Matematická analýza 1

Výpočet limit

Tomáš Kalvoda[1], Pavel Paták[2]

[1]tomas.kalvoda@fit.cvut.cz, [2]pavel.patak@fit.cvut.cz

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze

21. února 2025
LS 2024/2025

Hlavní body

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)$$

1. Věta o limitě $+$, $\cdot$ a $/$
2. Nerovnosti a limity
3. Věta o limitě složené funkce
4. Příklady
5. Podílové kritérium pro posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}$$

Hlavní výsledky této přednášky

V této kapitole probereme několik velmi užitečných nástrojů pro výpočet limit. Zformulujeme je jako věty a ukážeme si jejich použití. Zejména jde o následující čtyři body:

- Věta o limitě součtu, součinu a podílu funkcí/posloupností.
- Věta o limitě sevřené funkce/posloupnosti.
- Věta o limitě složené funkce.
- Podílové kritérium pro posloupnosti.

Hlavní body

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)$$

1. Věta o limitě $+$, $\cdot$ a $/$
2. Nerovnosti a limity
3. Věta o limitě složené funkce
4. Příklady
5. Podílové kritérium pro posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}$$

Věta o limitě součtu, součinu a podílu

Následující věta nám umožňuje na základě znalostí limit jednoduchých funkcí/posloupností počítat limity některých složitějších posloupností.

Věta (O limitě součtu, součinu a podílu):

Nechť $f : A \to \mathbb{R}$ a $g : B \to \mathbb{R}$ jsou dvě funkce, bod a je hromadným bodem průniku $A \cap B$ a existují $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ a $\lim\limits_{x \to a} g(x)$. Potom

$$\lim_{x \to a} \big(f(x) + g(x)\big) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x),$$

$$\lim_{x \to a} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x),$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)},$$

pokud jsou algebraické operace na pravých stranách definovány v $\overline{\mathbb{R}}$.

V případě posloupností a jejich limit v nekonečnu tato věta samozřejmě platí také, předpoklady o hromadných bodech budou automaticky splněny.

Věta o limitě součtu, součinu a podílu: důkaz

Důkaz této věty není komplikovaný, je spíše pracný. Zejména vzhledem k nutnosti rozebrat všechny možné situace. Zde v prezentaci si ukážeme alespoň dva případy.

Věta o limitě součtu, součinu a podílu: důkaz

Důkaz této věty není komplikovaný, je spíše pracný. Zejména vzhledem k nutnosti rozebrat všechny možné situace. Zde v prezentaci si ukážeme alespoň dva případy.

Součet a případ konečných limit.

Předpokládejme, že $\lim_a f = b \in \mathbb{R}$ a $\lim_a g = c \in \mathbb{R}$. Ozn. $C := D_f \cap D_g$.

Věta o limitě součtu, součinu a podílu: důkaz

Důkaz této věty není komplikovaný, je spíše pracný. Zejména vzhledem k nutnosti rozebrat všechny možné situace. Zde v prezentaci si ukážeme alespoň dva případy.

Součet a případ konečných limit.

Předpokládejme, že $\lim_a f = b \in \mathbb{R}$ a $\lim_a g = c \in \mathbb{R}$. Ozn. $C := D_f \cap D_g$. Chceme dokázat rovnost $\lim_a (f+g) = b + c$ a proto provedeme následující odhad pro $x \in C$ (trojúhelníková nerovnost)

$$\big|\big(f(x) + g(x)\big) - (b + c)\big| = \big|\big(f(x) - b\big) + \big(g(x) - c\big)\big| \leq \big|f(x) - b\big| + \big|g(x) - c\big|.$$

Věta o limitě součtu, součinu a podílu: důkaz

Důkaz této věty není komplikovaný, je spíše pracný. Zejména vzhledem k nutnosti rozebrat všechny možné situace. Zde v prezentaci si ukážeme alespoň dva případy.

Součet a případ konečných limit.

Předpokládejme, že $\lim_a f = b \in \mathbb{R}$ a $\lim_a g = c \in \mathbb{R}$. Ozn. $C := D_f \cap D_g$. Chceme dokázat rovnost $\lim_a (f+g) = b + c$ a proto provedeme následující odhad pro $x \in C$ (trojúhelníková nerovnost)

$$\big|\big(f(x)+g(x)\big)-(b+c)\big| = \big|\big(f(x)-b\big)+\big(g(x)-c\big)\big| \leq \big|f(x)-b\big| + \big|g(x)-c\big|.$$

Mějme $\varepsilon > 0$. Dle předpokladů pro $\varepsilon/2$ existuje U_a takové, že pro $x \in (C \cap U_a) \smallsetminus \{a\}$ je $f(x) \in U_b(\varepsilon/2)$ a $g(x) \in U_c(\varepsilon/2)$. Tudíž dle odhadu výše pro $x \in (C \cap U_a) \smallsetminus \{a\}$ máme

$$\big|\big(f(x)+g(x)\big)-(b+c)\big| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

a tedy $f(x) + g(x) \in U_{b+c}(\varepsilon)$. $\square$

Věta o limitě součtu, součinu a podílu: důkaz

Součin a případ nekonečna.

Předpokládejme, že $\lim_a f = b \in \mathbb{R}$, $b > 0$, a $\lim_a g = +\infty$. Ozn. $C := D_f \cap D_g$.

Věta o limitě součtu, součinu a podílu: důkaz

Součin a případ nekonečna.

Předpokládejme, že $\lim_a f = b \in \mathbb{R}$, $b > 0$, a $\lim_a g = +\infty$. Ozn. $C := D_f \cap D_g$. Chceme dokázat rovnost $\lim_a (f \cdot g) = +\infty$.

Věta o limitě součtu, součinu a podílu: důkaz

Součin a případ nekonečna.

Předpokládejme, že $\lim_a f = b \in \mathbb{R}$, $b > 0$, a $\lim_a g = +\infty$. Ozn. $C := D_f \cap D_g$.
Chceme dokázat rovnost $\lim_a (f \cdot g) = +\infty$.
Mějme $c \in \mathbb{R}$. Potřebujeme odhadnout $f(x) \cdot g(x)$ zespoda hodnotou c.

Věta o limitě součtu, součinu a podílu: důkaz

Součin a případ nekonečna.

