sestavme dvoublokovou rozšířenou matici* $(\mathbb{A} \mid \mathbb{E}) \in T^{n,2n}$*.*
3. *Na celou* $(\mathbb{A} \mid \mathbb{E})$ *používáme řádkové úpravy GEM, pro libovolnou posloupnost řádkových úprav* $\mathbb{P}$ *pak platí*

$$(\mathbb{A} \mid \mathbb{E}) \sim (\mathbb{P}\mathbb{A} \mid \mathbb{P}\mathbb{E}) = (\mathbb{P}\mathbb{A} \mid \mathbb{P}) .$$

   $\mathbb{A}$ *je možné převést na jednotkovou matici právě tehdy, když je* $\mathbb{A}$ *regulární.*

4. *Je-li* $\mathbb{A}$ *regulární, pak pro úpravy* $\mathbb{P}$ *vedoucí k převedení levého bloku matice* $(\mathbb{A} \mid \mathbb{E})$ *na jednotkovou matici platí* $\mathbb{P} = \mathbb{A}^{-1}$*, tedy*

$$(\mathbb{A} \mid \mathbb{E}) \sim (\mathbb{E} \mid \mathbb{A}^{-1}) .$$

Korespondence GEM a násobení regulární maticí

Už víme, že

$$\mathbb{A} \sim \mathbb{B} \quad \Rightarrow \exists \mathbb{P} \text{ regulární}, \mathbb{B} = \mathbb{P}\mathbb{A}\,.$$

Tato souvislost platí oběma směry, tedy násobení jakoukoli regulární maticí „provádí kroky GEM".

Věta

Nechť $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in T^{m,n}$. *Existuje-li* $\mathbb{P} \in T^{m,m}$ *regulární taková, že* $\mathbb{B} = \mathbb{P}\mathbb{A}$, *potom* $\mathbb{A} \sim \mathbb{B}$.

Důsledek

Násobením regulární maticí se hodnost nezmění. Tedy je-li $\mathbb{A} \in T^{m,n}$ *libovolná a* $\mathbb{P} \in T^{m,m}$ *regulární, platí*

$$h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{P}\mathbb{A}).$$

Jedna inverze stačí

Věta

Buď $\mathbb{A} \in T^{n,n}$. *Existuje-li* $\mathbb{B} \in T^{n,n}$ *taková, že platí* $\mathbb{AB} = \mathbb{E}$ *nebo* $\mathbb{BA} = \mathbb{E}$, *potom je* $\mathbb{A}$ *regulární a* $\mathbb{B} = \mathbb{A}^{-1}$.

Hlavní body

Řešíme SLR

Repete:

- řešíme soustavy $\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$ (zapisujeme $(\mathbb{A} \mid \mathbb{b})$), kde
- $\mathbb{A} = (\alpha_{ij})_{i \in \hat{m}, j \in \hat{n}} \in T^{m,n}$ je matice soustavy,
- $\mathbb{b} = (\beta_1 \ \cdots \ \beta_m)^T \in T^{m,1}$ je (sloupcový) vektor pravých stran,
- $\mathbb{x} = (x_1 \ \cdots \ x_n)^T \in T^{n,1}$ je (sloupcový) vektor neznámých,
- S je množina všech řešení soustavy $\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$,
- S_0 je množina všech řešení přidružené homogenní soustavy $\mathbb{A}\mathbb{x} = \theta$ (kde $\theta = (0 \ \cdots \ 0)^T$).

Pozorování

Množina S_0 všech řešení homogenní soustavy $\mathbb{A}\mathbb{x} = \theta$ je podprostor ve VP $T^{n,1}$.

(poznámka: vždy platí $S_0 \neq \emptyset$!)

Frobeniova věta

Poznámka

- autorství (Capelli, Fontené, Frobenius, Kronecker, Rouché)
- rozsah
- důkaz: nyní pouze část 1, část 2 později pomocí lin.zobrazení

Věta (Frobeniova)

Nechť $\mathbb{A} \in T^{m,n}$.

