Matematická analýza 1

Reálné funkce

Tomáš Kalvoda[1], Pavel Paták[2]

[1]tomas.kalvoda@fit.cvut.cz, [2]pavel.patak@fit.cvut.cz

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze

6. března 2025
LS 2024/2025

Hlavní body

1. Připomenutí
2. Reálná funkce
3. Reálná funkce reálné proměnné
4. Vlastnosti funkcí
5. Asymptotické chování funkcí (1. část)
6. Přehled elementárních funkcí

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$f\colon A \to \mathbb{R}$$

Hlavní výsledky této přednášky

- Reálná funkce jakožto speciální případ zobrazení.
- Připomenutí a zavedení základních vlastností funkcí.
- Zavedení asymptotických symbolů $\mathcal{O}$ a o. Během semestru zavedeme i další symboly.
- Přehled elementárních funkcí, aneb co bychom už měli ovládat (z většiny opakování; viz první proseminář)!

Hlavní body

1 Připomenutí

2 Reálná funkce

3 Reálná funkce reálné proměnné

4 Vlastnosti funkcí

5 Asymptotické chování funkcí (1. část)

6 Přehled elementárních funkcí

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$f: A \to \mathbb{R}$$

Připomenutí: zobrazení

V této přednášce vycházíme ze znalostí získaných v předmětu BI-DML.

Předpokládáme znalost následujících pojmů:

- (totální) **zobrazení** (*mapping*) množiny A do množiny B (symbolicky $f: A \to B$),
- **definiční obor** D_f a **obor hodnot** H_f zobrazení,
- různé *typy* zobrazení (prosté/injektivní, na/surjektivní, vzájemně jednoznačné/bijektivní),
- **inverzní** zobrazení,
- **obraz** a **vzor množiny** při zobrazení,
- **skládání** a **zúžení** zobrazení,
- **rovnost** zobrazení.

Pokud v těchto pojmech tápete, doporučuji si je osvěžit! Máme i odpovídající Dodatek ve studijním textu.

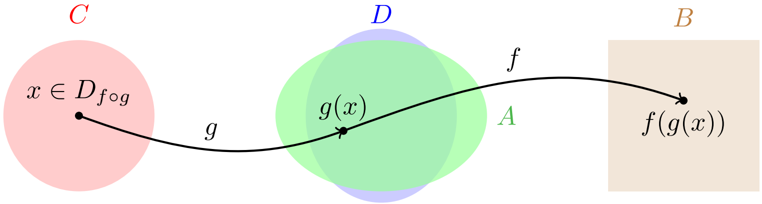
Připomenutí: zobrazení

Pro jistotu na tomto místě zafixujme značení tří důležitých operací.

Definice (Složení zobrazení a jeho značení pomocí $\circ$):

Jsou-li $f\colon A \to B$, $g\colon C \to D$ a $g(C) \cap A$ je neprázdná množina, pak **složené zobrazení** $f \circ g$ je definované následovně

$$(f \circ g)(x) := f(g(x)), \quad \text{pro } x \in D_{f\circ g} := \{x \in C \mid g(x) \in A\}.$$



Definice (Zúžení a jeho značení):

Je-li $f\colon A \to B$ a $M \subset A$ neprázdná množina, pak **zúžením** f **na množinu** M máme na mysli zobrazení $f|_M : M \to B$ předpisem $(f|_M)(x) = f(x)$ pro $x \in M$.

Hlavní body

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$f\colon A \to \mathbb{R}$$

Reálná funkce: úvodní poznámky

Definice (Reálná funkce / *real function*):

Mějme $n \in \mathbb{N}$ a $A \subset \mathbb{R}^n$ neprázdnou množinu. Zobrazení f množiny A do množiny $\mathbb{R}$, tj. symbolicky $f\colon A \to \mathbb{R}$, nazýváme **reálnou funkcí**.

Reálná funkce: úvodní poznámky

Definice (Reálná funkce / *real function*):

Mějme $n \in \mathbb{N}$ a $A \subset \mathbb{R}^n$ neprázdnou množinu. Zobrazení f množiny A do množiny $\mathbb{R}$, tj. symbolicky $f\colon A \to \mathbb{R}$, nazýváme **reálnou funkcí**.

- Připomeňme, že takovéto zobrazení f je formálně zadáno jako podmnožina kartézského součinu $A \times \mathbb{R}$. Funkční hodnoty zobrazení f v bodě $x \in A$ značíme standardně $f(x)$. Definiční obor funkce $f\colon A \to \mathbb{R}$ značíme symbolem D_f (f je ve spodním indexu).

Reálná funkce: úvodní poznámky

Definice (Reálná funkce / *real function*):

Mějme $n \in \mathbb{N}$ a $A \subset \mathbb{R}^n$ neprázdnou množinu. Zobrazení f množiny A do množiny $\mathbb{R}$, tj. symbolicky $f\colon A \to \mathbb{R}$, nazýváme **reálnou funkcí**.

- Připomeňme, že takovéto zobrazení f je formálně zadáno jako podmnožina kartézského součinu $A \times \mathbb{R}$. Funkční hodnoty zobrazení f v bodě $x \in A$ značíme standardně $f(x)$. Definiční obor funkce $f\colon A \to \mathbb{R}$ značíme symbolem D_f (f je ve spodním indexu).
- Uvedená definice je záměrně obecná a zastřešuje pojmy „reálná funkce reálné proměnné“, „reálná posloupnost“ a „reálná funkce více reálných proměnných“, s kterými se budeme postupně podrobněji seznamovat.

Reálná funkce: úvodní poznámky

Definice (Reálná funkce / *real function*):

Mějme $n \in \mathbb{N}$ a $A \subset \mathbb{R}^n$ neprázdnou množinu. Zobrazení f množiny A do množiny $\mathbb{R}$, tj. symbolicky $f\colon A \to \mathbb{R}$, nazýváme **reálnou funkcí**.

- Připomeňme, že takovéto zobrazení f je formálně zadáno jako podmnožina kartézského součinu $A \times \mathbb{R}$. Funkční hodnoty zobrazení f v bodě $x \in A$ značíme standardně $f(x)$. Definiční obor funkce $f\colon A \to \mathbb{R}$ značíme symbolem D_f (f je ve spodním indexu).
- Uvedená definice je záměrně obecná a zastřešuje pojmy „reálná funkce reálné proměnné“, „reálná posloupnost“ a „reálná funkce více reálných proměnných“, s kterými se budeme postupně podrobněji seznamovat.
- Z programátorského pohledu zde mluvíme o tzv. **čisté funkci** (*pure function*). Většina „funkcí“, které při programování používáte, nejsou funkce ve výše uvedeném smyslu (i kdybychom relaxovali požadavek na reálnou návratovou hodnotu – jejich výstup může být ovlivněn i něčím dalším, než hodnotou argumentů, a navíc mohou mít vedlejší efekty).

Reálná funkce: příklady

Během svého studia jste již na spoustu funkcí a zobrazení narazili a ještě narazíte. V matematice jde o velmi ústřední objekt zájmu nacházející velmi různorodá využití.

