Matematická analýza 1

Reálné číselné posloupnosti

Tomáš Kalvoda[1], Pavel Paták[2]

[1]tomas.kalvoda@fit.cvut.cz, [2]pavel.patak@fit.cvut.cz

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze

6. března 2025
LS 2024/2025

Hlavní body

$$(a_n)_{n=1}^{\infty}$$

1. Reálné číselné posloupnosti
2. Vlastnosti posloupností
3. Vybraná posloupnost

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$$

Hlavní výsledky této přednášky

- Definice posloupnosti jakožto speciální případ funkce.
- Připomenutí známých posloupností: aritmetická a geometrická posloupnost.
- Vlastnosti posloupností (omezenost, typy monotonie, asymptotické vztahy $\mathcal{O}$ a o).
- Koncept vybrané posloupnosti.

Hlavní body

$$(a_n)_{n=1}^{\infty}$$

1 Reálné číselné posloupnosti

2 Vlastnosti posloupností

3 Vybraná posloupnost

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ldots$$

Posloupnosti: úvodní poznámky

- Intuitivně je asi zřejmé, co si pod slovním spojením „posloupnost reálných čísel“ představit: „čísla jdoucí za sebou“, víme které je první, druhé, atd. Formálně toto uspořádání zachytíme pomocí *zobrazení*.

Posloupnosti: úvodní poznámky

- Intuitivně je asi zřejmé, co si pod slovním spojením „posloupnost reálných čísel" představit: „čísla jdoucí za sebou", víme které je první, druhé, atd. Formálně toto uspořádání zachytíme pomocí *zobrazení*.

- Pomocí posloupností (ne nutně číselných) lze mimo jiné vyjadřovat a popisovat složitost algoritmů, časový průběh různorodých diskrétních signálů, iterativní řešení úloh, například:

Posloupnosti: úvodní poznámky

- Intuitivně je asi zřejmé, co si pod slovním spojením „posloupnost reálných čísel" představit: „čísla jdoucí za sebou", víme které je první, druhé, atd. Formálně toto uspořádání zachytíme pomocí *zobrazení*.

- Pomocí posloupností (ne nutně číselných) lze mimo jiné vyjadřovat a popisovat složitost algoritmů, časový průběh různorodých diskrétních signálů, iterativní řešení úloh, například:

    - posloupnost aproximací jistého nulového bodu nějaké funkce, který neumíme najít analyticky,
    - posloupnost aproximací vlastních čísel matice, které neumíme najít analyticky,
    - posloupnost aproximací lokálního minima jisté účelové funkce, například při strojovém učení, aj.

Posloupnosti: úvodní poznámky

- Intuitivně je asi zřejmé, co si pod slovním spojením „posloupnost reálných čísel“ představit: „čísla jdoucí za sebou“, víme které je první, druhé, atd. Formálně toto uspořádání zachytíme pomocí *zobrazení*.
- Pomocí posloupností (ne nutně číselných) lze mimo jiné vyjadřovat a popisovat složitost algoritmů, časový průběh různorodých diskrétních signálů, iterativní řešení úloh, například:
  - posloupnost aproximací jistého nulového bodu nějaké funkce, který neumíme najít analyticky,
  - posloupnost aproximací vlastních čísel matice, které neumíme najít analyticky,
  - posloupnost aproximací lokálního minima jisté účelové funkce, například při strojovém učení, aj.
- Z pedagogického hlediska lze na posloupnostech snadno demonstrovat limitní proces v jeho nejčistší formě.

Posloupnosti: definice

Definice (Reálná číselná posloupnost / *real sequence*):

Zobrazení množiny $\mathbb{N}$ do množiny $\mathbb{R}$ nazýváme **reálná číselná posloupnost**, pro účely tohoto předmětu zkráceně **posloupnost**.

Posloupnosti: definice

Definice (Reálná číselná posloupnost / *real sequence*):

Zobrazení množiny $\mathbb{N}$ do množiny $\mathbb{R}$ nazýváme **reálná číselná posloupnost**, pro účely tohoto předmětu zkráceně **posloupnost**.

