# Lineární algebra : Vlastní čísla

(8. přednáška)

Daniel Dombek, Luděk Kleprlík,
Karel Klouda

daniel.dombek@fit.cvut.cz, ludek.kleprlik@fit.cvut.cz,
karel.klouda@fit.cvut.cz

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií

České vysoké učení technické v Praze

LS 2021/2022

vytvořeno: 15. února 2022, 13:47

# Hlavní body

1. Úvod
2. Vlastní čísla a vektory lineárního operátoru a matice
3. Diagonalizace operátoru a podobnost matic

# O co nám jde?

- Budeme zkoumat lineární operátory $A \in \mathcal{L}(V)$ a jejich matice ${}^{\mathcal{X}}A$. $V$ bude VP nad **tělesem komplexních čísel**!

- Ukážeme si, že pro každý operátor existují vektory, pro které je aplikování operátoru $A$ rovno jednoduchému násobení nějakým číslem z tělesa $\mathbb{C}$, tj. existují vektory $x$ a pro ně $\alpha \in \mathbb{C}$ tak, že

$$Ax = \alpha x.$$

- Spec. pro čtvercové matice $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$: budeme hledat $\mathbb{x}$ a číslo $\alpha \in \mathbb{C}$ tak, že

$$\mathbb{A}\mathbb{x} = \alpha\mathbb{x}.$$

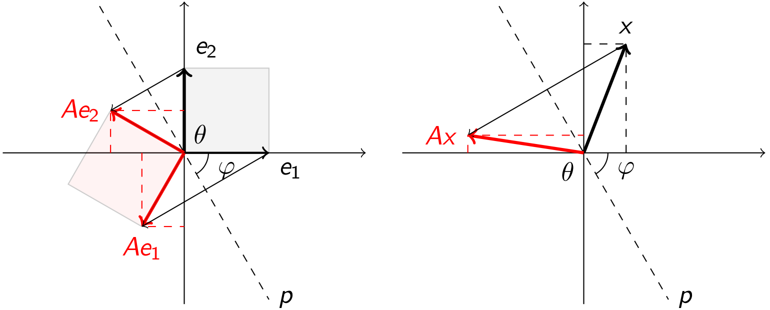
- Těmto vektorům a číslům budeme říkat vlastní vektory a vlastní čísla operátoru (resp. matice).

# Báze z vlastních vektorů

- Pro některé lineární operátory bude možné sestavit z vlastních vektorů bázi, označme takový operátor $A \in \mathcal{L}(V_n)$ a tuto bázi $\mathcal{X} = (x_1, \ldots, x_n)$.
- Označme dále vlastní čísla příslušná těmto vektorům $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, tj. pro všechna $i \in \hat{n}$ platí:
$$Ax_i = \lambda_i x_i.$$
- Zkusme si sestavit matici ${}^{\mathcal{X}}A$: její $i$tý sloupec je (jak strašně dobře víme), roven
$$(Ax_i)_{\mathcal{X}} = (\lambda_i x_i)_{\mathcal{X}} = \lambda_i (x_i)_{\mathcal{X}} = \lambda e_i,$$
kde $e_i$ je $i$tý vektor standardní báze $\mathbb{C}^{n,1}$.
- Matice ${}^{\mathcal{X}}A$ je tedy **diagonální** matice a na diagonále má vlastní čísla. V této bázi je tedy extrémně jednoduché aplikovat zobrazení $A$, neboť násobení diagonální maticí odpovídá pouhému vynásobení $n$ čísel z tělesa.

# Geometrická interpretace vlastních čísel (1 ze 2)

**Operátor zrcadlení podle přímky**: Nechť $\varphi \in \mathbb{R}$ a $p$ je přímka procházející počátkem, která svírá s osou $x$ úhel $\varphi$. Každému vektoru v $\mathbb{R}^2$ přiřadíme vektor osově souměrný podle přímky $p$.




