Lineární algebra : Determinant

(7. přednáška)

Daniel Dombek, Luděk Kleprlík,
Karel Klouda

daniel.dombek@fit.cvut.cz, ludek.kleprlik@fit.cvut.cz,
karel.klouda@fit.cvut.cz

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií

České vysoké učení technické v Praze

LS 2021/2022

vytvořeno: 15. února 2022, 13:47

Motivace

- Řešitelnost soustavy $\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$ s maticí $\mathbb{A} \in T^{n,n}$:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & ad - cb \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & ae - bd & af - cd \\ 0 & ah - bg & aj - cg \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & ae - bd & af - cd \\ 0 & 0 & (aej + hcd + bgf - ecg - bdj - ahf) =: (*) \end{pmatrix}.$$

- Čísla $ad - cb$, resp. $(*)$ determinují soustavu s maticí $\mathbb{A}$.
- „Objem“ mnohostěnu v $\mathbb{R}^n$.

O co jde?

- Budeme se zabývat pouze **čtvercovými maticemi** z $T^{n,n}$.
- **Za těleso T budeme brát pouze tělesa** $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.
- Determinant matice $\mathbb{A} = (a_{ij})$ je číslo z T definované násl. vztahem:

$$\det \mathbb{A} = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \, a_{1,\pi(1)} a_{2,\pi(2)} \dots a_{n,\pi(n)}.$$

- V definici použité symboly S_n a $\operatorname{sgn} \pi$ se týkají pojmu **permutace** množiny $\hat{n} = \{1, 2, \dots, n\}$.
- Determinant se používá leckde, ale my jej využijeme zejm. při definici pojmu **vlastní číslo**.

Hlavní body

1. Permutace
2. Determinant matice
3. Věta o rozvoji determinantu

Definice permutace

- Neformálně (tj. špatně) bychom mohli popsat permutaci jako „promíchání“ nějaké konečné množiny.
- My budeme uvažovat pouze permutace množin typu $\hat{n} = \{1, 2, \ldots, n\}, n \in \mathbb{N}$.
- Formálně ji budeme ale definovat jako **bijekci** $\hat{n}$ do $\hat{n}$.

Definice

*Buď $n \in \mathbb{N}$. Každé zobrazení $\pi : \hat{n} \to \hat{n}$, které je bijekcí, nazýváme **permutací množiny** $\hat{n}$. Množinu všech permutací množiny $\hat{n}$ značíme S_n.*

- Všech permutací je $n!$ (tj. hodně).

Zápis permutací

- Permutace obvykle budeme značit řeckými písmeny, např. $\pi, \tau, \sigma \in S_n$.
- Jelikož se jedná o zobrazení definované na konečné množině, lze jej zadat výčtem hodnot obrazů, např. permutaci $\pi \in S_5$ můžeme zadat takto:

$$\pi(1) = 3, \pi(2) = 1, \pi(3) = 5, \pi(4) = 2, \pi(5) = 4.$$

- My budeme ale používat zkrácený zápis

$$\pi = (3, 1, 5, 2, 4),$$

kde pořadí čísla určuje, jakého čísla je obrazem.

Základní operace s permutacemi

- Jelikož jsou permutace zobrazení, můžeme je dle klasických pravidel skládat.
- Např. pro permutace

$$\pi = (3, 1, 5, 2, 4) \quad \text{a} \quad \sigma = (1, 5, 4, 3, 2)$$

platí

$$\pi \circ \sigma = (3, 4, 2, 5, 1) \quad \text{a} \quad \sigma \circ \pi = (4, 1, 2, 5, 3).$$

- Jelikož je permutace bijekce, je její inverze také bijekce, a tedy permutace. Pro permutace uvedené výše platí

$$\pi^{-1} = (2, 4, 1, 5, 3) \quad \text{a} \quad \sigma^{-1} = (1, 5, 4, 3, 2).$$

Inverze a znaménko permutace

V definici determinantu se vyskytovala značka $\operatorname{sgn}\pi$ pro znaménko permutace:

Definice

Nechť $\pi \in S_n$. Každou dvojici $(\pi(i), \pi(j))$ takovou, že

$$i < j \quad \text{a} \quad \pi(i) > \pi(j),$$

*$i, j \in \hat{n}$, nazýváme **inverzí v permutaci** π. Číslo $(-1)^{I_\pi}$, kde I_π je počet inverzí v π, nazýváme **znaménko (signum)** permutace π, značíme $\operatorname{sgn}\pi$.*

- V permutaci $\pi = (3, 1, 5, 2, 4)$ existují 4 inverze: za číslem 3 se vyskytují menší čísla 1 a 2 a za číslem 5 se vyskytují menší čísla 2 a 4. Platí tedy, že $\operatorname{sgn}\pi = (-1)^4 = 1$.
- inverze v permutaci $\neq$ inverze permutace!

