Matematická analýza 1

Reálná čísla

Tomáš Kalvoda[1], Pavel Paták[2]

[1]tomas.kalvoda@fit.cvut.cz, [2]pavel.patak@fit.cvut.cz

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze

21. února 2025
LS 2024/2025

Hlavní body

1. Připomenutí
2. Iracionalita a axiom úplnosti
3. Rozšířená reálná osa, okolí bodu a hromadný bod
4. Reprezentace čísel v počítači

Hlavní výsledky této přednášky

- Orientace mezi číselnými množinami, osvěžení pojmu *tělesa*.
- Chápání rozdílu mezi racionálními $\mathbb{Q}$ a reálnými čísly $\mathbb{R}$ (axiom úplnosti).
- Zavedení rozšířené reálné osy $\overline{\mathbb{R}}$ a algebraické operace na ní.
- Zavedení pojmu okolí bodu $a \in \overline{\mathbb{R}}$ a pojmu hromadného bodu množiny $M \subset \mathbb{R}$.
- Povědomí o rozdílnosti mezi reálnými čísly a jejich reprezentací v počítači.

Hlavní body

Připomenutí: množinová notace

Než se pustíme do hlavního výkladu, upozorněme na notaci používanou napříč tímto předmětem.

- To, že nějaké x patří do množiny M, značíme „$x \in M$." Symbol $\in$ je stylizované ε, resp. *e*. Často také říkáme, že „x je *elementem* množiny M".
- Je-li $P(x)$ nějaký výrok o prvku x z univerza $\mathcal{U}$, pak množinu M všech $x \in \mathcal{U}$, pro které je $P(x)$ pravdivé, značíme

  $$M = \{x \in \mathcal{U} \mid P(x)\}$$

  případně

  $$M = \{x \in \mathcal{U} : P(x)\}.$$

- Symbol $\subset$ používáme pro *neostrou* inkluzi, tj. „$A \subset B$" připouští i rovnost obou množin. Pokud chceme v inkluzi rovnost explicitně vyloučit, pak použijeme symbol $\subsetneq$, nebo (a lépe) tuto možnost explicitně slovně zdůrazníme.
- *Maximum*, resp. *minimum*, množiny $M \subset \mathbb{R}$ je prvek $y \in M$ splňující $y \geq x$, resp. $y \leq x$, pro všechna $x \in M$. Značíme ho $\max M$, resp. $\min M$. Pro každou množinu M nemusí existovat.

Připomenutí: číselné množiny

Z předchozího studia jistě znáte následující číselné množiny:

- *přirozená* čísla $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$,
- *přirozená* čísla s nulou $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$,
- *celá* čísla $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$,
- *racionální* čísla $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z} \text{ a } q \in \mathbb{N} \text{ jsou nesoudělná} \right\}$,
- *reálná* čísla $\mathbb{R}$.

Mezi těmito množinami platí inkluze $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$.

Vybavíme-li $\mathbb{Q}$, resp. $\mathbb{R}$, obvyklými binárními operacemi sčítání a násobení, pak tvoří **těleso** (viz BI-LA1; anglicky *field*).

Připomenutí: číselné množiny

Z předchozího studia jistě znáte následující číselné množiny:

- *přirozená* čísla $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$,
- *přirozená* čísla s nulou $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$,
- *celá* čísla $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$,
- *racionální* čísla $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z} \text{ a } q \in \mathbb{N} \text{ jsou nesoudělná} \right\}$,
- *reálná* čísla $\mathbb{R}$.

Mezi těmito množinami platí inkluze $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$.

Vybavíme-li $\mathbb{Q}$, resp. $\mathbb{R}$, obvyklými binárními operacemi sčítání a násobení, pak tvoří **těleso** (viz BI-LA1; anglicky *field*).

Tj.: trojice $(T, +, \cdot)$ *tvoří těleso, právě když* $(T, +)$ *je Abelovská grupa s neutrálním prvkem* 0, $(T \setminus \{0\}, \cdot)$ *je Abelovská grupa s neutrálním prvkem* 1 *a násobení je distributivní vůči sčítání.*

My budeme v tomto předmětu pracovat prakticky výhradně s tělesem reálných čísel $\mathbb{R}$.

Připomenutí: reálná čísla tvoří těleso, tj.:

Na množině reálných čísel existují dvě významné binární operace (tedy zobrazení) nazývané **sčítání** a **násobení**,

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{a} \quad \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

splňující známé komutativní, asociativní a distributivní zákony:

$$\begin{aligned} a + b &= b + a, \\ (a + b) + c &= a + (b + c), \\ a \cdot (b + c) &= (a \cdot b) + (a \cdot c), \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a \cdot b &= b \cdot a, \\ (a \cdot b) \cdot c &= a \cdot (b \cdot c), \\ &\text{pro každé } a, b, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Připomenutí: reálná čísla tvoří těleso, tj.:

Na množině reálných čísel existují dvě významné binární operace (tedy zobrazení) nazývané **sčítání** a **násobení**,

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{a} \quad \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

splňující známé komutativní, asociativní a distributivní zákony:

$$\begin{aligned} a + b &= b + a, & a \cdot b &= b \cdot a, \\ (a + b) + c &= a + (b + c), & (a \cdot b) \cdot c &= a \cdot (b \cdot c), \\ a \cdot (b + c) &= (a \cdot b) + (a \cdot c), & &\text{pro každé } a, b, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

V reálných číslech máme k dispozici čísla 0 a 1 splňující

$$0 + a = a + 0 = a, \text{ pro lib. } a \in \mathbb{R}, \quad 1 \cdot a = a \cdot 1 = a, \text{ pro lib. } a \in \mathbb{R}.$$

Připomenutí: reálná čísla tvoří těleso, tj.:

Na množině reálných čísel existují dvě významné binární operace (tedy zobrazení) nazývané **sčítání** a **násobení**,

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{a} \quad \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

splňující známé komutativní, asociativní a distributivní zákony:

$$\begin{aligned} a + b &= b + a, & a \cdot b &= b \cdot a, \\ (a + b) + c &= a + (b + c), & (a \cdot b) \cdot c &= a \cdot (b \cdot c), \\ a \cdot (b + c) &= (a \cdot b) + (a \cdot c), & &\text{pro každé } a, b, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

V reálných číslech máme k dispozici čísla 0 a 1 splňující

$$0 + a = a + 0 = a, \text{ pro lib. } a \in \mathbb{R}, \quad 1 \cdot a = a \cdot 1 = a, \text{ pro lib. } a \in \mathbb{R}.$$

Pro každé $a \in \mathbb{R}$ existuje $-a \in \mathbb{R}$ splňující $a + (-a) = -a + a = 0$.