Již dříve jsme odvodili, že pro tento lineární operátor je matice ve standardní bázi rovna

$$^{\mathcal{E}}A = \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & \sin(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) & -\cos(2\varphi) \end{pmatrix} = {}^{\mathcal{E}}(A^{-1})\,.$$

# Geometrická interpretace vlastních čísel (2 ze 2)

- Co jsou vlastní čísla a vektory operátoru zrcadlení?
- Jistě pro vektory $x$ ležící na přímce $p$ platí
  $$Ax = x,$$
  jedná se tedy o vlastní vektory s vlastním číslem $\lambda_1 = 1$.
- Buď $p'$ přímka, která je kolmá na přímku $p$ a také prochází počátkem, pak pro $x \in p'$ platí
  $$Ax = -x,$$
  jedná se tedy o vlastní vektory s vlastním číslem $\lambda_2 = -1$.
- Jak snadno ověříme, vlastní vektory příslušné danému vlastnímu číslu tvoří podprostor (do toho!).
- V našem případě jsou tyto podprostory dva: přímky $p$ a $p'$.

# Hledání vlastních čísel matice

- Pro danou matici $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ hledáme **nenulové** vektory $\mathbb{x}$ a čísla $\lambda \in \mathbb{C}$ splňující rovnici
$$\mathbb{A}\mathbb{x} = \lambda\mathbb{x}.$$
- To je ekvivalentní hledání $\lambda$ takové, že homogenní soustava rovnic
$$(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{E})\mathbb{x} = \theta$$
má nenulové řešení.
- To nastává ale tehdy a jen tehdy (vzpomeňme Frobeniovu větu), když je matice $\mathbb{A} - \lambda\mathbb{E}$ singulární (neregulární).
- A to je zase ekvivalentní tomu, že determinant matice $\mathbb{A} - \lambda\mathbb{E}$ je roven nule: **abychom tedy našli vlastní číslo, řešíme rovnici**
$$\det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{E}) = 0.$$
- Pro zadané vlastní číslo $\lambda$ už najdeme vlastní vektory snadno jako řešení homogenní soustavy uvedené výše.

# Příklad 1/2

- Najdeme vlastní čísla a vlastní vektory matice
$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$
- Spočítáme:
$$\det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{E}) = -(\lambda - 2)(\lambda - 3)^2.$$
- Kořeny tohoto polynomu (budeme mu říkat charakteristický polynom) jsou $\lambda_1 = 2$ a $\lambda_2 = 3$.
- Dostáváme tedy dvě vlastní čísla 2 a 3.

# Příklad 2/2

- Vlastní vektory $\mathbb{A}$ k vlastnímu číslu $\lambda_1 = 2$ jsou všechna nenulová řešení soustavy $(\mathbb{A} - 2\mathbb{E})x = \theta$. Po výpočtu dostaneme množinu řešení jako $\langle(-2, 1, 4)\rangle$. Příslušný vlastní vektor je libovolný nenulový prvek $x_1$ této množiny (podprostoru).

- Podobně pro nalezení vlastních vektorů $\mathbb{A}$ k vlastnímu číslu $\lambda_2 = 3$ řešíme homogenní soustavu s maticí $\mathbb{A} - 3\mathbb{E}$ a vyjde nám $\langle(1, 1, 0), (-1, 0, 1)\rangle$. Vlastní vektor je opět libovolný $\theta \neq x_2 \in \langle(1, 1, 0), (-1, 0, 1)\rangle$.

- Snadno ověříme, že pro vlastní vektory skutečně platí:

$$\mathbb{A}x_1 = 2x_1 \quad \text{a} \quad \mathbb{A}x_2 = 3x_2.$$

# Hlavní body

# Definice

## Definice

*Řekneme, že $\lambda \in \mathbb{C}$ je* ***vlastní číslo operátoru*** *$A \in \mathcal{L}(V)$ právě když existuje $x \in V$, $x \neq \theta$, takový, že $Ax = \lambda x$. Vektor $x$ pak nazýváme* ***vlastním vektorem operátoru*** *$A$ příslušejícím vlastnímu číslu $\lambda$. Množinu všech vlastních čísel $A$ nazýváme* ***spektrem*** *$A$ a značíme $\sigma(A)$.*

