Matematická analýza 1

Limita funkce a posloupnosti

Tomáš Kalvoda[1], Pavel Paták[2]

[1]tomas.kalvoda@fit.cvut.cz, [2]pavel.patak@fit.cvut.cz

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze

13. března 2025
LS 2024/2025

Hlavní body

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

1. Limita posloupnosti
2. Limita funkce
3. Základní vlastnosti limit
4. Důsledky
5. Konvergence posloupností

$$\lim_{n \to \infty} a_n = b$$

Slovo úvodem

- Koncept „**limity**“ podpírá další navazující partie matematiky.
- Uplatnění nalezne v diferenciálním počtu, integrálním počtu, číselných řadách, aj. Tedy v partiích matematiky, které budeme studovat tento a příští semestr.
- Tento koncept, a výše uvedené části matematiky, jsou klíčem k matematickému popisu a studiu „změny“ a „křivosti.“
- V širším pohledu a bez většího přehánění můžeme říci, že bez průlomu v těchto směrech by v 17. století pravděpodobně nedošlo k nastartování vědecké revoluce a následnému překotnému vývoji, jehož plody využíváme všichni dnes a denně.
- *Dobré osvojení a pochopení* pojmu limity posloupnosti proto může velmi usnadnit další studium.

Hlavní výsledky této přednášky

- Definice pojmu „**limita posloupnosti**,“ jeho význam a použití na jednoduchých příkladech.
- Zobecnění na „**limitu funkcí**,“ chápání tohoto konceptu a jeho použití na jednoduchých příkladech.
- Základní vlastnosti těchto pojmů a jejich vzájemný vztah (jednoznačnost, Heineho věta). Souvislost limit posloupností a hromadných bodů.
- Znalost **limit jednoduchých funkcí** (konstantní funkce, x, $\sqrt[k]{x}$, $|x|$, komplikovanější přijdou v příští kapitole) a posloupností.
- Koncept konvergence a divergence posloupností.

Hlavní body

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

1 Limita posloupnosti

2 Limita funkce

3 Základní vlastnosti limit

4 Důsledky

5 Konvergence posloupností

$$\lim_{n \to \infty} a_n = b$$

Limita posloupnosti

Nejjednodušší formou konceptu „limity“ je zřejmě **limita posloupnosti** a proto se nejprve seznámíme s ní.

Poté přejdeme k obecnějšímu pojmu **limity funkce** a následně budeme zkoumat vlastnosti limit a v další kapitole různé způsoby výpočtu limit.

Limita posloupnosti

Nejjednodušší formou konceptu „limity“ je zřejmě **limita posloupnosti** a proto se nejprve seznámíme s ní.

Poté přejdeme k obecnějšímu pojmu **limity funkce** a následně budeme zkoumat vlastnosti limit a v další kapitole různé způsoby výpočtu limit.

Definice (Limita posloupnost / *limit of a sequence*):

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má limitu $b \in \overline{\mathbb{R}}$, *právě když* pro *každé* okolí U_b bodu b existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro libovolné přirozené $n \geq N$ je $a_n \in U_b$.
Tento fakt symbolicky zapisujeme různými způsoby

$$\lim_{n\to\infty} a_n = b, \quad \lim a_n = b, \quad a_n \to b.$$

Limita posloupnosti

Nejjednodušší formou konceptu „limity" je zřejmě **limita posloupnosti** a proto se nejprve seznámíme s ní.

Poté přejdeme k obecnějšímu pojmu **limity funkce** a následně budeme zkoumat vlastnosti limit a v další kapitole různé způsoby výpočtu limit.

Definice (Limita posloupnost / *limit of a sequence*):

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má limitu $b \in \overline{\mathbb{R}}$, *právě když* pro *každé* okolí U_b bodu b existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro libovolné přirozené $n \geq N$ je $a_n \in U_b$.
Tento fakt symbolicky zapisujeme různými způsoby

$$\lim_{n\to\infty} a_n = b, \quad \lim a_n = b, \quad a_n \to b.$$

Připomeňme, že $b \in \overline{\mathbb{R}}$ zahrnuje dvě kvalitativně rozdílné možnosti: buď $b \in \mathbb{R}$, nebo $b = \pm\infty$. V obou těchto případech mají příslušná okolí jiný tvar!

Slovně: Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má limitu $b \in \overline{\mathbb{R}}$, právě když v *každém* okolí bodu b leží všechny členy posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ až na konečný počet výjimek.

Limita posloupnosti: příklady

Příklad.

Pomocí definice si rozmyslete tvrzení $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

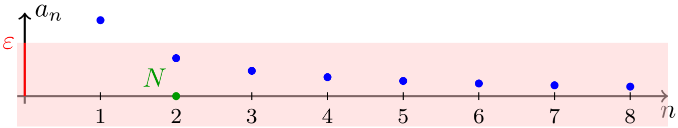
Intuitivně by toto mělo být zřejmé. Čím více se zvětšuje n, tím menší je zlomek $\frac{1}{n}$ a jeho hodnota tak „tíhne“ k 0. Je naše definice v souladu s touto intuicí?

Limita posloupnosti: příklady

Příklad.

Pomocí definice si rozmyslete tvrzení $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0.$

Intuitivně by toto mělo být zřejmé. Čím více se zvětšuje n, tím menší je zlomek $\frac{1}{n}$ a jeho hodnota tak „tíhne“ k 0. Je naše definice v souladu s touto intuicí?

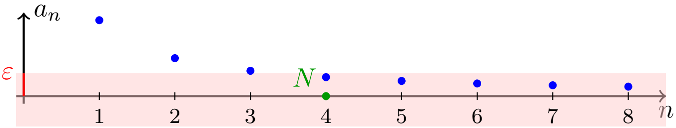


Limita posloupnosti: příklady

Příklad.

Pomocí definice si rozmyslete tvrzení $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Intuitivně by toto mělo být zřejmé. Čím více se zvětšuje n, tím menší je zlomek $\frac{1}{n}$ a jeho hodnota tak „tíhne" k 0. Je naše definice v souladu s touto intuicí?

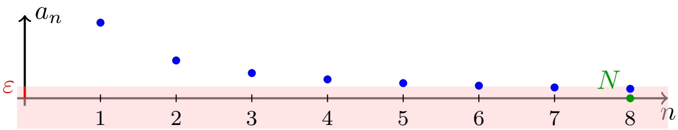


Limita posloupnosti: příklady

Příklad.

Pomocí definice si rozmyslete tvrzení $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Intuitivně by toto mělo být zřejmé. Čím více se zvětšuje n, tím menší je zlomek $\frac{1}{n}$ a jeho hodnota tak „tíhne" k 0. Je naše definice v souladu s touto intuicí?

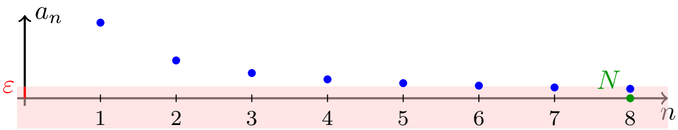


Limita posloupnosti: příklady

Příklad.

Pomocí definice si rozmyslete tvrzení $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Intuitivně by toto mělo být zřejmé. Čím více se zvětšuje n, tím menší je zlomek $\frac{1}{n}$ a jeho hodnota tak „tíhne“ k 0. Je naše definice v souladu s touto intuicí?



- Mějme *libovolné* okolí bodu $b = 0 \in \mathbb{R}$, tj. máme nějaké libovolné $\varepsilon > 0$ a $U_b = (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$.
- Naším úkolem je nalézt $N \in \mathbb{N}$ takové, aby pro každé přirozené $n \geq N$ bylo $a_n \in U_b$, tedy aby

$$|a_n - b| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \overset{!}{<} \varepsilon.$$

- Tato podmínka (v podstatě nerovnost pro n parametrizovaná zadaným ε) je ekvivalentní podmínce $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Tudíž stačí volit $N := \lceil 1/\varepsilon \rceil + 1$.

Limita posloupnosti: příklady

Příklad.

Pomocí definice si rozmyslete tvrzení $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = +\infty$.

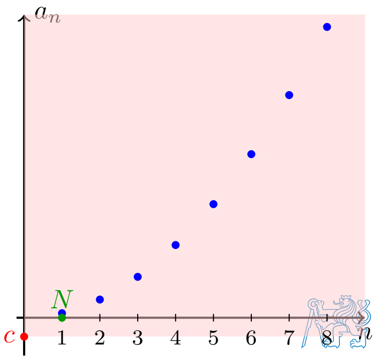
Intuitivně by toto mělo být zřejmé. Čím více se zvětšuje n, tím větší je hodnota n^2 *a navíc* „přeroste libovolnou zadanou mez“. Je naše definice v souladu s touto intuicí?

Limita posloupnosti: příklady

Příklad.

Pomocí definice si rozmyslete tvrzení $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = +\infty$.

Intuitivně by toto mělo být zřejmé. Čím více se zvětšuje n, tím větší je hodnota n^2 *a navíc* „přeroste libovolnou zadanou mez“. Je naše definice v souladu s touto intuicí?

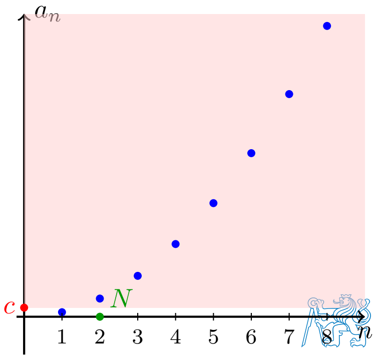


Limita posloupnosti: příklady

Příklad.

Pomocí definice si rozmyslete tvrzení $\lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty$.

Intuitivně by toto mělo být zřejmé. Čím více se zvětšuje n, tím větší je hodnota n^2 *a navíc* „přeroste libovolnou zadanou mez“. Je naše definice v souladu s touto intuicí?

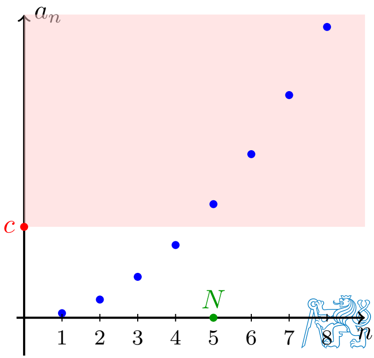


Limita posloupnosti: příklady

Příklad.

Pomocí definice si rozmyslete tvrzení $\lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty$.

Intuitivně by toto mělo být zřejmé. Čím více se zvětšuje n, tím větší je hodnota n^2 *a navíc* „přeroste libovolnou zadanou mez“. Je naše definice v souladu s touto intuicí?



Limita posloupnosti: příklady

Příklad.

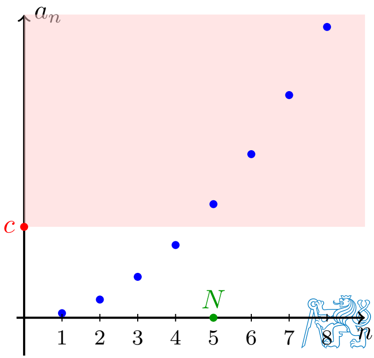
Pomocí definice si rozmyslete tvrzení $\lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty$.