Připomenutí: reálná čísla tvoří těleso, tj.:

Na množině reálných čísel existují dvě významné binární operace (tedy zobrazení) nazývané **sčítání** a **násobení**,

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{a} \quad \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

splňující známé komutativní, asociativní a distributivní zákony:

$$\begin{aligned} a + b &= b + a, & a \cdot b &= b \cdot a, \\ (a + b) + c &= a + (b + c), & (a \cdot b) \cdot c &= a \cdot (b \cdot c), \\ a \cdot (b + c) &= (a \cdot b) + (a \cdot c), & &\text{pro každé } a, b, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

V reálných číslech máme k dispozici čísla 0 a 1 splňující

$$0 + a = a + 0 = a, \text{ pro lib. } a \in \mathbb{R}, \quad 1 \cdot a = a \cdot 1 = a, \text{ pro lib. } a \in \mathbb{R}.$$

Pro každé $a \in \mathbb{R}$ existuje $-a \in \mathbb{R}$ splňující $a + (-a) = -a + a = 0$.

Pro každé nenulové $a \in \mathbb{R}$ existuje $a^{-1} = \frac{1}{a} \in \mathbb{R}$ splňující $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$.

Připomenutí: uspořádání reálných čísel

Reálná čísla lze srovnávat podle velikosti, tj. existuje mezi nimi relace **úplného uspořádaní** (viz BI-DML):

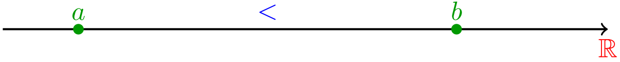
$$a < b \text{ (a je menší než b)}, \quad \text{resp.} \quad a \leq b \text{ (a je menší nebo rovno b)}.$$

Připomenutí: uspořádání reálných čísel

Reálná čísla lze srovnávat podle velikosti, tj. existuje mezi nimi relace **úplného uspořádaní** (viz BI-DML):

$$a < b \text{ (} a \text{ je menší než } b\text{)}, \quad \text{resp.} \quad a \leq b \text{ (} a \text{ je menší nebo rovno } b\text{)}.$$

Toto uspořádání je *úplné* a díky tomu si množinu reálných čísel geometricky představujeme jako body na přímce (tzv. **reálná** či **číselná osa**).

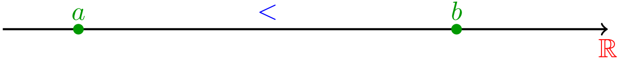


Připomenutí: uspořádání reálných čísel

Reálná čísla lze srovnávat podle velikosti, tj. existuje mezi nimi relace **úplného uspořádaní** (viz BI-DML):

$$a < b \ (a \text{ je menší než } b), \quad \text{resp.} \quad a \le b \ (a \text{ je menší nebo rovno } b).$$

Toto uspořádání je *úplné* a díky tomu si množinu reálných čísel geometricky představujeme jako body na přímce (tzv. **reálná** či **číselná osa**).



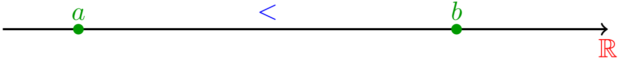
Pokud chceme zdůraznit tento geometrický pohled, mluvíme o $x \in \mathbb{R}$ také jako o *bodech*.

Připomenutí: uspořádání reálných čísel

Reálná čísla lze srovnávat podle velikosti, tj. existuje mezi nimi relace **úplného uspořádaní** (viz BI-DML):

$$a < b \ (a \text{ je menší než } b), \quad \text{resp.} \quad a \leq b \ (a \text{ je menší nebo rovno } b).$$

Toto uspořádání je *úplné* a díky tomu si množinu reálných čísel geometricky představujeme jako body na přímce (tzv. **reálná** či **číselná osa**).



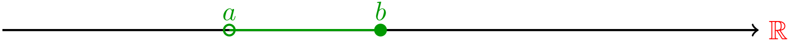
Pokud chceme zdůraznit tento geometrický pohled, mluvíme o $x \in \mathbb{R}$ také jako o *bodech*.
Relace uspořádání je svázána s operací sčítání a násobení známými pravidly pro *počítání s nerovnicemi*. Připomeňme je zde explicitně:

$$\begin{aligned}
a < b \text{ a } c \in \mathbb{R} \quad &\Rightarrow \quad a + c < b + c, \\
a < b \text{ a } c > 0 \quad &\Rightarrow \quad a \cdot c < b \cdot c, \\
a < b \text{ a } c < 0 \quad &\Rightarrow \quad a \cdot c > b \cdot c.
\end{aligned}$$

Připomenutí: intervaly reálných čísel

Pomocí uspořádání definujeme speciální podmnožiny množiny $\mathbb{R}$, a to **intervaly**. Pro $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, klademe:

otevřený interval:	$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$,
uzavřený interval:	$\langle a, b\rangle := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$,
polootevřený (polouzavřený) interval:	$\langle a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$,
analogicky	$(a, b\rangle := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$.



Připomenutí: intervaly reálných čísel

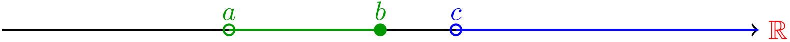
Pomocí uspořádání definujeme speciální podmnožiny množiny $\mathbb{R}$, a to **intervaly**. Pro $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, klademe:

otevřený interval:	$(a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$,
uzavřený interval:	$\langle a,b\rangle := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$,
polootevřený (polouzavřený) interval:	$\langle a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$,
analogicky	$(a,b\rangle := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$.

A **neomezené intervaly**

$$(c,+\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid c < x\}, \qquad (-\infty,+\infty) := \mathbb{R},$$
$$(-\infty,c\rangle := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq c\}, \qquad \text{atd.}$$

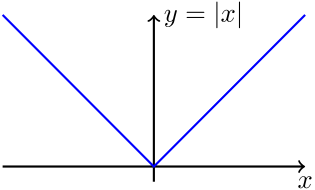
Ve všech těchto intervalech je a tzv. *počáteční* bod a b tzv. *koncový* bod příslušného intervalu.



