Lineární algebra : Lineární zobrazení

(6. přednáška)

Daniel Dombek, Luděk Kleprlík,
Karel Klouda

daniel.dombek@fit.cvut.cz, ludek.kleprlik@fit.cvut.cz,
karel.klouda@fit.cvut.cz

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií

České vysoké učení technické v Praze

LS 2021/2022

vytvořeno: 15. února 2022, 13:47

Hlavní body

Úvod

- zobrazení obecnější (místo na $\mathbb{R}$ mezi VP)
- ovšem pouze *lineární* (skvělá vlastnost!)
- nejen počítačová grafika, transformace obrazu, vykreslování
- rovnice typu $Ax = b$

Opakování pojmů 1

- Jsou-li X a Y libovolné množiny, množinu uspořádaných dvojic $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$ nazýváme jejich **kartézským součinem**.
- **Zobrazením z X do Y** nazveme libovolnou podmnožinu $f \subseteq X \times Y$ takovou, že pro každé $x \in X$ existuje **právě jedno** $y \in Y$ s vlastností $(x, y) \in f$.
- Obvyklý zápis $f : X \to Y$ a $(x, y) \in f \;\Leftrightarrow\; f(x) = y$.
- Platí-li $f(x) = y$, řekneme, že x je **vzorem** y a y je **obrazem** x při f.
- Obraz/vzor množiny, zkrácený zápis pro jednoprvkové množiny.

Opakování pojmů 2

- $f : X \to Y$ je **injektivní** (prosté), pokud $\forall x, y \in X : (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$.
- $f : X \to Y$ je **surjektivní** (na), pokud $\forall y \in Y\ \exists x \in X : f(x) = y$, tedy pokud $f(X) = Y$.
- $f : X \to Y$ je **bijektivní** (vzájemně jednoznačné), pokud je současně injektivní i surjektivní.
- Pro $f : Y \to Z$ a $g : X \to Y$ definujeme **složené** zobrazení $f \circ g : X \to Z$ předpisem $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ pro všechna $x \in X$.
- Označme **identické** zobrazení na množině M jako id_M. Nechť $f : X \to Y$, pak zobrazení $g : Y \to X$ nazveme **inverzním zobrazením** k f, pokud platí $f \circ g = id_Y$ a $g \circ f = id_X$.

Definice lineárního zobrazení

Definice

*Buďte P a Q dva vektorové prostory nad stejným tělesem T, nechť $A : P \to Q$. Zobrazení A nazveme **lineární** právě když současně platí:*

1. *(aditivita):* $\forall x, y \in P : A(x + y) = Ax + Ay$,
2. *(homogenita):* $\forall \alpha \in T, \forall x \in P : A(\alpha x) = \alpha Ax$.

Množinu všech lineárních zobrazení z P do Q značíme $\mathcal{L}(P, Q)$. Lineární zobrazení

*prostoru V do V nazýváme **lineární operátor** (transformace) na V. Množinu všech lineárních operátorů na V značíme krátce $\mathcal{L}(V)$. Lineární zobrazení prostoru V do tělesa T nazýváme **lineární funkcionál** na V.*

Poznámka: význam početních operací

Identický operátor, izomorfismus, poznámky

Definice

Buď V vektorový prostor. Zobrazení $E : V \to V$ definované vztahem

$$\forall x \in V : Ex = x$$

je lineární operátor a nazýváme ho ***identický operátor na*** *V.*
Izomorfismem *nazveme jakékoli zobrazení $A \in \mathcal{L}(P, Q)$, které je bijekce.*

Poznámky:

- $f(x) \to Ax$,
- $f \circ g \to AB$,
- význam $A^{-1}(a)$,
- co definiční obor a obor hodnot?

Příklady 1

- $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$Ax := \alpha x \text{ pro dané } \alpha \in \mathbb{R}\,,$$
- $B : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$,
$$B(x, y, z) := (x + 2y - z, x - 2y - 3z)\,,$$
- $C : T^\infty \to T^3$,
$$C(x_1, x_2, x_3, \dots) := (x_1, x_2, x_3)\,,$$
- $D : T^\infty \to T^\infty$,
$$D(x_1, x_2, x_3, \dots) := (x_2, x_3, x_4, \dots)\,,$$
- $E : \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2^n$,
$$E(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) := (x_2, x_3, \dots, x_n, x_1)\,,$$

Příklady 2

- $F : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$,
$$F(x_1, x_2, x_3, \dots) := (x_2 - x_1, x_3 - x_2, x_4 - x_3, \dots)\,,$$
- $G : \mathbb{R}^{2,2} \to \mathbb{R}^{2,2}$,
$$G\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a+b & a-b \\ c-d & c+d \end{pmatrix}\,,$$
- Ve vektorovém prostoru $\mathcal{P}$ všech polynomů s operacemi sčítání polynomů a násobení polynomu číslem je operace derivování lineárním zobrazením, tj. $H : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$,
$$Hp = p'\,,$$

Příklady 3

Příklad

Co zobrazení $I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definované předpisem* $Ix = x + 1$*?*

Příklad

Vzpomeňme na vektorový prostor $(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}, \oplus, \odot)$ *s operacemi definovanými*

$$x \oplus y := x \cdot y, \quad \alpha \odot x := x^\alpha.$$

Zobrazení $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *(zobrazuje z tohoto neobvyklého prostoru do standardního* $\mathbb{R}^1$*) s předpisem*

$$f(x) := \ln x$$

je lineární.