Intuitivně by toto mělo být zřejmé. Čím více se zvětšuje n, tím větší je hodnota n^2 *a navíc* „přeroste libovolnou zadanou mez“. Je naše definice v souladu s touto intuicí?

- Mějme *libovolné* okolí bodu $b = +\infty \in \overline{\mathbb{R}}$, tj. máme nějaké libovolné $c \in \mathbb{R}$ a $U_b = (c, +\infty)$.
- Hledáme $N \in \mathbb{N}$ takové, aby pro každé přirozené $n \geq N$ bylo $a_n \in U_b$, tedy aby

$$a_n = n^2 \overset{!}{>} c.$$

- Pokud je $c \leq 0$, pak triviálně můžeme volit $N = 1$.
- Pokud je $c > 0$, pak je tato podmínka ekvivalentní podmínce $n > \sqrt{c}$ a volíme $N := \lceil \sqrt{c} \rceil + 1$.



Limita posloupnosti: příklady

Poznámka (Vyvrácení častého omylu I):

U minulého příkladu bylo podstatné, že členy posloupnosti přerostou libovolnou mez, pouhý „ostrý růst“ nestačí k tomu, aby limita posloupnosti byla $+\infty$.

Například posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s členy $a_n = 1 - \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, *nemá* limitu $+\infty$, ačkoliv je ostře rostoucí (dokažte!).

Proč? Očividně platí nerovnost $a_n < 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, tudíž například $U_{+\infty}(2) = (2, +\infty)$ neobsahuje ani jeden člen této posloupnosti. Tento fakt vylučuje hypotetickou platnost tvrzení $\lim a_n = +\infty$.

Limita posloupnosti: příklady

Poznámka (Vyvrácení častého omylu I):

U minulého příkladu bylo podstatné, že členy posloupnosti přerostou libovolnou mez, pouhý „ostrý růst“ nestačí k tomu, aby limita posloupnosti byla $+\infty$.

Například posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s členy $a_n = 1 - \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, *nemá* limitu $+\infty$, ačkoliv je ostře rostoucí (dokažte!).

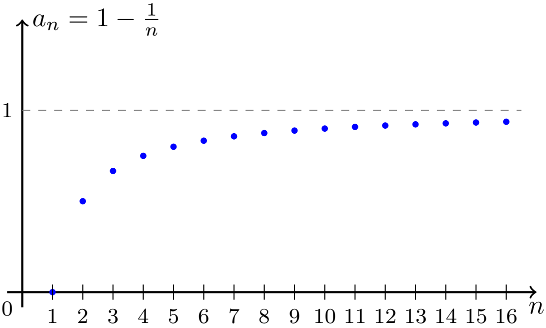
Proč? Očividně platí nerovnost $a_n < 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, tudíž například $U_{+\infty}(2) = (2, +\infty)$ neobsahuje ani jeden člen této posloupnosti. Tento fakt vylučuje hypotetickou platnost tvrzení $\lim a_n = +\infty$.

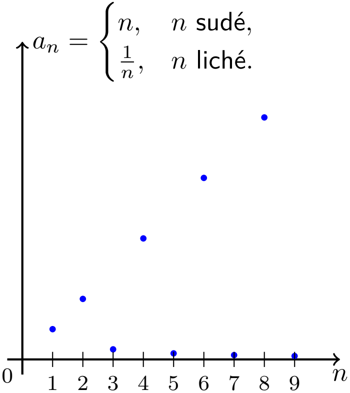
Poznámka (Vyvrácení častého omylu II):

Podobně, k tomu, aby $a_n \to a$ pouze nestačí, aby „se členy a_n dostaly libovolně blízko k a.“

Jako příklad uvažte posloupnost $a_n := \begin{cases} n, & n \text{ sudé}, \\ \frac{1}{n}, & n \text{ liché}. \end{cases}$ Její členy se „dostanou libovolně blízko“ k $+\infty$ i 0, přesto $+\infty$ ani 0 nejsou její limitou.

Limita posloupnosti: příklady





Limita posloupnosti: příklad

Příklad.

Pomocí definice si rozmyslete tvrzení: $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$ není rovna 0.

Limita posloupnosti: příklad

Příklad.

Pomocí definice si rozmyslete tvrzení: $\lim_{n\to\infty} (-1)^n$ není rovna 0.

Je sice pravda, že v okolí $U_0(2) = (-2, 2)$ leží dokonce všechny členy této posloupnosti, takže hledané N by v tomto případě mohlo být například $N = 1$.

Limita posloupnosti: příklad

Příklad.

Pomocí definice si rozmyslete tvrzení: $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ není rovna 0.

Je sice pravda, že v okolí $U_0(2) = (-2, 2)$ leží dokonce všechny členy této posloupnosti, takže hledané N by v tomto případě mohlo být například $N = 1$.

Ale například pro $U_0(1/2) = (-1/2, 1/2)$ už takové N *žádné nenajdeme*. V tomto okolí není ani jeden z členů této posloupnosti:

$$1, -1 \notin \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Sotva v něm tedy mohou ležet *všechny členy s indexem větším, než jistá mez*.

Slovní spojení „pro každé okolí“, tj. obecný kvantifikátor, na začátku podmínky v definici limity posloupnosti je naprosto podstatné.

Hlavní body

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

1. Limita posloupnosti
2. Limita funkce
3. Základní vlastnosti limit
4. Důsledky
5. Konvergence posloupností

$$\lim_{n \to \infty} a_n = b$$

Definice limity funkce

V případě funkcí má smysl zkoumat jejich chování i v jiných bodech, než v $+\infty$.

Definice (Limita funkce / *limit of a function*):

Mějme funkci $f : A \to \mathbb{R}$, hromadný bod $a \in \overline{\mathbb{R}}$ množiny A a bod $b \in \overline{\mathbb{R}}$.

Funkce f má v bodě a limitu rovnou b, *právě když* pro každé okolí U_b bodu b existuje okolí U_a bodu a takové, že pokud $x \in U_a \cap A$ a $x \neq a$ pak $f(x) \in U_b$.

Symbolicky tento fakt zapisujeme

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \quad \text{nebo} \quad \lim_{a} f = b.$$

Podmínku v definici bychom mohli symbolicky vyjádřit pomocí následující formule:

$$\big(\forall U_b\big)\big(\exists U_a\big)\big(\forall x \in (U_a \cap A) \setminus \{a\}\big)\big(f(x) \in U_b\big).$$

„Hromadnost" bodu a v definici zaručuje, že v množině $U_a \cap A$ je vždy nějaký prvek různý od a.

Definice limity funkce: poznámky

V takto zavedeném pojmu limity nerozlišujeme mezi „vlastní“ a „nevlastní“ limitou, jak bývá v některých zdrojích zvykem. Oba tyto pojmy jsou v naší definici přirozeně obsaženy.

Dříve zavedená definice *limity posloupnosti* je v předchozí definici přirozeně zahrnuta. Definiční obor každé posloupnosti, tj. $\mathbb{N}$, má pouze jeden hromadný bod, konkrétně $+\infty$.

Definice limity funkce: poznámky

V takto zavedeném pojmu limity nerozlišujeme mezi „vlastní“ a „nevlastní“ limitou, jak bývá v některých zdrojích zvykem. Oba tyto pojmy jsou v naší definici přirozeně obsaženy.
Dříve zavedená definice *limity posloupnosti* je v předchozí definici přirozeně zahrnuta. Definiční obor každé posloupnosti, tj. $\mathbb{N}$, má pouze jeden hromadný bod, konkrétně $+\infty$.

Poznámka (ε–δ definice limity funkce):

V případě, kdy a i b jsou prvky $\mathbb{R}$ je podmínka $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ ekvivalentní požadavku: bod a je hromadným bodem definičního oboru funkce f a

$$\big(\forall\varepsilon > 0\big)\big(\exists\delta > 0\big)\big(\forall x \in D_f\big)(0 < |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - b| < \varepsilon\big).$$

Analogické formulace lze získat pro různé kombinace případů $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ nebo $\mathbb{R}$.

Definice limity funkce: poznámky

V takto zavedeném pojmu limity nerozlišujeme mezi „vlastní“ a „nevlastní“ limitou, jak bývá v některých zdrojích zvykem. Oba tyto pojmy jsou v naší definici přirozeně obsaženy.
Dříve zavedená definice *limity posloupnosti* je v předchozí definici přirozeně zahrnuta. Definiční obor každé posloupnosti, tj. $\mathbb{N}$, má pouze jeden hromadný bod, konkrétně $+\infty$.

Poznámka (ε–δ definice limity funkce):

V případě, kdy a i b jsou prvky $\mathbb{R}$ je podmínka $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ ekvivalentní požadavku: bod a je hromadným bodem definičního oboru funkce f a

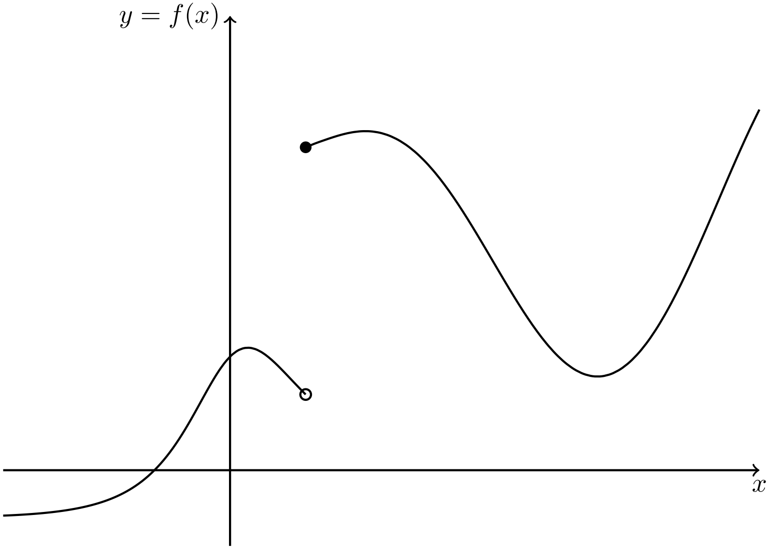
$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists \delta > 0\big)\big(\forall x \in D_f\big)(0 < |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - b| < \varepsilon\big).$$

Analogické formulace lze získat pro různé kombinace případů $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ nebo $\mathbb{R}$.