1. *Soustava* $\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$ *je řešitelná, tj.* $S \neq \emptyset$, *právě tehdy, když*

$$h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{A} \mid \mathbb{b}).$$

2. *Je-li* $h(\mathbb{A}) = h$, *pak množina řešení soustavy* $\mathbb{A}\mathbb{x} = \theta$ *je podprostor dimenze* $n - h$, *tedy existuje LN soubor vektorů* $(\mathbb{z}_1, \ldots, \mathbb{z}_{n-h})$ *v* $T^{n,1}$ *takový, že*

$$S_0 = \begin{cases} \{\theta\}, & \text{pokud } n = h, \\ \langle \mathbb{z}_1, \ldots, \mathbb{z}_{n-h} \rangle, & \text{pokud } h < n. \end{cases}$$

Je-li navíc $h(\mathbb{A} \mid \mathbb{b}) = h$, *pak* $S = \tilde{\mathbb{x}} + S_0$, *kde* $\tilde{\mathbb{x}}$ *je tzv.* ***partikulární řešení****:* $\mathbb{A}\tilde{\mathbb{x}} = \mathbb{b}$.

Hlavní body

SLR s regulární maticí

Poznámka

Jak plyne z Frobeniovy věty, je-li matice soustavy $\mathbb{A}$ *čtvercová a regulární, existuje pro jakýkoli vektor pravých stran* $\mathbb{b}$ *právě jedno řešení soustavy* $\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$*.*

Horní stupňovitý tvar ještě jednou

Pro ilustraci:

- $(\mathbb{A} \mid \mathbb{b})$ typu $m \times (n+1)$, řešitelná,
- v HST právě h nenulových řádků,
- s indexy hlavních sloupců značenými $1 = j_1 < j_2 < \cdots < j_h$.

$$\left(\begin{array}{cccccccccccc|c}
\underbrace{\alpha_{1j_1}}_{\neq 0} & * & * & * & * & * & * & \cdots & * & * & * & * & \beta_1 \\
0 & 0 & 0 & \underbrace{\alpha_{2j_2}}_{\neq 0} & * & * & * & \cdots & * & * & * & * & \beta_2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underbrace{\alpha_{3j_3}}_{\neq 0} & * & \cdots & * & * & * & * & \beta_3 \\
\vdots & & \vdots & & & & & & \vdots & & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & & & & \cdots & 0 & \underbrace{\alpha_{hj_h}}_{\neq 0} & * & * & \beta_h \\
0 & 0 & 0 & \cdots & & & & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & & & & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)$$

Homogenní SLR

Každý nenulový řádek soustavy v HST umožňuje spočítat jednu neznámou (odspoda nahoru). Tyto proměnné odpovídají hlavním sloupcům matice a nazýváme je **vázané proměnné**. Ostatní proměnné nazýváme **volné proměnné**. Co platí:

- Dosadíme-li za všechny volné proměnné konkrétní hodnoty, vázané proměnné lze jednoznačně dopočítat.
- Volných proměnných je přesně $n - h = n - h(\mathbb{A})$, což je podle Frobeniovy věty rovno dimenzi hledaného S_0.
- Pokud by nás z každého řešení zajímaly pouze volné proměnné, označme je např. $(t_1, t_2, \ldots, t_{n-h}) \in T^{n-h}$, řešením soustavy by bylo celé T^{n-h}.
- Lineární kombinace řešení homogenní soustavy je také řešením.
- Zvolíme-li jakoukoli bázi podprostoru T^{n-h} a pro každý bazický vektor reprezentující nějakou volbu volných proměnných dopočítáme vázané proměnné, dostaneme dle předchozích bodů bázi S_0.