Nejdůležitější příklad

Věta

Nechť $\mathcal{X}$ *je báze prostoru* V_n *nad* T. *Přiřazení* $(\cdot)_{\mathcal{X}} : V_n \to T^n$ *definované předpisem* $z \mapsto (z)_{\mathcal{X}}$ *je lineární zobrazení.*
Souřadnicový funkcionál $x_i^{\#} : V_n \to T$ *je lineární funkcionál.*

Ekvivalentní tvrzení k linearitě

Pozorování

Buďte P a Q vektorové prostory nad T, nechť $A : P \to Q$. Následující tři tvrzení jsou ekvivalentní:

1. $A \in \mathcal{L}(P, Q)$.
2. $\forall \alpha \in T, \forall x, y \in P : A(\alpha x + y) = \alpha Ax + Ay$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in T, \forall x_1, \ldots, x_n \in P :$

$$A\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A x_i.$$

(důkaz jako cvičení. . .)

Další pozorování

Pozorování

1. *Je-li $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ bijekce, potom existuje inverzní zobrazení A^{-1} a to je také lineární, tj.*
$$A^{-1} \in \mathcal{L}(Q, P).$$
2. *Buďte $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ a $B \in \mathcal{L}(Q, R)$. Potom složené zobrazení BA definované předpisem $\forall x \in P : (BA)x = B(Ax)$ je také lineární, tj.*
$$BA \in \mathcal{L}(P, R)\,.$$

(důkaz jako cvičení. . .)

Důsledky linearity

Věta

Nechť $A \in \mathcal{L}(P, Q)$, kde P, Q jsou vektorové prostory nad T.

1. *Označíme-li nulové vektory v P a Q popořadě θ_P a θ_Q, platí*
$$A\theta_P = \theta_Q\,.$$
2. *Je-li $M \subseteq P$, potom*
$$A(\langle M\rangle) = \langle A(M)\rangle\,.$$
3. *Je-li $\tilde{P} \subset\subset P$, platí $A(\tilde{P}) \subset\subset Q$. Je-li $\tilde{Q} \subset\subset Q$, pak platí $A^{-1}(\tilde{Q}) \subset\subset P$.*
4. *Pro libovolné soubory $\mathcal{X} = (x_1, \ldots, x_n)$ v P a $\mathcal{Y} = (y_1, \ldots, y_n)$ v Q takové, že jeden je obrazem druhého (tj. $Ax_i = y_i$ pro každé $i \in \hat{n}$), platí: Je-li $\mathcal{X}$ LZ, pak i jeho obraz $\mathcal{Y}$ je LZ. Ekvivalentně: Pokud je $\mathcal{Y}$ LN, pak i jeho „předobraz“ $\mathcal{X}$ je LN.*

Obrazy na bázi stačí

Lineární zobrazení mezi VP lze definovat zadáním explicitního vzorečku (funkčního předpisu ve tvaru: „pro libovolné $x \in P$ platí $Ax = \dots$“). Co když ho neznáme? Stačí znát obrazy prvků báze!

Věta

Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad T. Nechť $(x_1, \dots, x_n)$ je báze P a nechť $(y_1, \dots, y_n)$ je libovolný soubor vektorů z Q. Potom existuje právě jedno lineární zobrazení $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ takové, že

$$\forall i \in \hat{n} : Ax_i = y_i.$$

Zobrazení určená obrazy báze

Příklad

Uvažujme zobrazení $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ *zadané obrazy prvků standardní báze,*

$$Ae_1 = (1, 0, 1, -1), \quad Ae_2 = (0, 0, 1, 1), \quad Ae_3 = (0, 3, -1, 0) .$$

Příklad

Uvažujme zobrazení $B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ *zadané obrazy prvků báze* $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3)$*, kde*

$$x_1 = (1, 0, 0), \quad x_2 = (1, 1, 0), \quad x_3 = (1, 1, 1) ,$$

$$Bx_1 = (1, 1, 1, 1), \quad Bx_2 = (0, 1, 0, -1), \quad Bx_3 = (0, 0, 1, -1) .$$

Abychom mohli odvodit předpis pro zobrazení B*, musíme nejdříve určit souřadnice obecného vektoru* $z = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ *v bázi* $\mathcal{X}$*. Pak už postupujeme podobně jako v předchozím příkladu.*

Reklama

Zdají se vám výpočty obrazů a hledání funkčních předpisů příliš komplikované? **Nezoufejte!!!** Budeme používat tzv. matice lineárního zobrazení a matice přechodu.

(vystačíme s násobením matic, hledáním inverzí a řešením SLR. . .)

Hlavní body

1. Lineární zobrazení, důsledky linearity
2. Hodnost, jádro a defekt zobrazení
3. Injektivita a surjektivita zobrazení
4. Matice lineárního zobrazení
5. Změna báze
6. Lineární zobrazení v rovině
7. O rovnici $Ax = b$

Definice

Nechť $A \in \mathcal{L}(P, Q)$. ***Hodností zobrazení*** A *rozumíme číslo*

$$h(A) := \dim A(P) \,.$$

Jádro zobrazení A *definujeme jako množinu*

$$\ker A := \{x \in P \mid Ax = \theta_Q\} \,,$$

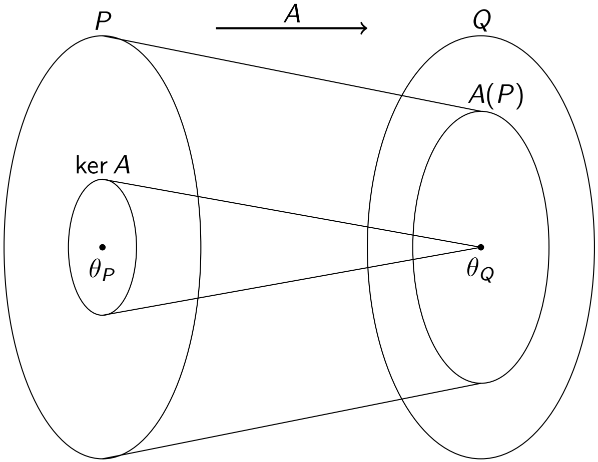
a jeho dimenzi nazýváme ***defektem zobrazení*** A*. Defekt značíme*

$$d(A) := \dim \ker A \,.$$

Poznámka:

- Zavedené pojmy opravdu dávají smysl, bavíme se o podprostorech.
- Hodnost zobrazení $\times$ hodnost matice !!!$\cdots$!!