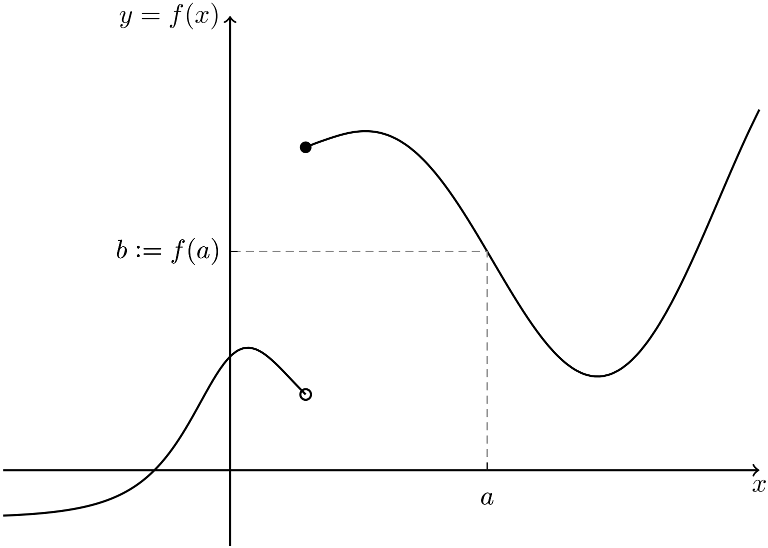
Příklad (Limita konstantní funkce).

Pro konstantní funkci $f(x) = c$, $x \in D_f = \mathbb{R}$ platí $\lim_{x \to a} f(x) = c$ v libovolném $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

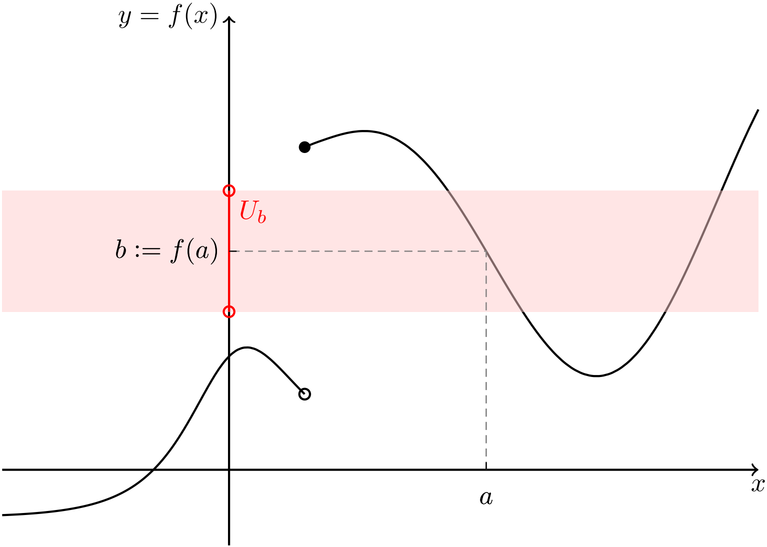
Ilustrace případu $a, b \in \mathbb{R}$



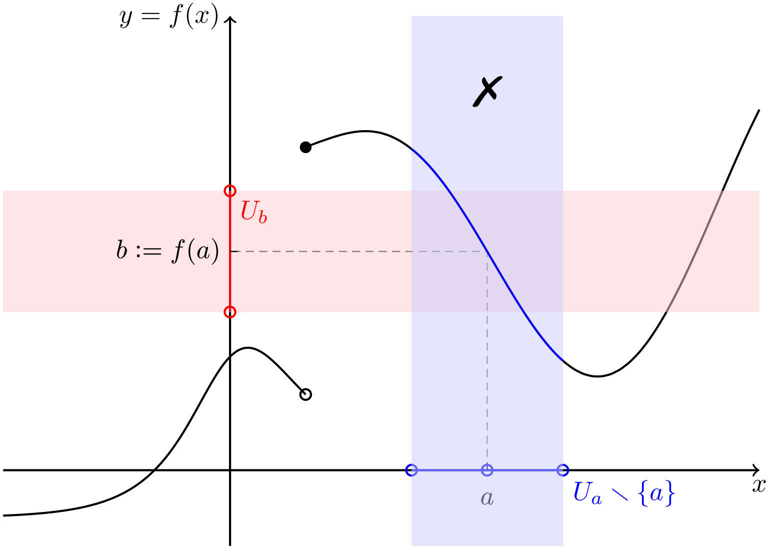
Ilustrace případu $a, b \in \mathbb{R}$



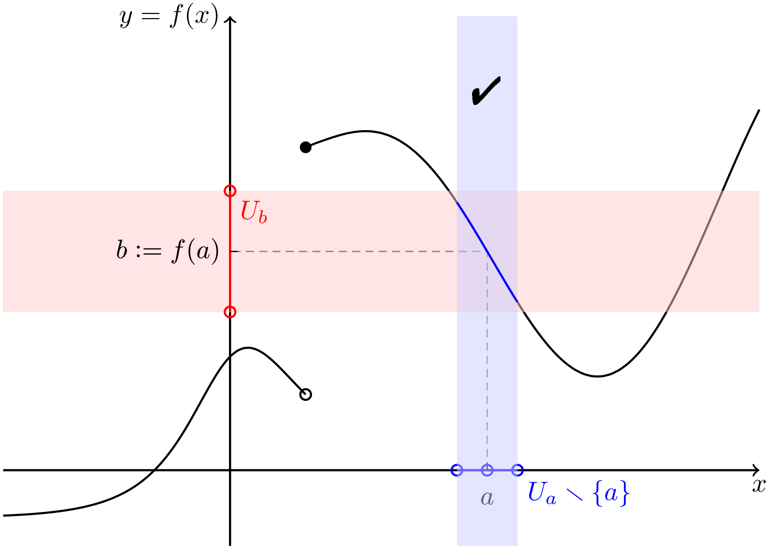
Ilustrace případu $a, b \in \mathbb{R}$



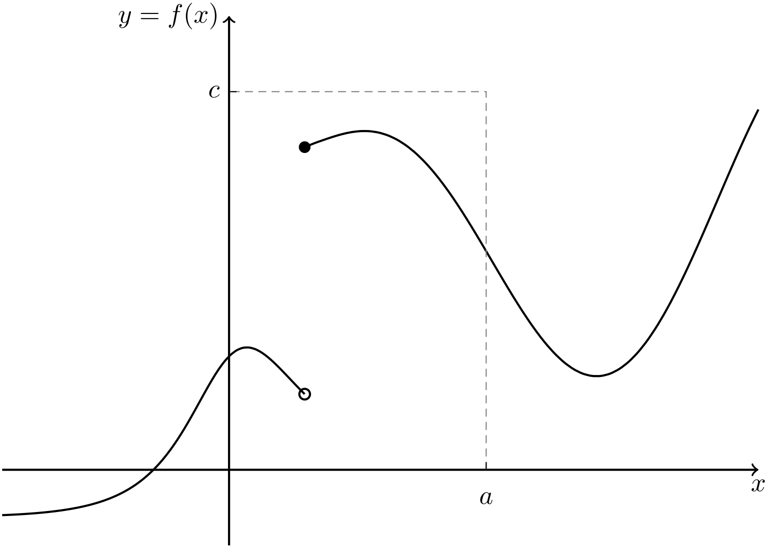
Ilustrace případu $a, b \in \mathbb{R}$



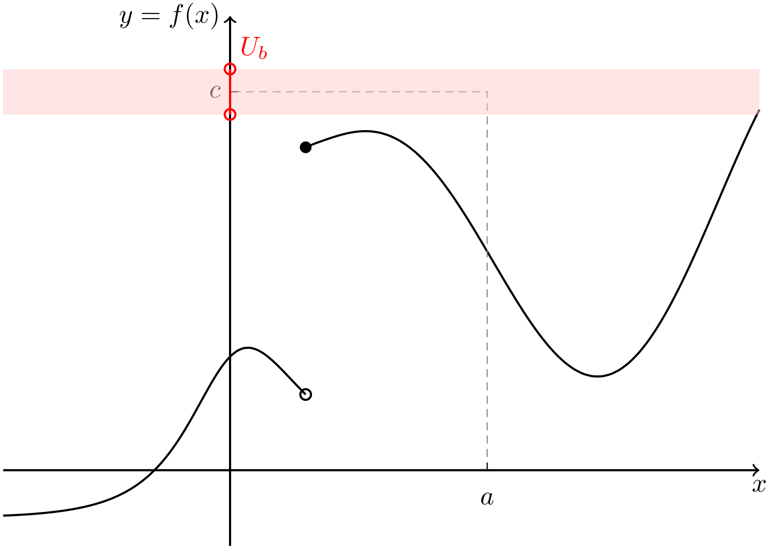
Ilustrace případu $a, b \in \mathbb{R}$



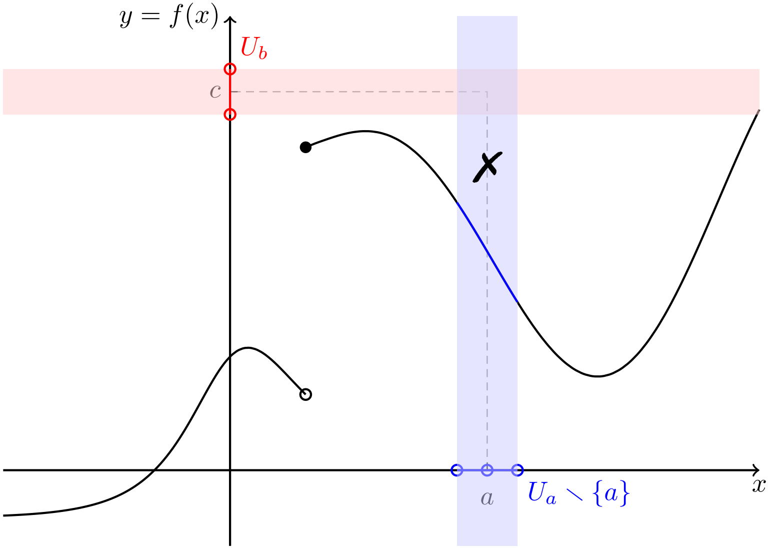
Ilustrace případu $a, b \in \mathbb{R}$



Ilustrace případu $a, b \in \mathbb{R}$



Ilustrace případu $a, b \in \mathbb{R}$



Limita funkce: příklad

Příklad.

Pomocí definice limity funkce ukažte, že $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

Limita funkce: příklad

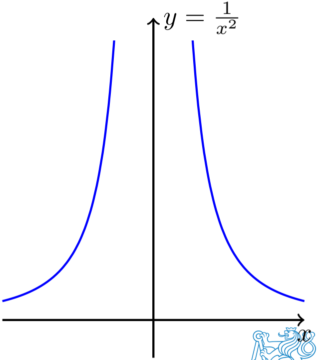
Příklad.

Pomocí definice limity funkce ukažte, že $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

Mějme $U_{+\infty}(c) = (c, +\infty)$, libovolné okolí bodu $+\infty$.

Pokud je $c \leq 0$, pak pro všechna nenulová $x \in U_0(1) = (-1, 1)$ jistě platí $1/x^2 > c$ a tedy i $1/x^2 \in U_{+\infty}(c)$.

