Matematická analýza 1

Spojitost funkce a její důsledky

Tomáš Kalvoda[1], Pavel Paták[2]

[1]tomas.kalvoda@fit.cvut.cz, [2]pavel.patak@fit.cvut.cz

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze

6. března 2025
LS 2024/2025

Hlavní body

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

1. Definice a kritéria spojitosti
2. Důsledky spojitosti
3. Spojitost elementárních funkcí
4. Typy nespojitostí
5. Důsledky

$$f : (a,b) \to \mathbb{R}$$

Hlavní výsledky této přednášky

- Význam a definice různých typů spojitosti funkce.
- Důsledky spojitosti (zejména metoda *bisekce*).
- Odvození spojitosti elementárních funkcí.
- Výpočet limit s využitím spojitosti.

Hlavní body

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

1. Definice a kritéria spojitosti
2. Důsledky spojitosti
3. Spojitost elementárních funkcí
4. Typy nespojitostí
5. Důsledky

$$f : (a,b) \to \mathbb{R}$$

Spojitost funkce v bodě

Na základě vztahu funkční hodnoty a limity funkce v jistém bodě zavádíme následující pojmy.

Definice (Spojitost funkce v bodě / *continuity at point*):

Nechť f je reálná funkce reálné proměnné a nechť bod $a \in D_f$. Řekneme, že funkce f je...

- ...**spojitá v bodě** a, právě když $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Spojitost funkce v bodě

Na základě vztahu funkční hodnoty a limity funkce v jistém bodě zavádíme následující pojmy.

Definice (Spojitost funkce v bodě / *continuity at point*):

Nechť f je reálná funkce reálné proměnné a nechť bod $a \in D_f$. Řekneme, že funkce f je...

- ...**spojitá v bodě** a, právě když $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- ...**spojitá v bodě** a **zprava**, právě když $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = f(a)$.

Spojitost funkce v bodě

Na základě vztahu funkční hodnoty a limity funkce v jistém bodě zavádíme následující pojmy.

Definice (Spojitost funkce v bodě / *continuity at point*):

Nechť f je reálná funkce reálné proměnné a nechť bod $a \in D_f$. Řekneme, že funkce f je…

- …**spojitá v bodě** a, právě když $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- …**spojitá v bodě** a **zprava**, právě když $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = f(a)$.
- …**spojitá v bodě** a **zleva**, právě když $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = f(a)$.

ε–δ formulace spojitosti v bodě

- Je-li f funkce a $a \in D_f$, pak a i $f(a)$ jsou prvky $\mathbb{R}$. Dostáváme proto alternativní formulaci definice, kterou lze využít při ověřování spojitosti:

ε–δ formulace spojitosti v bodě

- Je-li f funkce a $a \in D_f$, pak a i $f(a)$ jsou prvky $\mathbb{R}$. Dostáváme proto alternativní formulaci definice, kterou lze využít při ověřování spojitosti:

ε–δ formulace spojitosti funkce v bodě

Funkce f definovaná v bodě $a \in D_f$, který je hromadným bodem D_f, je spojitá v bodě a, *právě když* pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé $x \in D_f$ splňující $|x - a| < \delta$ platí $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

ε–δ formulace spojitosti v bodě

- Je-li f funkce a $a \in D_f$, pak a i $f(a)$ jsou prvky $\mathbb{R}$. Dostáváme proto alternativní formulaci definice, kterou lze využít při ověřování spojitosti:

ε–δ formulace spojitosti funkce v bodě

Funkce f definovaná v bodě $a \in D_f$, který je hromadným bodem D_f, je spojitá v bodě a, *právě když* pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé $x \in D_f$ splňující $|x - a| < \delta$ platí $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

- V dalším textu i dalších kapitolách se budeme už často věnovat funkcím, které jsou definované na intervalech.

- Tj. speciálně, pokud se budeme bavit o „spojitosti v bodě“, tak typicky naše funkce budou definovány na celém (jednostranném) okolí takovéhoto bodu.

Vlastnosti funkcí spojitých v bodě

Následující tvrzení jsou bezprostředními důsledky vlastností limity funkce:

Vlastnosti funkcí spojitých v bodě

Následující tvrzení jsou bezprostředními důsledky vlastností limity funkce:

Věta (O vztahu různých typů spojitostí):

Funkce f definovaná na okolí bodu $a \in D_f$ je spojitá v bodě a, právě když je spojitá v bodě a zleva i zprava.