Poznámka (Terminologie a značení):

1. Je-li $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ posloupnost, pak funkční hodnotu a v bodě $n \in D_a = \mathbb{N}$, tj. $a(n)$, označujeme a_n a nazýváme n-*tým členem posloupnosti* a. O n samotném v tomto kontextu mluvíme jako o *indexu*.
2. Skutečnost, že $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ je posloupnost, budeme většinou zkráceně zapisovat symbolicky takto: $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.
3. Všechny naše posloupnosti mají nekonečný počet prvků. „Konečná posloupnost“, tj. $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, je pro nás uspořádaná n-tice.

Posloupnosti: definice

Definice (Reálná číselná posloupnost / *real sequence*):

Zobrazení množiny $\mathbb{N}$ do množiny $\mathbb{R}$ nazýváme **reálná číselná posloupnost**, pro účely tohoto předmětu zkráceně **posloupnost**.

Poznámka (Terminologie a značení):

1. Je-li $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ posloupnost, pak funkční hodnotu a v bodě $n \in D_a = \mathbb{N}$, tj. $a(n)$, označujeme a_n a nazýváme n*-tým členem posloupnosti* a. O n samotném v tomto kontextu mluvíme jako o *indexu*.
2. Skutečnost, že $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ je posloupnost, budeme většinou zkráceně zapisovat symbolicky takto: $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.
3. Všechny naše posloupnosti mají nekonečný počet prvků. „Konečná posloupnost“, tj. $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, je pro nás uspořádaná n-tice.

Takto zavedená „posloupnost“ *je také* „funkce“ ve smyslu minulé přednášky.

Posloupnosti: příklad

Příklad.

Uvažme posloupnost $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem $a_n := (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Posloupnosti: příklad

Příklad.

Uvažme posloupnost $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem $a_n := (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

- Například tedy platí $a_1 = -1$, $a_2 = 1$, či $a_{823} = -1$.

Posloupnosti: příklad

Příklad.

Uvažme posloupnost $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem $a_n := (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

- Například tedy platí $a_1 = -1$, $a_2 = 1$, či $a_{823} = -1$.
- Tuto posloupnost jsme mohli zapsat i ekvivalentním způsobem:

$$a = \big((-1)^n\big)_{n=1}^{\infty}.$$

Posloupnosti: příklad

Příklad.

Uvažme posloupnost $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem $a_n := (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

- Například tedy platí $a_1 = -1$, $a_2 = 1$, či $a_{823} = -1$.
- Tuto posloupnost jsme mohli zapsat i ekvivalentním způsobem:

$$a = \big((-1)^n\big)_{n=1}^{\infty}.$$

- Oborem hodnot a je množina obsahující pouze *dva* prvky, $\{-1, 1\}$. Tato posloupnost má ale nekonečný počet členů.

Posloupnosti: příklad

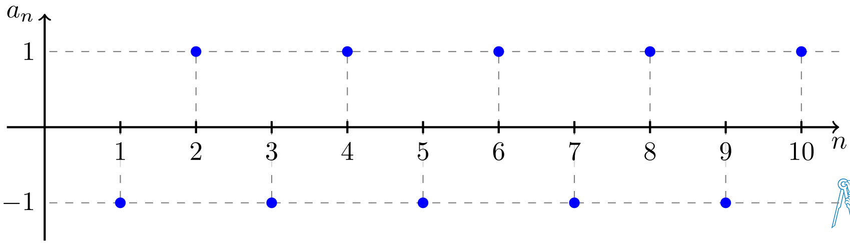
Příklad.

Uvažme posloupnost $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem $a_n := (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

- Například tedy platí $a_1 = -1$, $a_2 = 1$, či $a_{823} = -1$.
- Tuto posloupnost jsme mohli zapsat i ekvivalentním způsobem:

$$a = \big((-1)^n\big)_{n=1}^{\infty}.$$

- Oborem hodnot a je množina obsahující pouze *dva* prvky, $\{-1, 1\}$. Tato posloupnost má ale nekonečný počet členů.



Posloupnosti: příklad

Posloupnosti mohou být zadány i **rekurentně**, pomocí předchozích členů.

Příklad (Aritmetická posloupnost s diferencí d).

Pro zadané $d \in \mathbb{R}$ a $a_1 \in \mathbb{R}$ položme $a_{n+1} := a_n + d$, $n \in \mathbb{N}$. Tj. explicitně $a_n = a_1 + (n-1)d$, $n \in \mathbb{N}$.

Příklad (Geometrická posloupnost s kvocientem q).