Pokud je $c > 0$, pak podmínka $1/x^2 > c$ je ekvivalentní[a] podmínce $|x| < 1/\sqrt{c}$. Zvolíme-li tedy $\delta := 1/\sqrt{c}$ pak pro každé nenulové $x \in U_0(\delta)$ je $1/x^2 \in U_{+\infty}(c)$.



[a] Pozor na absolutní hodnotu!

Limita funkce: absolutní hodnota

Příklad.

Pro každé $a \in \overline{\mathbb{R}}$ platí $\lim\limits_{x \to a} |x| = |a|$.

Limita funkce: absolutní hodnota

Příklad.

Pro každé $a \in \overline{\mathbb{R}}$ platí $\lim\limits_{x \to a} |x| = |a|$.

Případ $a = \pm\infty$: je snadný, doporučujeme studentům k vlastnímu poprání se s ním.

Poznámka:

Pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$.
Skutečně, díky trojúhelníkové nerovnosti platí

$$|x| - |y| = |x - y + y| - |y| \leq |x - y| + |y| - |y| = |x - y|$$

a po prohození x za y a jednoduché úpravě pak i $|x| - |y| \geq -|x - y|$.

Limita funkce: absolutní hodnota

Příklad.

Pro každé $a \in \overline{\mathbb{R}}$ platí $\lim\limits_{x \to a} |x| = |a|$.

Případ $a = \pm\infty$: je snadný, doporučujeme studentům k vlastnímu poprání se s ním.

Poznámka:

Pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$.
Skutečně, díky trojúhelníkové nerovnosti platí

$$|x| - |y| = |x - y + y| - |y| \leq |x - y| + |y| - |y| = |x - y|$$

a po prohození x za y a jednoduché úpravě pak i $|x| - |y| \geq -|x - y|$.

Případ $a \in \mathbb{R}$: Mějme libovolné $U_{|a|}(\varepsilon)$ okolí bodu $|a|$. Vezmeme-li $\delta := \varepsilon$ a $x \in U_a(\delta)$ pak

$$\big||x| - |a|\big| \leq |x - a| < \delta = \varepsilon.$$

Limita funkce: druhá odmocnina

Příklad.

Pro druhou $\sqrt{x}$ odmocninu a $a \in \langle 0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ platí $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$.

Limita funkce: druhá odmocnina

Příklad.

Pro druhou $\sqrt{x}$ odmocninu a $a \in \langle 0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ platí $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$.

Případ $a = 0$: mějme $U_0(\varepsilon)$ libovolné okolí bodu 0. Je-li $x \in U_0(\delta) \cap D_{\sqrt{x}} = \langle 0, \delta)$ nenulové, pak podmínka $\sqrt{x} < \varepsilon$ je ekvivalentní podmínce $x < \varepsilon^2$. Stačí proto volit $\delta := \varepsilon^2$.

Limita funkce: druhá odmocnina

Příklad.

Pro druhou $\sqrt{x}$ odmocninu a $a \in \langle 0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ platí $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$.

Případ $a = 0$: mějme $U_0(\varepsilon)$ libovolné okolí bodu 0. Je-li $x \in U_0(\delta) \cap D_{\sqrt{x}} = \langle 0, \delta)$ nenulové, pak podmínka $\sqrt{x} < \varepsilon$ je ekvivalentní podmínce $x < \varepsilon^2$. Stačí proto volit $\delta := \varepsilon^2$.

Případ $a = +\infty$: mějme $U_{+\infty}(c)$ libovolné okolí bodu $+\infty$. Případ $c \leq 0$ je opět triviální. Pokud $c > 0$ pak pro libovolné kladné x je podmínka $\sqrt{x} > c$ ekvivalentní podmínce $x > c^2$. Pro každé $x \in U_{+\infty}(c^2)$ tedy platí $\sqrt{x} \in U_{+\infty}(c)$.

Limita funkce: druhá odmocnina

Prozkoumejme nyní případ $a \in (0, +\infty)$.

Limita funkce: druhá odmocnina

Prozkoumejme nyní případ $a \in (0, +\infty)$.Mějme $\varepsilon > 0$ a hledejme k němu $\delta > 0$ tak, aby platila implikace

$$|x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \varepsilon.$$

Limita funkce: druhá odmocnina

Prozkoumejme nyní případ $a \in (0, +\infty)$.Mějme $\varepsilon > 0$ a hledejme k němu $\delta > 0$ tak, aby platila implikace

$$|x - a| < \delta \ \Rightarrow \ |\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \varepsilon.$$

BÚNO předpokládejme, že $\delta < a/2$, pak pro každé $x \in U_a(\delta)$ platí $x > a/2$ a díky monotonii odmocniny i $\sqrt{x} > \sqrt{a/2}$.

Limita funkce: druhá odmocnina

Prozkoumejme nyní případ $a \in (0, +\infty)$.Mějme $\varepsilon > 0$ a hledejme k němu $\delta > 0$ tak, aby platila implikace

$$|x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \varepsilon.$$

BÚNO předpokládejme, že $\delta < a/2$, pak pro každé $x \in U_a(\delta)$ platí $x > a/2$ a díky monotonii odmocniny i $\sqrt{x} > \sqrt{a/2}$.

Potom pro $x \in U_a(\delta)$ platí

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \frac{|x - a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} < \frac{\delta}{\sqrt{a/2} + \sqrt{a}} = c \cdot \delta,$$

kde $c = \frac{1}{\sqrt{a/2}+\sqrt{a}}$ je kladná konstanta.

Limita funkce: druhá odmocnina

Prozkoumejme nyní případ $a \in (0, +\infty)$.Mějme $\varepsilon > 0$ a hledejme k němu $\delta > 0$ tak, aby platila implikace

$$|x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \varepsilon.$$

BÚNO předpokládejme, že $\delta < a/2$, pak pro každé $x \in U_a(\delta)$ platí $x > a/2$ a díky monotonii odmocniny i $\sqrt{x} > \sqrt{a/2}$.

Potom pro $x \in U_a(\delta)$ platí

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \frac{|x - a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} < \frac{\delta}{\sqrt{a/2} + \sqrt{a}} = c \cdot \delta,$$

kde $c = \frac{1}{\sqrt{a/2} + \sqrt{a}}$ je kladná konstanta.

Vidíme, že zvolíme-li $\delta < a/2$ a současně $\delta < \varepsilon / c$, pak skutečně pro $x \in U_a(\delta)$ platí $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \varepsilon$.

Limita funkce: $k$tá odmocnina

V případě $k$té odmocniny můžeme postupovat naprosto analogicky. Jen argumentace bude algebraicky náročnější, protože budeme muset použít vzorec

$$x^k - y^k = (x-y)\sum_{j=0}^{k-1} x^{k-1-j} y^j.$$

Doporučujeme studentům ale zkusit se poprat alespoň s případem třetí odmocniny.

Příklad.

Nechť $k \in \mathbb{N}$. Pro každé $a \in \mathbb{R}$ platí

$$\lim_{x\to a} \sqrt[2k-1]{x} = \sqrt[2k-1]{a}, \quad \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[2k-1]{x} = \pm\infty.$$

Pro každé $a \in \langle 0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ platí

$$\lim_{x\to a} \sqrt[2k]{x} = \sqrt[2k]{a}.$$

Jednostranné limity funkce

V některých případech je nutné zkoumat chování funkce v bodě pouze „z jedné strany." Přesně k tomuto účelu slouží následující pojem.

Definice (Jednostranné limity funkce / *one-sided limits of a function*):

Buď $f : A \to \mathbb{R}$ funkce, $a \in \mathbb{R}$ a označme $M_+ := A \cap (a, +\infty)$ a $M_- := A \cap (-\infty, a)$. Potom **limitu funkce** f **v bodě** a **zprava** definujeme jako limitu zúžení funkce f na množinu M_+ a značíme ji

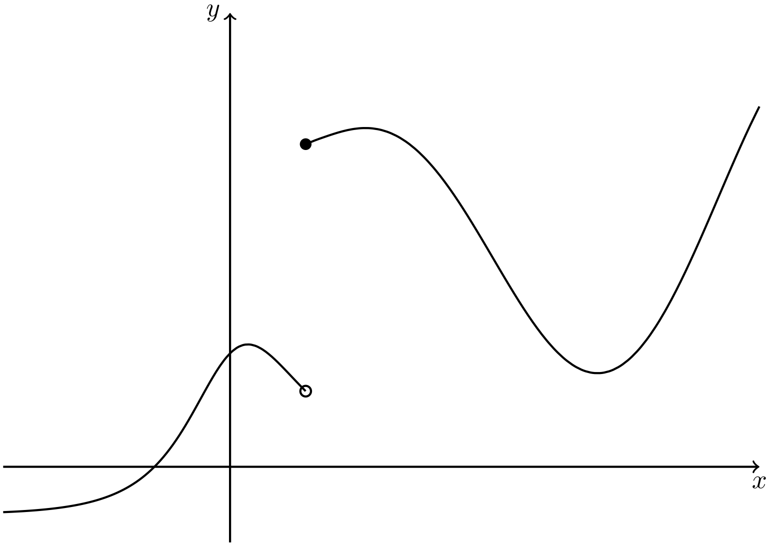
$$\lim_{x \to a+} f(x) := \lim_{x \to a} (f|_{M_+})(x).$$

Podobně **limitu funkce** f **v bodě** a **zleva** definujeme jako limitu zúžení funkce f na množinu M_- a značíme ji

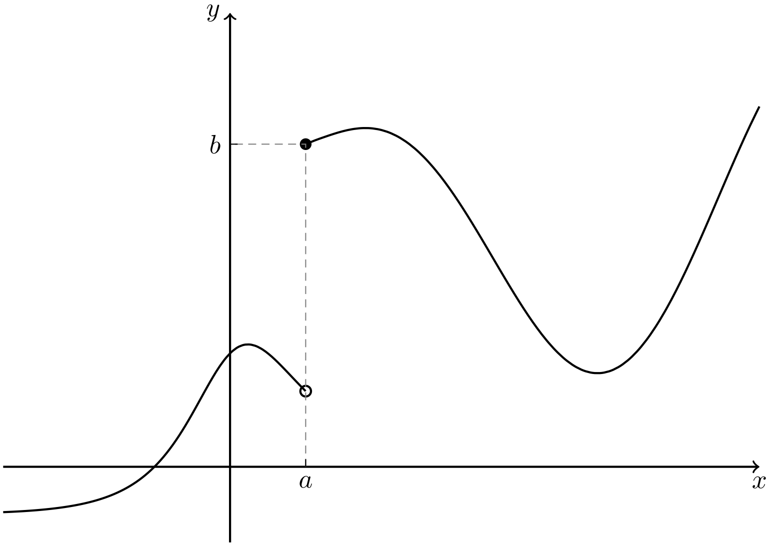
$$\lim_{x \to a-} f(x) := \lim_{x \to a} (f|_{M_-})(x).$$

V definici výše je implicitně obsažen požadavek, aby bod a byl hromadným bodem množiny M_+, resp. M_-. V opačném případě uvedené limity samozřejmě neexistují. N.B.: Pro $a \in \mathbb{R}$ platí $U_a \cap (a, +\infty) = U_a^+ \setminus \{a\}$.