Identita a transpozice

- Jedinou permutací, která neobsahuje žádnou inverzi, je **identita**

$$(1, 2, \dots, n).$$

- Permutace, které odpovídají prohození dvou prvků v množině $\hat{n}$, budeme nazývat transpozice.

Definice

Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $i, j \in \hat{n}$, $i \neq j$. Permutaci $\tau_{ij} \in S_n$, kde

1. $\tau_{ij}(j) = i$,
2. $\tau_{ij}(i) = j$,
3. $\tau_{ij}(k) = k$, *pro* $k \neq i, j$,

*nazýváme **transpozicí** čísel i a j.*

- Např. permutace $\tau_{2,5} = (1, 5, 3, 4, 2)$ je transpozicí čísel 2 a 5.
- Zřejmě platí $\tau_{2,5} \circ \tau_{2,5} = (1, 2, 3, 4, 5)$.

Skládání permutací a znaménko

Násl. větu si nedokážeme, přesto ale platí:

Věta

Nechť $\pi_1, \pi_2 \in S_n$*, potom platí:*

$$\operatorname{sgn}(\pi_1 \circ \pi_2) = \operatorname{sgn}\pi_1 \cdot \operatorname{sgn}\pi_2.$$

Speciálně: složíme-li nějakou permutaci π *s transpozicí* τ*, změní se znaménko:*

$$\operatorname{sgn}(\pi \circ \tau) = \operatorname{sgn}(\tau \circ \pi) = -\operatorname{sgn}\pi.$$

Důsledek

Znaménka permutace a její inverze jsou stejná:

$$\operatorname{sgn}\pi = \operatorname{sgn}\pi^{-1}.$$

Hlavní body

1. Permutace
2. Determinant matice
3. Věta o rozvoji determinantu

Definice determinantu

Definice

Buď $\mathbb{A} \in T^{n,n}$ se složkami $\mathbb{A}_{ij} = a_{i,j}$. ***Determinant*** *matice $\mathbb{A}$ je číslo definované vztahem*

$$\det \mathbb{A} = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \, a_{1,\pi(1)} a_{2,\pi(2)} \cdots a_{n,\pi(n)}.$$

- Značíme také $|\mathbb{A}| := \det \mathbb{A}$.
- Suma v definici obsahuje $n!$ sčítanců.
- Pro matice rozměru 2×2 a 3×3 lze odvodit tzv. *křížové pravidlo*, resp. *Sarrusovo pravidlo*.
- Pro obecné matice rozměru 4×4 (a větší) **analogie k Sarrusovu pravidlu neexistuje!**

První pozorování o determinantu

- Pro dané π si sčítanec $a_{1,\pi(1)} a_{2,\pi(2)} \ldots a_{n,\pi(n)}$ můžeme představit tak, že v každém řádku $i = 1, 2, \ldots, n$ zvolíme prvek, který je v $\pi(i)$tém sloupci a všechny tyto prvky vynásobíme.
- Díky tomu, že permutace je bijekce, platí pro prvky ve sčítanci $a_{1,\pi(1)} a_{2,\pi(2)} \ldots a_{n,\pi(n)}$ toto: z každého řádku i každého sloupce je vybrán vždy právě jeden prvek.

Tvrzení

Mějme matici $\mathbb{A} \in T^{n,n}$.

1. *Je-li některý ze sloupců nebo řádků matice $\mathbb{A}$ nulový, pak $\det \mathbb{A} = 0$.*
2. *Je-li matice $\mathbb{A}$ horní trojúhelníková (tj. $\mathbb{A}_{ij} = 0$ kdykoliv $i > j$) pak*

$$\det \mathbb{A} = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{A}_{ii}.$$

Vliv řádkových/sloupcových úprav na determinant

Věta

Nechť $\mathbb{A} \in T^{n,n}$.

1. *Buď* $\mathbb{B}$ *matice, která vznikne z matice* $\mathbb{A}$ *prohozením* i*tého a* j*tého sloupce (nebo řádku),* $i \neq j$*, potom*
$$\det\mathbb{B} = -\det\mathbb{A}.$$
2. *Buď* $\mathbb{B}$ *matice, která vznikne z matice* $\mathbb{A}$ *vynásobením* i*tého řádku číslem* $\alpha \in T$*, potom*
$$\det\mathbb{B} = \alpha\det\mathbb{A}.$$
3. *Buďte* $\mathbb{B}$ *a* $\mathbb{D}$ *matice, které mají shodné prvky s maticí* $\mathbb{A}$ *až na* i*tý řádek, pro který platí* $\mathbb{A}_{i:} = \mathbb{B}_{i:} + \mathbb{D}_{i:}$*, potom*
$$\det\mathbb{B} + \det\mathbb{D} = \det\mathbb{A}.$$