Předpokládejme, že $\lim_a f = b \in \mathbb{R}$, $b > 0$, a $\lim_a g = +\infty$. Ozn. $C := D_f \cap D_g$.
Chceme dokázat rovnost $\lim_a (f \cdot g) = +\infty$.
Mějme $c \in \mathbb{R}$. Potřebujeme odhadnout $f(x) \cdot g(x)$ zespoda hodnotou c.
Dle předpokladů

- pro $b/2 > 0$ existuje U_a takové, že pro $x \in (C \cap U_a) \setminus \{a\}$ je $f(x) \in U_b(b/2)$, tj. $f(x) > b/2$,

Věta o limitě součtu, součinu a podílu: důkaz

Součin a případ nekonečna.

Předpokládejme, že $\lim_a f = b \in \mathbb{R}$, $b > 0$, a $\lim_a g = +\infty$. Ozn. $C := D_f \cap D_g$.
Chceme dokázat rovnost $\lim_a (f \cdot g) = +\infty$.
Mějme $c \in \mathbb{R}$. Potřebujeme odhadnout $f(x) \cdot g(x)$ zespoda hodnotou c.
Dle předpokladů

- pro $b/2 > 0$ existuje U_a takové, že pro $x \in (C \cap U_a) \setminus \{a\}$ je $f(x) \in U_b(b/2)$, tj. $f(x) > b/2$,
- pro $c/(b/2) \in \mathbb{R}$ existuje V_a takové, že pro $x \in (C \cap V_a) \setminus \{a\}$ je $g(x) \in U_{+\infty}\big(c/(b/2)\big)$, tj. $g(x) > c/(b/2)$.

Věta o limitě součtu, součinu a podílu: důkaz

Součin a případ nekonečna.

Předpokládejme, že $\lim_a f = b \in \mathbb{R}$, $b > 0$, a $\lim_a g = +\infty$. Ozn. $C := D_f \cap D_g$.
Chceme dokázat rovnost $\lim_a (f \cdot g) = +\infty$.
Mějme $c \in \mathbb{R}$. Potřebujeme odhadnout $f(x) \cdot g(x)$ zespoda hodnotou c.
Dle předpokladů

- pro $b/2 > 0$ existuje U_a takové, že pro $x \in (C \cap U_a) \setminus \{a\}$ je $f(x) \in U_b(b/2)$, tj. $f(x) > b/2$,
- pro $c/(b/2) \in \mathbb{R}$ existuje V_a takové, že pro $x \in (C \cap V_a) \setminus \{a\}$ je $g(x) \in U_{+\infty}\big(c/(b/2)\big)$, tj. $g(x) > c/(b/2)$.

Položíme-li $W_a := U_a \cap V_a$, pak pro $x \in (C \cap W_a) \setminus \{a\}$ máme

$$f(x) \cdot g(x) > \frac{b}{2} \cdot \frac{c}{\frac{b}{2}} = c,$$

tj, $f(x) \cdot g(x) \in U_{+\infty}(c)$. $\square$

Věta o limitě součtu, součinu a podílu: komentář

- Před použitím věty je *typicky nutné nejprve provést vhodné algebraické úpravy* a dostat tak výraz do tvaru, kde jsou splněny předpoklady věty.
- *Demonstrujme to na příkladu*: následující „výpočet" je nesprávný, červená rovnost neplyne z naší věty, výraz za ní není dobře definován

$$\lim_{n\to\infty}(-n+n^2) = \lim_{n\to\infty}(-n) + \lim_{n\to\infty} n^2 = -\infty + (+\infty).$$

Musíme nejprve výraz upravit ($=$) a pak větu použít ($=$)

$$\lim_{n\to\infty}(-n+n^2) = \lim_{n\to\infty} n^2\left(\frac{-1}{n}+1\right) = +\infty\cdot(0+1) = +\infty.$$

Věta o limitě součtu, součinu a podílu: komentář

- Před použitím věty je *typicky nutné nejprve provést vhodné algebraické úpravy* a dostat tak výraz do tvaru, kde jsou splněny předpoklady věty.
- *Demonstrujme to na příkladu*: následující „výpočet" je nesprávný, červená rovnost neplyne z naší věty, výraz za ní není dobře definován

$$\lim_{n\to\infty}(-n+n^2) = \lim_{n\to\infty}(-n) + \lim_{n\to\infty} n^2 = -\infty + (+\infty).$$

Musíme nejprve výraz upravit ($=$) a pak větu použít ($=$)

$$\lim_{n\to\infty}(-n+n^2) = \lim_{n\to\infty} n^2\left(\frac{-1}{n}+1\right) = +\infty\cdot(0+1) = +\infty.$$

Příklad.

Vypočtěte limity následujících posloupností, resp. funkcí:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3-4n+5}{n-n^3}, \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-4x+5}{x-x^3}, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{2n^3-4n+5}{n-n^2}.$$

Věta o limitě součtu, součinu a podílu: polynomy

Počítat limitu polynomů je díky předchozí větě velmi jednoduché.

Příklad.

Buď P libovolný polynom a $a \in \mathbb{R}$. Potom

$$\lim_{x \to a} P(x) = P(a).$$

Věta o limitě součtu, součinu a podílu: polynomy

Počítat limitu polynomů je díky předchozí větě velmi jednoduché.

Příklad.

Buď P libovolný polynom a $a \in \mathbb{R}$. Potom

$$\lim_{x \to a} P(x) = P(a).$$

Již jsme ukázali, že $\lim\limits_{x \to a} x = a$. Použijeme-li mnohonásobně větu o limitě součtu a součinu funkcí, ihned dostaneme tvrzení z našeho příkladu.

Věta o limitě součtu, součinu a podílu: polynomy

Počítat limitu polynomů je díky předchozí větě velmi jednoduché.

Příklad.

Buď P libovolný polynom a $a \in \mathbb{R}$. Potom

$$\lim_{x \to a} P(x) = P(a).$$

Již jsme ukázali, že $\lim\limits_{x \to a} x = a$. Použijeme-li mnohonásobně větu o limitě součtu a součinu funkcí, ihned dostaneme tvrzení z našeho příkladu.

Například tedy platí

$$\lim_{x \to 2} \left(x^2 - 3x + 1\right) = 2^2 - 3 \cdot 2 + 1 = -1.$$

Věta o limitě součtu, součinu a podílu: polynomy

Počítat limitu polynomů je díky předchozí větě velmi jednoduché.

Příklad.

Buď P libovolný polynom a $a \in \mathbb{R}$. Potom

$$\lim_{x \to a} P(x) = P(a).$$

Již jsme ukázali, že $\lim\limits_{x \to a} x = a$. Použijeme-li mnohonásobně větu o limitě součtu a součinu funkcí, ihned dostaneme tvrzení z našeho příkladu.