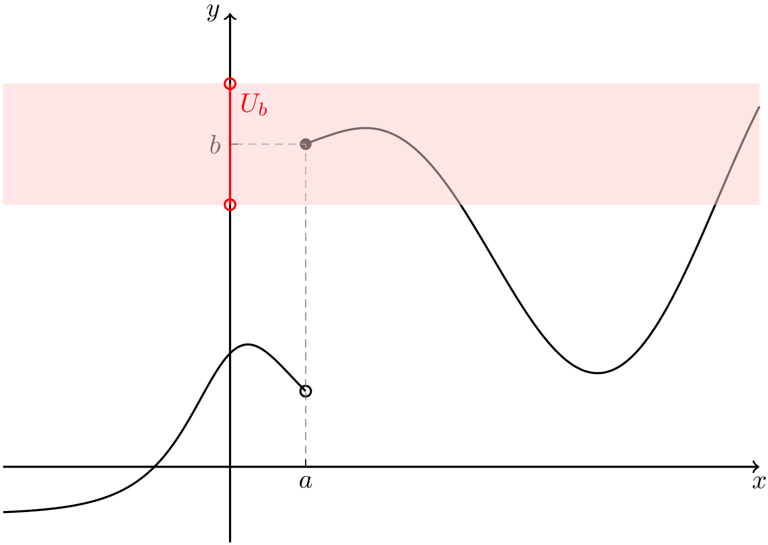
Ilustrace případu $a, b \in \mathbb{R}$



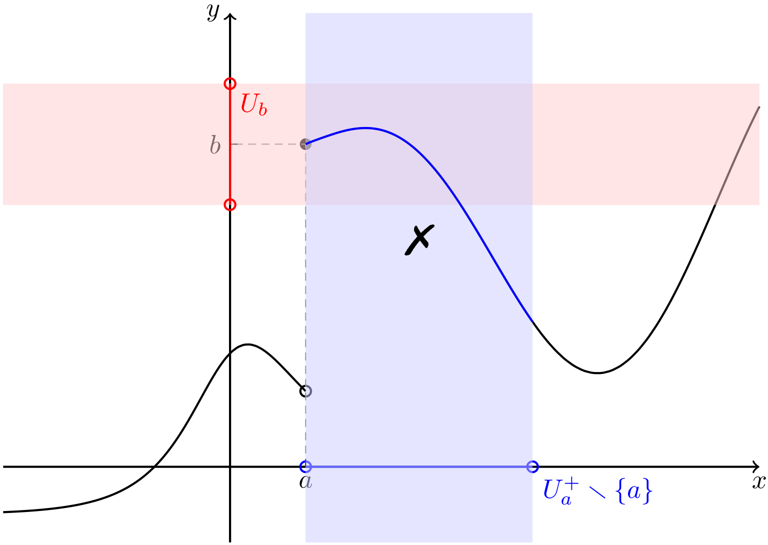
Ilustrace případu $a, b \in \mathbb{R}$



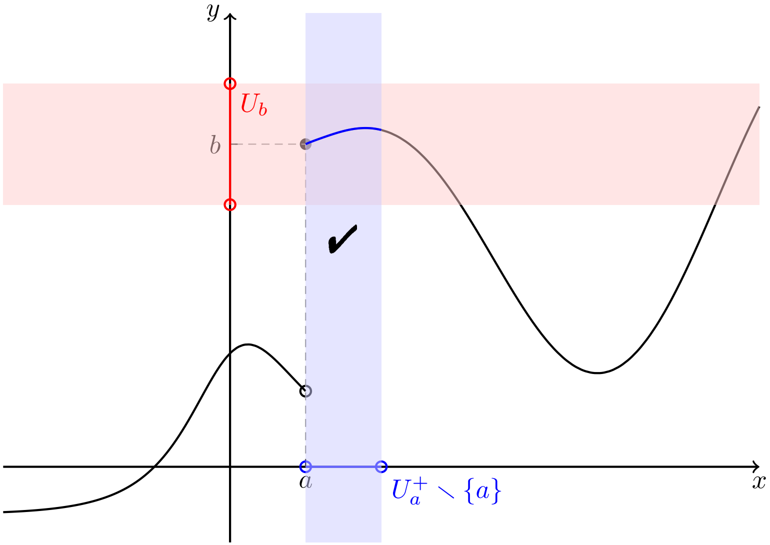
Ilustrace případu $a, b \in \mathbb{R}$



Ilustrace případu $a, b \in \mathbb{R}$



Ilustrace případu $a, b \in \mathbb{R}$



Jednostranné limity funkce: příklad

Příklad.

Pomocí definice limity funkce ukažte, že $\lim\limits_{x\to 0\pm} \dfrac{1}{x} = \pm\infty$.

Příklad bude proveden na prosemináři.

Vztah limity funkce a jednostranných limit funkce

Věta:

Mějme funkci $f : D_f \to \mathbb{R}$ a nechť $a \in \mathbb{R}$ je hromadným bodem množiny $D_f \cap (a, +\infty)$ i $D_f \cap (-\infty, a)$.

Potom limita $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existuje a je rovna $b \in \overline{\mathbb{R}}$, *právě když* existují obě jednostranné limity $\lim\limits_{x \to a_+} f(x)$ a $\lim\limits_{x \to a_-} f(x)$ a obě jsou rovny b.

Důkaz.

Snadný, přenecháváme k rozmyšlení. □

Vztah limity funkce a jednostranných limit funkce

Věta:

Mějme funkci $f : D_f \to \mathbb{R}$ a nechť $a \in \mathbb{R}$ je hromadným bodem množiny $D_f \cap (a, +\infty)$ i $D_f \cap (-\infty, a)$.

Potom limita $\lim_{x \to a} f(x)$ existuje a je rovna $b \in \overline{\mathbb{R}}$, *právě když* existují obě jednostranné limity $\lim_{x \to a_+} f(x)$ a $\lim_{x \to a_-} f(x)$ a obě jsou rovny b.

Důkaz.

Snadný, přenecháváme k rozmyšlení. □

Důsledek:

Nechť f je funkce a bod $a \in \mathbb{R}$ s vlastnostmi uvedenými v předpokladech předchozí věty. Platí-li alespoň jedna z podmínek

- obě jednostranné limity funkce f v bodě a existují a jsou různé,
- alespoň jedna z jednostranných limit funkce f v bodě a neexistuje,

potom limita funkce f v bodě a neexistuje.

Jednostranná limita funkce: příklad

Příklad.

Limita

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sgn} x$$

neexistuje. Přesvědčte se o tomto faktu studiem vhodných jednostranných limit.

Jednostranná limita funkce: příklad

Příklad.

Limita

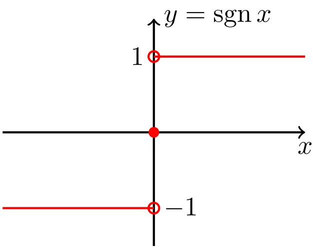
$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn} x$$

neexistuje. Přesvědčte se o tomto faktu studiem vhodných jednostranných limit.

Pro jednostranné limity platí

$$\lim_{x\to 0_+} \operatorname{sgn} x = 1,$$

$$\lim_{x\to 0_-} \operatorname{sgn} x = -1.$$



Podle předchozího důsledku oboustranná limita nemůže existovat ($1 \neq -1$).

Limita funkce: příklad

Příklad.

Pro libovolné $a \in \mathbb{R}$ platí

$$\lim_{x \to a} x = \lim_{x \to a_+} x = \lim_{x \to a_-} x = a.$$

Dále

$$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty \quad \text{a} \quad \lim_{x \to -\infty} x = -\infty.$$

Limita funkce: příklad

Příklad.

Pro libovolné $a \in \mathbb{R}$ platí

$$\lim_{x \to a} x = \lim_{x \to a_+} x = \lim_{x \to a_-} x = a.$$

Dále

$$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty \quad \text{a} \quad \lim_{x \to -\infty} x = -\infty.$$

Vezmu-li libovolné okolí U_a bodu a pak pro $x \in U_a \smallsetminus \{a\}$ zcela jistě platí, že $x \in U_a$.

Limita funkce: příklad

Příklad (Ke vztahu limity a funkční hodnoty).

Hodnota limity funkce f v bodě a závisí pouze na chování funkce f na okolí bodu a *mimo* bod a.

Limita funkce: příklad

Příklad (Ke vztahu limity a funkční hodnoty).

Hodnota limity funkce f v bodě a závisí pouze na chování funkce f na okolí bodu a *mimo* bod a.

- Buď $f(x) := \operatorname{sgn} x^2$. Ačkoliv $f(0) = 0$ je $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$.

Limita funkce: příklad

Příklad (Ke vztahu limity a funkční hodnoty).

Hodnota limity funkce f v bodě a závisí pouze na chování funkce f na okolí bodu a *mimo* bod a.

- Buď $f(x) := \operatorname{sgn} x^2$. Ačkoliv $f(0) = 0$ je $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.
- Buď $f(x) := \operatorname{sgn} \frac{1}{x^2}$, $D_f = \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$. Ačkoliv 0 nepatří do D_f platí $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

Limita funkce: příklad

Příklad (Ke vztahu limity a funkční hodnoty).

Hodnota limity funkce f v bodě a závisí pouze na chování funkce f na okolí bodu a *mimo* bod a.

- Buď $f(x) := \operatorname{sgn} x^2$. Ačkoliv $f(0) = 0$ je $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$.
- Buď $f(x) := \operatorname{sgn} \frac{1}{x^2}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ačkoliv 0 nepatří do D_f platí $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$.

Podrobněji řečeno: limita funkce v bodě a vůbec nesouvisí s funkční hodnotou funkce f v bodě a. Bod a nemusí ani být v definičním oboru, a i když je, tak funkční hodnota funkce f v bodě a může být různá od limity funkce f v bodě a, existuje-li vůbec.

Hlavní body

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = b$$

Jednoznačnost limity

Aneb kolik limit daná funkce v daném bodě může mít?

Věta (O jednoznačnosti limity):

Funkce f má v bodě a nejvýše jednu limitu.

„Nejvýše jednu“ znamená buď žádnou, nebo právě jednu. Tato věta zahrnuje i limity posloupností.

Jednoznačnost limity

Aneb kolik limit daná funkce v daném bodě může mít?

Věta (O jednoznačnosti limity):

Funkce f má v bodě a nejvýše jednu limitu.

„Nejvýše jednu“ znamená buď žádnou, nebo právě jednu. Tato věta zahrnuje i limity posloupností.

Důkaz sporem.