Připomenutí: absolutní hodnota reálného čísla

Zavádíme **absolutní hodnotu** reálného čísla a předpisem

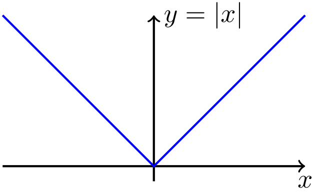
$$|a| := \begin{cases} a, & \text{pro } a \geq 0, \\ -a, & \text{pro } a < 0. \end{cases}$$



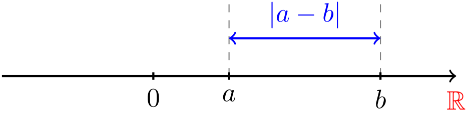
Připomenutí: absolutní hodnota reálného čísla

Zavádíme **absolutní hodnotu** reálného čísla a předpisem

$$|a| := \begin{cases} a, & \text{pro } a \geq 0, \\ -a, & \text{pro } a < 0. \end{cases}$$



Vzdálenost dvou reálných čísel $a, b \in \mathbb{R}$ na číselné ose lze poté pomocí absolutní hodnoty vyjádřit jako $\big|a - b\big| = \big|b - a\big|$.



Hlavní body

Iracionální čísla

- Množina iracionálních čísel je poněkud „magická“. Nelze ji popsat nijak jednoduše.

Iracionální čísla

- Množina iracionálních čísel je poněkud „magická“. Nelze ji popsat nijak jednoduše.
- *Definovat* iracionální čísla jakožto reálná čísla, která nejsou racionální, převádí problém charakterizace iracionálního čísla na definici reálného čísla.

  V tomto kurzu se konstrukci reálných čísel explicitně nevěnujeme a vystačíme si s geometrickou představou reálných čísel jakožto *bodů na číselné ose*.

  Racionální čísla $\mathbb{Q}$ i reálná čísla $\mathbb{R}$ splňují algebraické vlastnosti *tělesa* uvedené dříve. Čím se tedy vlastně *liší*?

Iracionální čísla

- Množina iracionálních čísel je poněkud „magická". Nelze ji popsat nijak jednoduše.
- *Definovat* iracionální čísla jakožto reálná čísla, která nejsou racionální, převádí problém charakterizace iracionálního čísla na definici reálného čísla.

  V tomto kurzu se konstrukci reálných čísel explicitně nevěnujeme a vystačíme si s geometrickou představou reálných čísel jakožto *bodů na číselné ose*.

  Racionální čísla $\mathbb{Q}$ i reálná čísla $\mathbb{R}$ splňují algebraické vlastnosti *tělesa* uvedené dříve. Čím se tedy vlastně *liší*?
- Ze svého dřívějšího studia jistě znáte několik iracionálních čísel (např. Ludolfovo číslo π, Eulerovo číslo e, odmocnina ze dvou $\sqrt{2}$,...). V jistém smyslu je ale iracionálních čísel podstatně více než racionálních.

Iracionální čísla

- Množina iracionálních čísel je poněkud „magická“. Nelze ji popsat nijak jednoduše.
- *Definovat* iracionální čísla jakožto reálná čísla, která nejsou racionální, převádí problém charakterizace iracionálního čísla na definici reálného čísla.

  V tomto kurzu se konstrukci reálných čísel explicitně nevěnujeme a vystačíme si s geometrickou představou reálných čísel jakožto *bodů na číselné ose*.

  Racionální čísla $\mathbb{Q}$ i reálná čísla $\mathbb{R}$ splňují algebraické vlastnosti *tělesa* uvedené dříve. Čím se tedy vlastně *liší*?
- Ze svého dřívějšího studia jistě znáte několik iracionálních čísel (např. Ludolfovo číslo π, Eulerovo číslo e, odmocnina ze dvou $\sqrt{2}$,...). V jistém smyslu je ale iracionálních čísel podstatně více než racionálních.
- Použijeme-li intuitivního geometrického znázornění $\mathbb{R}$ jako přímky, pak lze požadovat, aby přímka nebyla nikde „přetržená“, jinými slovy množina reálných čísel „neobsahuje díry“, tvoří „kontinuum“.

Iracionální čísla

- Množina iracionálních čísel je poněkud „magická“. Nelze ji popsat nijak jednoduše.
- *Definovat* iracionální čísla jakožto reálná čísla, která nejsou racionální, převádí problém charakterizace iracionálního čísla na definici reálného čísla.

  V tomto kurzu se konstrukci reálných čísel explicitně nevěnujeme a vystačíme si s geometrickou představou reálných čísel jakožto *bodů na číselné ose*.

  Racionální čísla $\mathbb{Q}$ i reálná čísla $\mathbb{R}$ splňují algebraické vlastnosti *tělesa* uvedené dříve. Čím se tedy vlastně *liší*?
- Ze svého dřívějšího studia jistě znáte několik iracionálních čísel (např. Ludolfovo číslo π, Eulerovo číslo e, odmocnina ze dvou $\sqrt{2}$,…). V jistém smyslu je ale iracionálních čísel podstatně více než racionálních.
- Použijeme-li intuitivního geometrického znázornění $\mathbb{R}$ jako přímky, pak lze požadovat, aby přímka nebyla nikde „přetržená“, jinými slovy množina reálných čísel „neobsahuje díry“, tvoří „kontinuum“.
- Objasněme tento zatím vágní požadavek na následujícím příkladu.

Iracionalita $\sqrt{2}$

Příklad.

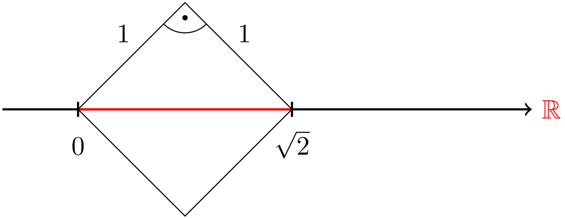
Existuje kladné řešení rovnice $x^2 = 2$, které označujeme symbolem $\sqrt{2}$.

Iracionalita $\sqrt{2}$

Příklad.

Existuje kladné řešení rovnice $x^2 = 2$, které označujeme symbolem $\sqrt{2}$.

- Motivací, či geometrickou interpretací, této úlohy může být problém nalezení délky úhlopříčky ve čtverci o straně délky 1.