Pro zadané $q \in \mathbb{R}$ a $a_1 \in \mathbb{R}$ položme $a_{n+1} := qa_n$, $n \in \mathbb{N}$. Tj. explicitně $a_n = a_1 q^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Příklad (Fibonacciho posloupnost).

Položme $F_1 := 1$, $F_2 := 1$ a dále $F_{n+2} := F_{n+1} + F_n$ pro $n \in \mathbb{N}$. Tedy $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, $F_6 = 8$, atd.

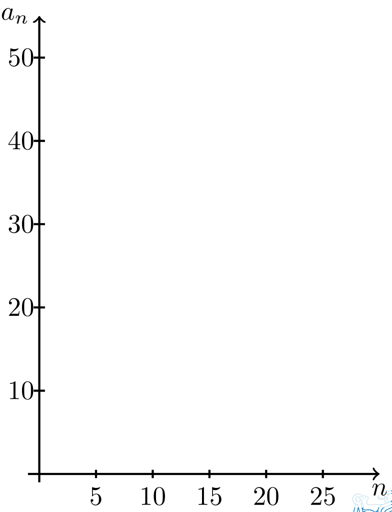
Posloupnosti: příklad

Položme $a_1 = 9$ (třeba) a poté pro $n \in \mathbb{N}$ dále

$$a_{n+1} = \begin{cases} 3a_n + 1, & a_n \text{ je liché,} \\ a_n/2, & a_n \text{ je sudé.} \end{cases}$$

Dokážete si tipnout jak se tato posloupnost chová? Jak závisí na volbě a_1?

Tato rekurentně zadaná posloupnost je známá jako **Collatzova** posloupnost (případně i s jinou přirozeně číselnou počáteční podmínkou).



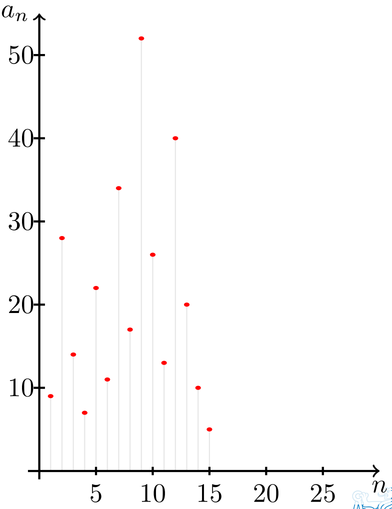
Posloupnosti: příklad

Položme $a_1 = 9$ (třeba) a poté pro $n \in \mathbb{N}$ dále

$$a_{n+1} = \begin{cases} 3a_n + 1, & a_n \text{ je liché,} \\ a_n/2, & a_n \text{ je sudé.} \end{cases}$$

Dokážete si tipnout jak se tato posloupnost chová? Jak závisí na volbě a_1?

Tato rekurentně zadaná posloupnost je známá jako **Collatzova** posloupnost (případně i s jinou přirozeně číselnou počáteční podmínkou).



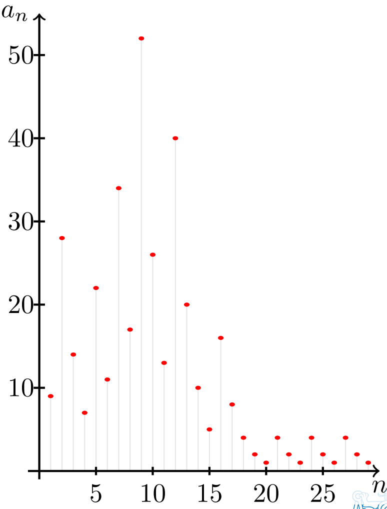
Posloupnosti: příklad

Položme $a_1 = 9$ (třeba) a poté pro $n \in \mathbb{N}$ dále

$$a_{n+1} = \begin{cases} 3a_n + 1, & a_n \text{ je liché,} \\ a_n/2, & a_n \text{ je sudé.} \end{cases}$$

Dokážete si tipnout jak se tato posloupnost chová? Jak závisí na volbě a_1?

Tato rekurentně zadaná posloupnost je známá jako **Collatzova** posloupnost (případně i s jinou přirozeně číselnou počáteční podmínkou).



Posloupnosti: příklad

Zajímavé posloupnosti nemusí být zadány explicitním nebo rekurentním vzorečkem, i přesto s nimi můžeme pracovat a studovat jejich vlastnosti. Jako jednoduchý příklad uvažme:

Příklad.