Víme, že na matici $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ se můžeme dívat také jako na lineární zobrazení

$$A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n : \mathbb{x} \mapsto \mathbb{A} \cdot \mathbb{x}.$$

V tomto specálním případě dostaneme pro $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$:

## Definice

*Řekneme, že $\lambda \in \mathbb{C}$ je* ***vlastní číslo matice*** *$\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ právě když existuje $\mathbb{x} \in \mathbb{C}^n$, $\mathbb{x} \neq \theta$, takový, že $\mathbb{A} \cdot \mathbb{x} = \lambda \mathbb{x}$. Vektor $\mathbb{x}$ pak nazýváme* ***vlastním vektorem matice*** *$\mathbb{A}$ příslušejícím vlastnímu číslu $\lambda$. Množinu všech vlastních čísel $\mathbb{A}$ nazýváme* ***spektrem*** *$\mathbb{A}$ a značíme $\sigma(\mathbb{A})$.*

# Charakteristický polynom

Ukážeme si, že hledat vlastní čísla operátoru $A \in \mathcal{L}(V_n)$ je stejná úloha, jako hledat vlastní čísla matice ${}^{\mathcal{X}}A \in \mathbb{C}^{n,n}$. Dokonce je jedno, jakou bázi $\mathcal{X}$ zvolíme!

## Lemma

*Nechť $A \in \mathcal{L}(V_n)$ a $\mathcal{X}$ je báze $V_n$. Označme*

$$p_A(\lambda) := \det{}^{\mathcal{X}}(A - \lambda E).$$

*Potom $p_A$ je polynom stupně $n$ a nezávisí na volbě báze $\mathcal{X}$.*

## Definice

*Polynom $p_A$ z předchozího pozorování nazýváme* ***charakteristickým polynomem*** *operátoru $A$. Polynom $p_{\mathbb{A}} = \det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{E})$ nazýváme* ***charakteristickým polynomem*** *matice $\mathbb{A}$.*

# Něco málo o polynomech

Polynom komplexní proměnné $x$ stupně $n \in \mathbb{N}_0$ je funkce

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i,$$

kde $\alpha_i \in \mathbb{C}$ jsou koeficienty a $\alpha_n \neq 0$. O polynomech toho mnoho víme:

- (základní věta algebry): Každý polynom stupně alespoň jedna má alespoň jeden kořen.
- Z toho vyplyne, že **každý operátor má alespoň jedno vlastní číslo**.
- Jsou-li $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ všechny různé kořeny $p(x)$, pak existují jednoznačně určená čísla (násobnosti kořenů) $\ell_1, \ldots, \ell_k \in \mathbb{N}$ tak, že

$$p(x) = \alpha_n \prod_{i=1}^{k} (x - \lambda_i)^{\ell_i}$$

a $\ell_1 + \cdots + \ell_k = n$.

# Charakteristický polynom a spektrum

Víme z dřívějška

## Věta

*Zobrazení $A \in \mathcal{L}(P_m, Q_n)$ je izomorfismus, právě když je matice ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$ regulární. V takovém případě nutně platí $m = n$.*

## Věta

*Nechť $A \in \mathcal{L}(V_n)$. Potom $\sigma(A) \neq \emptyset$ a platí*

$$\sigma(A) = p_A^{-1}(\{0\}) \equiv \{\lambda \in \mathbb{C} \mid p_A(\lambda) = 0\}.$$

## Důsledek

*Spektrum operátoru $A \in \mathcal{L}(V_n)$ je rovno spektru matice zobrazení $A$ v libovolné bázi $\mathcal{X}$ prostoru $V_n$, tj. $\sigma(A) = \sigma({}^{\mathcal{X}}A)$.*

# Dvě různé násobnosti vlastních čísel 1/2

## Definice

*Nechť* $A \in \mathcal{L}(V_n)$, $\lambda_0 \in \sigma(A)$. *Násobnost čísla* $\lambda_0$ *jako kořene charakteristického polynomu* $p_A$ *operátoru* $A$ *nazýváme* ***algebraickou násobností*** *vlastního čísla* $\lambda_0$ *a značíme ji* $\nu_a(\lambda_0)$.