Pro ilustraci zmiňme několik různorodých příkladů:

- $f(x) = \frac{x}{1-x}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, např. $f(2) = -2$.
- $g(x,y,z) = x + y^2 + z^3$, $D_g = \mathbb{R}^3$, např. $g(3,2,1) = 8$.
- $h(k) = k^{k!}$, $D_h = \mathbb{N}$, např. $h(4) = 281\,474\,976\,710\,656$.
- Pro každé $k \in \mathbb{N}$ nechť $p(k)$ označuje $k$tou cifru za desetinnou čárkou v desítkovém rozvoji Ludolfova čísla π. Tedy $D_p = \mathbb{N}$ a $p(1) = 1$, $p(2) = 4$, atd.

Nezávisle proměnnou budeme označovat symboly n, k, či ℓ v situacích, kdy probíhají nějakou podmnožinu celých čísel („diskrétní proměnná“). Symboly x, y a z používáme pro „spojitou proměnnou,“ nebo v situaci kdy nemáme bližší informaci o definičním oboru.

Reálné funkce: úvodní poznámky

Mezi reálnými funkcemi lze přirozeně provádět základní algebraické operace:

Definice (Násobek, součet, součin a podíl reálných funkcí):

Mějme reálné funkce $f\colon A \to \mathbb{R}$ a $g\colon B \to \mathbb{R}$ a konstantu $c \in \mathbb{R}$.

- Potom definujeme **násobek reálné funkce** f **konstantou** c jako funkci

$$(cf)(x) := c \cdot f(x), \quad x \in D_{cf} := A.$$

- Pokud $C := A \cap B \neq \emptyset$, pak definujeme **součet** $f + g\colon C \to \mathbb{R}$ a **součin** $f \cdot g\colon C \to \mathbb{R}$ těchto reálných funkcí předpisy

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x) \text{ a } (f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x) \text{ pro } x \in C.$$

- Dále pokud $D := \{x \in A \cap B \mid g(x) \neq 0\} \neq \emptyset$, pak definujeme jejich **podíl** $\frac{f}{g} : D \to \mathbb{R}$ předpisem

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)} \text{ pro } x \in D.$$

Hlavní body

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$f\colon A \to \mathbb{R}$$

Reálná funkce reálné proměnné

Během tohoto semestru se budeme soustředit na funkce s jednou reálnou proměnnou.

Definice (Reálná funkce reálné proměnné):

Mějme neprázdnou množinu $A \subset \mathbb{R}$. Zobrazení $f\colon A \to \mathbb{R}$ nazýváme **reálnou funkcí reálné proměnné** (pro účely tohoto semestru zkráceně **funkcí**).

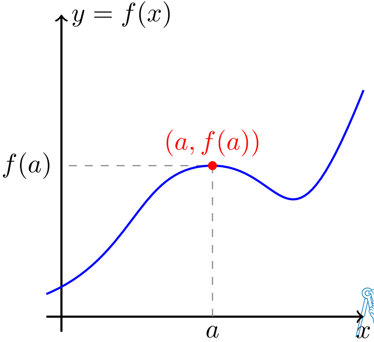
Reálná funkce reálné proměnné

Během tohoto semestru se budeme soustředit na funkce s jednou reálnou proměnnou.

Definice (Reálná funkce reálné proměnné):

Mějme neprázdnou množinu $A \subset \mathbb{R}$. Zobrazení $f\colon A \to \mathbb{R}$ nazýváme **reálnou funkcí reálné proměnné** (pro účely tohoto semestru zkráceně **funkcí**).

- O definičním oboru funkce, tedy množině A zmíněné výše, požadujeme pouze aby byla podmnožinou $\mathbb{R}$.
- Reálné funkce reálné proměnné bývá zvykem znázorňovat pomocí **grafu funkce** $\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in D_f\}$, který je podmnožinou roviny, v které použijeme kartézské souřadnice x a y.



Maximální definiční obor

Velmi často zadáváme funkce pomocí „výrazu“. Jak je to poté s definičním oborem?

Definice (Maximální – někdy též přirozený – definiční obor):

Reálná funkce reálné proměnné je často zadána tzv. *explicitně*. Tedy pouze pomocí předpisu typu $y = f(x)$. Chápeme ji pak definovánu na **maximálním definičním oboru**, to jest na množině všech reálných x, pro které má výraz $f(x)$ smysl jakožto reálné číslo.

Maximální definiční obor

Velmi často zadáváme funkce pomocí „výrazu“. Jak je to poté s definičním oborem?

Definice (Maximální – někdy též přirozený – definiční obor):

Reálná funkce reálné proměnné je často zadána tzv. *explicitně*. Tedy pouze pomocí předpisu typu $y = f(x)$. Chápeme ji pak definovánu na **maximálním definičním oboru**, to jest na množině všech reálných x, pro které má výraz $f(x)$ smysl jakožto reálné číslo.

- Funkce f definovaná výrazem $f(x) := \frac{\sqrt{x}}{x-1}$ má maximální definiční obor
$$D_f = \langle 0, 1) \cup (1, +\infty).$$
- Definiční obor můžeme ale explicitně vynutit. Například
$$g(x) = \sqrt{x}, \quad \text{pro } x \in D_g := \langle 1, +\infty)$$
je funkce s definičním oborem $\langle 1, +\infty)$ a je tak *různá* od funkce h zadané *pouhým* předpisem $h(x) := \sqrt{x}$. Funkce g je pouze jistým *zúžením* funkce h, která má definiční obor $D_h = \langle 0, +\infty)$.

Inverzní funkce

Definice (Inverzní funkce / *inverse function*):

Nechť $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ je prostá funkce. Funkci $f^{-1} : H_f \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem

$$f^{-1}(x) := y, \quad \text{pro } x \in H_f \text{ splňující } f(y) = x, \text{ kde } y \in D_f,$$

nazýváme **inverzní funkcí** k funkci f.

Příklad.

K několika příkladům inverzních funkcí se dostaneme později během přednášky. Zde alespoň zmiňme jednoduché příklady a poznámky:

- Pro $f(x) = x^2$, $D_f = \langle 0, +\infty)$, platí $f^{-1}(x) = \sqrt[2]{x}$.
- Pro $f(x) = x^3$ platí $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.
- Všimněte si, že obecně neplatí vztah $f^{-1}(x) = \frac{1}{f(x)}$.
- Pro prostou funkci f platí: pro každé $x \in D_f$ platí $f^{-1}(f(x)) = x$ a pro každé $x \in H_f$ platí $f(f^{-1}(x)) = x$.

Hlavní body

1. Připomenutí
2. Reálná funkce
3. Reálná funkce reálné proměnné
4. Vlastnosti funkcí
5. Asymptotické chování funkcí (1. část)
6. Přehled elementárních funkcí

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$f: A \to \mathbb{R}$$

Základní vlastnosti funkcí

Z předcházejícího studia známe následující zcela základní vlastnosti: funkce $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ je...

- ...**prostá** (injektivní), právě když pro každá $x, y \in D_f$ z rovnosti $f(x) = f(y)$ plyne rovnost $x = y$.
- ...**na** (surjektivní), právě když $H_f = \mathbb{R}$.
- ...**vzájemně jednoznačná** (bijektivní), právě když je prostá i na současně.

Tyto vlastnosti lze popsat i alternativními způsoby, jak jistě již víte!

Dále zavádíme pojem omezené a konstantní funkce:

- Funkci $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ nazveme **omezenou**, právě když existuje konstanta $K > 0$ taková, že pro všechna $x \in D_f$ platí $|f(x)| < K$.
- Funkci $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ nazveme **konstantní**, právě když existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že pro všechna $x \in D_f$ platí $f(x) = c$.