Ilustrace



Obrázek: Ilustrace jádra a oboru hodnot pro $A \in \mathcal{L}(P, Q)$.

Příklady jader

Příklad

Odvoďme jádra lineárních zobrazení uvedených na začátku kapitoly. Ve všech případech je třeba vyřešit rovnici $Ax = \theta$, kde za x dosadíme obecný vektor v daném prostoru a za θ příslušný nulový vektor. To vždy povede na nějakou homogenní SLR!

- $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $Ax := \alpha x$ pro $\alpha \in \mathbb{R}$,
- $B : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$, $B(x, y, z) := (x + 2y - z, x - 2y - 3z)$,
- $C : T^\infty \to T^3$, $C(x_1, x_2, x_3, \dots) := (x_1, x_2, x_3)$.

Hlavní body

1. Lineární zobrazení, důsledky linearity
2. Hodnost, jádro a defekt zobrazení
3. Injektivita a surjektivita zobrazení
4. Matice lineárního zobrazení
5. Změna báze
6. Lineární zobrazení v rovině
7. O rovnici $Ax = b$

Kritérium „prostoty“

Injektivitu lze u lineárních zobrazení ověřit snadněji než u obecných zobrazení!

Věta

Nechť $A \in \mathcal{L}(P, Q)$. *Potom platí:*

$$A \text{ je prosté } \Leftrightarrow \ker A = \{\theta_P\}\,.$$

Zachovávání LN/LZ prostým lineárním zobrazením

Už víme, že lineární zobrazení částečně zachovávají lineární (ne)závislost. Je-li lineární zobrazení navíc injektivní, pak toto „zachovávání“ funguje i druhým směrem.

Věta

Nechť $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ je prosté. Potom

1. *je-li $(y_1, \ldots, y_n)$ LZ soubor vektorů z $A(P)$, je také soubor vzorů $(x_1, \ldots, x_n)$ LZ (tedy předpokládáme že $\forall i \in \hat{n} : y_i = Ax_i$).*
2. *je-li $(x_1, \ldots, x_n)$ LN soubor vektorů z P, je také $(Ax_1, \ldots, Ax_n)$ LN,*

Tedy...

Důsledek

Nechť $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ je prosté. Pokud soubory $(x_1, \ldots, x_n)$ v P a $(y_1, \ldots, y_n)$ v Q splňují $Ax_i = y_i$ pro každé $i \in \hat{n}$, pak platí

$$(x_1, \ldots, x_n) \text{ je LN } \Leftrightarrow (y_1, \ldots, y_n) \text{ je LN}.$$

Druhá věta o dimenzi

Věta (2. o dimenzi)

Nechť $A \in \mathcal{L}(P, Q)$. *Potom*

$$h(A) + d(A) = \dim P.$$

(Pro větší složitost uvádíme bez důkazu, nebude vyžadován.)

Injektivita a surjektivita pro konečnou dimenzi

Pozorování

Nechť $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ *a dimenze* $\dim P$ *a* $\dim Q$ *jsou konečné (to je potřeba jen někde...).*

- *A je injektivní* $\Leftrightarrow$ $h(A) = \dim P$,
- *A je surjektivní* $\Leftrightarrow$ $h(A) = \dim Q$.

Důsledek

Nechť $n \in \mathbb{N}$ *a* $A \in \mathcal{L}(P_n, Q_n)$. *Pak je A injektivní právě tehdy, když je surjektivní.*

Důkaz druhé části Frobeniovy věty

Věta (Druhá část Frobeniovy věty)

Buď $\mathbb{A} \in T^{m,n}$, *potom pro množinu* S_0 *všech řešení homogení soustavy* $\mathbb{A}\mathbb{x} = \theta$ *platí*

$$\dim S_0 = n - h(\mathbb{A})\,.$$

- Mezi lineárními zobrazeními a maticemi existuje veledůležitá souvislost!
- Tu budeme dále popisovat a rozvíjet.
- Dokazovaná část Frobeniovy věty pak přímo plyne z 2.věty o dimenzi ...

Hlavní body

Motivace

K danému $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ toužíme po sestrojení matice $\mathbb{A}$, která by splňovala pro každé $\mathbb{x} \in P$, „něco na způsob“ rovnice

$$A\mathbb{x} = \mathbb{A}\mathbb{x}\,.$$

Příklad

Rotace v $\mathbb{R}^2$ o úhel $\frac{\pi}{2}$ okolo počátku.

Čím začít? Potřebujeme:

- obraz obecného vektoru,
- nebo alespoň obrazy prvků nějaké báze.

Motivace k používání souřadnic

Nestačí pracovat jen ve standardních bázích T^n.

- Můžeme mít zadání v jiných bázích $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$.
- Uvažovaný VP nemusí být „jen“ T^n.

Příklad

Nechť $V = \mathbb{R}^{2,2}$, uvažujme lineární operátor $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2,2})$ definovaný předpisem

$$A \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} \\ x_{2,1} & x_{2,2} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_{1,1} + x_{1,2} & x_{1,2} \\ x_{2,1} & x_{2,2} \end{pmatrix}$$

pro každé $x_{1,1}, x_{1,2}, x_{2,1}, x_{2,2} \in \mathbb{R}$.