Například tedy platí

$$\lim_{x \to 2} \left(x^2 - 3x + 1\right) = 2^2 - 3 \cdot 2 + 1 = -1.$$

Z vnějšího pohledu se zdá, že *výpočet limity* je v tomto případě prakticky *shodný s dosazením*. Toto chování zanedlouho zobecníme, tuto hezkou vlastnost mají právě „spojité funkce“.

Věta o limitě součtu, součinu a podílu: příklad

Příklad.

Vypočtěte limitu funkce

$$f(x) = \frac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^3 - 3x^2 + 2x}$$

v bodech $a = -1$, $b = 1$, $c = 2$ a $d = -\infty$.

Věta o limitě součtu, součinu a podílu: příklad

Příklad.

Vypočtěte limitu funkce

$$f(x) = \frac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^3 - 3x^2 + 2x}$$

v bodech $a = -1$, $b = 1$, $c = 2$ a $d = -\infty$.

Nejprve si všimněme, že jmenovatel lze rozložit na kořenové činitele

$$x^3 - 3x^2 + 2x = x(x-1)(x-2),$$

tudíž $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2\}$. Pro výpočet limity v bodě $a = -1$ můžeme proto použít větu o limitě podílu,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \frac{\lim_{x\to a} x^4 + 2x^2 - 3}{\lim_{x\to a} x^3 - 3x^2 + 2x} = \frac{0}{-6} = 0.$$

Dále, před výpočtem limity v bodě $d = -\infty$ upravme výraz pro $f(x)$ následovně

$$f(x) = \frac{x^4\left(1 + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^4}\right)}{x^3\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right)} = x \cdot \frac{1 + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^4}}{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}.$$

Použijeme-li nyní větu o limitě součtu a podílu, dostáváme

$$\lim_{x \to d} f(x) = -\infty \cdot \frac{1}{1} = -\infty.$$

Dále, před výpočtem limity v bodě $d = -\infty$ upravme výraz pro $f(x)$ následovně

$$f(x) = \frac{x^4\left(1 + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^4}\right)}{x^3\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right)} = x \cdot \frac{1 + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^4}}{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}.$$

Použijeme-li nyní větu o limitě součtu a podílu, dostáváme

$$\lim_{x \to d} f(x) = -\infty \cdot \frac{1}{1} = -\infty.$$

Pro výpočet limit v bodech $b = 1$ a $c = 2$ je vhodné upravit na součin kořenových činitelů i čitatel,

$$f(x) = \frac{(x^2+3)(x^2-1)}{x(x-1)(x-2)} = \frac{(x^2+3)(x-1)(x+1)}{x(x-1)(x-2)} = \frac{(x^2+3)(x+1)}{x(x-2)}, x \in D_f.$$

Tudíž, opět pomocí předešlých vět,

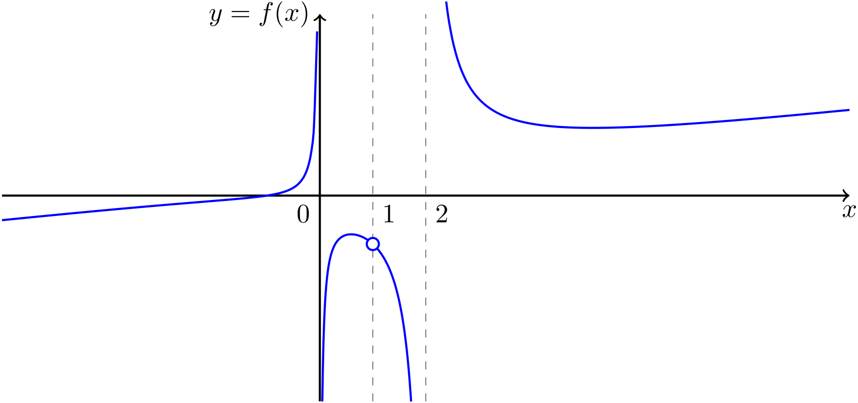
$$\lim_{x \to b} f(x) = \frac{8}{-1} = -8, \quad \lim_{x \to c} f(x) \text{ neexistuje.}$$

Neexistence poslední limity plyne z nerovnosti jednostranných limit,

$$\lim_{x \to c_+} f(x) = \frac{21}{2} \cdot (+\infty) = +\infty, \quad \lim_{x \to c_-} f(x) = \frac{21}{2} \cdot (-\infty) = -\infty$$

Graf funkce z předchozího příkladu

$$f(x) = \frac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^3 - 3x^2 + 2x}, \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2\}$$



Hlavní body

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}$$

Věta o limitě sevřené funkce

Použití následující věty spočívá v odhadnutí „komplikované“ funkce či posloupnosti pomocí dvou „jednodušších“ funkcí či posloupností, které dostatečně dobře vystihují chování původní posloupnosti a jejichž limity umíme spočítat.

Věta (O limitě sevřené funkce):

Mějme tři funkce f, g a h a bod $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Nechť existuje okolí U_a bodu a splňující

1. $D_f \cap U_a = D_g \cap U_a = D_h \cap U_a$, označme tuto množinu M,
2. a je hromadným bodem množiny M,
3. pro všechna $x \in M \setminus \{a\}$ platí nerovnosti $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.

Nechť dále existují limity f a h v bodě a mající společnou hodnotu $b \in \overline{\mathbb{R}}$, tj,

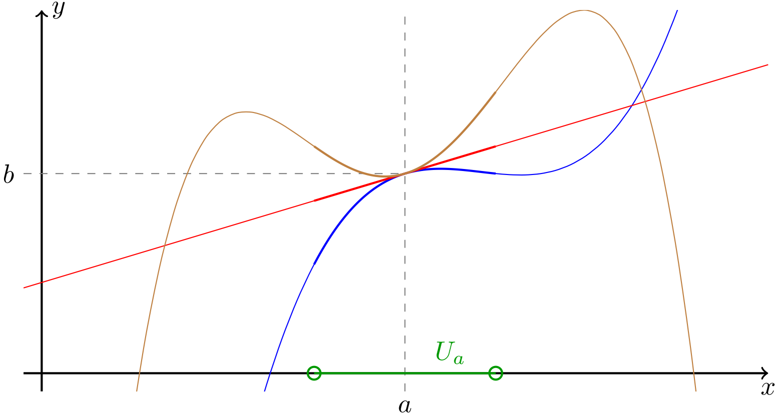
$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = b.$$

Potom existuje i limita g v bodě a a je také rovna b, tj. $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$.