- Předpokládejme, že máme funkci f, hromadný bod a jejího definičního oboru a tato funkce má v tomto bodě dvě *různé* limity $b \in \overline{\mathbb{R}}$ a $c \in \overline{\mathbb{R}}$.
- Protože body b a c jsou různé, nutně existují dvě jejich okolí, označme si je U_b a U_c, která jsou disjunktní, tj. $U_b \cap U_c = \emptyset$.
- Podle definice limity funkce existují ke každému z těchto okolí jistá okolí bodu a, označme si jejich průnik jako V_a, tato množina je stále okolím bodu a.
- Potom stále dle definice pro každé $x \in (V_a \cap D_f) \smallsetminus \{a\}$ je $f(x) \in U_b$ a současně $f(x) \in U_c$. To ale není možné, protože tyto množiny jsou disjunktní! $\square$

Ekvivalentní formulace

Pozorování:

Buďte $f : A \to \mathbb{R}$ funkce, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ hromadný bod jejího definičního oboru a $b \in \mathbb{R}$. Potom platí následující dvě ekvivalence.

1. $\lim_{x \to a} f(x) = b$, právě když $\lim_{x \to a} |f(x) - b| = 0$.
2. $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, právě když $\lim_{x \to a} |f(x)| = 0$.

Důkaz.

Druhý bod plyne okamžitě z prvního ($b = 0$).
Pro důkaz druhého si stačí vzpomenout na definici limity funkce a uvědomit si, že za uvedených předpokladů je požadavek $f(x) \in U_b(\varepsilon)$ ekvivalentní požadavku $|f(x) - b| \in U_0(\varepsilon)$ pro libovolné $\varepsilon > 0$. □

Chování limity vůči zúžení

Věta (O limitě zúžení):

Mějme funkci f a bod $a \in \overline{\mathbb{R}}$, který je hromadným bodem definičního oboru D_f funkce f. Dále uvažme množinu $M \subset D_f$ takovou, že bod a je stále jejím hromadným bodem.
Potom pokud $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \in \overline{\mathbb{R}}$, pak i pro $g := f|_M$, zúžení funkce f na množinu M, platí $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$.

Tato věta není přímo použitelná pro posloupnosti (jedna z nich by neměla definiční obor celé $\mathbb{N}$, což nepřipouštíme). Analogem pro posloupnosti je věta o limitě vybrané posloupnosti, ke které se dostaneme zanedlouho.

Důkaz.

Pouhé přepsání definice a využití pozorování: pokud nějaká vlastnost $V(x)$ platí pro všechna $x \in A$, pak platí i pro všechna $x \in B \subset A$. $\square$

Heineho věta

Hlubší souvislost mezi limitami funkcí a limitami posloupností ale skutečně existuje. Přesně ho odhaluje následující věta:

Věta (Heine):

$\lim_{x\to a} f(x) = b$, *právě když* a je hromadným bodem D_f a pro každou posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ s limitou a a splňující $\{x_n | n \in \mathbb{N}\} \subset D_f \setminus \{a\}$ platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$.

Heineho věta

Hlubší souvislost mezi limitami funkcí a limitami posloupností ale skutečně existuje. Přesně ho odhaluje následující věta:

Věta (Heine):

$\lim_{x \to a} f(x) = b$, *právě když* a je hromadným bodem D_f a pro každou posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ s limitou a a splňující $\{x_n | n \in \mathbb{N}\} \subset D_f \setminus \{a\}$ platí $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = b$.

Důkaz vynecháváme. Jeden směr jsme ale již dokázali ve větě o limitě zúžení funkce (vidíte který?). Tato implikace má i následující důležitý důsledek:

Heineho věta

Hlubší souvislost mezi limitami funkcí a limitami posloupností ale skutečně existuje. Přesně ho odhaluje následující věta:

Věta (Heine):

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, *právě když* a je hromadným bodem D_f a pro každou posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ s limitou a a splňující $\{x_n | n \in \mathbb{N}\} \subset D_f \setminus \{a\}$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$.

Důkaz vynecháváme. Jeden směr jsme ale již dokázali ve větě o limitě zúžení funkce (vidíte který?). Tato implikace má i následující důležitý důsledek:

Důsledek (Vyvrácení existence limity funkce):

Nechť $a \in \overline{\mathbb{R}}$ je hromadným bodem definičního oboru funkce f. Dále nechť $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou dvě posloupnosti s členy z D_f, mající limitu a a splňující podmínky $x_n \neq a$ a $z_n \neq a$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.
Pokud limity $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ a $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)$ existují a jsou různé, nebo alespoň jedna z nich neexistuje, potom limita $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ neexistuje.

Heineho věta: použití

Pomocí Heineho věty, resp. věty o limitě zúžení, můžeme snadno počítat limity posloupností pomocí znalosti limity funkce v $+\infty$.

Heineho věta: použití

Pomocí Heineho věty, resp. věty o limitě zúžení, můžeme snadno počítat limity posloupností pomocí znalosti limity funkce v $+\infty$.

V předchozí části přednášky jsme například odvodili, že

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty.$$

Odtud ihned plyne, že i pro limitu posloupnosti $\left(\sqrt{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ platí

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty.$$

Heineho věta: použití

Pomocí Heineho věty, resp. věty o limitě zúžení, můžeme snadno počítat limity posloupností pomocí znalosti limity funkce v $+\infty$.

V předchozí části přednášky jsme například odvodili, že

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty.$$

Odtud ihned plyne, že i pro limitu posloupnosti $\left(\sqrt{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ platí

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty.$$

Proč? Máme k dispozici dokonce dva způsoby argumentace:

- Funkci $\sqrt{x}$ jsme zúžili na $\mathbb{N}$ (a získali tak onu posloupnost) a použili větu o limitě zúžení.
- V Heineho větě jsme použili posloupnost s členy $x_n = n$, $n \in \mathbb{N}$.

Heineho věta: příklad

Příklad.

Limita

$$\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$$

neexistuje. Zamyslete se nad chováním této funkce okolo bodu 0 a své pozorování využijte!

Heineho věta: příklad

Příklad.

Limita

$$\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$$

neexistuje. Zamyslete se nad chováním této funkce okolo bodu 0 a své pozorování využijte!

Označme $f(x) := \sin\frac{1}{x}$, tj. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a položme

$$x_n := \frac{1}{2\pi n}, \quad z_n := \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}.$$

Tyto posloupnosti splňují

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = 0 \quad \text{a} \quad \{x_n | n \in \mathbb{N}\} \cup \{z_n | n \in \mathbb{N}\} \subset D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

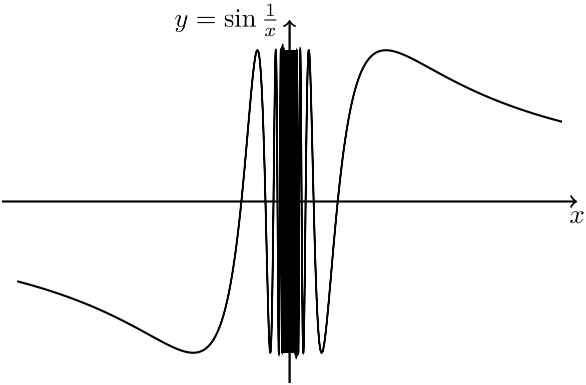
Konečně

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \sin(2\pi n) = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \lim_{n\to\infty} \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1.$$

Graf funkce $\sin \frac{1}{x}$

Tato funkce se blízko u nuly chová skutečně velmi divoce, jak je patrné z následující vizualizace:



Hlavní body

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = b$$

Limita posloupnosti $\subset$ limita funkce

- Pojem „limita funkce," který jsme zavedli v předchozí sekci přirozeně obsahuje i pojem „limita posloupnosti" zavedený na začátku této kapitoly.
- Připomeňme, že posloupnost je definována jako zobrazení množiny $\mathbb{N}$ do množiny $\mathbb{R}$. Je tedy současně i funkcí a její definiční obor má jediný hromadný bod $+\infty$.
- Takřka vše, co doposud bylo řečeno o limitách funkcí je aplikovatelné i na limity posloupností.
- Posloupnost je ale samozřejmě velmi speciální případ funkce. A proto lze o jejich limitách říci i o něco více, jak si ukážeme v této sekci.

Hromadný bod množiny

„Hromadné“ body množiny můžeme elegantně popsat také pomocí posloupností a jejich limit.

Věta (O vztahu hromadných bodů množin a posloupností):

Mějme množinu $M \subset \mathbb{R}$.
Bod $b \in \overline{\mathbb{R}}$ je hromadným bodem množiny M, *právě když* existuje posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jejíž členy všechny leží v M a jsou různé od b a $\lim a_n = b$.

Hromadný bod množiny

„Hromadné" body množiny můžeme elegantně popsat také pomocí posloupností a jejich limit.

Věta (O vztahu hromadných bodů množin a posloupností):

Mějme množinu $M \subset \mathbb{R}$.
Bod $b \in \overline{\mathbb{R}}$ je hromadným bodem množiny M, *právě když* existuje posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jejíž členy všechny leží v M a jsou různé od b a $\lim a_n = b$.

Důkaz pro případ $a \in \mathbb{R}$.

- $\Rightarrow$ Pro každé $n \in \mathbb{N}$ zvolme nějaké $a_n \in M$ patřící do $U_b(1/n)$ a různé od b – to lze, b je hromadným bodem množiny M. Je-li $U_b(\varepsilon)$ nějaké okolí bodu b, tak pro $n \geq N = \lceil 1/\varepsilon \rceil$ platí $a_n \in U_b(1/n) \subset U_b(\varepsilon)$. Tudíž $a_n \to b$.
- $\Leftarrow$ Mějme posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ uvedených vlastností. Uvážíme-li libovolné U_b, pak jistě existuje (dokonce je jich nekonečně mnoho) nějaké $a_n \in M$ patřící do tohoto okolí různé od b. Bod b je tedy hromadným bodem množiny M. $\square$

Hromadný bod posloupnosti

Vztah mezi hromadnými body posloupností a vybranými posloupnostmi popisuje následující věta.

Hromadný bod posloupnosti

Vztah mezi hromadnými body posloupností a vybranými posloupnostmi popisuje následující věta.

Věta:

Bod $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ je hromadným bodem posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, *právě když* existuje vybraná posloupnost $(a_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ mající limitu $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$.

Hromadný bod posloupnosti

Vztah mezi hromadnými body posloupností a vybranými posloupnostmi popisuje následující věta.

Věta:

Bod $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ je hromadným bodem posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, *právě když* existuje vybraná posloupnost $(a_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ mající limitu $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$.

Důkaz.

- $\Leftarrow$: V každém okolí U_α leží nekonečně mnoho členů posloupnosti $(a_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ a tím pádem i posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Hromadný bod posloupnosti

Vztah mezi hromadnými body posloupností a vybranými posloupnostmi popisuje následující věta.

Věta:

Bod $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ je hromadným bodem posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, *právě když* existuje vybraná posloupnost $(a_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ mající limitu $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$.

Důkaz.