Různé typy monotonie funkcí

Definice:

Uvažme funkci $f: A \to \mathbb{R}$ a množinu $M \subset A$. Potom funkci f nazýváme...

- ...**rostoucí na množině** M, právě když pro každé $x_1, x_2 \in M$ splňující $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- ...**klesající na množině** M, právě když pro každé $x_1, x_2 \in M$ splňující $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) \geq f(x_2)$.
- ...**ostře rostoucí na množině** M, právě když pro každé $x_1, x_2 \in M$ splňující $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) < f(x_2)$.
- ...**ostře klesající na množině** M, právě když pro každé $x_1, x_2 \in M$ splňující $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) > f(x_2)$.

Funkci, která je rostoucí nebo klesající nazýváme **monotonní**. Funkci, která je ostře rostoucí nebo ostře klesající nazýváme **ryze monotonní**.

Různé typy monotonie funkcí

Definice:

Uvažme funkci $f\colon A \to \mathbb{R}$ a množinu $M \subset A$. Potom funkci f nazýváme...

- ...**rostoucí na množině** M, právě když pro každé $x_1, x_2 \in M$ splňující $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- ...**klesající na množině** M, právě když pro každé $x_1, x_2 \in M$ splňující $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) \geq f(x_2)$.
- ...**ostře rostoucí na množině** M, právě když pro každé $x_1, x_2 \in M$ splňující $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) < f(x_2)$.
- ...**ostře klesající na množině** M, právě když pro každé $x_1, x_2 \in M$ splňující $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) > f(x_2)$.

Funkci, která je rostoucí nebo klesající nazýváme **monotonní**. Funkci, která je ostře rostoucí nebo ostře klesající nazýváme **ryze monotonní**.

Pokud v uvedených pojmech vynecháme „na množině M“, máme pak na mysli funkci f, jež má příslušnou vlastnost na celém svém definičním oboru.

Různé typy monotonie funkcí

Definice:

Uvažme funkci $f\colon A \to \mathbb{R}$ a množinu $M \subset A$. Potom funkci f nazýváme...

- ...**rostoucí na množině** M, právě když pro každé $x_1, x_2 \in M$ splňující $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- ...**klesající na množině** M, právě když pro každé $x_1, x_2 \in M$ splňující $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) \geq f(x_2)$.
- ...**ostře rostoucí na množině** M, právě když pro každé $x_1, x_2 \in M$ splňující $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) < f(x_2)$.
- ...**ostře klesající na množině** M, právě když pro každé $x_1, x_2 \in M$ splňující $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) > f(x_2)$.

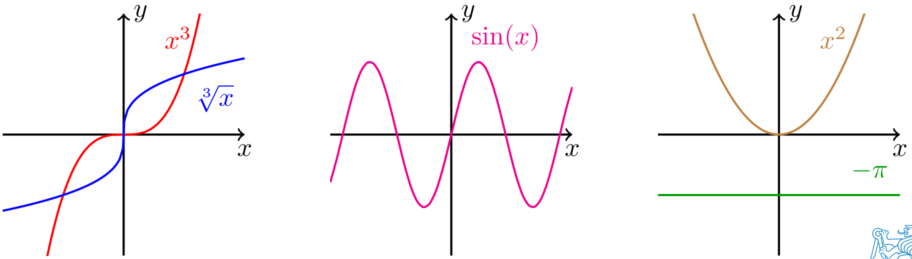
Funkci, která je rostoucí nebo klesající nazýváme **monotonní**. Funkci, která je ostře rostoucí nebo ostře klesající nazýváme **ryze monotonní**.

Pokud v uvedených pojmech vynecháme „na množině M“, máme pak na mysli funkci f, jež má příslušnou vlastnost na celém svém definičním oboru.
N.B.: Je-li f ostře rostoucí, resp. klesající, pak je i prostá a funkce k ní inverzní je také ostře rostoucí, resp. klesající.

Různé typy monotonie funkcí: příklady

Příklad.

- Příkladem rostoucí funkce (na $\mathbb{R}$) je x^3 (a také $\sqrt[3]{x}$). Nejsou omezené.
- Funkce x^2 není na $\mathbb{R}$ ani rostoucí ani klesající, ale je klesající na intervalu $(-\infty, 0\rangle$ a rostoucí na intervalu $\langle 0, +\infty)$.
- Funkce $\sin$ je ostře rostoucí na $(-\pi/2, \pi/2)$ i $\langle -\pi/2, \pi/2\rangle$. Je omezená.
- Funkce $-\pi$ je zároveň klesající i rostoucí, a tak je i konstantní.

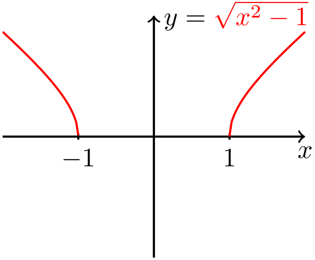


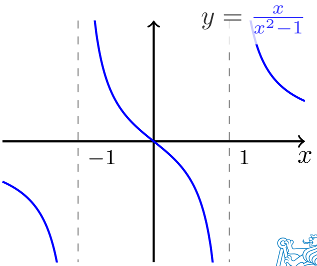
Parita funkcí: sudost a lichost

Definice (Sudá a lichá funkce / *even and odd function*):

Mějme funkci $f\colon A \to \mathbb{R}$ jejíž definiční obor je symetrický vůči počátku, tedy pro každé $x \in D_f$ je i $-x \in D_f$. Funkci f nazýváme...

- ...**sudou** právě když pro každé $x \in D_f$ platí $f(-x) = f(x)$.
- ...**lichou** právě když pro každé $x \in D_f$ platí $f(-x) = -f(x)$.

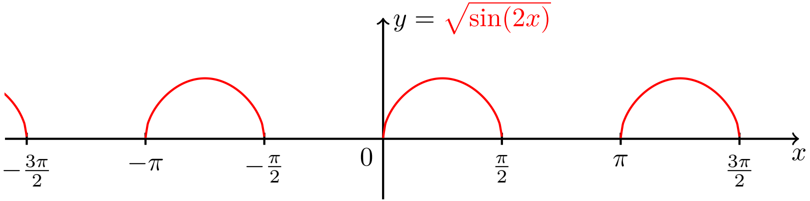




Periodičnost funkcí

Definice (Periodická funkce / *periodic function*):

Mějme funkci $f\colon A \to \mathbb{R}$, konstantu $T > 0$ a nechť pro každé $x \in A$ je i $x + T$, $x - T \in A$. Pokud pro každé $x \in A$ platí $f(x + T) = f(x)$, pak funkci f nazýváme **periodickou funkcí s periodou** T.



Poznámka:

Pozor, periodická funkce nutně nemusí mít *nejmenší* periodu. Příkladem je libovolná konstantní funkce nebo tzv. Dirichletova funkce (dává 1 racionálním číslům a 0 iracionálním číslům).