Homogenní SLR, algoritmus

Algoritmus (Řešení homogenní SLR)

Řešíme soustavu $\mathbb{A}\mathbb{x} = \theta$ *s rozšířenou maticí* $(A \mid \theta)$, *kde* $\mathbb{A} \in T^{m,n}$ *je v HST (na něj lze vždy převést pomocí GEM).*

1. *Pokud tím neporušíme HST, můžeme prohodit pořadí sloupců v matici* $\mathbb{A}$ *(stejně prohodíme i příslušné proměnné).*
2. *Za vázané proměnné označíme proměnné příslušející hlavním sloupcům matice. Zbývající volné proměnné označme např.* $(t_1, \ldots, t_{n-h})$.
3. *Zvolíme libovolnou bázi prostoru* T^{n-h}, *každá volba volných proměnných je tedy v jejím lineárním obalu.*
4. *Pro každý zvolený bazický vektor* $(t_1, \ldots, t_{n-h}) \in T^{n-h}$ *reprezentující volbu volných proměnných dopočítáme ze soustavy vázané proměnné.*
5. *Dostáváme LN soubor* $n - h$ *vektorů, který generuje* S_0.

Příklad na homogenní SLR

Příklad

Řešme homogenní soustavu s maticí:

$$\mathbb{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 5 & 0 \\ 2 & 8 & 5 & 3 & 7 & 0 \\ 3 & 9 & 6 & 2 & 12 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Vázané proměnné jsou tedy x_1, x_2, x_4*, volné proměnné jsou* x_3, x_5.

- *Při volbě* $(x_3, x_5) = (1, 0)$ *dopočítáme:* $x_4 = 0$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_1 = -\frac{1}{2}$.
- *Při volbě* $(x_3, x_5) = (0, 1)$ *dopočítáme:* $x_4 = -\frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{7}{4}$, $x_1 = -\frac{33}{4}$.
- *Dostáváme LN soubor dvou řešení:* $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0, 0)$ *a* $(-\frac{33}{4}, \frac{7}{4}, 0, -\frac{3}{2}, 1)$ *a tedy platí*

$$S_0 = \langle (-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, 1, 0, 0), (-\tfrac{33}{4}, \tfrac{7}{4}, 0, -\tfrac{3}{2}, 1) \rangle .$$

Nemusíme ale pro volné proměnné vždy volit standardní bázi! (zlomky, estetika, jednoduchost,. . .)

Řešení homogenní SLR ve speciálním tvaru

Věta

Nechť $\mathbb{A} \in T^{m,n}$ *a*

$$\mathbb{A} \sim \begin{pmatrix} \mathbb{E}_k & \mathbb{B} \\ \Theta & \Theta \end{pmatrix},$$

kde $\mathbb{E}_k \in T^{k,k}$ *je jednotková matice,* $\mathbb{B} \in T^{k,n-k}$ *a symboly* Θ *značí nulové matice příslušných rozměrů. Potom řádky matice*

$$(-\mathbb{B}^T \ \ \mathbb{E}_{n-k}) \in T^{n-k,n},$$

kde $\mathbb{E}_{n-k} \in T^{n-k,n-k}$ *je jednotková matice, tvoří bázi prostoru řešení* S_0*.*

Příklad na speciální homogenní SLR

Příklad

Ještě jednou vyřešíme soustavu pro neznámé $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$*:*

$$\mathbb{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 5 & 0 \\ 2 & 8 & 5 & 3 & 7 & 0 \\ 3 & 9 & 6 & 2 & 12 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 0 & 33/4 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & -7/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Prohozením třetího a čtvrtého sloupce dostaneme soustavu ve speciálním tvaru, kde neznámé jsou $(x_1, x_2, x_4, x_3, x_5)$*:*

$$(\mathbb{E}\ \mathbb{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 33/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -7/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

Řešení obecné SLR, algoritmus

Algoritmus (Řešení SLR)

Řešíme soustavu $\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$ s rozšířenou maticí $(A \mid \mathbb{b})$, kde $\mathbb{A} \in T^{m,n}$ je v HST (na něj lze vždy převést pomocí GEM).