- *Existuje vůbec matice $\mathbb{A}$ splňující $A\mathbb{X} = \mathbb{A} \cdot \mathbb{X}$ pro každé $\mathbb{X} \in \mathbb{R}^{2,2}$?*
- *Zachrání nás obrazy bazických vektorů a příslušné souřadnice.*

Připomínka: souřadnice v bázi

Nechť $\mathcal{X} = (x_1, \ldots, x_n)$ je báze V_n a vektor $z \in V_n$ splňuje $z = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$.
Souřadnicemi vektoru $z \in V_n$ **v bázi** $\mathcal{X}$ pak rozumíme sloupec

$$(z)_{\mathcal{X}} := \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix},$$

na který lze v případě potřeby pohlížet i jako na obyčejnou *n*tici $(z)_{\mathcal{X}} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.
Jednotlivou *i*tou souřadnici z v bázi $\mathcal{X}$ přiřazuje tzv. *i*tý souřadnicový funkcionál v bázi $\mathcal{X}$,

$$x_i^{\#}(z) := \alpha_i.$$

Přiřazení souřadnic(e) je samo lineárním zobrazením.

Poslední kousky motivace

Náš požadavek na vytouženou *matici zobrazení* $\mathbb{A}$ lze tedy shrnout stručně jako:

$$\forall z \in P : \mathbb{A} \cdot (z)_{\mathcal{X}} = (Az)_{\mathcal{Y}} \,,$$

kde $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ jsou nějaké báze prostorů P, resp. Q.

Několik ingrediencí:

- souřadnice bazických vektorů v jejich vlastní bázi,
- násobení matice jednotkovým vektorem.

$\longrightarrow$ „Aby platilo to, co chceme, $\mathbb{A}$ musí mít ve svých sloupcích souřadnice obrazů bazických vektorů.“

Definice matice zobrazení

Definice

Nechť $A \in \mathcal{L}(P_m, Q_n)$, *buď* $\mathcal{X} = (x_1, \ldots, x_m)$ *a* $\mathcal{Y} = (y_1, \ldots, y_n)$ *báze* P_m, *respektive* Q_n. *Matici* ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} \in T^{n,m}$ *definovanou po sloupcích předpisem*

$$\forall j \in \hat{m} : ({}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}})_{:j} := (Ax_j)_{\mathcal{Y}},$$

nazveme ***maticí zobrazení*** A ***v bázích*** $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ *(případně „z báze* $\mathcal{X}$ *do báze* $\mathcal{Y}$*“).*

Matici lineárního operátoru ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{X}}$ *zkráceně označíme* ${}^{\mathcal{X}}A := {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{X}}$.

Příklad

Uvažujme zobrazení $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$ *definované předpisem*

$$A(z_1, z_2, z_3, z_4) = (4z_1 + z_2 + z_4, z_1 + z_2 + 2z_4, 2z_1 + 3z_2 + 2z_3)\,.$$

- *Odvoďte matici zobrazení* A *ve standardních bázích* ${}^{\mathcal{E}_4}A^{\mathcal{E}_3}$.
- *Dále odvoďte matici* ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$, *kde* $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $\mathcal{Y} = (y_1, y_2, y_3)$,

$$x_1 = (2, 1, 0, 0),\; x_2 = (0, 2, 1, 0),\; x_3 = (0, 0, 2, 1),\; x_4 = (1, 0, 0, 2)$$

a

$$y_1 = (1, 0, 1),\; y_2 = (1, 1, 0),\; y_3 = (1, 0, 2).$$

Stěžejní vlastnost matice zobrazení

Věta

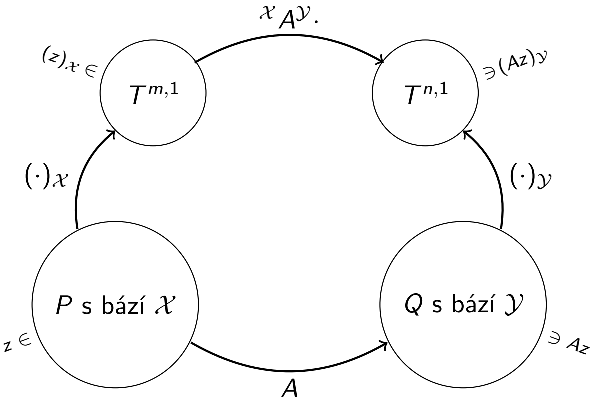
Nechť $A \in \mathcal{L}(P_m, Q_n)$, $\mathcal{X} = (x_1, \ldots, x_m)$ *je báze* P_m *a* $\mathcal{Y} = (y_1, \ldots, y_n)$ *je báze* Q_n.

1. *Pro každé* $z \in P_m$ *platí*
$$(Az)_{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} \cdot (z)_{\mathcal{X}} \,,$$
2. *Pro každé* $z \in P_m, w \in Q_n$ *platí, že* z *je vzorem* w *(tedy* $z \in A^{-1}w$*, respektive* $Az = w$*) právě tehdy, když*

$(z)_{\mathcal{X}}$ je řešením soustavy lineárních rovnic s rozšířenou maticí $\left({}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} \,\middle|\, (w)_{\mathcal{Y}} \right)$.

Poznámka:
hledání obrazu $\leftrightarrow$ násobení maticí, hledání vzoru $\leftrightarrow$ řešení SLR,
POZOR na mechanické postupy, hlídejme si báze a jejich pořadí!

Stěžejní vlastnost matice zobrazení - schéma



Obrázek: Schéma, jak „funguje“ matice lineárního zobrazení $A \in \mathcal{L}(P, Q)$.