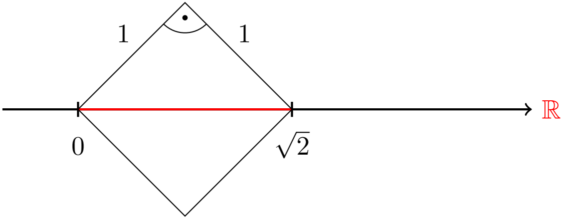


Iracionalita $\sqrt{2}$

Příklad.

Existuje kladné řešení rovnice $x^2 = 2$, které označujeme symbolem $\sqrt{2}$.

- Motivací, či geometrickou interpretací, této úlohy může být problém nalezení délky úhlopříčky ve čtverci o straně délky 1.



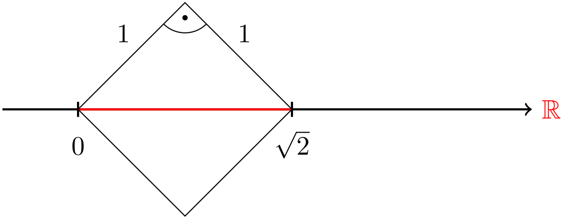
- Dokažme (pomocí sporu na tabuli), že takovéto x nemůže být racionální číslo.

Iracionalita $\sqrt{2}$

Příklad.

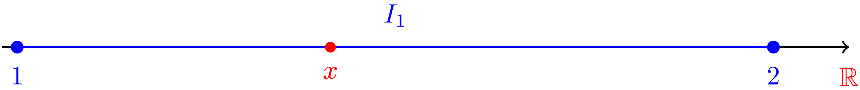
Existuje kladné řešení rovnice $x^2 = 2$, které označujeme symbolem $\sqrt{2}$.

- Motivací, či geometrickou interpretací, této úlohy může být problém nalezení délky úhlopříčky ve čtverci o straně délky 1.



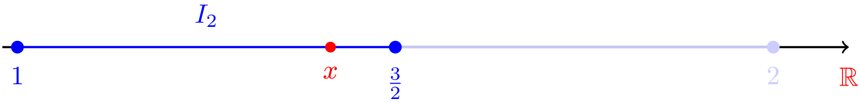
- Dokažme (pomocí sporu na tabuli), že takovéto x nemůže být racionální číslo.
- Pravý koncový bod výše zkonstruované červené úsečky odpovídá číslu x, které není racionální. Jak tedy zformulovat obecný požadavek „bezděrovosti“ reálné osy?

Iracionalita $\sqrt{2}$



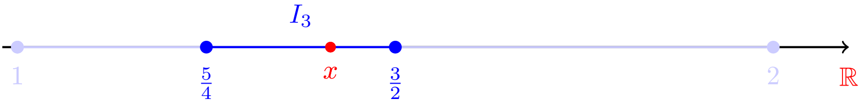
- Určitě musí být $x \in I_1 := \langle 1, 2 \rangle$ (*proč?*).

Iracionalita $\sqrt{2}$



- Určitě musí být $x \in I_1 := \langle 1, 2 \rangle$ (*proč?*).
- Rozpůlením intervalu I_1 zjistíme, že $x \in I_2 := \langle 1, \frac{3}{2} \rangle$.

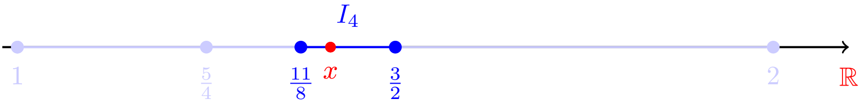
Iracionalita $\sqrt{2}$



- Určitě musí být $x \in I_1 := \langle 1, 2 \rangle$ (*proč?*).
- Rozpůlením intervalu I_1 zjistíme, že $x \in I_2 := \langle 1, \frac{3}{2} \rangle$.
- Pokračujeme nadále půlením intervalů. Protože konce intervalů jsou racionální čísla lze postup libovolně opakovat a dostáváme tak intervaly I_n, $n \in \mathbb{N}$, uvnitř kterých musí ležet x. Pro tyto intervaly je $I_{n+1} \subset I_n$ a délka n-tého intervalu je $\frac{1}{2^{n-1}}$. Náš požadavek, aby reálná osa neměla díru v bodě $x = \sqrt{2}$ v tomto případě znamená, že

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n = \left\{ \sqrt{2} \right\}.$$

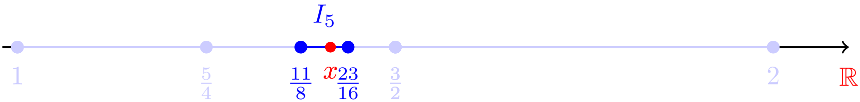
Iracionalita $\sqrt{2}$



- Určitě musí být $x \in I_1 := \langle 1, 2 \rangle$ (*proč?*).
- Rozpůlením intervalu I_1 zjistíme, že $x \in I_2 := \langle 1, \frac{3}{2} \rangle$.
- Pokračujeme nadále půlením intervalů. Protože konce intervalů jsou racionální čísla lze postup libovolně opakovat a dostáváme tak intervaly I_n, $n \in \mathbb{N}$, uvnitř kterých musí ležet x. Pro tyto intervaly je $I_{n+1} \subset I_n$ a délka n-tého intervalu je $\frac{1}{2^{n-1}}$. Náš požadavek, aby reálná osa neměla díru v bodě $x = \sqrt{2}$ v tomto případě znamená, že

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n = \left\{ \sqrt{2} \right\}.$$

Iracionalita $\sqrt{2}$



- Určitě musí být $x \in I_1 := \langle 1, 2 \rangle$ (*proč?*).
- Rozpůlením intervalu I_1 zjistíme, že $x \in I_2 := \langle 1, \frac{3}{2} \rangle$.
- Pokračujeme nadále půlením intervalů. Protože konce intervalů jsou racionální čísla lze postup libovolně opakovat a dostáváme tak intervaly I_n, $n \in \mathbb{N}$, uvnitř kterých musí ležet x. Pro tyto intervaly je $I_{n+1} \subset I_n$ a délka n-tého intervalu je $\frac{1}{2^{n-1}}$. Náš požadavek, aby reálná osa neměla díru v bodě $x = \sqrt{2}$ v tomto případě znamená, že

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n = \left\{ \sqrt{2} \right\}.$$

Axiom úplnosti

Požadavek aby množina reálných čísel „neměla díry“ můžeme přesně formulovat jako tzv. **axiom úplnosti**:

Axiom úplnosti

Požadavek aby množina reálných čísel „neměla díry" můžeme přesně formulovat jako tzv. **axiom úplnosti**:

> *Každý smršťující se systém uzavřených intervalů, jejichž délky jsou libovolně malé, má neprázdný průnik.*

Axiom úplnosti

Požadavek aby množina reálných čísel „neměla díry“ můžeme přesně formulovat jako tzv. **axiom úplnosti**:

> *Každý smršťující se systém uzavřených intervalů, jejichž délky jsou libovolně malé, má neprázdný průnik.*

Přesněji, pokud jsou I_n, $n = 1, 2, \ldots$, uzavřené intervaly splňující

- $I_n \supset I_{n+1}$ pro každé $n = 1, 2, \ldots$,
- pro každé $\varepsilon > 0$ existuje n tak, že délka I_n je menší než ε,

pak

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset.$$

Axiom úplnosti

Požadavek aby množina reálných čísel „neměla díry“ můžeme přesně formulovat jako tzv. **axiom úplnosti**:

> *Každý smršťující se systém uzavřených intervalů, jejichž délky jsou libovolně malé, má neprázdný průnik.*

Přesněji, pokud jsou I_n, $n = 1, 2, \ldots$, uzavřené intervaly splňující

- $I_n \supset I_{n+1}$ pro každé $n = 1, 2, \ldots$,
- pro každé $\varepsilon > 0$ existuje n tak, že délka I_n je menší než ε,

pak

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset.$$

$\mathbb{R}$ vs. $\mathbb{Q}$

Množina $\mathbb{R}$ reálných čísel axiom úplnosti splňuje. Množina racionálních čísel $\mathbb{Q}$ ho nesplňuje.

$\mathbb{R}$ je nespočetná množina, kdežto $\mathbb{Q}$ je spočetná množina (viz BI-DML).

Chybějících iracionálních čísel je tedy *více* než racionálních čísel ve smyslu mohutnosti množin.

Hlavní body

1. Připomenutí
2. Iracionalita a axiom úplnosti
3. **Rozšířená reálná osa, okolí bodu a hromadný bod**
4. Reprezentace čísel v počítači

Rozšířená reálná osa

Pro budoucí úvahy týkající se limit je výhodné formálně rozšířit reálnou osu o dva další symboly „$+\infty$“ a „$-\infty$“:

Definice (Rozšířená reálná osa / *extended real number line*):

Množinu $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ nazýváme **rozšířenou reálnou osou**.

Každý prvek množiny $\overline{\mathbb{R}}$ je tedy buď reálné číslo, nebo jeden ze symbolů $+\infty$, $-\infty$. Na tyto body se můžeme dívat jako na idealizované „konce“ číselné osy („kompaktifikace“).

Rozšířená reálná osa

Pro budoucí úvahy týkající se limit je výhodné formálně rozšířit reálnou osu o dva další symboly „$+\infty$“ a „$-\infty$“:

Definice (Rozšířená reálná osa / *extended real number line*):

Množinu $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ nazýváme **rozšířenou reálnou osou**.

Každý prvek množiny $\overline{\mathbb{R}}$ je tedy buď reálné číslo, nebo jeden ze symbolů $+\infty$, $-\infty$. Na tyto body se můžeme dívat jako na idealizované „konce“ číselné osy („kompaktifikace“).

Na $\overline{\mathbb{R}}$ přirozeně zavádíme uspořádání následujícím způsobem: $a < +\infty$ pro každé $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ a $-\infty < a$ pro každé $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Rozšířená reálná osa

Pro budoucí úvahy týkající se limit je výhodné formálně rozšířit reálnou osu o dva další symboly „$+\infty$“ a „$-\infty$“:

Definice (Rozšířená reálná osa / *extended real number line*):

Množinu $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ nazýváme **rozšířenou reálnou osou**.

Každý prvek množiny $\overline{\mathbb{R}}$ je tedy buď reálné číslo, nebo jeden ze symbolů $+\infty$, $-\infty$. Na tyto body se můžeme dívat jako na idealizované „konce“ číselné osy („kompaktifikace“).

Na $\overline{\mathbb{R}}$ přirozeně zavádíme uspořádání následujícím způsobem: $a < +\infty$ pro každé $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ a $-\infty < a$ pro každé $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Při počítání limit budeme chtít provádět algebraické operace nejen s reálnými čísly, ale i s některými výrazy obsahujícími tyto symboly nekonečen.

Proto musíme rozšířit i algebraické operace sčítání a násobení, tím se zabývá následující slide...

Algebraické operace na $\overline{\mathbb{R}}$

Definice (Algebraické operace na $\overline{\mathbb{R}}$):

Nechť $a \in \overline{\mathbb{R}}$, v závislosti na jeho hodnotě klademe

$$
\begin{aligned}
\text{pro } a > -\infty: &\quad a + (+\infty) = (+\infty) + a := +\infty,\\
\text{pro } a < +\infty: &\quad a + (-\infty) = (-\infty) + a := -\infty,\\
\text{pro } a > 0: &\quad a \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot a := +\infty,\\
\text{pro } a < 0: &\quad a \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot a := -\infty,\\
\text{pro } a > 0: &\quad a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a := -\infty,\\
\text{pro } a < 0: &\quad a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a := +\infty.
\end{aligned}
$$

Dále klademe $\frac{1}{+\infty} = \frac{1}{-\infty} := 0$. Rozdíl definujeme vztahem $a - b := a + (-b)$, podíl $\frac{a}{b} := a \cdot \frac{1}{b}$, pouze v případě, že výraz na pravé straně je má smysl jakožto operace mezi reálnými čísly nebo je definován výše. Konečně pak $-(+\infty) := -\infty$, $-(-\infty) := +\infty$, $|+\infty| = |-\infty| := +\infty$ a $\sqrt[k]{+\infty} := +\infty$ pro libovolné $k \in \mathbb{N}$.

Algebraické operace na $\overline{\mathbb{R}}$

Příklad.

Speciálně tedy například platí

$$4 + (+\infty) = +\infty, \qquad -2 \cdot (-\infty) = +\infty,$$

$$\frac{10^{10^{10}}}{-\infty} = 0, \qquad +\infty - (-\infty) = +\infty.$$

Algebraické operace na $\overline{\mathbb{R}}$

Příklad.