1. *Pokud tím neporušíme HST, můžeme prohodit pořadí sloupců v matici $\mathbb{A}$ (stejně prohodíme i příslušné proměnné).*
2. *Pokud $h(\mathbb{A}) < h(\mathbb{A} \mid \mathbb{b})$, řešení neexistuje. Jinak postupujeme dále.*
3. *Za vázané proměnné označíme proměnné příslušející hlavním sloupcům matice. Zbývající volné proměnné označíme $(t_1, \dots, t_{n-h})$.*
4. *Pro nalezení $\tilde{\mathbb{x}}$ zvolme za $(t_1, \dots, t_{n-h})$ libovolně a ze soustavy $(\mathbb{A} \mid \mathbb{b})$ dopočítejme vázané proměnné.*
5. *Pro nalezení S_0 zvolíme libovolnou bázi T^{n-h} (různé volby volných proměnných).* ***Vynulujeme*** *pravou stranu soustavy.*
6. *Pro každý bazický vektor $(t_1, \dots, t_{n-h}) \in T^{n-h}$ reprezentující volbu volných proměnných dopočítáme z $(\mathbb{A} \mid \theta)$ vázané proměnné a dostáváme bázi S_0.*
7. *Řešením je $S = \tilde{\mathbb{x}} + S_0$.*

Příklad na nehomogenní SLR

Příklad

Známou soustavu doplníme o pravou stranu.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 5 & -2 \\ 2 & 8 & 5 & 3 & 7 & 13 \\ 3 & 9 & 6 & 2 & 12 & 11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 0 & 33/4 & -3 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & -7/4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

a vyřešíme...

Nejedinečnost zápisu řešení SLR

Různí řešitelé $\rightarrow$ různá řešení:

- odlišná posloupnost elementárních kroků GEM, jiný HST,
- jiná volba volných proměnných (pořadí sloupců),
- jiná volba bazických řešení.

Jak poznat rovnost dvou množin tvaru $\mathbb{x} + S_0$? Přes hodnost matic a vztah mezi rovností lineárních obalů a jejich dimenzemi!

Lemma: Je-li $P \subset\subset V$ a $x \in P$, potom $x + P = P$.

Pozorování

Nechť $u, v, y_1, \ldots, y_k, z_1, \ldots, z_k \in T^n$, kde soubory $(y_1, \ldots, y_k)$ a $(z_1, \ldots, z_k)$ jsou LN. Rovnost

$$u + \langle y_1, \ldots, y_k \rangle = v + \langle z_1, \ldots, z_k \rangle$$

platí právě tehdy, když matice, jejíž řádky tvoří vektory $y_1, \ldots, y_k, z_1, \ldots, z_k, u - v$, má hodnost rovnu k.

Nejedinečnost zápisu řešení SLR, příklad

Příklad

Při řešení soustavy v $\mathbb{R}^4$ *s maticí*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

lze různými postupy dospět například k řešením ve tvaru

$$\begin{aligned} S_1 &= (\tfrac{1}{5}, \tfrac{2}{5}, 0, 0) + \langle (2, -1, 5, 0), (1, 2, 0, 5) \rangle, \\ S_2 &= (0, 0, 0, -1) + \langle (0, -5, 5, -10), (3, 1, 5, 5) \rangle. \end{aligned}$$

Ověříme rovnost množin, nikoli správnost řešení!

Hlavní body

Dvě interpretace SLR

1. Vztah $\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$ lze přepsat

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \mathbb{A}_{:j} = \mathbb{b}\,,$$

tedy platí, že složky řešení $x_1, \ldots, x_n$ jsou koeficienty v takové lineární kombinaci **sloupců** matice $\mathbb{A}$, která je rovna vektoru pravé strany $\mathbb{b}$.

2. Každý **řádek** matice soustavy představuje jednu lineární rovnici. Množina řešení každé takové rovnice

$$\alpha_{i1}x_1 + \cdots + \alpha_{in}x_n = \beta_i$$

(pokud $\exists j \in \hat{n} : \alpha_{ij} \neq 0$) je množina bodů v T^n, kterou si lze geometricky představit. V případě $\mathbb{R}^2$ je to přímka, v případě $\mathbb{R}^3$ rovina, pro obecné T^n brzy zavedeme pojem *nadrovina*). Jelikož v soustavě musí všechny rovnice platit současně, hledáme při jejím řešení **průnik** jednotlivých nadrovin.