Operace se zobrazeními, přiřazení matice je lineární

Věta

Nechť P, Q jsou VP nad T, pro libovolná zobrazení $A, B \in \mathcal{L}(P, Q)$ a $\alpha \in T$ definujeme

$$\forall x \in P : (A + B)x := Ax + Bx\,, \quad (\alpha A)x := \alpha \cdot Ax\,.$$

Potom platí

$$A + B \in \mathcal{L}(P, Q), \qquad \alpha A \in \mathcal{L}(P, Q)\,.$$

Věta

Nechť $A, B \in \mathcal{L}(P_m, Q_n)$, $\alpha \in T$. Potom platí

1. ${}^{\mathcal{X}}(A + B)^{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} + {}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}}$,
2. ${}^{\mathcal{X}}(\alpha A)^{\mathcal{Y}} = \alpha\, {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$.

Matice složeného a inverzního zobrazení

Věta

Nechť $A \in \mathcal{L}(Q_n, V_s)$, $B \in \mathcal{L}(P_m, Q_n)$ a $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{W}$ jsou popořadě báze P_m, Q_n, V_s. Potom pro matici složeného zobrazení $AB \in \mathcal{L}(P_m, V_s)$ platí

$$^{\mathcal{X}}(AB)^{\mathcal{W}} = {}^{\mathcal{Y}}A^{\mathcal{W}} \cdot {}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}}.$$

Důsledek

Je-li $A \in \mathcal{L}(P_m, Q_n)$ izomorfismus (tedy $m = n$), potom je matice $^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$ regulární a platí

$$\left({}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}\right)^{-1} = {}^{\mathcal{Y}}(A^{-1})^{\mathcal{X}}.$$

Hodnost a hodnost

Lemma

Nechť $B \in \mathcal{L}(P, Q)$ je izomorfismus a $z_1, \ldots, z_n$ jsou vektory z P_m, potom platí

$$\dim\langle z_1, \ldots, z_n\rangle = \dim\langle Bz_1, \ldots, Bz_n\rangle.$$

Věta

Nechť $A \in \mathcal{L}(P_m, Q_n)$, $\mathcal{X}$ je báze P_m a $\mathcal{Y}$ je báze Q_n. Potom platí

$$h(A) = h({}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}).$$

Důsledek

Zobrazení $A \in \mathcal{L}(P_m, Q_n)$ je izomorfismus, právě když je matice ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$ regulární. V takovém případě nutně platí $m = n$.

Hlavní body

Matice přechodu

Převádění souřadnic více vektorů mezi bázemi a odvozování matic zobrazení v různých bázích je poměrně technické. Zjednodušíme si život. . .

Definice

*Nechť $\mathcal{X} = (x_1, \ldots, x_n)$ a $\mathcal{Y} = (y_1, \ldots, y_n)$ jsou báze V_n. Matici identického operátoru ${}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{Y}} \in T^{n,n}$ nazýváme **maticí přechodu** od báze $\mathcal{X}$ k bázi $\mathcal{Y}$.*

Pozor na různé přístupy napříč zdroji:

- jen matice identického operátoru,
- matice přehodu s extra značením ${}_{\mathcal{X}}P_{\mathcal{Y}}$, případně ${}_{\mathcal{Y}}P_{\mathcal{X}}$.

Vlastnosti matice přechodu

Věta

Nechť $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ a $\mathcal{Z}$ jsou báze V_n. Potom

1. *matice ${}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{Y}}$ je regulární a platí*
$$({}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{Y}})^{-1} = {}^{\mathcal{Y}}E^{\mathcal{X}}\,,$$
2. *pro libovolné $x \in V_n$ platí*
$${}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{Y}} \cdot (x)_{\mathcal{X}} = (x)_{\mathcal{Y}}\,,$$
3. $${}^{\mathcal{Y}}E^{\mathcal{Z}} \cdot {}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{Z}}\,.$$

Sestrojení matice přechodu

Algoritmus (Sestrojení matice přechodu)

Nechť $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ jsou dvě báze prostoru V_n. Sestavte matici přechodu ${}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{Y}}$.

1. *Označme pomocí $\mathcal{E}$ standardní bázi V_n, případně jinou bázi, ve které umíme snadno hledat souřadnice vektorů.*
2. *Zapsáním souřadnic vektorů z $\mathcal{X}$ v bázi $\mathcal{E}$ popořadě do sloupců získáme rovnou matici přechodu ${}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{E}}$. Obdobně získáme matici ${}^{\mathcal{Y}}E^{\mathcal{E}}$.*
3. *Hledáme matici ${}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{Y}}$, pro kterou platí vztah*

$$\begin{aligned} {}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{Y}} &= {}^{\mathcal{E}}E^{\mathcal{Y}} \cdot {}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{E}} \\ &= ({}^{\mathcal{Y}}E^{\mathcal{E}})^{-1} \cdot {}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{E}} \,. \end{aligned}$$

4. *Hledaný součin nalezneme úpravou matice $({}^{\mathcal{Y}}E^{\mathcal{E}} \mid {}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{E}})$ pomocí GEM. Jelikož matice přechodu je vždy regulární, lze eliminací získat*

$$({}^{\mathcal{Y}}E^{\mathcal{E}} \mid {}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{E}}) \sim \left(\mathbb{E} \;\middle|\; ({}^{\mathcal{Y}}E^{\mathcal{E}})^{-1} \cdot {}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{E}}\right) = (\mathbb{E} \mid {}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{Y}}) \,.$$

Příklad na konstrukci matice přechodu

Příklad

Uvažujme vektorový prostor $\mathbb{Z}_5^3$ *s bázemi*

$$\mathcal{X} = ((1,0,1),(2,0,1),(3,1,0)) \quad a \quad \mathcal{Y} = ((0,1,1),(4,1,0),(2,1,0))\,,$$

sestrojíme matici přechodu ${}^{\mathcal{Y}}E^{\mathcal{X}}$.