Speciálně tedy například platí

$$4 + (+\infty) = +\infty, \qquad -2 \cdot (-\infty) = +\infty,$$
$$\frac{10^{10^{10}}}{-\infty} = 0, \qquad +\infty - (-\infty) = +\infty.$$

Pozor! Množina $\overline{\mathbb{R}}$ vybavená operacemi uvedenými na předchozím slidu již netvoří těleso. Algebraické operace jsme totiž (z dobrých důvodů, jak uvidíme později) ani nedefinovali pro všechny argumenty.

Nedefinovány zůstávají výrazy

$$+\infty - (+\infty), \quad +\infty + (-\infty), \quad 0 \cdot (\pm\infty), \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty},$$
$$-\infty - (-\infty), \quad -\infty + (+\infty), \quad \frac{a}{0} \text{ pro } a \in \overline{\mathbb{R}},$$

Okolí bodu $a \in \mathbb{R}$

Pomocí intervalů dále zavádíme pojem *okolí*, který budeme intenzivně využívat k vyjádření „blízkosti“ bodů na (rozšířené) reálné ose.

Definice (Okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ / *neighborhood*):

Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Otevřený interval $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$ nazýváme ε-**okolím bodu** a a značíme ho $U_a(\varepsilon)$.

Okolí bodu $a \in \mathbb{R}$

Pomocí intervalů dále zavádíme pojem *okolí*, který budeme intenzivně využívat k vyjádření „blízkosti“ bodů na (rozšířené) reálné ose.

Definice (Okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ / *neighborhood*):

Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Otevřený interval $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$ nazýváme **ε-okolím bodu** a a značíme ho $U_a(\varepsilon)$.

Je-li $a \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$, pak $x \in U_a(\varepsilon)$, právě když platí nerovnost $|x - a| < \varepsilon$. Tedy

$$U_a(\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon\}.$$

Okolí bodu $a \in \mathbb{R}$

Pomocí intervalů dále zavádíme pojem *okolí*, který budeme intenzivně využívat k vyjádření „blízkosti“ bodů na (rozšířené) reálné ose.

Definice (Okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ / *neighborhood*):

Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Otevřený interval $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$ nazýváme ε-**okolím bodu** a a značíme ho $U_a(\varepsilon)$.

Je-li $a \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$, pak $x \in U_a(\varepsilon)$, právě když platí nerovnost $|x - a| < \varepsilon$. Tedy

$$U_a(\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon\}.$$

Definice (Pravé a levé okolí bodu $a \in \mathbb{R}$):

Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Polouzavřený interval $\langle a,\ a + \varepsilon)$, resp. $(a - \varepsilon,\ a\rangle$, nazýváme **pravým**, resp. **levým**, ε-**okolím bodu** a a značíme $U_a^+(\varepsilon)$, resp. $U_a^-(\varepsilon)$.

Okolí bodu $a \in \mathbb{R}$

Pomocí intervalů dále zavádíme pojem *okolí*, který budeme intenzivně využívat k vyjádření „blízkosti“ bodů na (rozšířené) reálné ose.

Definice (Okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ / *neighborhood*):

Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Otevřený interval $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$ nazýváme **ε-okolím bodu** a a značíme ho $U_a(\varepsilon)$.

Je-li $a \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$, pak $x \in U_a(\varepsilon)$, právě když platí nerovnost $|x - a| < \varepsilon$. Tedy

$$U_a(\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon\}.$$

Definice (Pravé a levé okolí bodu $a \in \mathbb{R}$):

Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Polouzavřený interval $\langle a,\ a + \varepsilon)$, resp. $(a - \varepsilon,\ a\rangle$, nazýváme **pravým**, resp. **levým**, **ε-okolím bodu** a a značíme $U_a^+(\varepsilon)$, resp. $U_a^-(\varepsilon)$.

O množinách $U_a^\pm(\varepsilon)$ někdy též mluvíme jako o *jednostranných* okolích, a o $U_a(\varepsilon)$ jako o *oboustranném* okolí bodu $a \in \mathbb{R}$.

Okolí bodu $a \in \mathbb{R}$

Pomocí intervalů dále zavádíme pojem *okolí*, který budeme intenzivně využívat k vyjádření „blízkosti“ bodů na (rozšířené) reálné ose.

Definice (Okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ / *neighborhood*):

Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Otevřený interval $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$ nazýváme ε**-okolím bodu** a a značíme ho $U_a(\varepsilon)$.

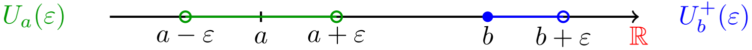
Je-li $a \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$, pak $x \in U_a(\varepsilon)$, právě když platí nerovnost $|x - a| < \varepsilon$. Tedy

$$U_a(\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon\}.$$

Definice (Pravé a levé okolí bodu $a \in \mathbb{R}$):

Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Polouzavřený interval $\langle a,\ a + \varepsilon)$, resp. $(a - \varepsilon,\ a\rangle$, nazýváme **pravým**, resp. **levým**, ε**-okolím bodu** a a značíme $U_a^+(\varepsilon)$, resp. $U_a^-(\varepsilon)$.

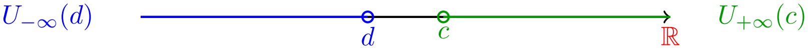
O množinách $U_a^\pm(\varepsilon)$ někdy též mluvíme jako o *jednostranných* okolích, a o $U_a(\varepsilon)$ jako o *oboustranném* okolí bodu $a \in \mathbb{R}$.



Okolí bodů $+\infty$ a $-\infty$

Definice:

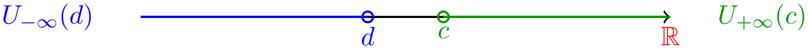
Nechť $c \in \mathbb{R}$. Otevřený interval $(c,\ +\infty)$, resp. $(-\infty, c)$, nazýváme **okolím bodu** $+\infty$, resp. $-\infty$, a značíme ho $U_{+\infty}(c)$, resp. $U_{-\infty}(c)$.



Okolí bodů $+\infty$ a $-\infty$

Definice:

Nechť $c \in \mathbb{R}$. Otevřený interval $(c,\ +\infty)$, resp. $(-\infty, c)$, nazýváme **okolím bodu** $+\infty$, resp. $-\infty$, a značíme ho $U_{+\infty}(c)$, resp. $U_{-\infty}(c)$.