*Podprostor* $\ker(A - \lambda_0 E)$ *nazýváme* ***vlastním podprostorem operátoru*** $A$ ***příslušejícím vlastnímu číslu*** $\lambda_0$.

*Číslo* $d(A - \lambda_0 E)$ *nazýváme* ***geometrickou násobností*** *vlastního čísla* $\lambda_0$ *a značíme ji* $\nu_g(\lambda_0)$.

## Poznámka

- *Číslo* $\nu_g(\lambda_0)$ *je tedy maximální délka LN souboru vlastních vektorů k vlastnímu číslu* $\lambda_0$.
- *Pro matici* $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ *platí* $\nu_g(\lambda_0) = \dim S_0$, *kde* $S_0$ *je řešení homogenní soustavy* $(\mathbb{A} - \lambda_0 \mathbb{E})\mathbb{x} = \theta$.

# Dvě různé násobnosti vlastních čísel 2/2

Věta

*Nechť* $A \in \mathcal{L}(V_n)$, $\lambda_0 \in \sigma(A)$. *Potom*

$$\nu_g(\lambda_0) \leq \nu_a(\lambda_0).$$

# Ještě jeden příklad

- Najdeme vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ -1 & 10 & -6 \\ -1 & 8 & -4 \end{pmatrix}.$$

- Postupujeme stejně jako dříve příkladě a dostáváme

$$p_{\mathbb{B}}(\lambda) = \det(\mathbb{B} - \lambda\mathbb{E}) = -(\lambda - 2)(\lambda - 3)^2.$$

- Proto $\sigma(\mathbb{B}) = \{2, 3\}$, ale vlastní podprostory nám nyní vyjdou:

$$\lambda_1 = 2 : \quad \langle(0, 3, 4)\rangle,$$

$$\lambda_2 = 3 : \quad \langle(1, 1, 1)\rangle.$$

- Tedy matice $\mathbb{A}$ z kapitoly úvod a $\mathbb{B}$ mají stejná spektra a charakteristické polynomy, ale různé vlastní podprostory a tedy různé geometrické násobnosti vlastního čísla 3.

# Hledání vlastních čísel operátoru 1/2

## Algoritmus (Výpočet vlastních čísel operátoru $A$ na prostoru $V_n$ a algebraických násobností)

1. *Zvolme bázi $\mathcal{X}$ prostoru $V_n$.*
2. *Spočtěme charakteristický polynom operátoru $A$, $p_A(\lambda) = \det^{\mathcal{X}}(A - \lambda E)$, pomocí známých metod pro výpočet determinantu.*
3. *Nalezněme všechny kořeny polynomu $p_A$. Tyto kořeny jsou vlastní čísla operátoru $A$.*
4. *Algebraická násobnost vlastního čísla $\lambda$, tj. $\nu_a(\lambda)$, je násobnost $\lambda$ jako kořene charakteristického polynomu $p_A$.*

# Hledání vlastních čísel operátoru 2/2

### Algoritmus (Výpočet vlastních vektorů operátoru a geometrických násobností)

*Mějme lineární operátor $A$ na prostoru $V_n$ a jeho vlastní číslo $\lambda \in \mathbb{C}$.*

1. *Vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu $\lambda$ jsou všechna nenulová řešení rovnice $(A - \lambda E)x = \theta$.*
2. *Geometrická násobnost vlastního čísla $\lambda$, tj. $\nu_g(\lambda)$, je dimenze vlastního podprostoru $\ker(A - \lambda E)$.*

# Hledání vlastních čísel matice 1/2

Algoritmus (Výpočet vlastních čísel matice $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ a jejich algebraických násobností)