Převod matice zobrazení do jiných bází

Věta

Nechť $A \in \mathcal{L}(P, Q)$, *buď* $\mathcal{X}$, $\tilde{\mathcal{X}}$ *báze* P *a* $\mathcal{Y}$, $\tilde{\mathcal{Y}}$ *báze* Q. *Potom platí*

$$^{\tilde{\mathcal{X}}}A^{\tilde{\mathcal{Y}}} = {}^{\mathcal{Y}}E^{\tilde{\mathcal{Y}}} \cdot {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} \cdot {}^{\tilde{\mathcal{X}}}E^{\mathcal{X}}.$$

Sestrojení matice zobrazení

Algoritmus (Sestrojení matice zobrazení)

Nechť $A \in \mathcal{L}(P, Q)$, $\mathcal{X}$ je báze P a $\mathcal{Y}$ je báze Q. Sestavte matici zobrazení ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$.

1. *Označme pomocí $\mathcal{E}$ standardní bázi prostoru Q, případně jinou bázi, ve které umíme snadno hledat souřadnice vektorů v Q.*
2. *Zapsáním souřadnic vektorů z $\mathcal{Y}$ v bázi $\mathcal{E}$ popořadě do sloupců získáme rovnou matici přechodu ${}^{\mathcal{Y}}E^{\mathcal{E}}$. Aplikujeme-li zobrazení A na vektory z báze $\mathcal{X}$ a souřadnice jejich obrazů v bázi $\mathcal{E}$ popořadě zapíšeme do sloupců, získáme matici zobrazení ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}}$.*
3. *Hledáme matici ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$, pro kterou platí vztah*
$$\begin{aligned} {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} &= {}^{\mathcal{E}}E^{\mathcal{Y}} \cdot {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}} \\ &= ({}^{\mathcal{Y}}E^{\mathcal{E}})^{-1} \cdot {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}} . \end{aligned}$$
4. *Hledaný součin nalezneme úpravou matice $({}^{\mathcal{Y}}E^{\mathcal{E}} \mid {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}})$ pomocí GEM. Jelikož matice přechodu je vždy regulární, lze eliminací získat*
$$({}^{\mathcal{Y}}E^{\mathcal{E}} \mid {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}}) \sim \left(\mathbb{E} \;\middle|\; ({}^{\mathcal{Y}}E^{\mathcal{E}})^{-1} \cdot {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}}\right) = (\mathbb{E} \mid {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}) .$$

Příklad

Pro zobrazení $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$ *definované předpisem*

$$A(z_1, z_2, z_3, z_4) = (4z_1 + z_2 + z_4, z_1 + z_2 + 2z_4, 2z_1 + 3z_2 + 2z_3)\,.$$

odvodíme matici ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$*, kde* $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$*,* $\mathcal{Y} = (y_1, y_2, y_3)$*,*

$$x_1 = (2, 1, 0, 0),\ x_2 = (0, 2, 1, 0),\ x_3 = (0, 0, 2, 1),\ x_4 = (1, 0, 0, 2)$$

a

$$y_1 = (1, 0, 1),\ y_2 = (1, 1, 0),\ y_3 = (1, 0, 2)\,,$$

a to s využitím matic přechodu.
Známe matici ve standardních bázích, pro kontrolu uvádíme rovnou i výsledek:

$${}^{\mathcal{E}_4}A^{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 5 & -8 & -6 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & 8 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hlavní body

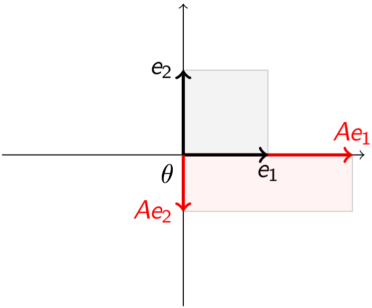
Lineární operátory na $\mathbb{R}^2$

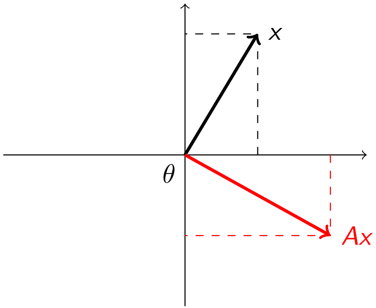
Uvažujeme

- VP $\mathbb{R}^2$ se standardní bází
$$\mathcal{E} = (e_1, e_2) = ((1,0),(0,1))\,,$$
- operátory $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ s jednoduchou geometrickou interpretací jako akce na bodech / orientovaných úsečkách vycházejících z počátku.
- každý $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ můžeme jednoznačně charakterizovat maticí
$$^{\mathcal{E}}A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}\,,$$
- z definice platí
$$^{\mathcal{E}}A = \big((Ae_1)_{\mathcal{E}}\ (Ae_2)_{\mathcal{E}}\big)\ .$$

Operátor škálování ve směru os

$$(x_1, x_2) \xrightarrow{A} (\alpha x_1, \beta x_2), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$



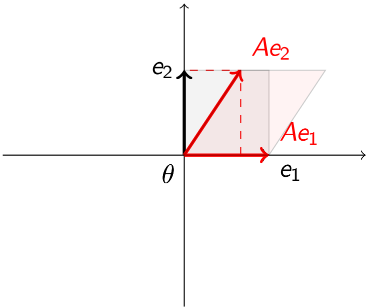


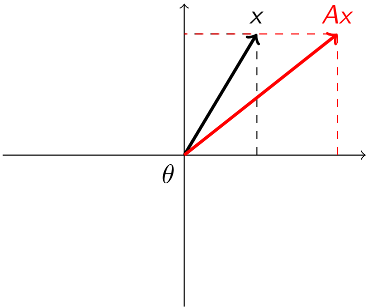
$$^{\mathcal{E}}A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \qquad ^{\mathcal{E}}(A^{-1}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta} \end{pmatrix}.$$

(podmínky na $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$!)