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ označme a_n jako $n$tou cifru za desetinnou čárkou v desítkovém rozvoji Ludolfova čísla π. Tj.

$$
\begin{array}{ccccc}
a_1 = 1, & a_2 = 4, & a_3 = 1, & a_4 = 5, & a_5 = 9, \\
a_6 = 2, & a_7 = 6, & a_8 = 5, & a_9 = 3, & a_{10} = 5, \\
a_{11} = 8, & a_{12} = 9, & a_{13} = 7, & \ldots &
\end{array}
$$

Hlavní body

$$(a_n)_{n=1}^{\infty}$$

1 Reálné číselné posloupnosti

2 Vlastnosti posloupností

3 Vybraná posloupnost

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$$

Vlastnosti posloupností

Některé pojmy zavedené v předchozí přednášce se naprosto přirozeně převádějí i na posloupnosti:

- **Omezená** a **konstantní** posloupnost.
- Různé typy monotonie posloupnosti: (**ostře**) **rostoucí**, (**ostře**) **klesající**, (**ryze**) **monotónní**.
- **Asymptotické vztahy** $\mathcal{O}$ a o (pouze pro $n \to +\infty$).
- Posloupnosti také ve smyslu předchozí přednášky umíme sčítat, násobit a dělit.

V této části přednášky učiníme několik konkretizujících poznámek a uvedeme několik příkladů.

Vlastnosti posloupností

Některé pojmy zavedené v předchozí přednášce se naprosto přirozeně převádějí i na posloupnosti:

- **Omezená** a **konstantní** posloupnost.
- Různé typy monotonie posloupnosti: (**ostře**) **rostoucí**, (**ostře**) **klesající**, (**ryze**) **monotónní**.
- **Asymptotické vztahy** $\mathcal{O}$ a o (pouze pro $n \to +\infty$).
- Posloupnosti také ve smyslu předchozí přednášky umíme sčítat, násobit a dělit.

V této části přednášky učiníme několik konkretizujících poznámek a uvedeme několik příkladů.

Příklad.

- Posloupnost $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$ je omezená: nerovnost $|(-1)^n| = 1 \leq 1$ platí pro každé $n \in \mathbb{N}$.
- Posloupnost $(n)_{n=1}^{\infty}$ je neomezená, rostoucí i ostře rostoucí. Je i (ryze) monotonní.
- Posloupnost $\big(\sin(1 + 2\pi n)\big)_{n=1}^{\infty}$ je konstantní.

Vlastnosti posloupností: příklad

Příklad.

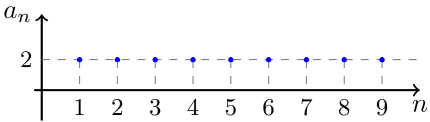
Diskutujte vlastnosti posloupností $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ s členy explicitně zadanými níže.

Vlastnosti posloupností: příklad

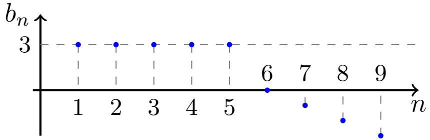
Příklad.

Diskutujte vlastnosti posloupností $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ s členy explicitně zadanými níže.

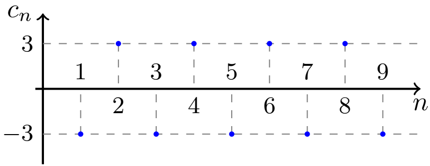
$$a_n = 2$$



$$b_n = \begin{cases} 3, & n \leq 5 \\ 6 - n, & n > 5 \end{cases}$$



$$c_n = 3(-1)^n$$



Vlastnosti posloupností: hromadný bod posloupnosti

Následující pojem vystihuje „dlouhodobé“ chování členů posloupností. Jak uvidíme v příští přednášce, úzce souvisí s pojmem „limity“.

Definice (Hromadný bod posloupnosti / *cluster point of a sequence*):

Bod $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ nazýváme hromadným bodem posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, právě když v každém okolí bodu α leží nekonečně mnoho *členů* posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Vlastnosti posloupností: hromadný bod posloupnosti

Následující pojem vystihuje „dlouhodobé“ chování členů posloupností. Jak uvidíme v příští přednášce, úzce souvisí s pojmem „limity“.