- Není-li potřeba specifikovat velikost okolí, píšeme zkráceně U_a, U_a^+, U_a^-, $U_{+\infty}$ nebo $U_{-\infty}$, a máme na mysli *nějaké* okolí uvedeného bodu.

- Okolí bodu a jsme definovali pro libovolné $a \in \overline{\mathbb{R}}$, avšak tato množina je vždy podmnožinou $\mathbb{R}$. Speciálně tedy nikdy neobsahuje symboly $+\infty$ a $-\infty$.

- Písmenko U k označení okolí se používá tradičně a pochází z německého výrazu *die Umgebung* pro „okolí“. Pokud budeme potřebovat rozlišovat mezi více okolími budeme používat i písmenko V, W, či H.

Hromadný bod množiny

Pomocí pojmu okolí můžeme formalizovat užitečný jev „hromadění se“ prvků množiny. Tento pojem bude zásadní pro pozdější definici limity funkce/posloupnosti.

Definice (Hromadný bod / *cluster point*):

Bod $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ nazýváme **hromadným bodem množiny** $M \subset \mathbb{R}$, právě když v *každém* okolí U_α bodu α leží nějaký prvek množiny M *různý* od α.

[1] Důkaz.

Hromadný bod množiny

Pomocí pojmu okolí můžeme formalizovat užitečný jev „hromadění se“ prvků množiny. Tento pojem bude zásadní pro pozdější definici limity funkce/posloupnosti.

Definice (Hromadný bod / *cluster point*):

Bod $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ nazýváme **hromadným bodem množiny** $M \subset \mathbb{R}$, právě když v *každém* okolí U_α bodu α leží nějaký prvek množiny M *různý* od α.

Jako ilustrační příklad uvažme množinu $M = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Tato množina má hromadný bod a to $\alpha = 0$.

[1] Důkaz.

Hromadný bod množiny

Pomocí pojmu okolí můžeme formalizovat užitečný jev „hromadění se“ prvků množiny. Tento pojem bude zásadní pro pozdější definici limity funkce/posloupnosti.

Definice (Hromadný bod / *cluster point*):

Bod $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ nazýváme **hromadným bodem množiny** $M \subset \mathbb{R}$, právě když v *každém* okolí U_α bodu α leží nějaký prvek množiny M *různý* od α.

Jako ilustrační příklad uvažme množinu $M = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Tato množina má hromadný bod a to $\alpha = 0$.

Skutečně[1], je-li $U_0(\varepsilon)$ okolí bodu 0 o poloměru $\varepsilon > 0$, pak $\frac{1}{n} \in M$ leží v tomto okolí pro libovolné $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

[1] Důkaz.

Hromadný bod množiny

Pomocí pojmu okolí můžeme formalizovat užitečný jev „hromadění se“ prvků množiny. Tento pojem bude zásadní pro pozdější definici limity funkce/posloupnosti.

Definice (Hromadný bod / *cluster point*):

Bod $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ nazýváme **hromadným bodem množiny** $M \subset \mathbb{R}$, právě když v *každém* okolí U_α bodu α leží nějaký prvek množiny M *různý* od α.

Jako ilustrační příklad uvažme množinu $M = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Tato množina má hromadný bod a to $\alpha = 0$.

Skutečně[1], je-li $U_0(\varepsilon)$ okolí bodu 0 o poloměru $\varepsilon > 0$, pak $\frac{1}{n} \in M$ leží v tomto okolí pro libovolné $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Je 0 jediným hromadným bodem M?

[1] Důkaz.

Hromadný bod množiny: příklady

Příklad.

Rozmyslete následující situace:

- Každý bod množiny $\langle 0, 1\rangle$ je hromadným bodem množiny $M = (0, 1)$.
- Množina $M = \mathbb{N}$ má právě jeden hromadný bod, $+\infty$.
- Množina $M = \mathbb{Z}$ má právě dva hromadné body, $+\infty$ a $-\infty$.
- Množina $M = \mathbb{R}$ má jako hromadný bod libovolný prvek z $\overline{\mathbb{R}}$.
- Množina $M = \{1\}$ nemá ani jeden hromadný bod. Podobně každá množina M s konečným počtem prvků nemá ani jeden hromadný bod.

Hlavní body

Reprezentace čísel v počítači

Na závěr této přednášky učiníme několik důležitých poznámek k reprezentaci čísel v počítačích. Je dobré uvědomit si, jaký je rozdíl mezi reálnými čísly a „strojovými čísly" (*float*).

Nejprve připomeňme z BI-DML známé poznatky:

- Číselné množiny $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$ jsou *nekonečné*, tj. nemají konečný počet prvků.
- Množiny $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$ jsou *spočetné* (mají stejnou mohutnost jako $\mathbb{N}$).
- Množina reálných čísel $\mathbb{R}$ je *nespočetná* ($\Leftarrow$ Cantorův diagonální argument).

Protože paměť počítačů je omezená je zřejmé, že *v celé obecnosti* nelze ani jednu z těchto množin v počítači reprezentovat.

Přirozená, celá a racionální čísla

Celá čísla lze snadno reprezentovat v binární soustavě, tj. $k \in \mathbb{Z}$ lze vyjádřit například ve tvaru

$$k = +\sum_{j=0}^{n} k_j 2^j \geq 0 \quad \text{resp.} \quad k = -1 - \sum_{j=0}^{n} k_j 2^j < 0.$$

kde n je přirozené číslo a $k_0, \ldots, k_n \in \{0, 1\}$.

- Pro fixní n v paměti ukládáme znaménko a $k_0, \ldots, k_n$. Tímto způsobem pokryjeme jistou **konečnou podmnožinu** $\mathbb{Z}$.
- I kdybychom n neomezili („libovolná přesnost“), pak pro většinu hodnot narazíme na konečnou paměť našeho stroje.
- Například pro 64 bitový *integer* se znaménkem je největší, resp. nejmenší, reprezentovatelná hodnota

$$+\sum_{j=0}^{62} 2^j = 9\,223\,372\,036\,854\,775\,807, \quad \text{resp.} \quad -1-\sum_{j=0}^{62} 2^j = -9\,223\,372\,036\,854\,775\,808.$$

- Algebraické operace mezi takovýmito čísly **probíhají exaktně a nedochází při nich k chybám** (vyjma problému s přetečením a podtečením).