První bod předpokladů říká, že definiční obory všech tří funkcí jsou stejné „okolo“ bodu a.

Věta o limitě sevřené funkce: ilustrace

Pro jednoduchost uvažme příklad funkcí f, g a h definovaných rovnou na nějakém celém okolí bodu $a \in \mathbb{R}$. Situace popisovaná v předchozí větě může (ale nemusí) graficky vypadat takto:



Věta o limitě sevřené funkce: důkaz

Důkaz věty o limitě sevřené funkce.

Nechť f, g, h, U_a a M mají požadované vlastnosti.

- Mějme libovolné okolí V_b bodu b. Protože f a h mají v a limitu rovnou b, existuje $U'_a \subset U_a$ okolí bodu a takové, že
$$f(x) \in V_b \quad \text{a} \quad h(x) \in V_b$$
kdykoliv $x \in U'_a \cap M$ a $x \neq a$.

Věta o limitě sevřené funkce: důkaz

Důkaz věty o limitě sevřené funkce.

Nechť f, g, h, U_a a M mají požadované vlastnosti.

- Mějme libovolné okolí V_b bodu b. Protože f a h mají v a limitu rovnou b, existuje $U_a' \subset U_a$ okolí bodu a takové, že
$$f(x) \in V_b \quad \text{a} \quad h(x) \in V_b$$
kdykoliv $x \in U_a' \cap M$ a $x \neq a$.
- Je-li $x \in U_a' \cap M$ pak dle předpokladu $g(x)$ leží mezi $f(x)$ a $h(x)$, které jsou v V_b a proto i $g(x)$ leží ve $V(b)$.

Věta o limitě sevřené funkce: důkaz

Důkaz věty o limitě sevřené funkce.

Nechť f, g, h, U_a a M mají požadované vlastnosti.

- Mějme libovolné okolí V_b bodu b. Protože f a h mají v a limitu rovnou b, existuje $U'_a \subset U_a$ okolí bodu a takové, že
$$f(x) \in V_b \quad \text{a} \quad h(x) \in V_b$$
kdykoliv $x \in U'_a \cap M$ a $x \neq a$.
- Je-li $x \in U'_a \cap M$ pak dle předpokladu $g(x)$ leží mezi $f(x)$ a $h(x)$, které jsou v V_b a proto i $g(x)$ leží ve $V(b)$.

V předchozích dvou bodech vidíme podmínku z definici limity a tedy skutečně existuje $\lim_a g$ a je rovna b. □

Věta o limitě sevřené funkce: příklad

Příklad.

Dokažte: $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0, \quad \lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1, \quad \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

Věta o limitě sevřené funkce: příklad

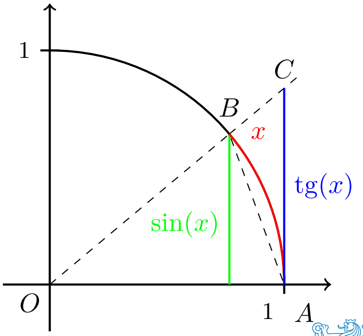
Příklad.

Dokažte: $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0, \quad \lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1, \quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$

- Pro $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ platí

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{x}{2} < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x.$$

Porovnejte obsahy trojúhelníku OAB, výseče OAB a trojúhelníku OAC.



Věta o limitě sevřené funkce: příklad

Příklad.

Dokažte: $\lim_{x\to 0} \sin x = 0, \quad \lim_{x\to 0} \cos x = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

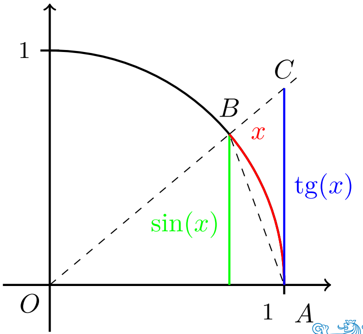
- Pro $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ platí

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{x}{2} < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x.$$

  Porovnejte obsahy trojúhelníku OAB, výseče OAB a trojúhelníku OAC.

- Funkce $\sin$ je lichá a tudíž

$$-|x| \leq \sin x \leq |x|, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$



Věta o limitě sevřené funkce: příklad

Příklad.

Dokažte: $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0, \quad \lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1, \quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$

- Pro $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ platí

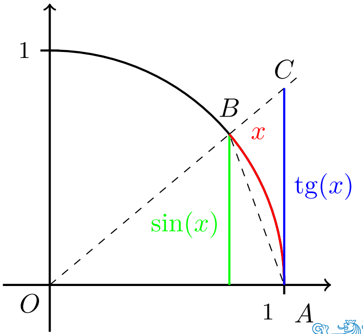
$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{x}{2} < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x.$$

Porovnejte obsahy trojúhelníku OAB, výseče OAB a trojúhelníku OAC.

- Funkce $\sin$ je lichá a tudíž

$$-|x| \le \sin x \le |x|, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

- Potom $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$. A z rovnosti $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ pak i $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$. (Rozmyslete znaménko!)



- Funkce $\sin$ i tg jsou liché a proto z nerovnosti

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{x}{2} < \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\, x, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

plyne nerovnost

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \smallsetminus \{0\}.$$

Odtud ihned dostáváme hledanou limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Věta o limitě sevřené funkce: příklad

Příklad.

Vypočtěte $\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x}$.

Věta o limitě sevřené funkce: příklad

Příklad.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0} x \sin \dfrac{1}{x}$.

- Zřejmě nelze použít větu o součinu limit, limita $\lim\limits_{x\to 0} \sin \dfrac{1}{x}$ totiž neexistuje (viz předchozí kapitolu).

Věta o limitě sevřené funkce: příklad

Příklad.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0} x \sin \dfrac{1}{x}$.

- Zřejmě nelze použít větu o součinu limit, limita $\lim\limits_{x\to 0} \sin \dfrac{1}{x}$ totiž neexistuje (viz předchozí kapitolu).
- Ovšem nerovnost

$$f(x) := -|x| \leq g(x) := x \sin \frac{1}{x} \leq |x| =: h(x)$$

platí pro libovolné $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Věta o limitě sevřené funkce: příklad

Příklad.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0} x \sin \dfrac{1}{x}$.