- $\Leftarrow$: V každém okolí U_α leží nekonečně mnoho členů posloupnosti $(a_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ a tím pádem i posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.
- Provedeme důkaz $\Rightarrow$ pouze pro $\alpha \in \mathbb{R}$: Uvažme okolí $U_\alpha(1)$, existuje k_1 takové, že $a_{k_1} \in U_\alpha(1)$. Je-li $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, pak pro okolí $U_\alpha(1/n)$ existuje $k_n > k_{n-1}$ splňující $a_{k_n} \in U_\alpha(1/n)$. Takto zkonstruovaná posloupnost $(a_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ je vybraná z $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a konverguje k α. $\square$

Co lze říci o limitě vybrané posloupnosti?

Přímo z definice ihned nahlédneme (alternativně se stačí na limity dívat jako na limity funkcí a vzpomenout si na větu o limitě zúžení funkce).

Věta (O limitě vybrané posloupnosti):

Nechť posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má limitu $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$. Pak každá podposloupnost vybraná z $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má také limitu α.

Co lze říci o limitě vybrané posloupnosti?

Přímo z definice ihned nahlédneme (alternativně se stačí na limity dívat jako na limity funkcí a vzpomenout si na větu o limitě zúžení funkce).

Věta (O limitě vybrané posloupnosti):

Nechť posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má limitu $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$. Pak každá podposloupnost vybraná z $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má také limitu α.

Příklad.

Platí $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{4n! + n^2} = 0$. Posloupnost $\left(\frac{1}{4n!+n^2}\right)_{n=1}^{\infty}$ je totiž vybraná posloupnost z $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ a již víme, že $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Co lze říci o limitě vybrané posloupnosti?

Přímo z definice ihned nahlédneme (alternativně se stačí na limity dívat jako na limity funkcí a vzpomenout si na větu o limitě zúžení funkce).

Věta (O limitě vybrané posloupnosti):

Nechť posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má limitu $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$. Pak každá podposloupnost vybraná z $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má také limitu α.

Příklad.

Platí $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{4n! + n^2} = 0$. Posloupnost $\left(\frac{1}{4n!+n^2}\right)_{n=1}^{\infty}$ je totiž vybraná posloupnost z $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ a již víme, že $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Důsledek:

Lze-li z posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ vybrat dvě podposloupnosti s *různými* limitami, pak limita původní posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ neexistuje.

Příklad

Příklad.

Limita posloupnosti $\left((-1)^n\right)_{n=1}^{\infty}$ neexistuje.

Příklad

Příklad.

Limita posloupnosti $\left((-1)^n\right)_{n=1}^{\infty}$ neexistuje.

Vybereme podposloupnosti se sudými a lichými indexy. Tj. položíme $k_n := 2n$ a $\ell_n := 2n-1$ pro $n = 1, 2, \ldots$. Potom obě vybrané podposloupnosti jsou konstantní s různými limitami:

$$a_{k_n} = 1 \to 1, \quad a_{\ell_n} = -1 \to -1.$$

Vztah limity a asymptotických odhadů o a $\mathcal{O}$

Věta:

Mějme dvě funkce $f : A \to \mathbb{R}$, $g : B \to \mathbb{R}$ a bod $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Dále předpokládejme, že

- Bod a je hromadným bodem množiny A i B.
- Existuje okolí U_a bodu a takové, že $U_a \cap A = U_a \cap B$.
- Pro všechna x z množiny $U_a \cap B$ různá od a platí nerovnost $g(x) \neq 0$.

Vztah limity a asymptotických odhadů o a $\mathcal{O}$

Věta:

Mějme dvě funkce $f : A \to \mathbb{R}$, $g : B \to \mathbb{R}$ a bod $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Dále předpokládejme, že

- Bod a je hromadným bodem množiny A i B.
- Existuje okolí U_a bodu a takové, že $U_a \cap A = U_a \cap B$.
- Pro všechna x z množiny $U_a \cap B$ různá od a platí nerovnost $g(x) \neq 0$.

Potom platí následující dvě implikace:

- Pokud $\lim\limits_{x \to a} \left| \dfrac{f(x)}{g(x)} \right| \in \mathbb{R}$, pak $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ pro $x \to a$.
- $\lim\limits_{x \to a} \left| \dfrac{f(x)}{g(x)} \right| = 0$, právě když $f(x) = o(g(x))$ pro $x \to a$.

Důkaz.

V prvním případě si stačí uvědomit, že existence konečné limity implikuje omezenost funkce na okolí (argumentace na tabuli).
V druhém případě pak roli c v definici o hraje ε v definici limity. $\square$

Hlavní body

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

1. Limita posloupnosti
2. Limita funkce
3. Základní vlastnosti limit
4. Důsledky
5. **Konvergence posloupností**

$$\lim_{n\to\infty} a_n = b$$

Konvergence a divergence posloupností

Podle ne/existence limity posloupnosti a její hodnoty rozlišujeme následující typy posloupností.

Definice (Konvergence a divergence / *convergence and divergence*):

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá **konvergentní**, právě když její limita existuje a je prvkem $\mathbb{R}$. V ostatních případech ji nazýváme **divergentní**.

Pokud limita posloupnosti existuje, pak také říkáme, že „posloupnost má limitu“. V tom případě její hodnota patří do $\overline{\mathbb{R}}$. Konvergence vyžaduje více, posloupnost v tom případě musí mít *konečnou* limitu.

Konvergence a divergence posloupností

Podle ne/existence limity posloupnosti a její hodnoty rozlišujeme následující typy posloupností.

Definice (Konvergence a divergence / *convergence and divergence*):

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá **konvergentní**, právě když její limita existuje a je prvkem $\mathbb{R}$. V ostatních případech ji nazýváme **divergentní**.

Pokud limita posloupnosti existuje, pak také říkáme, že „posloupnost má limitu“. V tom případě její hodnota patří do $\overline{\mathbb{R}}$. Konvergence vyžaduje více, posloupnost v tom případě musí mít *konečnou* limitu.

Příklad.

Z předchozího výkladu již víme, že

- posloupnost $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní,
- libovolná konstantní posloupnost je konvergentní,
- posloupnost $(n^2)_{n=1}^{\infty}$ je divergentní.

Všechny tři uvedené posloupnosti mají limitu.

Připomenutí

V úvodní přednášce jsme konstatovali, že množina reálných čísel splňuje …

Poznámka (Axiom úplnosti):

Každý smršťující se systém vnořených uzavřených intervalů má neprázdný průnik. Přesněji, pokud

$$\langle a_n, b_n \rangle \supset \langle a_{n+1}, b_{n+1} \rangle \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N},$$
$$\lim_{n \to \infty} (b_n - a_n) = 0,$$

pak existuje reálné x ležící v každém z intervalů $\langle a_n, b_n \rangle$, $n \in \mathbb{N}$.

Nyní tuto důležitou vlastnost množiny reálných čísel využijeme.

Bolzanova–Weierstrassova věta

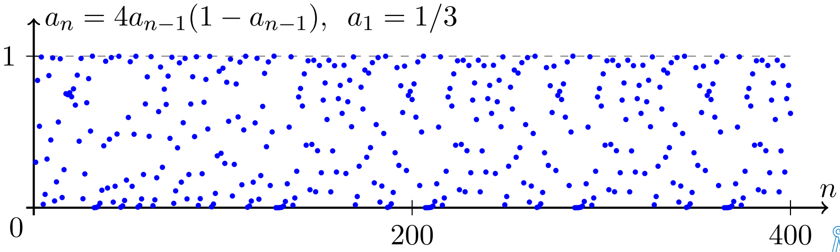
- Každá konvergentní posloupnost je omezená (rozmyslete!).

Bolzanova–Weierstrassova věta

- Každá konvergentní posloupnost je omezená (rozmyslete!).
- Opak neplatí (viz $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$). Má každá omezená posloupnost alespoň hromadný bod?

Bolzanova–Weierstrassova věta

- Každá konvergentní posloupnost je omezená (rozmyslete!).
- Opak neplatí (viz $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$). Má každá omezená posloupnost alespoň hromadný bod?
- Představíme-li si omezenou a chaoticky se chovající posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, může být překvapivé, že odpověď na otázku výše je *kladná*.



Věta (Bolzano–Weierstrass):

Každá omezená číselná posloupnost má hromadný bod ležící v $\mathbb{R}$.

Věta (Bolzano–Weierstrass):

Každá omezená číselná posloupnost má hromadný bod ležící v $\mathbb{R}$.

Důkaz.

Buď $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ omezená posloupnost.

Věta (Bolzano–Weierstrass):

Každá omezená číselná posloupnost má hromadný bod ležící v $\mathbb{R}$.

Důkaz.

Buď $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ omezená posloupnost. Jistě existuje interval $\langle b_1, c_1 \rangle$ takový, že obsahuje všechny členy posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Rozdělíme-li interval $\langle b_1, c_1 \rangle$ na poloviční intervaly $\langle b_1, \frac{b_1+c_1}{2} \rangle$ a $\langle \frac{b_1+c_1}{2}, c_1 \rangle$, pak aspoň jeden z těchto intervalů obsahuje nekonečně mnoho členů posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, označme ho $\langle b_2, c_2 \rangle$.

Věta (Bolzano–Weierstrass):

Každá omezená číselná posloupnost má hromadný bod ležící v $\mathbb{R}$.

Důkaz.

Buď $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ omezená posloupnost. Jistě existuje interval $\langle b_1, c_1 \rangle$ takový, že obsahuje všechny členy posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Rozdělíme-li interval $\langle b_1, c_1 \rangle$ na poloviční intervaly $\langle b_1, \frac{b_1+c_1}{2} \rangle$ a $\langle \frac{b_1+c_1}{2}, c_1 \rangle$, pak aspoň jeden z těchto intervalů obsahuje nekonečně mnoho členů posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, označme ho $\langle b_2, c_2 \rangle$. Tímto způsobem induktivně sestrojíme systém vnořených intervalů $\langle b_n, c_n \rangle$ z nichž každý obsahuje nekonečně mnoho členů $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a pro jejichž délky platí

$$\lim_{n\to\infty} (c_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{c_1 - b_1}{2^{n-1}} = 0.$$

Věta (Bolzano–Weierstrass):

Každá omezená číselná posloupnost má hromadný bod ležící v $\mathbb{R}$.

Důkaz.

Buď $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ omezená posloupnost. Jistě existuje interval $\langle b_1, c_1 \rangle$ takový, že obsahuje všechny členy posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Rozdělíme-li interval $\langle b_1, c_1 \rangle$ na poloviční intervaly $\langle b_1, \frac{b_1+c_1}{2} \rangle$ a $\langle \frac{b_1+c_1}{2}, c_1 \rangle$, pak aspoň jeden z těchto intervalů obsahuje nekonečně mnoho členů posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, označme ho $\langle b_2, c_2 \rangle$. Tímto způsobem induktivně sestrojíme systém vnořených intervalů $\langle b_n, c_n \rangle$ z nichž každý obsahuje nekonečně mnoho členů $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a pro jejichž délky platí

$$\lim_{n\to\infty} (c_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{c_1 - b_1}{2^{n-1}} = 0.$$

Podle axiomu úplnosti existuje reálné x patřící do *každého* z intervalů $\langle b_n, c_n \rangle$.