Přirozená, celá a racionální čísla

- Racionální čísla můžeme v paměti uchovávat jakožto dvě celá čísla.
- Algebraické operace mezi racionálními čísly vycházejí z algebraických operací mezi celými čísly a tedy i je lze vykonávat exaktně (bez chyby).
- Stále ovšem hrozí problém nemožnosti reprezentovat příliš velký (v absolutní hodnotě) jmenovatel nebo čitatel.
- Některé programovací jazyky (např. typ `Rational` v Julia nebo Haskellu, `<ratio>` v C++, `Fraction` v Pythonu,...) a různé CAS (*Mathematica* a příbuzní) umožňují pracovat s racionálními čísly tímto exaktním způsobem.

Strojová čísla: IEEE-754

Omezení definovaná ve standardu IEEE-754 jsou následující:

přesnost	mantisa m	$d = \#$ bitů e	parametr b
poloviční (`binary16`, *half precision*)	10 bitů	5	15
jednoduchá (`binary32`, *single precision*)	23 bitů	8	127
dvojitá (`binary64`, *double precision*)	52 bitů	11	1023
čtyřnásobná (`binary128`, *quadruple prec.*)	112 bitů	15	16383

Ve všech případech ještě máme jeden bit pro znaménko, $s \in \{0, 1\}$.

- Pro $0 < e < 2^d - 1$ a m klademe $x = (-1)^s \cdot (1.m_2)_2 \cdot 2^{e-b}$ (tzv. **normalizované číslo**).
- Pro $e = 0$ a $m \neq 0$ klademe $x = (-1)^s \cdot (0.m_2)_2 \cdot 2^{1-b}$ (tzv. **subnormální číslo**).
- Pro $e = 0$, $m = 0$ a $s = 0$ klademe $x = +0$ (pro $s = 1$ pak $x = -0$).
- Pro $e = 2^d - 1$, $m = 0$ a $s = 0$ klademe $x = +\texttt{Inf}$.
- Pro $e = 2^d - 1$, $m = 0$ a $s = 1$ klademe $x = -\texttt{Inf}$.
- Pro $e = 2^d - 1$ a $m \neq 0$ klademe $x = \texttt{NaN}$ (*Not a Number*).

Strojová čísla: problémy

- Na předchozím slidu je v rámci standardu IEEE-754 definováno, která čísla lze v kterém typu exaktně vyjádřit.
- Dále standard definuje, jak se zaokrouhluje při provádění algebraických operací a při ukládání čísel, která nejsou exaktně vyjádřitelná ve zvolené přesnosti.
- Takřka všechny algebraické operace jsou již nutně zatíženy *chybou*. V důsledku toho operace mezi strojovými čísly **ztrácí** řadu očekávaných vlastností (jako asociativita nebo distributivita).
- Výhodou strojových čísel je samozřejmě **rychlost** operací, které probíhají na hardware. Cena za to je dána výše zmíněnými problémy.
- Při implementaci „matematického algoritmu“ je proto nutné se zabývat i vlivem výše uvedených chyb. Některé algoritmy nejsou pro implementaci ve strojových číslech z těchto důvodů vhodné, například Gaussova eliminace. Těmito problémy se (mimo jiné) zabývá **numerická matematika**.

Strojová čísla: Příklad $1/2$ a $1/3$

Uvažme v dnešní době standardní dvojitou přesnost (64 bitový *float*).

- Číslo $\frac{1}{2}$ je přesně reprezentovatelné $\frac{1}{2} = (+1)\cdot(1.0\cdots0)_2 \cdot 2^{1022-1023}$.
- Číslo $\frac{1}{3}$ už ne, jeho binární rozvoj je nekonečný[2]:

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^j = \frac{1}{4}\cdot(1.01010101\overline{01})_2 \approx$$

$$\approx (+1)\cdot(1.\underbrace{0101\cdots01}_{52\ \text{bitů}})_2 \cdot 2^{1021-1023} = \frac{6\,004\,799\,503\,160\,661}{18\,014\,398\,509\,481\,984} = q.$$

Zde jsme zaokrouhlili směrem k nule. V počítači není uložena $1/3$ přesně! Přesně je v něm uloženo výše zmíněné q.

- Bez většího komentáře jenom učiňme následující pozorování

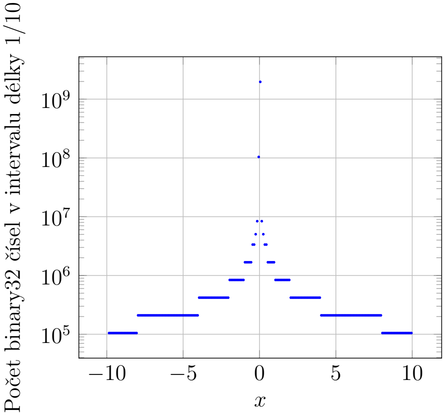
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}, \quad \frac{1}{2}+q = \frac{15\,011\,998\,757\,901\,653}{18\,014\,398\,509\,481\,984}, \quad \frac{1}{2}+q \approx \frac{3\,752\,999\,689\,475\,413}{4\,503\,599\,627\,370\,496}.$$

kde $\approx$ opět znázorňuje, jaké číslo bychom dostali po zaokrouhlení do strojových čísel.

[2] Zde lehce předbíháme k nekonečným řadám, reklama na BI-MA2.

Strojová čísla: IEEE-754

- Zaokrouhlování, vedle podtečení a přetečení, není jedinou patologií strojových čísel.
- Rozložení těchto čísel po číselné ose je silně nerovnoměrné. Daleko od nuly jsou mezery mezi čísly poměrně velké!



Hlavní body

5 Dodatek

Komentář

- V této přednášce jsme se striktně drželi reálného oboru. Komplexní čísla v BI-MA1, resp. BI-MA2, nebudeme tolik využívat, těžiště je silně v *reálné* analýze. Spoustu konceptů lze ale rozšířit i na komplexní čísla, *komplexní* analýzou se na FITu zabývá například předmět BI-VMM.

- Aplikace funkcí komplexní proměnné jsou důležité, například rychlá Fourierova transformace, kterou využíváte dnes a denně, je bez komplexních čísel jen těžkopádně formulovatelná.

- IEEE-754 standard: *IEEE Standard for Floating-Point Arithmetic, IEEE Std 754-2019 (Revision of IEEE 754-2008)*, doi: 10.1109/IEEESTD.2019.8766229.

- Hlášení problémů (nejen) v této prezentaci.