Hlavní body

1 Připomenutí

2 Reálná funkce

3 Reálná funkce reálné proměnné

4 Vlastnosti funkcí

5 Asymptotické chování funkcí (1. část)

6 Přehled elementárních funkcí

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$f: A \to \mathbb{R}$$

Asymptotické chování funkcí: motivace

Velmi často potřebujeme porovnávat chování funkčních hodnot dvou funkcí, když se jejich argument blíží nějaké hodnotě. Například:

- Funkce $f(x)$ „klesá“ v bodě $a = 1$ „rychleji“ k nule než $(x-1)^2$.
- Funkce $g(x)$ „neroste rychleji“ než $\sqrt{x}$ pro x jdoucí do nekonečna.
- Funkce $f(x)$ a $g(x)$ se „chovají stejně“, když x jde k 0.

Asymptotické chování funkcí: motivace

Velmi často potřebujeme porovnávat chování funkčních hodnot dvou funkcí, když se jejich argument blíží nějaké hodnotě. Například:

- Funkce $f(x)$ „klesá“ v bodě $a = 1$ „rychleji“ k nule než $(x-1)^2$.
- Funkce $g(x)$ „neroste rychleji“ než $\sqrt{x}$ pro x jdoucí do nekonečna.
- Funkce $f(x)$ a $g(x)$ se „chovají stejně“, když x jde k 0.

Slovíčka jako „rychleji“ nebo „chovají“ jsou poměrně *vágní*. Co tím *přesně* míníme? Co to znamená??

V této části přednášky představíme několik způsobů, jak takovéto situace přesně kvantifikovat. K tomuto tématu se ovšem vrátíme i později během semestru.

Asymptotická horní mez $\mathcal{O}$

Definice (Asymptotická horní mez $\mathcal{O}$):

Mějme dvě funkce f, g a bod $a \in \overline{\mathbb{R}}$ takový, že a je hromadným bodem množiny $D_f \cap D_g$ a existuje okolí V_a splňující $(V_a \cap D_f) \setminus \{a\} = (V_a \cap D_g) \setminus \{a\}$.

Řekneme, že **funkce f je asymptoticky shora omezená funkcí g pro x jdoucí k** a, symbolicky „$f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ pro $x \to a$", právě když *existuje* kladná konstanta $c \in \mathbb{R}$ a okolí U_a bodu a tak, že pro všechna $x \in (U_a \cap D_f \cap D_g) \setminus \{a\}$ platí

$$|f(x)| \leq c \cdot |g(x)|.$$

Asymptotická horní mez $\mathcal{O}$

Definice (Asymptotická horní mez $\mathcal{O}$):

Mějme dvě funkce f, g a bod $a \in \overline{\mathbb{R}}$ takový, že a je hromadným bodem množiny $D_f \cap D_g$ a existuje okolí V_a splňující $(V_a \cap D_f) \setminus \{a\} = (V_a \cap D_g) \setminus \{a\}$.

Řekneme, že **funkce f je asymptoticky shora omezená funkcí g pro x jdoucí k a**, symbolicky „$f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ pro $x \to a$“, právě když *existuje* kladná konstanta $c \in \mathbb{R}$ a okolí U_a bodu a tak, že pro všechna $x \in (U_a \cap D_f \cap D_g) \setminus \{a\}$ platí

$$|f(x)| \leq c \cdot |g(x)|.$$

- Modrou rovnost $=$ v zápise výše je potřeba chápat spíše ve smyslu $f(x) \in \mathcal{O}(g(x))$. Zápis s rovností je ale zdaleka nejrozšířenější.
- Pokud je $g(x)$ nenulové, tak je podmínka v definici ekvivalentní podmínce

$$|f(x)/g(x)| \leq c,$$

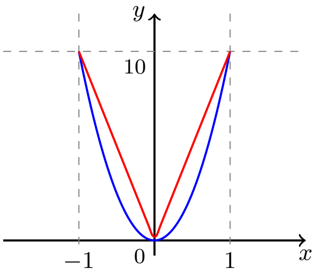
  Přesněji řečeno, pro g nenulové na okolí bodu a je $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ pro $x \to a$ ekvivalentní omezenosti podílu f/g na okolí bodu a (s možnou výjimkou bodu a).

Asymptotická horní mez $\mathcal{O}$: ilustrace, poznámky

Například platí: $10x^2 = \mathcal{O}(x)$ pro $x \to 0$.

Skutečně, vezmeme-li libovolné $x \in U_0(1) = (-1, 1)$, pak platí

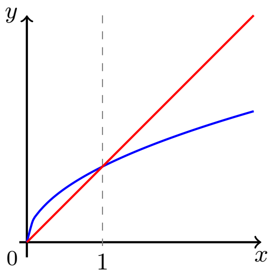
$$|10x^2| = |10x| \cdot |x| \leq 10 \cdot |x|.$$



Například platí: $\sqrt{x} = \mathcal{O}(x)$ pro $x \to +\infty$.

Skutečně, vezmeme-li libovolné $x \in U_{+\infty}(1) = (1, +\infty)$, pak platí

$$|\sqrt{x}| = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot x \leq 1 \cdot |x|.$$



Asymptotická horní mez $\mathcal{O}$: příklady

- Pomocí $\mathcal{O}$ vyjadřujeme „neostrou horní mez“ *až na multiplikativní konstantu*. Učiňme dvě jednoduchá pozorování:
- Máme-li funkci f, a hromadný bod D_f a libovolnou reálnou konstantu K, pak platí

$$Kf(x) = \mathcal{O}(f(x)) \text{ pro } x \to a.$$

- Pokud pro funkce f a bod a platí $f(x) = \mathcal{O}(1)$ pro $x \to a$, pak existuje okolí U_a takové, že funkce $f|_{(U_a \cap D_f) \setminus \{a\}}$ je omezená.

Příklad.

Postupně si rozmysleme následující případy:

- $\frac{1}{x} = \mathcal{O}(1)$ pro $x \to +\infty$,
- $x = \mathcal{O}(x^2)$ pro $x \to +\infty$,
- $\frac{1}{x} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ pro $x \to 0$,
- $10x = \mathcal{O}(x)$ pro $x \to +\infty$,
- $10^{10} \cdot x^2 = \mathcal{O}(x^2)$ pro $x \to +\infty$,
- $10x^3 + x^2 - 12 = \mathcal{O}(x^3)$ pro $x \to +\infty$,
- $x^2 = \mathcal{O}(x)$ pro $x \to 0$.

Striktní větší horní mez o

Definice (Striktně větší horní mez o):

Mějme dvě funkce f, g a bod $a \in \overline{\mathbb{R}}$ takový, že a je hromadným bodem množiny $D_f \cap D_g$ a existuje okolí V_a splňující $(V_a \cap D_f) \smallsetminus \{a\} = (V_a \cap D_g) \smallsetminus \{a\}$.

Řekneme, že **funkce f je asymptoticky shora striktně omezená funkcí g pro x jdoucí k a**, symbolicky „$f(x) = o(g(x))$ pro $x \to a$“, právě když *pro každé* kladné $c \in \mathbb{R}$ existuje okolí U_a bodu a tak, že pro všechna $x \in U_a \cap D_f \cap D_g$ různá od a platí

$$|f(x)| < c \cdot |g(x)|.$$

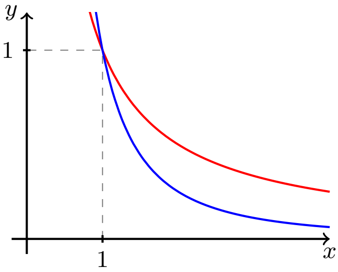
Všimněte si jemných, ale zásadních rozdílů mezi definicí $\mathcal{O}$ a o. Pouze jsme změnili kvantifikátor u konstanty c a typ nerovnosti!