Operátor zkosení ve směru jedné z os

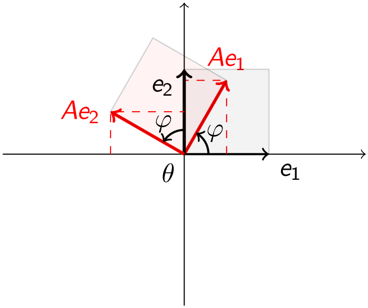
$$(x_1, x_2) \xrightarrow{A} (x_1 + \lambda x_2, x_2), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

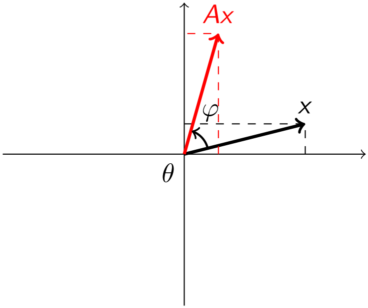




$$^{\mathcal{E}}A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad ^{\mathcal{E}}(A^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nechť $\varphi \in \mathbb{R}$, každý vektor rotujeme okolo počátku o úhel φ v kladném smyslu.





- „trojúhelníková“ úvaha
- obrazy na bázi, $A(1,0) = (\cos\varphi, \sin\varphi)$, $A(0,1) = (-\sin\varphi, \cos\varphi)$.

$$ {}^{\mathcal{E}}A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \qquad {}^{\mathcal{E}}(A^{-1}) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}. $$

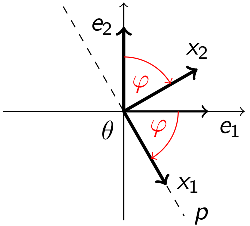
Využití jiné než standardní báze a přechodu k ní

K jednoduchému popisu nemusí stačit pouze osy x a y, důležitou roli bude hrát obecná přímka p procházející počátkem.

- čistě geometrická úvaha může stačit,
- šikovnější je přejít k jiné bázi

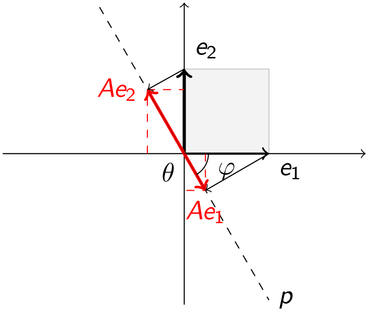
Zvolíme bázi $\mathcal{X} = (x_1, x_2)$ tak, aby vektor x_1 ležel v zaměření přímky p a vektor x_2 byl na něj kolmý („tradičně geometricky“), vezmeme standardní bázi a aplikujeme na ní rotaci o úhel φ. Tedy platí

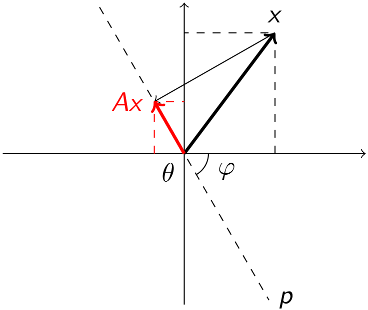
$$\mathcal{X} = (x_1, x_2) = \big((\cos\varphi, \sin\varphi), (-\sin\varphi, \cos\varphi)\big) .$$



Operátor projekce na přímku

Nechť $\varphi \in \mathbb{R}$ a p je přímka procházející počátkem, která svírá s osou x úhel φ. Každému vektoru v $\mathbb{R}^2$ přiřadíme kolmým promítnutím na přímku p bod na této přímce.

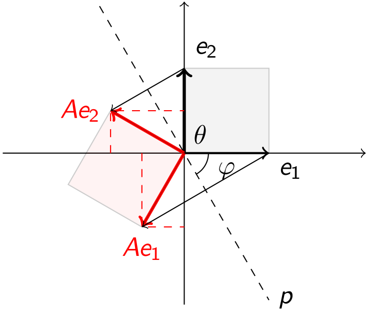


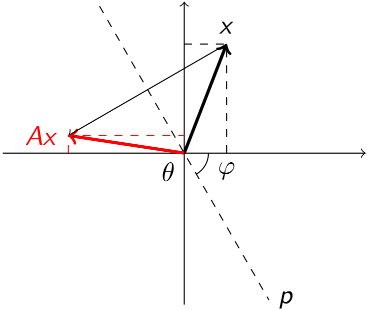


$$ {}^{\mathcal{E}}A = \begin{pmatrix} \cos^2\varphi & \sin\varphi\cos\varphi \\ \sin\varphi\cos\varphi & \sin^2\varphi \end{pmatrix} . $$

Operátor zrcadlení podle přímky

Nechť $\varphi \in \mathbb{R}$ a p je přímka procházející počátkem, která svírá s osou x úhel φ. Každému vektoru v $\mathbb{R}^2$ přiřadíme vektor osově souměrný podle přímky p.

