Lineární algebra : Skalární součin

(9. přednáška)

Daniel Dombek, Luděk Kleprlík,
Karel Klouda

daniel.dombek@fit.cvut.cz, ludek.kleprlik@fit.cvut.cz,
karel.klouda@fit.cvut.cz

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií

České vysoké učení technické v Praze

LS 2021/2022

vytvořeno: 15. února 2022, 13:47

Hlavní body

Známe z $\mathbb{R}^2$...

- body/šipky v rovině
- standardní skalární součin
- úhel mezi vektory
- velikost vektoru

Skalární součin

Definice

Buď V VP nad $T \subseteq \mathbb{C}$. Zobrazení $(.,.) : V \times V \to T$ nazýváme ***skalární součin****, platí-li pro $\forall x, y, z \in V$ a $\forall \alpha \in T$ axiomy:*

1. $(x, \alpha y + z) = \alpha(x, y) + (x, z)$, *(linearita v druhém argumentu)*
2. $(x, y) = \overline{(y, x)}$, *(hermitovská symetrie)*
3. $(x, x) \geq 0 \wedge ((x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta)$. *(pozitivní definitnost)*

Dvojici $(V, (.,.))$ nazýváme ***prostorem se skalárním součinem*** *(****prehilbertův prostor****) a značíme $\mathcal{H}$.*

Jednoduché vlastnosti skalárního součinu

Poznámka

Je-li $T = \mathbb{R}$ *v axiomu 2. je vlastnost* $(x, y) = (y, x)$ *(symetrie), opruhování je v* $\mathbb{R}$ *nadbytečné.*

Pozorování

Pro libovolné $x, y, z \in \mathcal{H}$ *a* $\alpha \in T$ *ověřte následující vlastnosti skalárního součinu:*

- $(\alpha x + y, z) = \overline{\alpha}(x, z) + (y, z)$,
- $(x, \theta) = (\theta, x) = 0$.

Další příklady skalárních součinů

- Na T^n definujeme
$$(x, y) := \sum_{j=1}^{n} \overline{\xi}_j \eta_j,$$
kde $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $y = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$. Tento skalární součin nazýváme **standardním skalárním součinem**.

- Pro $f, g \in C(\langle 0, 1\rangle)$ (spojité funkce) je zobrazení definované vztahem
$$(f, g) := \int_0^1 \overline{f(x)} g(x) dx$$
skalárním součinem na VP $C(\langle 0, 1\rangle)$.

- Další příklad skalárního součinu je např. zobrazení definované na prostoru matic $\mathbb{C}^{n,n}$,
$$(\mathbb{A}, \mathbb{B}) := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{i,j} b_{i,j}.$$

Skalární součin určuje normu

Definice

Buď $\mathcal{H}$ prostor se skalárním součinem. Zobrazení $\|.\| : \mathcal{H} \to T$ definované vztahem

$$\forall x \in \mathcal{H} : \|x\| := \sqrt{(x, x)}$$

*nazýváme **normou** na $\mathcal{H}$.*

Poznámka

Máme-li $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem, $\|x\|$ je velikost vektoru x, tj. (eukleidovská) vzdálenost bodu $x = (x_1, x_2, x_3)$ od počátku θ. Z tohoto pohledu lze normu vektoru chápat jako zobecněnou velikost vektoru. Podobně je číslo $\|x - y\|$ zobecněnou vzdáleností vektorů x a y.

Vlastnosti normy

Ukažte, že pro $x \in \mathcal{H}$ a $\alpha \in T$ platí:

- $\|x\| \geq 0 \ \wedge \ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$,
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$.

Věta

Buď $\mathcal{H}$ prehilbertův prostor. Potom pro $x, y \in \mathcal{H}$ platí:

1. $$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|, \qquad \textit{(Schwarzova nerovnost)}$$
2. $$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \qquad \textit{(trojúhelníková nerovnost)}$$

Skalární součin určuje úhel

Definice

Buď $\mathcal{H}$ prehilbertův prostor.

a) *Buďte $\theta \neq x, y \in \mathcal{H}$.* ***Úhlem vektorů*** *$x, y$ nazýváme číslo*

$$\arccos \frac{Re\,(x, y)}{\|x\|\,\|y\|}.$$

Tedy úhel dvou vektorů je z intervalu $\langle 0, \pi \rangle$.

b) *Buďte p, q přímky v $\mathcal{H}$.* ***Úhlem přímek*** *p, q nazýváme číslo*

$$\arccos \frac{|Re\,(s_p, s_q)|}{\|s_p\|\,\|s_q\|},$$

kde s_p (resp. s_q) je směrový vektor přímky p (resp. q). Tedy úhel dvou přímek je z intervalu $\langle 0, \pi/2 \rangle$.