Striktní větší horní mez o: ilustrace a poznámky

Například platí: $\frac{1}{x^2} = o\left(\frac{1}{x}\right)$ pro $x \to +\infty$.

Skutečně, vezmeme-li libovolné $c > 0$ a $x \in U_{+\infty}(1/c) = (1/c, +\infty)$, pak platí

$$\left|\frac{1}{x^2}\right| = c \cdot \left|\frac{1}{x}\right| \cdot \left|\frac{1/c}{x}\right| < c \cdot \left|\frac{1}{x}\right| \cdot 1.$$

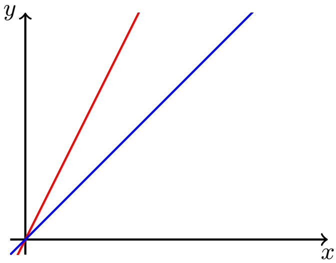


Například neplatí: $x = o(2x)$ pro $x \to +\infty$, i když $x = \mathcal{O}(2x)$ by v tomto případě platilo.

Skutečně, vezmeme-li například $c = \frac{1}{4}$ a libovolné $x > 0$, pak

$$|x| = \frac{1}{4}|2x| \cdot 2 > \frac{1}{4}|2x|.$$

Opačná nerovnost tedy nemůže platit na žádném okolí $+\infty$.



Striktní větší horní mez o: příklady

Příklad.

Například platí

- $x^2 = o(x)$ pro $x \to 0$,
- $(x-1)^5 = o((x-1)^4)$ pro $x \to 1$,
- $\frac{2}{x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ pro $x \to 0$,
- $x^2 = o(x^3)$ pro $x \to +\infty$,
- $\frac{1}{x^2} = o\left(\frac{1}{x}\right)$ pro $x \to +\infty$.
- Jaká funkce splňuje $f(x) = o(1)$ pro $x \to +\infty$?

Tvrzení: Obecné vlastnosti o a $\mathcal{O}$

Učiňme ještě několik obecných pozorování plynoucích velmi přímočaře přímo z definic o a $\mathcal{O}$. Důkaz provedeme na tabuli.

1. Máme-li funkci f, a hromadný bod D_f a libovolnou nenulovou konstantu K, pak platí

   $$Kf(x) = \mathcal{O}(f(x)) \text{ a } f(x) = \mathcal{O}(Kf(x)) \text{ pro } x \to a.$$

   Tyto vztahy tedy „necítí“ multiplikativní konstantu.

2. Pokud pro funkce f a bod a platí $f(x) = \mathcal{O}(1)$ pro $x \to a$, pak existuje okolí U_a takové, že funkce $f|_{U_a \cap D_f}$ je omezená.

3. Vztahy $\mathcal{O}$ i o jsou tranzitivní. Tj. pokud $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ a $g(x) = \mathcal{O}(h(x))$ v obou případech pro $x \to a$, pak $f(x) = \mathcal{O}(h(x))$ pro $x \to a$. Analogicky pro o místo $\mathcal{O}$.

4. Chování vůči součtu a součinu: pokud $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ a $h(x) = \mathcal{O}(g(x))$ pro $x \to a$, pak $f(x) + h(x) = \mathcal{O}(g(x))$ a $f(x) \cdot h(x) = \mathcal{O}\big(g(x)^2\big)$ pro $x \to a$. Analogické tvrzení platí i pro o.

Hlavní body

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$f\colon A \to \mathbb{R}$$

Přehled elementárních funkcí

Pod termínem **elementární funkce** máme na mysli

- polynomy (mnohočleny),
- odmocniny,
- racionální lomené funkce,
- trigonometrické funkce,
- exponenciální a logaritmické funkce,
- součty, součiny, podíly a složení uvedených funkcí a jejich inverzí.

V této části přednášky uvádíme stručný přehled vlastností těchto funkcí, které by studenti měli znát. Navíc učiníme několik důležitých poznámek, ke kterým se později během studia analýzy ještě vrátíme.

Výklad této části nebude podrobný, jde o připomenutí předchozích znalostí.

Polynomy

Polynomy jsou z elementárních funkcí ty „nejelementárnější“. K vyhodnocení jejich funkční hodnoty si vystačíme pouze se sčítáním a násobením reálných čísel!

Definice (Polynom – mnohočlen / *polynomial*):

Funkci $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazveme **polynomem**, právě když existuje $n \in \mathbb{N}_0$ a konstanty $a_0, a_1, \ldots, a_n$ takové, že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

- Pokud je v definici výše $a_n \neq 0$, pak o n mluvíme jako o **stupni** polynomu P.
- Polynom $P(x) = 0$ nazýváme nulovým polynomem a jeho stupeň nedefinujeme (polynom stupně nula nikdy není nulový polynom).
- Kořenem polynomu P nazýváme libovolné reálné číslo x splňující $P(x) = 0$.
- Existují vzorce pro kořeny polynomů stupně 1, 2, 3 a 4. Je dokázáno, že podobné vzorce pro polynomy stupně ostře většího než 4 neexistují.

Polynomy: lineární/afinní funkce

- Nulový polynom a polynomy stupně nejvýše 1 můžeme vyjádřit ve tvaru $P(x) = ax + b$ pro nějaké reálné konstanty a a b.
- O takovýchto funkcích mluvíme jako o **lineárních** (nebo **afinních**) **funkcích**.
- Grafem lineární funkce je přímka. Ne každá přímka v rovině ovšem je grafem nějaké lineární funkce (rozmyslete!).
- Je-li $f(x) = ax + b$ lineární funkce, pak o a mluvíme jako **směrnici** této přímky, jejíž rovnicí je $y - ax - b = 0$. Tato přímka pak má normálový vektor (například) $(-a, 1)$ a směrový vektor $(1, a)$.

Polynomy: kvadratický polynom

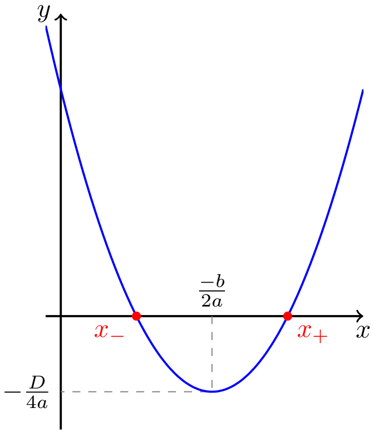
Kořeny kvadratického polynomu $P(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, umíme snadno nalézt:

$$x_{\pm} = \frac{1}{2a}\Big(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\Big).$$

Jsou reálné pouze pokud je diskriminant $D = b^2 - 4ac$ nezáporný. Díky *úpravě na čtverec*,

$$P(x) = a\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 + c - \frac{b^2}{4a},$$

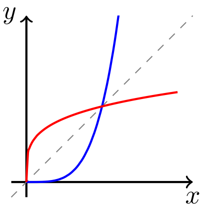
víme, že vrchol paraboly (graf funkce P) se nachází v bodě $\big(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\big)$.