1. *Spočtěme charakteristický polynom matice $\mathbb{A}$, $p_{\mathbb{A}}(\lambda) = \det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{E})$, pomocí známých metod pro výpočet determinantu.*
2. *Nalezněme všechny kořeny polynomu $p_{\mathbb{A}}$. Tyto kořeny jsou vlastní čísla operátoru $\mathbb{A}$.*
3. *Algebraická násobnost vlastního čísla $\lambda$, tj. $\nu_a(\lambda)$, je násobnost $\lambda$ jako kořene charakteristického polynomu $p_{\mathbb{A}}$.*

**Algoritmus (Výpočet vlastních vektorů matice $\mathbb{A}$ a jejich geometrických násobností)**

*Mějme matici $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ a její vlastní číslo $\lambda \in \mathbb{C}$.*

1. *Vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu $\lambda$ jsou všechna nenulová řešení homogenní rovnice $(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{E}) \cdot \mathbb{x}^T = \theta$.*
2. *Geometrická násobnost vlastního čísla $\lambda$, tj. $\nu_g(\lambda)$, je dimenze podprostoru všech řešení homogenní rovnice $(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{E}) \cdot \mathbb{x}^T = \theta$.*

# Hlavní body

# Podobné matice

**Idea:** Chtěli bychom říct, že dvě matice $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{C}^{n,n}$ jsou podobné, jsou-li to matice *téhož operátoru* $A$ na nějakém VP v různých bázích.

## Definice

*Matice $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{C}^{n,n}$ nazveme **podobné**, právě když existuje $\mathbb{P} \in \mathbb{C}^{n,n}$ regulární tak, že platí*

$$\mathbb{A} = \mathbb{P}^{-1}\mathbb{B}\mathbb{P}.$$

Poznámka: V literatuře je obvyklé značení $\mathbb{A} \sim \mathbb{B}$, protože symbol $\sim$ obecně označuje ekvivalenci. (Domácí úkol: Ověřte, že vztah „býti podobným“ je relace ekvivalence na prostoru $\mathbb{C}^{n,n}$.)

# Podobné matice

Podobné matice mají i „podobné" vlastnosti. Například mají stejné spektrum. Naopak tedy platí, že pokud matice $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ *nemají* stejné spektrum, tak *nejsou* podobné.

## Věta

*Nechť $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Potom matice $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ jsou podobné právě tehdy, když existuje operátor $A \in \mathcal{L}(V_n)$ a dvě báze $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ takové, že*

$$ {}^{\mathcal{X}}A = \mathbb{A} \quad a \quad {}^{\mathcal{Y}}A = \mathbb{B}. $$

## Důsledek

*Mějme dvě podobné matice $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Potom charakteristické polynomy obou matic jsou shodné, tj. $p_{\mathbb{A}} = p_{\mathbb{B}}$ a tedy i spektra obou matic jsou stejná, tj. $\sigma(\mathbb{A}) = \sigma(\mathbb{B})$.*

**K zamyšlení:** Co platí pro determinanty podobných matic?

# Soubor vlastních vektorů k různým vlastním číslům je LN

- Dříve jsme si řekli, že pro některé operátory z $\mathcal{L}(V_n)$ budeme schopni z vlastních vektorů sestavit bázi, ve které bude matice daného operátoru diagonální.
- Následující věta nám říká, že to budeme umět, pokud bude mít daný operátor $n$ různých vlastních čísel.
- Později si ukážeme, že toto ale není nutná podmínka a že „diagonalizující“ bázi budou mít i jiné operátory nemající tuto vlastnost.