Poznámky k definici úhlu vektorů a přímek

- Podle Schwarzovy nerovnosti platí

$$-1 \leq \frac{\operatorname{Re}(x, y)}{\|x\|\|y\|} \leq 1,$$

  tedy výrazy v definici mají smysl.
- Úhel přímek nezávisí na volbě směrových vektorů.

Hlavní body

Ortogonalita

Definice

*Nechť $\mathcal{H}$ je prostor se skalárním součinem. Vektory $x, y \in \mathcal{H}$ nazýváme **ortogonální (kolmé)**, právě když $(x, y) = 0$.*

*Soubor vektorů $(x_1, \ldots, x_n)$ z $\mathcal{H}$ nazveme **ortogonální** (OG), právě když*

$$\forall i, j \in \hat{n}, i \neq j : (x_i, x_j) = 0.$$

*Soubor vektorů $(x_1, \ldots, x_n)$ z $\mathcal{H}$ nazveme **ortonormální** (ON), právě když*

$$\forall i, j \in \hat{n} : (x_i, x_j) = \delta_{ij}.$$

Poznámka

Máme-li $\mathbb{R}^2$ se standardním skalárním součinem je „klasická geometrická kolmost“ vektorů x a y ekvivalentní rovnosti $(x, y) = 0$. Proto je ortogonalita zobecněním pojmu kolmost z Eukleidovské geometrie.

Dvě věty

Věta (Pythagorova věta)

Nechť (x, y) *je OG soubor vektorů z* $\mathcal{H}$. *Potom*

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

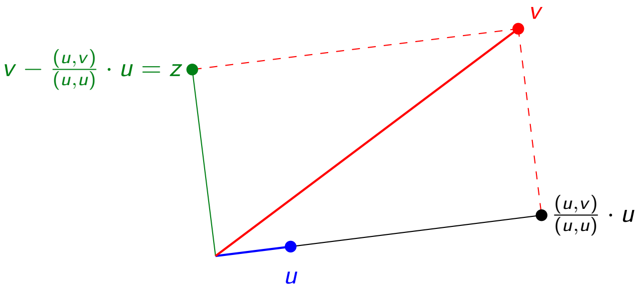
Věta

OG soubor ***nenulových*** *vektorů je LN. Speciálně, každý ON soubor vektorů je LN.*

Ortogonalizace 1

- Každý ON soubor je tedy LN.
- Lze ale najít ON soubor, který je dost velký, aby generoval celý prostor a byl tedy bází?
- Algoritmus, jak najít ON bázi v libovolném konečně dimenzionálním prehilbertově prostoru dává důkaz věty na následujícím slajdu,

Myšlenka pro soubor délky 2: Máme dva vektory u, v a chceme nahradit vektor v vektorem z tak, aby $\langle u, v\rangle = \langle u, z\rangle$ a z bylo kolmé na u.



Ortogonalizace 2

Věta (Gramova-Schmidtova ortogonalizace)

Uvažujme $\mathcal{H}$ je prehilbertův prostor. Nechť $\mathcal{X} = (x_1, \ldots, x_n) \subseteq \mathcal{H}$ je LN soubor vektorů, potom existuje ON soubor vektorů $\mathcal{Y} = (y_1, \ldots, y_n) \subseteq \mathcal{H}$ takový, že

$$\text{pro každé } k \in \hat{n} \text{ je } \langle x_1, \ldots, x_k \rangle = \langle y_1, \ldots, y_k \rangle .$$

Důkaz nevyžadujeme...

1. Vytvoříme OG bázi, položíme

$$\begin{aligned}
z_1 &= x_1 \\
z_2 &= x_2 - \frac{(z_1, x_2)}{(z_1, z_1)} z_1 \\
z_3 &= x_3 - \frac{(z_1, x_3)}{(z_1, z_1)} z_1 - \frac{(z_2, x_3)}{(z_2, z_2)} z_2 \\
&\vdots \\
z_n &= x_n - \frac{(z_1, x_n)}{(z_1, z_1)} z_1 - \frac{(z_2, x_n)}{(z_2, z_2)} z_2 - \ldots - \frac{(z_{n-1}, x_n)}{(z_{n-1}, z_{n-1})} z_{n-1}.
\end{aligned}$$

2. Znormujeme, pro každé $i \in \hat{n}$ položíme $y_i = \frac{1}{\|z_i\|} z_i$.

Ortogonalizace – příklad

Uvažujte $\mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem. Nalezněme ON bázi podprostoru $P = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle \subset\subset \mathbb{R}^4$, je-li

$$x_1 = (1, 2, 2, -1), \quad x_2 = (1, 1, -5, 3), \quad x_3 = (3, 2, 8, -7).$$

Zortonormalizovat Gramovým Schmidtovým procesem. Podle vzorečku dříve položíme

$$\begin{aligned}
z_1 &= x_1 = (1, 2, 2, -1) \\
z_2 &= x_2 - \frac{(z_1, x_2)}{(z_1, z_1)} z_1 = (1, 1, -5, 3) - \frac{-10}{10}(1, 2, 2, -1) = (2, 3, -3, 2) \\
z_3 &= x_3 - \frac{(z_1, x_3)}{(z_1, z_1)} z_1 - \frac{(z_2, x_3)}{(z_2, z_2)} z_2 \\
&= (3, 2, 8, -7) - \frac{30}{10}(1, 2, 2, -1) - \frac{-26}{26}(2, 3, -3, 2) = (2, -1, -1, 2).
\end{aligned}$$