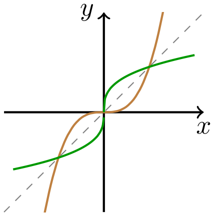
Odmocniny

Uvažme $k \in \mathbb{N}$ a zamysleme se nad existencí inverzní funkce k funkci $f(x) = x^k$. Musíme rozlišit dva případy:

Pokud je $k = 2\ell$ sudé, pak funkce f není prostá, ale $f|_{\langle 0,+\infty)}$ je a její inverzí dostáváme funkci $\sqrt[2\ell]{x}$, která má definiční obor i obor hodnot roven $\langle 0, +\infty)$.



Pokud je $k = 2\ell - 1$ liché, pak je funkce f prostá a její inverzí dostáváme funkci $\sqrt[2\ell-1]{x}$, která má definiční obor i obor hodnot roven $\mathbb{R}$.



Racionální funkce

Pokud navíc třídu polynomů rozšíříme i o operaci dělení, dostaneme:

Definice (Racionální funkce / *rational function*):

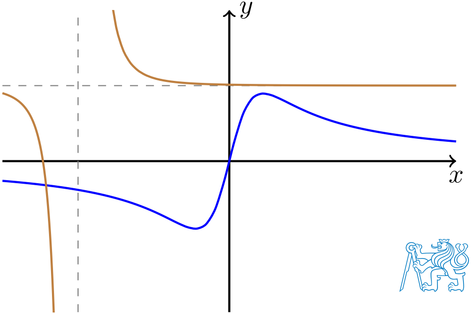
Reálnou funkci $f\colon A \to \mathbb{R}$ nazveme **racionální funkcí**, právě když existují dva polynomy P a Q takové, že $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}$ a pro každé $x \in A$ platí

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Definičním oborem takovýchto funkcí již nutně nemusí být celá reálná osa. Jako příklady uvažme

$$f(x) = \frac{4x}{1+5x^2},$$

$$g(x) = 1 + \frac{1}{10(2+x)^3}.$$

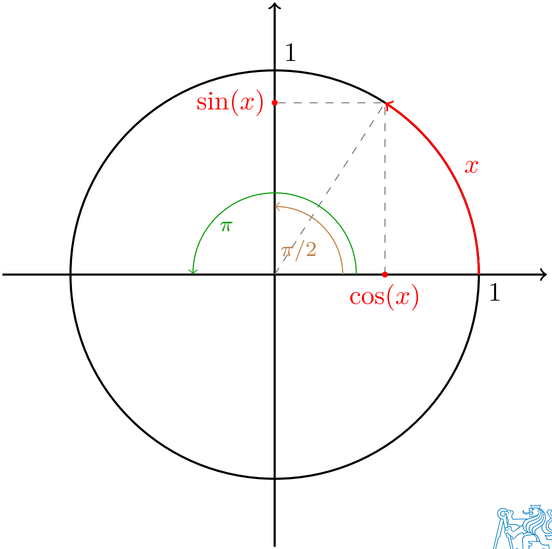


Trigonometrické (také goniometrické) funkce

Mezi trigonometrické funkce počítáme funkce $\sin$, $\cos$, tg, cotg a funkce k nim inverzní.

Jejich konstrukce již není algebraická, jako u funkcí výše, ale vychází z *geometrie*. Funkce $\sin$ a $\cos$ definujeme pomocí **jednotkové kružnice**.

Proměnná x má nyní význam úhlu měřeného od kladného směru vodorovné osy proti směru hodinových ručiček v obloukové míře (radiánech).



Trigonometrické funkce: $\sin$ a $\cos$

Funkce $\sin$ a $\cos$ mají jako definiční obor celou reálnou osu. Jsou periodické s periodou 2π a omezené, jejich obor hodnot je $H_{\sin} = H_{\cos} = \langle -1, 1 \rangle$. Nejsou prosté, ani na, ani (ostře) rostoucí či klesající (na celém svém definičním oboru).

Funkce $\sin$ je lichá a funkce $\cos$ je sudá.

Přímo z definice těchto funkcí plyne formulka $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ (Pythagoras!). Dále tyto funkce splňují důležité součtové vzorce

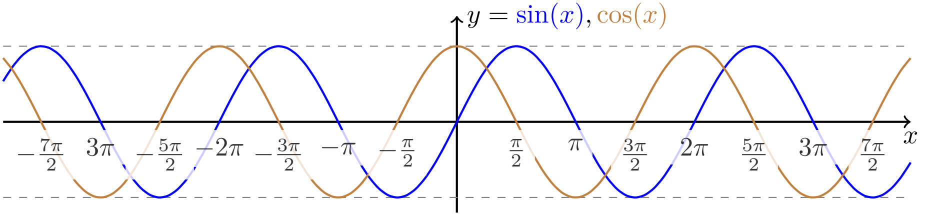
$$
\begin{aligned}
\sin(x + y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y), \\
\cos(x + y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)
\end{aligned}
$$

a z nich plynoucí vzorce pro dvojnásobný úhel

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) \quad \text{a} \quad \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x).$$

Existují i další vztahy, které na tomto místě vynecháme. Zde uvedené považujeme pro nás za nejdůležitější.

Trigonometrické funkce: $\sin$ a $\cos$



Všechny (a další) výsledky uvedené na posledních několika slidech týkající se funkcí $\sin$ a $\cos$ *plynou* z jejich geometrické definice pomocí jednotkové kružnice.

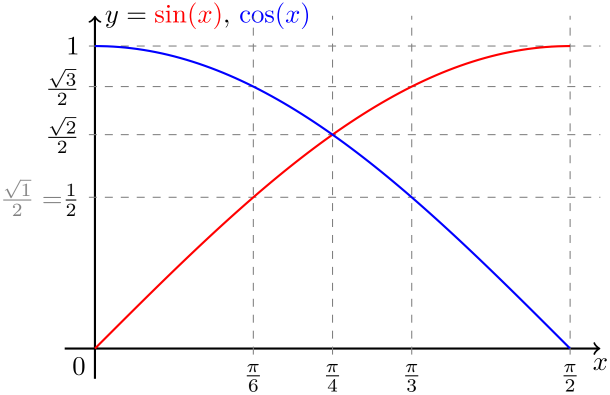
Všechna uvedená tvrzení lze dokázat pomocí geometrických argumentů.

Jak počítat funkční hodnoty $\sin$ a $\cos$?

Geometrická konstrukce se ale nehodí například k výpočtu funkčních hodnot pomocí kalkulaček nebo počítačů! Jednou z možných metod výpočtu pomocí Taylorových polynomů se budeme zabývat příští semestr v BI-MA2.

Trigonometrické funkce: $\sin$ a $\cos$

Pokud si rozmyslíme geometrii ve vhodně zvolených rovnostranných a rovnoramenných trojúhelnících, dostaneme funkční hodnoty $\sin$ a $\cos$ pro některé význačné úhly.