- Zřejmě nelze použít větu o součinu limit, limita $\lim\limits_{x\to 0} \sin \dfrac{1}{x}$ totiž neexistuje (viz předchozí kapitolu).
- Ovšem nerovnost

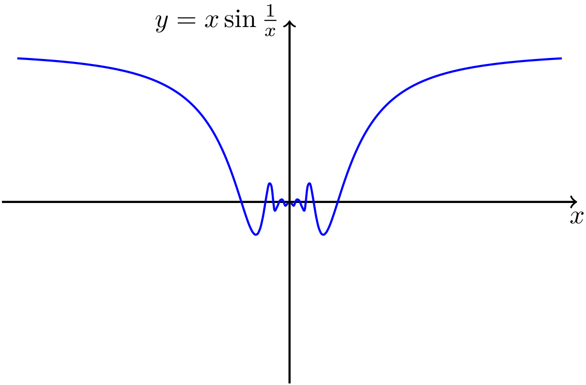
$$f(x) := -|x| \leq g(x) := x \sin \frac{1}{x} \leq |x| =: h(x)$$

platí pro libovolné $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$.
- Zvolíme-li např. $U_a = (-1, 1)$ okolí bodu $a = 0$, pak
  1. nerovnost $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ platí pro každé $x \in (-1, 1) \smallsetminus \{0\}$,
  2. existují $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0$.

Podle věty o limitě sevřené funkce pak $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} x \sin \dfrac{1}{x} = 0$.

Věta o limitě sevřené funkce: příklad

Multiplikativní faktor x u nuly „zkrotí“ divokost $\sin \frac{1}{x}$.



Věta o limitě sevřené posloupnosti

Pro úplnost zde explicitně zmiňme i důsledek plynoucí z předchozí věty pro posloupnosti.

Připomeňme si, že všechny naše posloupnosti jsou definovány na množině $\mathbb{N}$. Proto lze pro tento konkrétní případ dostat pouhým přeformulováním předchozí věty následující důsledek.

Důsledek (Věta o limitě sevřené posloupnosti):

Mějme tři posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ a nechť platí

1. existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq N$ platí nerovnosti $a_n \leq b_n \leq c_n$,
2. existují limity posloupností $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ a jsou rovné $b \in \overline{\mathbb{R}}$, tj. $\lim a_n = \lim c_n = b$.

Potom existuje i limita posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ a je také rovna b.

Věta o limitě sevřené posloupnosti: příklad

Na následující příklad **nelze aplikovat** větu o limitě podílu.

Příklad.

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{n}$.

Věta o limitě sevřené posloupnosti: příklad

Na následující příklad **nelze aplikovat** větu o limitě podílu.

Příklad.

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{n}$.

Funkce $\sin$ má obor hodnot $H_{\sin} = \langle -1, 1\rangle$. Tedy platí nerovnost

$$-1 \leq \sin x \leq 1, \quad \text{pro každé}\, x \in \mathbb{R}.$$

Tudíž pro každé přirozené n platí

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Protože ale $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-1}{n} = 0$ je podle předchozího důsledku

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0.$$

Vytlačení do $\pm\infty$

Často se hodí následující drobná modifikace věty o limitě sevřené funkce.

Věta:

Mějme dvě funkce f, g a bod $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Nechť existuje okolí U_a bodu a splňující

1. $D_f \cap U_a = D_g \cap U_a$, označme tuto množinu M,
2. a je hromadným bodem množiny M,
3. pro všechna $x \in M \setminus \{a\}$ platí nerovnost $f(x) \leq g(x)$.

Potom platí následující dvě tvrzení:

- Pokud $\lim_a f = +\infty$, potom i $\lim_a g = +\infty$.
- Pokud $\lim_a g = -\infty$, potom i $\lim_a f = -\infty$.

Vytlačení do $\pm\infty$

Často se hodí následující drobná modifikace věty o limitě sevřené funkce.

Věta:

Mějme dvě funkce f, g a bod $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Nechť existuje okolí U_a bodu a splňující

1. $D_f \cap U_a = D_g \cap U_a$, označme tuto množinu M,
2. a je hromadným bodem množiny M,
3. pro všechna $x \in M \setminus \{a\}$ platí nerovnost $f(x) \leq g(x)$.

Potom platí následující dvě tvrzení:

- Pokud $\lim_a f = +\infty$, potom i $\lim_a g = +\infty$.
- Pokud $\lim_a g = -\infty$, potom i $\lim_a f = -\infty$.

Důkaz.

Přímočaré použití definice limity. Proveďte sami! $\square$

Hlavní body

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big)$$

1. Věta o limitě +, · a /
2. Nerovnosti a limity
3. Věta o limitě složené funkce
4. Příklady
5. Podílové kritérium pro posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}$$

Věta o limitě složené funkce

Funkce můžeme nejen sčítat, násobit a dělit, ale i skládat. Velmi se nám proto bude hodit následující věta:

Věta (O limitě složené funkce):

Nechť f a g jsou funkce, a, b, c jsou prvky $\overline{\mathbb{R}}$ a platí čtyři podmínky

1. $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$,
2. $\lim\limits_{x\to b} f(x) = c$,
3. bod a je hromadným bodem množiny $D_{f\circ g}$.
4. buď $(\exists U_a)(\forall x \in D_g \cap U_a \smallsetminus \{a\})(g(x) \neq b)$ nebo $(b \in D_f$ a $f(b) = c)$.

Potom $\lim\limits_{x\to a} (f \circ g)(x) = c$.

Důkaz.

Na přednášce vynecháme. $\square$

Příklad

Příklad.

Vypočtěte limitu
$$\lim_{x\to 1} \sqrt[4]{x^2+x+1}.$$

Příklad

Příklad.

Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 1} \sqrt[4]{x^2 + x + 1}.$$

Označme

$$f(x) = \sqrt[4]{x} \quad \text{a} \quad g(x) = x^2 + x + 1 = (x + 1/2)^2 + 3/4 > 0.$$

Příklad

Příklad.

Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 1} \sqrt[4]{x^2+x+1}.$$

Označme

$$f(x) = \sqrt[4]{x} \quad \text{a} \quad g(x) = x^2+x+1 = (x+1/2)^2 + 3/4 > 0.$$

Z předchozího výkladu víme, že

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} x^2+x+1 = 3 \quad \text{a} \quad \lim_{x\to 3} \sqrt[4]{x} = \sqrt[4]{3}.$$

Příklad

Příklad.

Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 1} \sqrt[4]{x^2+x+1}.$$

Označme

$$f(x) = \sqrt[4]{x} \quad \text{a} \quad g(x) = x^2 + x + 1 = (x+1/2)^2 + 3/4 > 0.$$

Z předchozího výkladu víme, že

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} x^2 + x + 1 = 3 \quad \text{a} \quad \lim_{x\to 3} \sqrt[4]{x} = \sqrt[4]{3}.$$

Dále $D_{f\circ g} = \mathbb{R}$ a 1 je hromadným bodem této množiny. Konečně 3 patří do definičního oboru D_f a $f(3) = \sqrt[4]{3}$.