Definice (Hromadný bod posloupnosti / *cluster point of a sequence*):

Bod $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ nazýváme hromadným bodem posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, právě když v každém okolí bodu α leží nekonečně mnoho *členů* posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Příklad.

- Konstantní posloupnost $(c)_{n=1}^{\infty}$ má právě jeden hromadný bod c: v každém okolí U_c leží dokonce všechny členy této posloupnosti, těch je nekonečně mnoho, jeden pro každé $n \in \mathbb{N}$.
- Posloupnost $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$ má právě dva hromadné body a to -1 a 1.
- Posloupnost $(\sin(n))_{n=1}^{\infty}$ má nekonečně mnoho hromadných bodů, které dohromady tvoří[a] množinu $\langle -1, 1 \rangle$.

[a] Důkaz tohoto tvrzení je nad rámec BI-MA1, uvádíme ho pro zajímavost.

Vlastnosti posloupností: hromadný bod posloupnosti

Je potřeba důsledně rozlišovat dva zavedené pojmy „hromadný bod posloupnosti" a „hromadný bod množiny".

Tento rozdíl lze pěkně ilustrovat na příkladech z předchozího slidu.

- Posloupnost $(c)_{n=1}^{\infty}$ má právě jeden hromadný bod c. Množina $\{c\}$ nemá hromadný bod.
- Posloupnost $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$ má právě dva hromadné body 1 a -1. Množina $\{-1, 1\}$ nemá ani jeden hromadný bod.
- Na druhou stranu ale třeba posloupnost $(1/n)_{n=1}^{\infty}$ i množina $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$ mají právě jeden hromadný bod 0.

Tato pozorování jen ukazují, že posloupnost je daleko více, než jen množina jejích členů.

Vlastnosti posloupností: asymptotické vztahy $\mathcal{O}$ a o

- Jediným hromadným bodem definičního oboru posloupností je $+\infty$ a proto je pomocí $\mathcal{O}$ a o můžeme porovnávat pouze pro $n \to +\infty$ a proto tuto specifikaci bodu budeme u posloupností často vynechávat.

- Uvážíme-li tvar okolí $+\infty$ a definiční obor posloupností, pak v případě posloupností $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ můžeme požadavek v definici přeformulovat následovně

$$a_n = \mathcal{O}(b_n) \quad \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad (\exists c > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\big(n > N \Rightarrow |a_n| \leq c|b_n|\big),$$

$$a_n = o(b_n) \quad \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad (\forall c > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\big(n > N \Rightarrow |a_n| < c|b_n|\big).$$

- Pokud jsou členy b_n výše nenulové (na okolí $+\infty$ průnik $\mathbb{N}$), může být výhodné na nerovnosti výše nahlížet jako na $\left|\frac{a_n}{b_n}\right| < c$ (případně s neostrou nerovností).

- N.B.: Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je omezená, právě když $a_n = \mathcal{O}(1)$.

Hlavní body

$$(a_n)_{n=1}^{\infty}$$

1. Reálné číselné posloupnosti
2. Vlastnosti posloupností
3. Vybraná posloupnost

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$$

Vybraná posloupnost

Na rozdíl od „funkcí“ umíme vytvářet z posloupností nové posloupnosti pomocí operace „vybírání“.

Definice (Vybraná posloupnost / *subsequence*):

Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je libovolná posloupnost a $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ je ostře rostoucí posloupnost přirozených čísel. Pak posloupnost $\left(a_{k_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ nazýváme **posloupností vybranou** z posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Posloupnost $\left(a_{k_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ nazýváme také **podposloupností** posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Vybraná posloupnost

Na rozdíl od „funkcí“ umíme vytvářet z posloupností nové posloupnosti pomocí operace „vybírání“.

Definice (Vybraná posloupnost / *subsequence*):

Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je libovolná posloupnost a $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ je ostře rostoucí posloupnost přirozených čísel. Pak posloupnost $\left(a_{k_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ nazýváme **posloupností vybranou** z posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Posloupnost $\left(a_{k_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ nazýváme také **podposloupností** posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

$n:$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$a_n:$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	...

Vybraná posloupnost

Na rozdíl od „funkcí“ umíme vytvářet z posloupností nové posloupnosti pomocí operace „vybírání“.