GEM a determinant: co z toho plyne

Z předchozí věty plyne několik důležitých vlastností determinantu:

Důsledek

1. *Obsahuje-li matice dva stejné řádky, její determinant je nulový.*
2. *Přičteme-li k nějakému řádku jiný řádek, determinant matice se nezmění.*
3. *Kroky GEM mohou měnit hodnotu i znaménko determinantu, ale zachovávají nenulovost: Platí-li $\mathbb{A} \sim \mathbb{B}$, pak $\det\mathbb{A} \neq 0$, právě když $\det\mathbb{B} \neq 0$.*

Poznámka: GEM lze dělat tak, že se determinant nezmění vůbec (při prohazování řádků jeden řádek vynásobit -1 a násobení řádku nenulovým číslem vůbec nepoužívat).

Z bodu (*iii*) a z faktu, že $\det\mathbb{E} = 1$, plyne následující věta.

Věta

Matice $\mathbb{A} \in T^{n,n}$ je regulární, právě když má nenulový determinant.

Výpočet determinantu pomocí GEM

Algoritmus

Matici $\mathbb{A} \in T^{n,n}$ *převedeme řádkovými úpravami GEM na matici* $\mathbb{B} \in T^{n,n}$ *v horním trojúhelníkovém tvaru, tj.* $\mathbb{B}_{ij} = 0$ *pro* $i > j$. *Použijeme-li během eliminace 1. nebo 2. krok GEM, je třeba si poznamenat, jak se změnil determinant. 3. krok GEM determinant nemění. Pro determinant matice* $\mathbb{B}$ *v horním trojúhelníkovém tvaru platí*

$$\det \mathbb{B} = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{B}_{ii}.$$

Poznámka

Výpočetní složitost tohoto algoritmu je $O(n^3)$. *To je výrazná úspora oproti výpočtu determinantu z definice, kdy je složitost* $O(n!)$.
Např. pro $n = 50$ *je to*

$$1,25 \cdot 10^5 \textit{ operací} \quad \textit{namísto} \quad 3,04 \cdot 10^{64} \textit{ operací.}$$

Výpočet determinantu pomocí GEM

Spočítejte determinant násl. matice:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Násl. věta říká, že můžeme operace GEM aplikovat i „sloupcově“ a vše bude fungovat stejně:

Věta

Pro matici $\mathbb{A} \in T^{n,n}$ platí

$$\det \mathbb{A} = \det \mathbb{A}^T.$$

Determinant součinu a inverze

Věta

Pro matice $\mathbb{A}$ *a* $\mathbb{B}$ *z* $T^{n,n}$ *platí*

$$\det(\mathbb{A}\mathbb{B}) = \det\mathbb{A} \cdot \det\mathbb{B}.$$

Důkaz se opírá o následující lemma:

Lemma

Pro každou matici $\mathbb{D} \in T^{n,n}$ *a libovolnou matici* $\mathbb{P}$ *reprezentující elementární krok GEM platí*

$$\det(\mathbb{P}\mathbb{D}) = \det\mathbb{P} \cdot \det\mathbb{D}\,.$$

Důsledek

Pro regulární matici $\mathbb{A}$ *platí* $\det\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{\det\mathbb{A}}$.

Hlavní body

Věta o rozvoji determinantu

Definice

Nechť $\mathbb{A} \in T^{n,n}$, $n \geq 2$, $\mathbb{A} = (a_{ij})$, $k, \ell \in \hat{n}$. *Nechť* $\mathbb{A}(k,\ell) \in T^{n-1,n-1}$ *je matice, která vznikne z* $\mathbb{A}$ *vynecháním* k*tého řádku a* ℓ*tého sloupce.*
Číslo

$$(-1)^{k+\ell} \det \mathbb{A}(k,\ell)$$

nazýváme ***algebraický doplněk*** *prvku* $a_{k\ell}$.

Věta (O rozvoji determinantu podle *k*tého sloupce)

Nechť $\mathbb{A} \in T^{n,n}$, $n \geq 2$ *a nechť* $\mathbb{A} = (a_{ij})$, $k \in \hat{n}$. *Potom platí:*

$$\det \mathbb{A} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det \mathbb{A}(i,k).$$

Důkaz nebudeme vyžadovat.

Věta o rozvoji determinantu: poznámky

- Jelikož $\det \mathbb{A} = \det \mathbb{A}^T$, platí i obdobná věta o rozvoji podle $k$tého řádku.
- Výpočet se použitím věty o rozvoji nemusí ve srovnání s výpočtem z definice vůbec zjednodušit: složitost zůstává $O(n!)$.
- Věta o rozvoji výpočet zjednodušuje zejm. v případech, kdy je v jednom řádku či sloupci hodně nul.

Spočítejte determinant násl. matic:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 2 & -1 \\ \alpha & 3 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$