Definice lineární variety

Definice

Neprázdnou množinu $W \subseteq V$ *nazveme **lineární varietou** (případně pouze **varietou**), pokud existují* $a \in V$ *a* $P \subset\subset V$ *takové, že*

$$W = a + P.$$

Podprostor P *nazýváme **zaměřením** variety* W *a značíme ho* $Z(W)$*.*

- *Číslo* $\dim Z(W)$ *nazýváme **dimenzí** variety* W*,*
- *je-li* $\dim V = n \in \mathbb{N}$*, pak číslo* $n - \dim Z(W)$ *nazýváme **kodimenzí** variety* W*,*
- *každý nenulový vektor z* $Z(W)$ *nazýváme **směrovým vektorem** variety* W*,*
- *každý vektor* a *takový, že* $W = a + Z(W)$*, nazýváme **vektorem posunutí** variety* W*.*

Poznámky

Věta

Buď W lineární varieta.

1. *Každý její vektor je současně vektorem posunutí,* *tj.* $\forall a \in W: \ W = a + Z(W)$.
2. *Zaměření variety $Z(W)$ je určeno jednoznačně.*
3. *Máme-li $a, b \in V$ a $P, Q \subset\subset V$, potom pro dvě variety platí $a + P = b + Q$ právě tehdy, když $P = Q$ a zároveň $b - a \in P$.*

Definice

Nechť $V = T^n$ je libovolný.

- *Varietu o dimenzi 0 nazýváme* ***bod****.*
- *Varietu o dimenzi 1 nazýváme* ***přímka****.*
- *Varietu o dimenzi 2 nazýváme* ***rovina****.*
- *Varietu o kodimenzi 1 nazýváme* ***nadrovina****.*

Příklady variet nad $\mathbb{R}$

Příklad

- *Množina* $W_1 = \{(x,y) \mid y = 2x+1\}$ *je přímka v* $\mathbb{R}^2$*. Můžeme volit*

  $$a = (0,1) \quad a \quad Z(W_1) = \langle (1,2) \rangle ,$$

  potom skutečně platí

  $$a + Z(W_1) = (0,1) + \langle (1,2) \rangle = \{(t, 1+2t) \mid t \in \mathbb{R}\} = W_1.$$

- *Podobně, množina* $W_2 = \{(x,y,z) \mid x+y+z = 1\}$ *je rovina v* $\mathbb{R}^3$*. Můžeme volit*

  $$a = (1,0,0) \quad a \quad Z(W_2) = \langle (-1,1,0), (-1,0,1) \rangle ,$$

  pak platí

  $$a + Z(W_2) = (1,0,0) + \langle (-1,1,0), (-1,0,1) \rangle = \{(1-s-t, s, t) \mid s,t \in \mathbb{R}\} = W_2.$$

Příklady variet nad konečnými tělesy

Příklad

Poněkud méně intuitivní význam pojmů přímka či rovina dostaneme v případě VP nad konečnými tělesy:

- *Množina*

  $$W_3 = (1,0,0,0) + \langle (1,1,1,1) \rangle = \{(1+t,t,t,t) \mid t \in T\}$$

  je přímka v každém T^4.

- *Množina*

  $$W_4 = (1,1,0,0) + \langle (0,1,1,0),(1,0,0,1) \rangle = \{(1+t,1+s,s,t) \mid s,t \in T\}$$

  je rovina v každém T^4.

- *V případě $T = \mathbb{Z}_p$ lze všechny prvky vyjmenovat...*

Lineární varieta je řešení SLR a obráceně!

- Z Frobeniovy věty i předchozích poznatků víme, že každá řešitelná SLR určuje lineární varietu.
- Tato korespondence platí i druhým směrem – tedy ke každé lineární varietě existuje nějaká SLR, kterou právě všechny vektory z této lineární variety řeší.

Věta

Nechť $M \subseteq V = T^n$ je neprázdná. Pak M je lineární varietou právě tehdy, když existuje soustava lineárních rovnic $\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$, jejíž množinou řešení je M. Navíc platí

$$h(\mathbb{A}) = n - \dim M \, .$$

Důsledek

Množina $M \subseteq V = T^n$ je nadrovinou právě když je množinou řešení jedné lineární rovnice

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = \beta \, ,$$

kde alespoň jeden z koeficientů $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ je nenulový.