Definice (Vybraná posloupnost / *subsequence*):

Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je libovolná posloupnost a $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ je ostře rostoucí posloupnost přirozených čísel. Pak posloupnost $\left(a_{k_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ nazýváme **posloupností vybranou** z posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Posloupnost $\left(a_{k_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ nazýváme také **podposloupností** posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

$n:$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$a_n:$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	...

Vybraná posloupnost

Na rozdíl od „funkcí“ umíme vytvářet z posloupností nové posloupnosti pomocí operace „vybírání“.

Definice (Vybraná posloupnost / *subsequence*):

Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je libovolná posloupnost a $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ je ostře rostoucí posloupnost přirozených čísel. Pak posloupnost $\left(a_{k_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ nazýváme **posloupností vybranou** z posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Posloupnost $\left(a_{k_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ nazýváme také **podposloupností** posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

$n:$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$a_n:$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	...
$k_n:$	2	5	6	9	...						

Vybraná posloupnost

Na rozdíl od „funkcí“ umíme vytvářet z posloupností nové posloupnosti pomocí operace „vybírání“.

Definice (Vybraná posloupnost / *subsequence*):

Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je libovolná posloupnost a $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ je ostře rostoucí posloupnost přirozených čísel. Pak posloupnost $\left(a_{k_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ nazýváme **posloupností vybranou** z posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Posloupnost $\left(a_{k_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ nazýváme také **podposloupností** posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

$n:$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$a_n:$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	...
$k_n:$	2	5	6	9	...						
$a_{k_n}:$	a_2	a_5	a_6	a_9	...						

Vybraná posloupnost

Na rozdíl od „funkcí“ umíme vytvářet z posloupností nové posloupnosti pomocí operace „vybírání“.

Definice (Vybraná posloupnost / *subsequence*):

Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je libovolná posloupnost a $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ je ostře rostoucí posloupnost přirozených čísel. Pak posloupnost $\left(a_{k_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ nazýváme **posloupností vybranou** z posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Posloupnost $\left(a_{k_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ nazýváme také **podposloupností** posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

$n:$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$a_n:$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	...
$k_n:$	2	5	6	9	...						
$a_{k_n}:$	a_2	a_5	a_6	a_9	...						

Členy posloupnosti $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ udávají *indexy* členů posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, které z posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *vybereme*.

Vybraná posloupnost: příklady

Příklad.

Posloupnost $(1)_{n=1}^{\infty}$ je vybraná z $\big((-1)^n\big)_{n=1}^{\infty}$. Skutečně, stačí vzít sudé členy, tedy $k_n = 2n$ pro $n \in \mathbb{N}$.

Vybraná posloupnost: příklady

Příklad.

Posloupnost $(1)_{n=1}^{\infty}$ je vybraná z $\big((-1)^n\big)_{n=1}^{\infty}$. Skutečně, stačí vzít sudé členy, tedy $k_n = 2n$ pro $n \in \mathbb{N}$.

Příklad.

Uvažme posloupnost $a_n = (-1)^n n$, $n \in \mathbb{N}$. Prvních pár členů tedy je $-1, 2, -3, 4, \ldots$

- Posloupnost $(2n)_{n=1}^{\infty}$ je vybraná z $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Ano, stačí volit rostoucí $k_n = 2n$ a pak $a_{k_n} = 2n$.
- Posloupnost $(2)_{n=1}^{\infty}$ není vybraná z $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Sice platí, že když položíme $k_n = 2$, pak $a_{k_n} = 2$, ale $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ není ostře rostoucí.

Je důležité si povšimnout, že při výběru členů musíme zachovat jejich pořadí v původní posloupnosti, proto v definici požadujeme aby $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ byla ostře rostoucí.

Hlavní body

$$(a_n)_{n=1}^{\infty}$$

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$$

Komentář

- Tato látka je podrobně probrána ve studijním textu ve čtvrté kapitole.
- Fibonacci je vám pravděpodobně známý ve spojení s posloupností na slidu 8. Jeho přínos byl ale daleko zásadnější. Jeho kniha pomohla rozšířit hindsko–arabský poziční zápis čísel (*Liber Abaci*, 1202).
- Posloupnost uvedená na slidu 9 je známá posloupnost z tzv. Collatzovy hypotézy. Více se o ní můžete dozvědět například zde.
- Při hledání známých posloupností může být užitečné použít *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences* (OEIS).