Příklad

Příklad.

Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 1} \sqrt[4]{x^2+x+1}.$$

Označme

$$f(x) = \sqrt[4]{x} \quad \text{a} \quad g(x) = x^2+x+1 = (x+1/2)^2 + 3/4 > 0.$$

Z předchozího výkladu víme, že

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} x^2+x+1 = 3 \quad \text{a} \quad \lim_{x\to 3} \sqrt[4]{x} = \sqrt[4]{3}.$$

Dále $D_{f\circ g} = \mathbb{R}$ a 1 je hromadným bodem této množiny. Konečně 3 patří do definičního oboru D_f a $f(3) = \sqrt[4]{3}$.
Dle předchozí věty proto

$$\lim_{x\to 1} \sqrt[4]{x^2+x+1} = \sqrt[4]{3}.$$

Hlavní body

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}$$

Příklad.

Platí

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Příklad.

Platí

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Položme $h_n := \sqrt[n]{n} - 1$.

Příklad.

Platí
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Položme $h_n := \sqrt[n]{n} - 1$. Z jedné strany platí $h_n \geq 0$ pro každé $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Příklad.

Platí

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Položme $h_n := \sqrt[n]{n} - 1$. Z jedné strany platí $h_n \geq 0$ pro každé $n = 1, 2, 3, \ldots$.
Z binomické věty dostaneme pro $n \geq 2$

$$n = (1 + h_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h_n^k > 1 + \binom{n}{2} h_n^2,$$

Příklad.

Platí
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Položme $h_n := \sqrt[n]{n} - 1$. Z jedné strany platí $h_n \geq 0$ pro každé $n = 1, 2, 3, \ldots$.
Z binomické věty dostaneme pro $n \geq 2$

$$n = (1 + h_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h_n^k > 1 + \binom{n}{2} h_n^2,$$

a tedy pro $n \geq 2$ platí

$$n - 1 > \frac{n(n-1)}{2} h_n^2.$$

Příklad.

Platí
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Položme $h_n := \sqrt[n]{n} - 1$. Z jedné strany platí $h_n \geq 0$ pro každé $n = 1, 2, 3, \ldots$.
Z binomické věty dostaneme pro $n \geq 2$

$$n = (1 + h_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h_n^k > 1 + \binom{n}{2} h_n^2,$$

a tedy pro $n \geq 2$ platí

$$n - 1 > \frac{n(n-1)}{2} h_n^2.$$

Pro $n \geq 2$ je výraz $\frac{n(n-1)}{2}$ kladný a můžeme jím proto poslední nerovnost vydělit a díky nezápornosti h_n poté i odmocnit. Po těchto úpravách dostáváme

$$0 \leq h_n \leq \sqrt{\frac{2}{n}}.$$

Příklad.

Platí
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Položme $h_n := \sqrt[n]{n} - 1$. Z jedné strany platí $h_n \geq 0$ pro každé $n = 1, 2, 3, \ldots$.
Z binomické věty dostaneme pro $n \geq 2$

$$n = (1 + h_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h_n^k > 1 + \binom{n}{2} h_n^2,$$

a tedy pro $n \geq 2$ platí

$$n - 1 > \frac{n(n-1)}{2} h_n^2.$$

Pro $n \geq 2$ je výraz $\frac{n(n-1)}{2}$ kladný a můžeme jím proto poslední nerovnost vydělit a díky nezápornosti h_n poté i odmocnit. Po těchto úpravách dostáváme

$$0 \leq h_n \leq \sqrt{\frac{2}{n}}.$$

Odtud ihned pomocí věty o sevřené posloupnosti dostáváme $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$.

Příklad.

Pro každé $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, je

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Příklad.

Pro každé $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, je
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

- **Případ** $a \geq 1$: Pro každé celé $n > a$ platí
$$1 \leq \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{n}.$$
V předchozím příkladě jsme však ukázali rovnost $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Tudíž podle věty o sevřené posloupnosti $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Příklad.

Pro každé $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, je
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

- **Případ** $a \geq 1$: Pro každé celé $n > a$ platí
$$1 \leq \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{n}.$$
V předchozím příkladě jsme však ukázali rovnost $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Tudíž podle věty o sevřené posloupnosti $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

- **Případ** $0 < a < 1$: Z předchozí bodu plyne $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = 1$, tudíž podle věty o limitě podílu platí
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = 1.$$

Příklad.

Platí

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$$

Příklad.

Platí
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$$

Při výpočtu této limity využijeme následující trik. Členy v součinu dvou faktoriálů promícháme v „zrcadlovém“ pořadí:

$$\begin{aligned}(n!)^2 &= (1\cdot 2\cdot 3\cdots n)\cdot(1\cdot 2\cdot 3\cdots n)\\ &= (1\cdot n)\cdot(2\cdot(n-1))\cdot(3\cdot(n-2))\cdots(n\cdot 1) =\\ &= \prod_{k=1}^{n} k(n+1-k)\end{aligned}$$

Příklad.

Platí
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$$

Při výpočtu této limity využijeme následující trik. Členy v součinu dvou faktoriálů promícháme v „zrcadlovém“ pořadí:

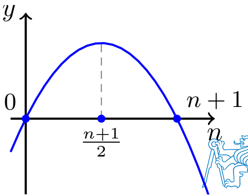
$$\begin{aligned}(n!)^2 &= (1\cdot 2\cdot 3\cdots n)\cdot(1\cdot 2\cdot 3\cdots n)\\ &= \big(1\cdot n\big)\cdot\big(2\cdot(n-1)\big)\cdot\big(3\cdot(n-2)\big)\cdots\big(n\cdot 1\big) =\\ &= \prod_{k=1}^{n} k(n+1-k)\end{aligned}$$

Z grafu paraboly $f(x) = x(n+1-x)$ je zřejmé, že

$$f(k) \geq f(1) = f(n) = n$$

a proto $(n!)^2 \geq n^n$. Konečně, $2n$-tá odmocnina dává

$$\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt{n} \longrightarrow +\infty.$$



Příklad (!!!).

Nechť $a \in \mathbb{R}$. Pak pro limitu reálné posloupnosti $(a^n)_{n=1}^{\infty}$ platí:

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0, & |a| < 1, \\ 1, & a = 1, \\ +\infty, & a > 1, \\ \text{neexistuje}, & a \leq -1. \end{cases}$$

Příklad (!!!).