Trigonometrické funkce: tg a cotg

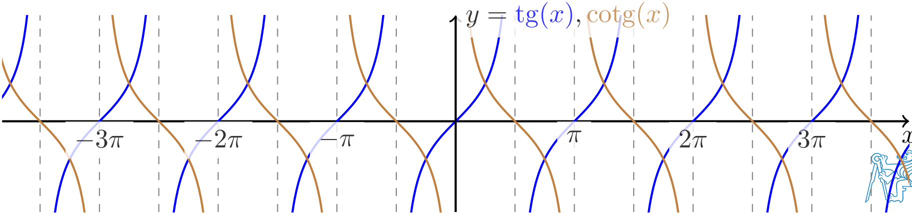
Funkce tg a cotg jsou odvozené od $\sin$ a $\cos$ pomocí vzorců

$$\mathrm{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \quad \text{a} \quad \mathrm{cotg}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

Tyto funkce již nejsou definované na celém $\mathbb{R}$, ale platí

$$D_{\mathrm{tg}} = \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \quad \text{a} \quad D_{\mathrm{cotg}} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Obě jsou periodické s periodou π, nejsou prosté ani omezené. Jsou na, jejich obor hodnot je $H_{\mathrm{tg}} = H_{\mathrm{cotg}} = \mathbb{R}$. Nejsou ani (ostře) rostoucí či klesající. Obě jsou liché funkce.

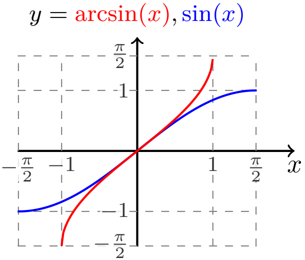


Trigonometrické funkce: arcsin, arccos, arctg a arccotg

Trigonometrické funkce $\sin$, $\cos$, tg ani cotg nejsou prosté. Neexistují k nim tedy inverzní funkce.

Postupuje proto tak, že tyto funkce *zúžíme* na vhodný interval, na kterém již tyto funkce prosté jsou a inverzi mají. Standardní volba je následující:

$$\arcsin := \left(\sin|_{\langle -\pi/2, \pi/2\rangle}\right)^{-1}, \qquad \arccos := \left(\cos|_{\langle 0,\pi\rangle}\right)^{-1},$$
$$\operatorname{arctg} := \left(\operatorname{tg}|_{(-\pi/2, \pi/2)}\right)^{-1}, \qquad \operatorname{arccotg} := \left(\operatorname{cotg}|_{(0,\pi)}\right)^{-1}.$$

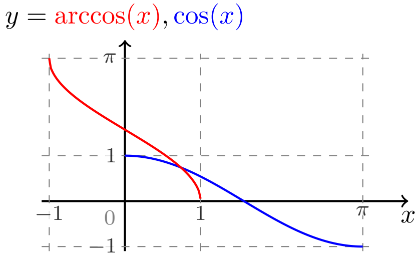


Trigonometrické funkce: arcsin, arccos, arctg a arccotg

Trigonometrické funkce $\sin$, $\cos$, tg ani cotg nejsou prosté. Neexistují k nim tedy inverzní funkce.

Postupuje proto tak, že tyto funkce *zúžíme* na vhodný interval, na kterém již tyto funkce prosté jsou a inverzi mají. Standardní volba je následující:

$$\arcsin := \left(\sin|_{\langle -\pi/2, \pi/2\rangle}\right)^{-1}, \qquad \arccos := \left(\cos|_{\langle 0, \pi\rangle}\right)^{-1},$$
$$\operatorname{arctg} := \left(\operatorname{tg}|_{(-\pi/2, \pi/2)}\right)^{-1}, \qquad \operatorname{arccotg} := \left(\operatorname{cotg}|_{(0, \pi)}\right)^{-1}.$$

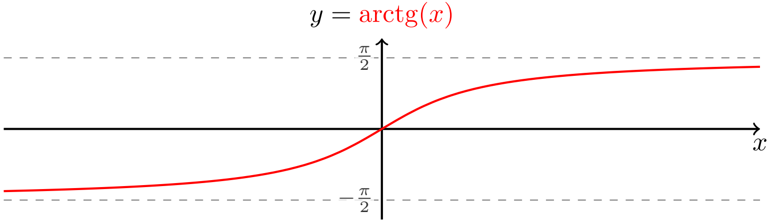


Trigonometrické funkce: arcsin, arccos, arctg a $\operatorname{arccotg}$

Trigonometrické funkce $\sin$, $\cos$, tg ani cotg nejsou prosté. Neexistují k nim tedy inverzní funkce.

Postupuje proto tak, že tyto funkce *zúžíme* na vhodný interval, na kterém již tyto funkce prosté jsou a inverzi mají. Standardní volba je následující:

$$\operatorname{arcsin} := \left(\sin|_{\langle -\pi/2, \pi/2\rangle}\right)^{-1}, \qquad \operatorname{arccos} := \left(\cos|_{\langle 0, \pi\rangle}\right)^{-1},$$
$$\operatorname{arctg} := \left(\operatorname{tg}|_{(-\pi/2, \pi/2)}\right)^{-1}, \qquad \operatorname{arccotg} := \left(\operatorname{cotg}|_{(0, \pi)}\right)^{-1}.$$



Exponenciála a přirozený logaritmius

Exponenciální funkce o základu e **(exponenciála)**, tj. e^x, je funkce s definičním oborem $\mathbb{R}$, oborem hodnot $(0, +\infty)$, ostře rostoucí a splňující

$$\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^y, \quad (\mathrm{e}^x)^y = \mathrm{e}^{xy}, \quad \mathrm{e}^0 = 1,$$

pro každé $x, y \in \mathbb{R}$.
Inverzní funkci k exponenciále nazýváme **přirozeným logaritmem** a značíme ji $\ln$.
Z vlastností exponenciály plynou vlastnosti přirozeného logaritmu: jeho definičním oborem je $(0, +\infty)$, oborem hodnot $\mathbb{R}$, je ostře rostoucí a splňuje vztahy

$$\ln(\mathrm{e}^z) = z, \quad \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y), \quad \ln(1) = 0, \quad \ln(\mathrm{e}) = 1,$$

kde $x, y > 0$ a $z \in \mathbb{R}$.

Jak je e^x *vlastně* definována?

Jak se počítají funkční hodnoty této funkce? Tímto problémem se budeme zabývat v BI-MA2. Už v BI-MA1 si ale s tímto popisem e^x nevystačíme, jedna důležitá vlastnost nám zde na tomto slidu chybí!

Exponenciální funkce o základu $a > 0$

Nejprve si připomeňme **umocňování na celočíselný exponent**:

$$a^n := \begin{cases} 1, & \text{pro } n = 0 \text{ a libovolné } a \in \mathbb{R}, \\ \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\times}, & \text{pro } n \in \mathbb{N} \text{ a libovolné } a \in \mathbb{R}, \\ \frac{1}{a^{-n}}, & \text{pro záporné celé } n \text{ a nenulové } a. \end{cases}$$

Rozšíření tohoto umocňování na reálné exponenty provedeme pomocí exponenciály a logaritmické funkce předpisem