Získali jsme *OG* soubor, který normalizujeme

$$y_1 = \frac{z_1}{\|z_1\|} = \frac{1}{\sqrt{10}}(1, 2, 2, -1), \quad y_2 = \frac{z_2}{\|z_2\|} = \frac{1}{\sqrt{26}}(2, 3, -3, 2), y_3 \quad = \frac{z_3}{\|z_3\|} = \frac{1}{\sqrt{10}}(2, -1, -1, 2).$$

Soubor (y_1, y_2, y_3) je potom ON báze podprostoru P.

Souřadnice v OG a ON bázi 1

Věta

Nechť $\mathcal{X} = (x_1, \ldots, x_n)$ *je ON báze prehilbertova prostoru* $\mathcal{H}$*, potom pro každé* $z \in \mathcal{H}$ *platí*

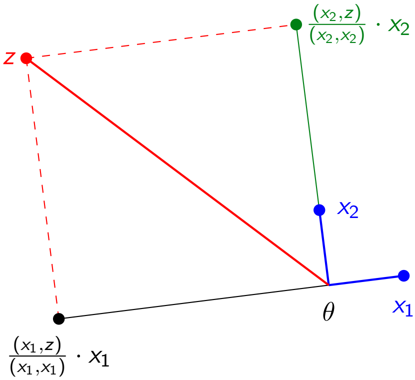
$$z = \sum_{i=1}^{n} (x_i, z) x_i.$$

Neboli $(z)_{\mathcal{X}} = \big((x_1, z), (x_2, z), \ldots, (x_n, z)\big)$*.*

Poznámka

Pro OG bázi platí, že i*tá souřadnice vůči této bázi je rovna*

$$\alpha_i = \frac{(x_i, z)}{(x_i, x_i)} = \frac{(x_i, z)}{\|x_i\|^2}.$$



Vizualizace souřadnic vektoru z vůči bázi (x_1, x_2)

Poznámka: Je-li $v \neq \theta$, přiřazení P_v definované jako

$$P_v(z) := \frac{(v, z)}{(v, v)} \cdot v \text{ pro } z \in \mathcal{H}$$

se nazývá ortogonální projekce na přímku $\langle v \rangle$

Hlavní body

Symetrické matice

Dost často při řešení nějakého problému zjistíme, že „matice problému“ má nějaké speciální vlastnosti. Potom hlubší znalost těchto speciálních matic nám může ulehčit či umožnit nalezení řešení. Ukazuje se, že velmi důležitý atribut je symetrie.

Definice

Matice $\mathbb{A} \in T^{n,n}$ se nazývá symetrická, pokud

$$\mathbb{A}^T = \mathbb{A}.$$

Symetrické matice – jejich vlastní čísla a vektory

Uvažujeme prostor $\mathbb{C}^n$ **se standardním skalárním součinem**

Lemma

Pro $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ *symetrickou matici a* $x, y \in \mathbb{C}^n$ *platí*

$$(\mathbb{A}x, y) = (x, \mathbb{A}y).$$

Věta

Buď $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ *symetrická matice, potom*

1. $\sigma(\mathbb{A}) \subseteq \mathbb{R}$,
2. *vlastní vektory* $\mathbb{A}$ *příslušející dvěma* ***různým*** *vlastním číslům jsou vzájemně kolmé.*

Pozorování: reálné vlastní číslo reálné matice $\rightarrow$ báze vlastního podprostoru lze zvolit reálná

Symetrické matice – jsou hezky diagonalizovatelné

Věta

Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ *je symetrická matice, potom pro každé vlastní číslo* $\lambda_0 \in \sigma(\mathbb{A})$ *je* $\nu_g(\lambda_0) = \nu_a(\lambda_0)$*.*

Věta

Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n.n}$ *je symetrická. Potom existují její vlastní vektory* $y_1, \ldots y_n$ *takové, že soubor* $(y_1, \ldots, y_n)$ *je ON báze* $\mathbb{R}^n$*.*

Poznámka: V této části jsme z vlastností symetrických matic potřebovali jen $\overline{\mathbb{A}^T} = \mathbb{A}$. Maticím $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$, které splňují tento vztah se říká **hermitovské** či také samosdružené matice.