Parametrické a neparametrické rovnice variety

Definice

Nechť $W \subseteq V = T^n$ je lineární varieta, označme bázi $Z(W)$ jako $(a_1, \ldots, a_k)$.

- *Vztah $W = a + \langle a_1, \ldots, a_k \rangle$ lze vyjádřit jako*

  $$u \in W \Leftrightarrow \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in T : \; u = a + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i \,.$$

  Parametrickými rovnicemi *variety W rozumíme rovnici*

  $$u = a + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i$$

  rozepsanou po složkách, tedy pro $u = (x_1, \ldots, x_n) \in T^n$.

- ***Neparametrickými rovnicemi*** *variety W rozumíme po složkách (pro $u = (x_1, \ldots, x_n) \in T^n$) rozepsanou soustavu lineárních rovnic*

  $$\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$$

Příklady parametrických rovnic

- Je-li W přímka, lze ji charakterizovat rovnicí

$$u = a + \alpha b,$$

kde $a \in W$ a zaměření W je $\langle b \rangle$.
Rozepíšeme-li vektory výše po složkách, $u = (x, y, z)$, $a = (a_1, a_2, a_3)$ a $b = (b_1, b_2, b_3)$, dostaneme parametrické rovnice přímky,

$$x = a_1 + \alpha b_1\,, \qquad y = a_2 + \alpha b_2\,, \qquad z = a_3 + \alpha b_3\,,$$

kde $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Je-li W rovina, lze ji charakterizovat rovnicí

$$u = a + \alpha b + \beta c,$$

kde $a \in W$ a zaměření W je $\langle b, c \rangle$.
Rozepíšeme-li vektory výše po složkách, $u = (x, y, z)$, $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$ a $c = (c_1, c_2, c_3)$, dostaneme parametrické rovnice roviny,

$$x = a_1 + \alpha b_1 + \beta c_1\,, \qquad y = a_2 + \alpha b_2 + \beta c_2\,, \qquad z = a_3 + \alpha b_3 + \beta c_3\,,$$

kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Převody: parametrické $\leftrightarrow$ neparametrické rovnice

- Převod **z neparametrických rovnic na parametrické** nemusíme nijak rozebírat, stačí vyřešit zadanou soustavu $\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$ a množinu řešení zapsat dle definice.
- Druhý směr převodu, **z parametrických rovnic na neparametrické**, se řídí postupem důkazu předchozí věty.

Algoritmus (Převod parametrických rovnic variety na neparametrické)

Máme zadanou lineární varietu $W = a + P$ o dimenzi $\dim W = k$. *Hledáme SLR* $\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$ *s maticí* $(\mathbb{A} \mid \mathbb{b})$*, jejíž množinou všech řešení je právě W.*

1. *Je-li $k = 0$, pak hledanou soustavou je $(\mathbb{E} \mid \mathbb{a})$, kde $\mathbb{a}$ je vektor a zapsaný do sloupce. Je-li $k = n$, hledanou soustavou je $(\Theta \mid \theta)$.*
2. *Pro $k \in \widehat{n-1}$ označme bázi P jako $(y_1, \ldots, y_k)$ a vyřešme homogenní soustavu $(\widetilde{\mathbb{Y}} \mid \theta)$ kde matice $\widetilde{\mathbb{Y}}$ obsahuje ve svých řádcích vektory $y_1, \ldots, y_k$.*
3. *Matici $\mathbb{A}$ po řádcích sestavíme z vektorů libovolné báze řešení $(\widetilde{\mathbb{Y}} \mid \theta)$.*
4. *Vektor $\mathbb{b}$ získáme vynásobením $\mathbb{A}\mathbb{a} = \mathbb{b}$.*

Příklady

Příklad

Nalezneme parametrické rovnice variety W v $\mathbb{R}^4$ zadané rovnicemi

$$\begin{aligned} x + y - z + u &= 1 \\ 2x \qquad\qquad + u &= 2 \end{aligned} .$$

Příklad

Nalezneme neparametrické rovnice roviny v $\mathbb{R}^4$, která prochází body $(1, 2, 1, 0)$, $(2, 3, 2, 1)$ a $(3, 2, 4, 0)$.