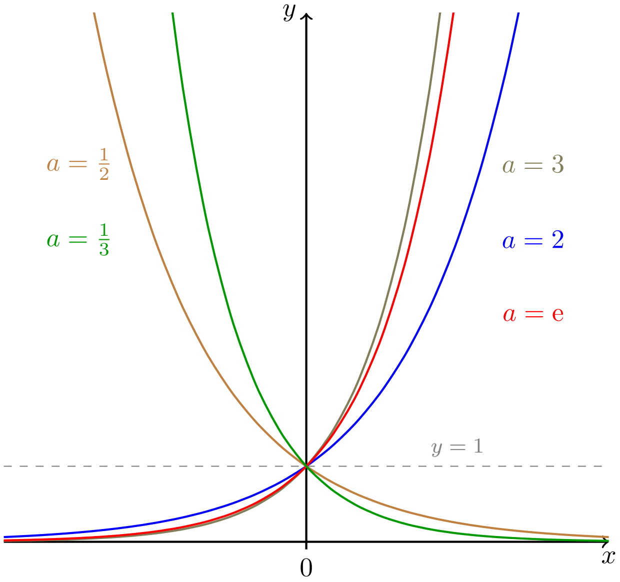
$$a^x := \mathrm{e}^{x \ln(a)}, \quad a > 0,\ x \in \mathbb{R}.$$

Definičním oborem a^x je proto $\mathbb{R}$, oborem hodnot $(0, +\infty)$, je neomezená, pro $x = 0$ má hodnotu 1, je ostře rostoucí (resp. klesající) pro $a > 1$ (resp. $a < 1$). Pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ splňuje

$$\ln(a^x) = x \ln(a), \quad a^{x+y} = a^x a^y \quad \text{a} \quad \left(a^x\right)^y = a^{xy}.$$

Inverzní funkci k a^x, $0 < a \neq 1$, nazýváme logaritmem o základu a.

Exponenciální funkce o základu $a > 0$: grafy



Logaritmus o základu $a > 0$

Exponenciální funkce a^x je prostá pro $0 < a \neq 1$, existuje k ní proto inverzní funkce, kterou nazýváme **logaritmem o základu** a a značíme $\log_a$.
Funkce $\log_a$ je definována na $(0, +\infty)$, jejím oborem hodnot je $\mathbb{R}$. Je prostá, ostře rostoucí (resp. klesající) pro $a > 1$ (resp. $a \in (0, 1)$).
Z vlastností exponenciálních funkcí poměrně přímočaře plynou následující vlastnosti logaritmu o základu a:

$$\log_a(a) = 1,\ \log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}, \qquad \text{pro } x > 0,\ \text{a } 0 < a, b \neq 1,$$

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y), \qquad \text{pro } x, y > 0,$$

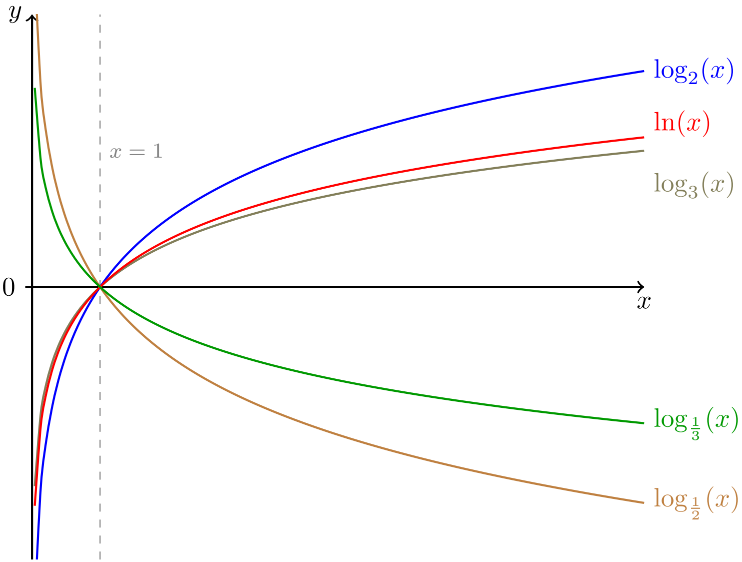
$$\log_a(x^y) = y \log_a(x), \qquad \text{pro } x > 0 \text{ a } y \in \mathbb{R}.$$

Odtud i (mimo jiné) plyne

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y), \quad \text{pro } x, y > 0.$$

Logaritmus o základu e nazýváme **přirozeným logaritmem** a značíme $\ln$ (pozor, v řadě jazyků/CAS je tento značen rovnou jako $\log$).

Logaritmus o základu $a > 0$: grafy



Absolutní hodnota

Definici absolutní hodnoty jsme připomněli v předchozí přednášce.

Pro libovolná reálná čísla a, b platí

$$|a+b| \leq |a| + |b|, \quad |ab| = |a| \cdot |b|, \quad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, \, b \neq 0\,.$$

S uvedenou nerovností se ještě mnohokrát setkáme, nazývá se *trojúhelníková*.

Absolutní hodnota

Definici absolutní hodnoty jsme připomněli v předchozí přednášce.

Pro libovolná reálná čísla a, b platí

$$|a+b| \leq |a| + |b|, \quad |ab| = |a| \cdot |b|, \quad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, \, b \neq 0\,.$$

S uvedenou nerovností se ještě mnohokrát setkáme, nazývá se *trojúhelníková*.

Důkaz trojúhelníkové nerovnosti.

Mají-li obě čísla a a b stejné znaménko, dostáváme z definice absolutní hodnoty rovnost. Předpokládejme, že $a > 0$ a $b < 0$.

- Je-li $a + b \geq 0$, pak $|a+b| = a + b \leq a - b = |a| + |b|$.
- Je-li $a + b < 0$, pak $|a+b| = -a - b \leq a - b = |a| + |b|$.

Zde jsme využili nerovností $z \leq |z|$ a $-z \leq |z|$ platných pro každé $z \in \mathbb{R}$. □

Absolutní hodnota je elementární funkce ve smyslu zmíněném na začátku této sekce, pro každé reálné x totiž platí rovnost $|x| = \sqrt{x^2}$.

Celé části a znaménko

Dolní celou část reálného čísla x, kterou ze středních škol asi znáte jako „celou část," definujeme jako největší celé číslo, které je menší nebo rovno x a značíme $\lfloor x \rfloor$. Tj.

$$\lfloor x \rfloor := \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}.$$

Horní celou část reálného čísla x definujeme jako nejmenší celé číslo, které je větší nebo rovno x a značíme $\lceil x \rceil$. Tj.

$$\lceil x \rceil := \min\{k \in \mathbb{Z} \mid k \geq x\}.$$

Všimněte si, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1 \quad \text{a} \quad \lceil x \rceil - 1 < x \leq \lceil x \rceil.$$

Znaménko reálného čísla $x \in \mathbb{R}$ je definováno předpisem

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Hlavní body

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$f\colon A \to \mathbb{R}$$

Komentář

- Předpokládáme, že studenti a studentky se orientují mezi **elementárními funkcemi** a jejich vlastnostmi (polynomy, racionální lomené, trigonometrické, exponenciální). Tuto látku si můžete případně osvěžit v BI-PKM. Toto téma jako rozcvičku použijeme v prvním prosemináři.

- Elementární funkce představují jakousi minimální sadu důležitých funkcí. Vedle nich existuje celá řada tzv. „speciálních funkcí", které se objevují ve všemožných praktických aplikacích (podrobný přehled elementárních i speciálních funkcí naleznete např. v *NIST Digital Library of Mathematical Functions*).

- V této přednášce jsme načali téma asymptotického porovnávání funkcí zavedením horních mezí o a $\mathcal{O}$. K tomuto tématu se budeme v průběhu semestru ještě několikrát vracet.

- Příklady k procvičování této látky lze nalézt v první BI-MA1 lekci na MARASTu a v cvičebnici tamtéž.