Nechť $a \in \mathbb{R}$. Pak pro limitu reálné posloupnosti $(a^n)_{n=1}^{\infty}$ platí:

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0, & |a| < 1, \\ 1, & a = 1, \\ +\infty, & a > 1, \\ \text{neexistuje}, & a \leq -1. \end{cases}$$

- **Jednoduché případy**: Pokud $a = 0$ nebo $a = 1$, pak se jedná o konstantní posloupnost jejíž limita je rovna příslušné konstantě. Pro $a = -1$ jsme již ukázali, že limita $\big((-1)^n\big)_{n=1}^{\infty}$ neexistuje.

- **Nechť** $0 < |a| < 1$. Platí

$$\left|a^{n+1}\right| = \left|a^n\right| \cdot |a| < \left|a^n\right|.$$

Posloupnost $\left(\left|a^n\right|\right)_{n=1}^{\infty}$ je tedy ostře klesající a omezená, $0 < \left|a^n\right| < |a|$.
Z věty o limitě monotónní posloupnosti plyne existence konečné limity, označme ji $L = \lim\limits_{n\to\infty} \left|a^n\right|$.

- **Nechť** $0 < |a| < 1$. Platí

$$\left|a^{n+1}\right| = \left|a^n\right| \cdot |a| < \left|a^n\right|.$$

Posloupnost $\left(\left|a^n\right|\right)_{n=1}^{\infty}$ je tedy ostře klesající a omezená, $0 < \left|a^n\right| < |a|$.
Z věty o limitě monotónní posloupnosti plyne existence konečné limity, označme ji $L = \lim\limits_{n\to\infty} \left|a^n\right|$.
Posloupnost $\left(\left|a^{n+1}\right|\right)_{n=1}^{\infty}$ je vybraná z $\left(\left|a^n\right|\right)_{n=1}^{\infty}$ a proto mají stejnou limitu. Konečně

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|a^{n+1}\right| = \lim_{n\to\infty} |a| \cdot \left|a^n\right| = |a| \cdot \lim_{n\to\infty} \left|a^n\right| = |a| \cdot L.$$

Díky předpokladům nakladeným na a odtud nutně plyne rovnost $L = 0$.

- **Nechť** $0 < |a| < 1$. Platí
$$\left|a^{n+1}\right| = \left|a^n\right| \cdot |a| < \left|a^n\right|.$$
Posloupnost $\left(\left|a^n\right|\right)_{n=1}^{\infty}$ je tedy ostře klesající a omezená, $0 < \left|a^n\right| < |a|$.
Z věty o limitě monotónní posloupnosti plyne existence konečné limity, označme ji $L = \lim\limits_{n\to\infty} \left|a^n\right|$.
Posloupnost $\left(\left|a^{n+1}\right|\right)_{n=1}^{\infty}$ je vybraná z $\left(\left|a^n\right|\right)_{n=1}^{\infty}$ a proto mají stejnou limitu. Konečně
$$L = \lim_{n\to\infty} \left|a^{n+1}\right| = \lim_{n\to\infty} |a| \cdot \left|a^n\right| = |a| \cdot \lim_{n\to\infty} \left|a^n\right| = |a| \cdot L.$$
Díky předpokladům nakladeným na a odtud nutně plyne rovnost $L = 0$.
- **Případ** $a > 1$: Podobně jako v předchozím případě ukážeme, že $\left(a^n\right)_{n=1}^{\infty}$ je ostře rostoucí posloupnost zdola omezená např. číslem 1. Existuje proto limita $L = \lim\limits_{n\to\infty} a^n$.

- **Nechť** $0 < |a| < 1$. Platí

$$\left|a^{n+1}\right| = \left|a^n\right| \cdot |a| < \left|a^n\right|.$$

Posloupnost $\left(\left|a^n\right|\right)_{n=1}^{\infty}$ je tedy ostře klesající a omezená, $0 < \left|a^n\right| < |a|$. Z věty o limitě monotónní posloupnosti plyne existence konečné limity, označme ji $L = \lim_{n\to\infty} \left|a^n\right|$.

Posloupnost $\left(\left|a^{n+1}\right|\right)_{n=1}^{\infty}$ je vybraná z $\left(\left|a^n\right|\right)_{n=1}^{\infty}$ a proto mají stejnou limitu. Konečně

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|a^{n+1}\right| = \lim_{n\to\infty} |a| \cdot \left|a^n\right| = |a| \cdot \lim_{n\to\infty} \left|a^n\right| = |a| \cdot L.$$

Díky předpokladům nakladeným na a odtud nutně plyne rovnost $L = 0$.

- **Případ** $a > 1$: Podobně jako v předchozím případě ukážeme, že $\left(a^n\right)_{n=1}^{\infty}$ je ostře rostoucí posloupnost zdola omezená např. číslem 1. Existuje proto limita $L = \lim_{n\to\infty} a^n$. Protože posloupnost roste, musí nutně být $L > a$. Navíc platí

$$L = \lim_{n\to\infty} a^{n+1} = a \cdot \lim_{n\to\infty} a^n = a \cdot L.$$

Protože ale $L > a > 1$ může tato nerovnost platit pouze v případě $L = +\infty$.

- **Případ** $a < -1$: Pro vybranou posloupnost $\left(a^{2n}\right)_{n=1}^{\infty} = \left(\left(a^2\right)^n\right)_{n=1}^{\infty}$ nyní podle předchozího bodu platí $\lim\limits_{n\to\infty} a^{2n} = +\infty$, protože $a^2 > 1$.

- **Případ** $a < -1$: Pro vybranou posloupnost $\left(a^{2n}\right)_{n=1}^{\infty} = \left(\left(a^2\right)^n\right)_{n=1}^{\infty}$ nyní podle předchozího bodu platí $\lim\limits_{n\to\infty} a^{2n} = +\infty$, protože $a^2 > 1$.

Limitu vybrané posloupnosti $\left(a^{2n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$ snadno spočteme

$$\lim_{n\to\infty} a^{2n+1} = a \cdot \lim_{n\to\infty} a^{2n} = a \cdot (+\infty) = -\infty.$$

- **Případ** $a < -1$: Pro vybranou posloupnost $\left(a^{2n}\right)_{n=1}^{\infty} = \left(\left(a^2\right)^n\right)_{n=1}^{\infty}$ nyní podle předchozího bodu platí $\lim\limits_{n\to\infty} a^{2n} = +\infty$, protože $a^2 > 1$.