## Věta

*Nechť $A \in \mathcal{L}(V)$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ jsou navzájem různá vlastní čísla $A$ a nechť pro každé $i \in \hat{k}$ označuje $x_i$ libovolný vlastní vektor $A$ příslušející vlastnímu číslu $\lambda_i$. Potom soubor $(x_1, \ldots, x_k)$ je LN.*

# Diagonalizace operátoru

## Definice

*Operátor* $A \in \mathcal{L}(V_n)$ *nazveme* ***diagonalizovatelný****, jestliže existuje báze* $\mathcal{X}$ *prostoru* $V_n$ *taková, že matice* ${}^{\mathcal{X}}A$ *je diagonální. Matici* $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ *nazveme* ***diagonalizovatelnou****, jestliže je podobná diagonální matici.*

## Věta (o diagonalizovatelnosti)

*Operátor* $A \in \mathcal{L}(V_n)$ *je diagonalizovatelný, právě když*

$$(\forall \lambda_0 \in \sigma(A))(\nu_a(\lambda_0) = \nu_g(\lambda_0)).$$

## Důsledek

*Nechť* $A \in \mathcal{L}(V_n)$ *a* $(\forall \lambda_0 \in \sigma(A))(\nu_a(\lambda_0) = 1)$*, potom je* $A$ *diagonalizovatelný.*

# Poznámky

## Poznámka

*Geometricky znamená rovnost* ${}^{\mathcal{X}}A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$*, že* $A$ *působí jako operátor změny měřítka ve směrech, které udávají vlastní vektory* $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$*.(Škálovací koeficient ve směru* $x_i$ *by byl vlastní číslo* $\lambda_i$*.)*

## Poznámka

*Matice* $\mathbb{A}$ *chápaná jako operátor* $A$ *na* $\mathbb{C}^n$*,* $\mathbb{A} = {}^{\mathcal{E}_n}A$*, je podle předchozí definice diagonalizovatelná právě když je podobná diagonální matici. Matice* $\mathbb{P}$ *z relace podobnosti je rovna* ${}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{E}_n}$*, kde* $\mathcal{X}$ *je báze diagonalizující* $A$*.*
*Jak jsme viděli v důkazu Věty o diagonalizovatelnosti matice* $\mathbb{P}$ *má ve sloupcích souřadnice vlastních vektorů a diagonální matice* $\mathbb{D} \equiv {}^{\mathcal{X}}A$ *má na diagonále vlastní čísla* $\mathbb{A}$ *(v příslušném pořadí). Potom skutečně platí*

$$\mathbb{A}\mathbb{P} = \mathbb{P}\mathbb{D}, \quad \textit{nebo-li} \quad \mathbb{D} = \mathbb{P}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{P}.$$

# Příklad – diagonalizovatelnost matic $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$

**Příklad**: Uvažujme matice $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ z příkladů uvedených výše.

- V případě matice $\mathbb{A}$ nám vyšlo $\nu_a(2) = \nu_g(2) = 1$ a $\nu_a(3) = \nu_g(3) = 2$. Proto je $\mathbb{A}$ diagonalizovatelná.
- V případě matice $\mathbb{B}$ nám vyšlo $\nu_a(2) = \nu_g(2) = 1$, ale $\nu_a(3) = 2 \neq 1 = \nu_g(3)$. Proto $\mathbb{B}$ diagonalizovatelná není.
- Z toho plyne, že $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ nejsou podobné matice ($\sim$ je tranzitivní), ačkoliv měly stejný charakteristický polynom a spektrum.

# Příklad – pokračování

- Jak vypadá diagonální matice $\mathbb{D}$ a regulární matice $\mathbb{P}$ z relace podobnosti pro diagonalizovatelnou matici $\mathbb{A}$? Do sloupců matice $\mathbb{P}$ stačí napsat vlastní vektory $\mathbb{A}$ a na diagonálu matice $\mathbb{D}$ vlastní čísla. V našem případě

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

  Potom platí

$$\mathbb{A} = \mathbb{P}\mathbb{D}\mathbb{P}^{-1}.$$

  (Ověřte!)

- Kdybychom chtěli udělat podobnou konstrukci matice $\mathbb{P}$ pro matici $\mathbb{B}$, zjistíme, že “nemáme dost vlastních vektorů”. Tj. vlastní vektory netvoří bázi $\mathbb{C}^n$.