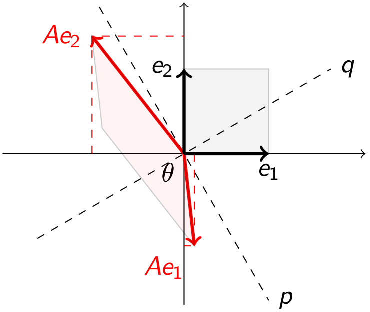


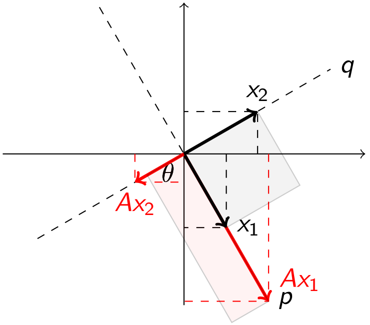


$$^{\mathcal{E}}A = \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & \sin(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) & -\cos(2\varphi) \end{pmatrix} = {}^{\mathcal{E}}(A^{-1})\,.$$

Operátor škálování podle zrotovaných os

Nechť $\varphi \in \mathbb{R}$ a p je přímka procházející počátkem, která svírá s osou x úhel φ. Uvažujme lineární operátor, který ve směru přímky p násobí parametrem α a ve směru kolmém na ni násobí parametrem β.





$$
{}^{\mathcal{E}}A = \begin{pmatrix} \alpha \cos^2\varphi + \beta \sin^2\varphi & (\alpha - \beta)\sin\varphi\cos\varphi \\ (\alpha-\beta)\sin\varphi\cos\varphi & \alpha\sin^2\varphi + \beta\cos^2\varphi \end{pmatrix}.
$$

Ještě obecnější operátor škálování.

Nechť $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$ a uvažujme zobrazení, které ve směru přímky p (zadané úhlem φ, který svírá s osou x) násobí vektory parametrem $\alpha \in \mathbb{R}$ a ve směru další přímky q (která s osou x svírá úhel ψ) násobí parametrem $\beta \in \mathbb{R}$.

- podmínky z definice?
- jiná „šikovná“ báze
- pozor na inverzi matice přechodu...

Hlavní body

Univerzální problém

Problém

Nechť P, Q jsou libovolné vektorové prostory nad tělesem T a nechť je zadáno $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ a $b \in Q$. Určete vzor $A^{-1}b$, tedy vyřešte rovnici

$$Ax = b\,.$$

Množina řešení takové rovnice má pro libovolné volby prostorů i lineárního zobrazení vždy „podobný" tvar: lineární varieta, jejíž dimenzi lze (někdy) dopočítat z hodnosti zobrazení a dimenze prostoru P.

Věty o množině řešení $Ax = b$

Věta

Nechť $A \in \mathcal{L}(P, Q)$, $b \in Q$. *Existuje-li vektor* $\tilde{x} \in P$ *splňující* $A\tilde{x} = b$, *pak platí*

$$A^{-1}b = \tilde{x} + \ker A\,.$$

Věta

Nechť $A \in \mathcal{L}(P, Q)$. *Potom*

$$h(A) + d(A) = \dim P.$$

Soustavy lineárních rovnic

Nechť $P = T^m$ a $Q = T^n$ pro nějaké těleso T a $m, n \geq 1$. Pro každé $A \in \mathcal{L}(P, Q) = \mathcal{L}(T^m, T^n)$ existuje matice $\mathbb{A} \in T^{n,m}$ splňující $A\mathbb{x} = \mathbb{A} \cdot \mathbb{x}$ pro každé $\mathbb{x} \in T^m$.
Pro danou volbu je $Ax = b$ pouhou SLR. Navíc platí:

- Množina řešení přidružené homogenní soustavy $A\mathbb{x} = \mathbb{A} \cdot \mathbb{x} = \theta$ je rovna $\ker A$. První část Frobeniovy věty je důsledkem vztahu
$$A^{-1}b = \tilde{x} + \ker A\,.$$
- Jelikož $h(A) = h(\mathbb{A})$, $\dim P = \dim T^m = m$ a pro množinu řešení přidružené homogenní soustavy platí $S_0 = \ker A$, plyne druhá část Frobeniovy věty z 2. věty o dimenzi.

Lineární rekurentní rovnice

- Identický operátor označíme jako $E = S^0$.
- Zavedeme operátor posunutí S, $\forall x \in T^\infty, \forall n \in \mathbb{N}: \ (Sx)_n := x_{n+1}$.
- Operátor $S \in \mathcal{L}(T^\infty)$ lze mocnit a platí $\forall k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : (S^k x)_n = x_{n+k}$.
- *Lineární rekurentní rovnice s konstantními koeficienty* pak nazveme libovolnou rovnici $Ax = b$, kde $b \in T^\infty$ je pevně zvolené a $A \in \mathcal{L}(T^\infty)$ je libovolnou lineární kombinací $A = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k S^k$ kde $\alpha_0, \ldots, \alpha_k \in T$.
- Poznámka k $S^2 - S^1 - S^0 \rightarrow$ Fibonacci.
- Rovnici $Ax = b$ pak zapisujeme ve tvaru

$$\forall n \in \mathbb{N}: \ \alpha_k x_{n+k} + \alpha_{k-1} x_{n+k-1} + \cdots + \alpha_1 x_{n+1} + \alpha_0 x_n = b_n \, .$$

Příklad

Vyřešíme lineární rekurentní rovnici

$$\forall n \in \mathbb{N}: \ x_{n+1} - 2x_n = 1 - n \, ,$$

v prostoru $\mathbb{R}^\infty$*.*

Lineární diferenciální rovnice

Předpokládejme, že $P = Q = \mathcal{F}$ je vektorový prostor všech hladkých reálných funkcí reálné proměnné.

- Identický operátor označíme jako $E = D^0$.
- Zavedeme operátor derivování D, $\forall f \in \mathcal{F} : Df := f'$.
- Operátor $D \in \mathcal{L}(\mathcal{F})$ lze mocnit a platí, že D^k přiřadí každé funkci její $k$tou derivaci.
- *Lineární diferenciální rovnicí s konstantními koeficienty* pak nazveme libovolnou rovnici $Ax = b$, kde $b \in \mathcal{F}$ je pevně zvolená funkce a operátor $A \in \mathcal{L}(\mathcal{F})$ je lineární kombinací operátorů $D^k, k \in \mathbb{N}_0$.

Příklad

Vyřešíme lineární diferenciální rovnici

$$\forall x \in \mathbb{R} : \; f(x) - f'(x) = 42 \, .$$