Limitu vybrané posloupnosti $\left(a^{2n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$ snadno spočteme

$$\lim_{n\to\infty} a^{2n+1} = a \cdot \lim_{n\to\infty} a^{2n} = a \cdot (+\infty) = -\infty.$$

Našli jsme dvě vybrané posloupnosti s různými limitami. Původní limita, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} a^n$, tedy neexistuje.

Shrnutí: Známé posloupnosti a jejich limity

posloupnost	limita
$(n^a)_{n=1}^{\infty}$	$\begin{cases} +\infty, & a > 0, \\ 1, & a = 0, \\ 0, & a < 0. \end{cases}$
$\left(\sqrt[n]{n}\right)_{n=1}^{\infty}$	1
$\left(\sqrt[n]{a}\right)_{n=1}^{\infty}$ pro $a > 0$	1
$\left(\sqrt[n]{n!}\right)_{n=1}^{\infty}$	$+\infty$
$(a^n)_{n=1}^{\infty}$	$\begin{cases} 0, & \lvert a\rvert < 1, \\ 1, & a = 1, \\ +\infty, & a > 1, \\ \text{neexistuje}, & a \leq -1. \end{cases}$

Výsledky v této tabulce považujeme za známé, netřeba je v písemce odvozovat.

Hlavní body

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)$$

1. Věta o limitě +, · a /
2. Nerovnosti a limity
3. Věta o limitě složené funkce
4. Příklady
5. Podílové kritérium pro posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}$$

Podílové kritérium

Z nyní již známé limity posloupnosti $(a^n)_{n=1}^{\infty}$ a věty o limitě sevřené posloupnosti dostaneme pro řadu výpočtů důležité podílové kritérium.

Věta (Podílové kritérium / *ratio test for sequences*):

Buď $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ posloupnost *kladných* čísel a nechť existuje limita

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

označme její hodnotu symbolem q. Potom

1. pokud $q < 1$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,
2. pokud $q > 1$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Podílové kritérium

Důkaz.

Dokažme první bod.

Podílové kritérium

Důkaz.

Dokažme první bod. Protože $q < 1$ určitě existuje r splňující $q < r < 1$. Díky tomu pak i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < r.$$

Podílové kritérium

Důkaz.

Dokažme první bod. Protože $q < 1$ určitě existuje r splňující $q < r < 1$. Díky tomu pak i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < r.$$

Přímo z definice plyne existence $N \in \mathbb{N}$ takového, že nerovnost

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < r$$

platí pro všechna $n \geq N$. Díky nezápornosti členů posloupnosti pak platí i nerovnost $a_{n+1} < r a_n$ pro libovolné $n \geq N$.

Podílové kritérium

Důkaz.

Dokažme první bod. Protože $q < 1$ určitě existuje r splňující $q < r < 1$. Díky tomu pak i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < r.$$

Přímo z definice plyne existence $N \in \mathbb{N}$ takového, že nerovnost

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < r$$

platí pro všechna $n \geq N$. Díky nezápornosti členů posloupnosti pak platí i nerovnost $a_{n+1} < ra_n$ pro libovolné $n \geq N$. Tudíž pro $n \geq N$ je

$$0 \leq a_n \leq r^{n-N} a_N.$$

Protože $0 < r < 1$, je limita pravé strany nerovnosti rovna nule.

Podílové kritérium

Důkaz.

Dokažme první bod. Protože $q < 1$ určitě existuje r splňující $q < r < 1$. Díky tomu pak i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < r.$$

Přímo z definice plyne existence $N \in \mathbb{N}$ takového, že nerovnost

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < r$$

platí pro všechna $n \geq N$. Díky nezápornosti členů posloupnosti pak platí i nerovnost $a_{n+1} < ra_n$ pro libovolné $n \geq N$. Tudíž pro $n \geq N$ je

$$0 \leq a_n \leq r^{n-N} a_N.$$

Protože $0 < r < 1$, je limita pravé strany nerovnosti rovna nule. Z věty o limitě sevřené posloupnosti tak dostáváme výsledek $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Druhý bod se dokáže obdobně. $\square$

Podílové kritérium

Příklad.

Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{10^n}{n!}$.

Podílové kritérium

Příklad.

Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{10^n}{n!}$.
Protože se jedná o posloupnost kladných čísel a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{10^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{10^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{10}{n+1} = 0 < 1$$

je původní zkoumaná limita rovna taktéž 0.

Podílové kritérium

Příklad.

Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{10^n}{n!}$.
Protože se jedná o posloupnost kladných čísel a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{10^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{10^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{10}{n+1} = 0 < 1$$

je původní zkoumaná limita rovna taktéž 0.

Odtud ihned vidíme (bez zevrubnějšího zkoumání nerovností z definice), že

$$10^n = o(n!) \quad \text{a} \quad 10^n = \mathcal{O}(n!) \text{ pro } n \to +\infty.$$

Podílové kritérium

Příklad.

Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{10}}{10^n}$.

Podílové kritérium

Příklad.

Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{10}}{10^n}$.
Protože se jedná o posloupnost kladných čísel a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^{10}}{10^{n+1}}}{\frac{n^{10}}{10^n}} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{10} \frac{1}{10} = \frac{1}{10} < 1$$

je původní zkoumaná limita rovna 0.

Podílové kritérium

Příklad.

Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{10}}{10^n}$.
Protože se jedná o posloupnost kladných čísel a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^{10}}{10^{n+1}}}{\frac{n^{10}}{10^n}} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{10} \frac{1}{10} = \frac{1}{10} < 1$$

je původní zkoumaná limita rovna 0.

Odtud ihned vidíme (bez zevrubnějšího zkoumání nerovností z definice), že

$$n^{10} = o(10^n) \quad \text{a} \quad n^{10} = \mathcal{O}(10^n) \text{ pro } n \to +\infty.$$

Hlavní body

$$\lim_{x \to a} \left(f(x) + g(x) \right)$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n!}$$

Komentář

- Důkaz věty o limitě složené funkce podáváme ve studijním textu. Z důkazu je i jasný význam 4. předpokladu této věty.

- Podílové kritérium pro posloupnosti je jedno z mnoha podobných kritérií (např. Cauchyho, Raabeovo, aj.). Pro naše účely bude ovšem dostačující.

- Upozorňujeme, že věta o limitě součtu/součinu a podílu nic neříká o limitách funkcí tvaru $f(x)^{g(x)}$, těmi se budeme zabývat teprve později.