Věta (Bolzano–Weierstrass):

Každá omezená číselná posloupnost má hromadný bod ležící v $\mathbb{R}$.

Důkaz.

Buď $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ omezená posloupnost. Jistě existuje interval $\langle b_1, c_1 \rangle$ takový, že obsahuje všechny členy posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Rozdělíme-li interval $\langle b_1, c_1 \rangle$ na poloviční intervaly $\langle b_1, \frac{b_1+c_1}{2} \rangle$ a $\langle \frac{b_1+c_1}{2}, c_1 \rangle$, pak aspoň jeden z těchto intervalů obsahuje nekonečně mnoho členů posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, označme ho $\langle b_2, c_2 \rangle$. Tímto způsobem induktivně sestrojíme systém vnořených intervalů $\langle b_n, c_n \rangle$ z nichž každý obsahuje nekonečně mnoho členů $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a pro jejichž délky platí

$$\lim_{n\to\infty} (c_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{c_1 - b_1}{2^{n-1}} = 0.$$

Podle axiomu úplnosti existuje reálné x patřící do *každého* z intervalů $\langle b_n, c_n \rangle$. Protože délky intervalů $\langle b_n, c_n \rangle$ konvergují k nule, lze pro libovolné okolí U_x nalézt n dostatečně velké na to, aby celý interval $\langle b_n, c_n \rangle$ patřil do U_x. Proto lze v U_x nalézt nekonečně mnoho členů posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a x je tedy hromadným bodem $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. □

Limita monotonní posloupnosti

Důsledkem Bolzanovy–Weierstrassovy věty je následující, často používané, tvrzení.

Věta (O limitě monotonní posloupnosti):

Každá reálná monotonní posloupnost má limitu. Tato limita je konečná, právě když je daná posloupnost omezená.

Limita monotonní posloupnosti

Důsledkem Bolzanovy–Weierstrassovy věty je následující, často používané, tvrzení.

Věta (O limitě monotonní posloupnosti):

Každá reálná monotonní posloupnost má limitu. Tato limita je konečná, právě když je daná posloupnost omezená.

Důkaz.

- V případě, že je zkoumaná posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ neomezená, je z definice limity zřejmé, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$. (znaménko $+$ pro neomezenost shora, $-$ pro zdola).

Limita monotonní posloupnosti

Důsledkem Bolzanovy–Weierstrassovy věty je následující, často používané, tvrzení.

Věta (O limitě monotonní posloupnosti):

Každá reálná monotonní posloupnost má limitu. Tato limita je konečná, právě když je daná posloupnost omezená.

Důkaz.

- V případě, že je zkoumaná posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ neomezená, je z definice limity zřejmé, že $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$. (znaménko $+$ pro neomezenost shora, $-$ pro zdola).
- Předpokládejme, že $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí a (shora) omezená. Potom podle Bolzanovy–Weierstrassovy věty má posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ hromadný bod, označme ho x.

Limita monotonní posloupnosti

Důsledkem Bolzanovy–Weierstrassovy věty je následující, často používané, tvrzení.

Věta (O limitě monotonní posloupnosti):

Každá reálná monotonní posloupnost má limitu. Tato limita je konečná, právě když je daná posloupnost omezená.

Důkaz.

- V případě, že je zkoumaná posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ neomezená, je z definice limity zřejmé, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$. (znaménko $+$ pro neomezenost shora, $-$ pro zdola).
- Předpokládejme, že $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí a (shora) omezená. Potom podle Bolzanovy–Weierstrassovy věty má posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ hromadný bod, označme ho x. Buď U_x libovolné okolí bodu x.

Limita monotonní posloupnosti

Důsledkem Bolzanovy–Weierstrassovy věty je následující, často používané, tvrzení.

Věta (O limitě monotonní posloupnosti):

Každá reálná monotonní posloupnost má limitu. Tato limita je konečná, právě když je daná posloupnost omezená.

Důkaz.

- V případě, že je zkoumaná posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ neomezená, je z definice limity zřejmé, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$. (znaménko $+$ pro neomezenost shora, $-$ pro zdola).
- Předpokládejme, že $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí a (shora) omezená. Potom podle Bolzanovy–Weierstrassovy věty má posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ hromadný bod, označme ho x. Buď U_x libovolné okolí bodu x. Potom existuje jisté a_N patřící do U_x. Do tohoto okolí ale musí patřit všechna a_n s $n > N$, protože pro ně nutně platí $a_N \leq a_n \leq x$. $\square$

Příklad (Limita posloupnosti „harmonických čísel“).

Zkoumejme limitu posloupnosti $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)_{n=1}^{\infty}$.

Příklad (Limita posloupnosti „harmonických čísel").

Zkoumejme limitu posloupnosti $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)_{n=1}^{\infty}$.

Tato posloupnost je očividně rostoucí. Podle věty o limitě monotónní posloupnosti tudíž existuje její limita. Vyberme z ní posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}$,

$$b_n = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k}.$$

Platí

$$b_{j+1} - b_j = \frac{1}{2^j + 1} + \frac{1}{2^j + 2} + \cdots + \frac{1}{2^j + 2^j} \geq 2^j \frac{1}{2^{j+1}} = \frac{1}{2}.$$

Odtud

$$b_n = b_1 + \sum_{j=1}^{n-1} (b_{j+1} - b_j) \geq b_1 + \frac{n-1}{2} = 1 + \frac{n}{2}.$$

Posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, a tedy i $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, není omezená shora. Proto

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty.$$

Nutná a postačující podmínka pro konvergenci

V definici limity posloupnosti se neobejdeme bez její explicitní hodnoty. Tento nedostatek odstraňuje následující ekvivalentní podmínka. Opět jde o důsledek Bolzanovy–Weierstrassovy věty.

Věta (Bolzano–Cauchy):

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní, právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n, m > N$ je $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Nutná a postačující podmínka pro konvergenci

V definici limity posloupnosti se neobejdeme bez její explicitní hodnoty. Tento nedostatek odstraňuje následující ekvivalentní podmínka. Opět jde o důsledek Bolzanovy–Weierstrassovy věty.

Věta (Bolzano–Cauchy):

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní, právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n, m > N$ je $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Důkaz $\Rightarrow$.

Nechť má $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ limitu $\alpha \in \mathbb{R}$.

Nutná a postačující podmínka pro konvergenci

V definici limity posloupnosti se neobejdeme bez její explicitní hodnoty. Tento nedostatek odstraňuje následující ekvivalentní podmínka. Opět jde o důsledek Bolzanovy–Weierstrassovy věty.

Věta (Bolzano–Cauchy):

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní, právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n, m > N$ je $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Důkaz $\Rightarrow$.

Nechť má $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ limitu $\alpha \in \mathbb{R}$. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Potom lze nalézt $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n > N$ je $|a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Nutná a postačující podmínka pro konvergenci

V definici limity posloupnosti se neobejdeme bez její explicitní hodnoty. Tento nedostatek odstraňuje následující ekvivalentní podmínka. Opět jde o důsledek Bolzanovy–Weierstrassovy věty.

Věta (Bolzano–Cauchy):

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní, právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n, m > N$ je $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Důkaz $\Rightarrow$.

Nechť má $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ limitu $\alpha \in \mathbb{R}$. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Potom lze nalézt $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n > N$ je $|a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$. Takže pro libovolné $n, m > N$ platí

$$|a_n - a_m| = |a_n - \alpha + \alpha - a_m| \leq |a_n - \alpha| + |\alpha - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Při odhadu jsme využili znalosti trojúhelníkové nerovnosti. $\square$

Důkaz $\Leftarrow$.

Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ splňuje podmínku

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{R})(\forall n, m \in \mathbb{N})\big(n, m > N \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon\big).$$

Důkaz $\Leftarrow$.

Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ splňuje podmínku

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{R})(\forall n, m \in \mathbb{N})\big(n, m > N \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon\big).$$

Zvolme za $\varepsilon = 1$, pak existuje index $N \in \mathbb{N}$ tak, že

$$|a_m - a_N| < 1 \quad \text{pro každé } m > N.$$

Důkaz $\Leftarrow$.

Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ splňuje podmínku

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{R})(\forall n, m \in \mathbb{N})\big(n, m > N \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon\big).$$

Zvolme za $\varepsilon = 1$, pak existuje index $N \in \mathbb{N}$ tak, že

$$|a_m - a_N| < 1 \quad \text{pro každé } m > N.$$

Jinak řečeno, pro $m > N$ patří a_m do intervalu $(a_N - 1, a_N + 1) = U_{a_N}(1)$.
Mimo tento interval může ležet pouze konečný počet prvků posloupnosti.
Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je proto omezená.

Důkaz $\Leftarrow$.

Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ splňuje podmínku

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{R})(\forall n, m \in \mathbb{N})\big(n, m > N \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon\big).$$

Zvolme za $\varepsilon = 1$, pak existuje index $N \in \mathbb{N}$ tak, že

$$|a_m - a_N| < 1 \quad \text{pro každé } m > N.$$

Jinak řečeno, pro $m > N$ patří a_m do intervalu $(a_N - 1, a_N + 1) = U_{a_N}(1)$. Mimo tento interval může ležet pouze konečný počet prvků posloupnosti. Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je proto omezená. Podle Bolzanovy–Weierstrassovy věty existuje $x \in \mathbb{R}$, hromadný bod posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Důkaz $\Leftarrow$.

Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ splňuje podmínku

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{R})(\forall n, m \in \mathbb{N})\big(n, m > N \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon\big).$$

Zvolme za $\varepsilon = 1$, pak existuje index $N \in \mathbb{N}$ tak, že

$$|a_m - a_N| < 1 \quad \text{pro každé } m > N.$$

Jinak řečeno, pro $m > N$ patří a_m do intervalu $(a_N - 1, a_N + 1) = U_{a_N}(1)$. Mimo tento interval může ležet pouze konečný počet prvků posloupnosti. Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je proto omezená. Podle Bolzanovy–Weierstrassovy věty existuje $x \in \mathbb{R}$, hromadný bod posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.
Buď $U_x(\varepsilon/2)$ okolí bodu x. Pro $\varepsilon/2$ existuje N tak, že pokud $m, n > N$ pak platí $|a_n - a_m| < \varepsilon/2$. Určitě ale existuje $m > N$ tak, že $a_m \in U_x(\varepsilon/2)$. Tudíž pro $n > N$ je

$$|a_n - x| = |a_n - a_m + a_m - x| \leq |a_n - a_m| + |a_m - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad \square$$

Hlavní body

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

6 Dodatek

$$\lim_{n \to \infty} a_n = b$$

Komentář

- Látka obsažená v této prezentaci je dále podrobně vysvětlena ve studijním textu v Kapitole 5.

- Limity hrají ústřední roli v dalším výkladu.

- Příklady k procvičování látky bude možné nalézt v cvičebnici v MARASTu.