Vlastnosti funkcí spojitých v bodě

Následující tvrzení jsou bezprostředními důsledky vlastností limity funkce:

Věta (O vztahu různých typů spojitostí):

Funkce f definovaná na okolí bodu $a \in D_f$ je spojitá v bodě a, právě když je spojitá v bodě a zleva i zprava.

Věta (O spojitosti součtu, součinu a podílu funkcí):

Součet a součin dvou funkcí f a g definovaných na okolí bodu a a spojitých v bodě a je funkce spojitá v bodě a. Pokud navíc $g(a) \neq 0$, pak podíl $\frac{f}{g}$ je funkce spojitá v bodě a.

Vlastnosti funkcí spojitých v bodě

Následující tvrzení jsou bezprostředními důsledky vlastností limity funkce:

Věta (O vztahu různých typů spojitostí):

Funkce f definovaná na okolí bodu $a \in D_f$ je spojitá v bodě a, právě když je spojitá v bodě a zleva i zprava.

Věta (O spojitosti součtu, součinu a podílu funkcí):

Součet a součin dvou funkcí f a g definovaných na okolí bodu a a spojitých v bodě a je funkce spojitá v bodě a. Pokud navíc $g(a) \neq 0$, pak podíl $\frac{f}{g}$ je funkce spojitá v bodě a.

Věta (O spojitosti složené funkce):

Buďte g funkce definovaná na okolí bodu a a spojitá v bodě a a f funkce definovaná na okolí bodu $g(a)$ a spojitá v bodě $g(a)$. Potom složená funkce $f \circ g$ je spojitá v bodě a.

Příklad: Spojitost polynomů

Příklad.

V předchozí přednášce jsme ukázali, že pro libovolné reálné a a libovolný polynom $P(x)$ platí

$$\lim_{x \to a} P(x) = P(a).$$

Každý polynom je proto spojitou funkcí v každém bodě $a \in \mathbb{R}$.

Příklad

Příklad.

Zkoumejte spojitost funkce $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$.

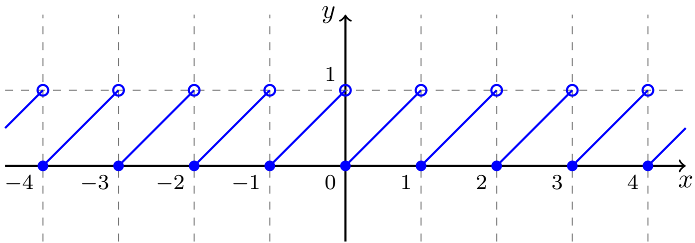
Příklad

Příklad.

Zkoumejte spojitost funkce $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$.

Přirozeným definičním oborem funkce f je $D_f = \mathbb{R}$. Funkce f je spojitá v každém bodě $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. V bodech $a \in \mathbb{Z}$ je spojitá zprava, ale ne zleva.

$$\lim_{x \to a+} f(x) = f(a) \quad \text{a} \quad \lim_{x \to a-} f(x) = f(a) + 1.$$



Spojitost (na intervalu)

Nyní do této doby lokální pojem spojitosti rozšíříme na celé intervaly.

Spojitost (na intervalu)

Nyní do této doby lokální pojem spojitosti rozšíříme na celé intervaly.

Definice (Spojitá funkce (na intervalu) / *continuous function*):

Funkce f je **spojitá na intervalu** J, právě když $f\big|_J$ (f zúženo na J) je spojitá v každém bodě intervalu J.
Funkci f nazýváme **spojitou**, právě když je f spojitá v každém bodě svého definičního oboru. Množinu všech spojitých funkcí definovaných na intervalu J značíme $\mathcal{C}(J)$.

Spojitost (na intervalu)

Nyní do této doby lokální pojem spojitosti rozšíříme na celé intervaly.

Definice (Spojitá funkce (na intervalu) / *continuous function*):

Funkce f je **spojitá na intervalu** J, právě když $f\big|_J$ (f zúženo na J) je spojitá v každém bodě intervalu J.
Funkci f nazýváme **spojitou**, právě když je f spojitá v každém bodě svého definičního oboru. Množinu všech spojitých funkcí definovaných na intervalu J značíme $\mathcal{C}(J)$.

Poznámka:

Speciálně tedy pro funkci f platí:

- f *je spojitá na intervalu* (a, b), právě když f je spojitá v každém bodě $x \in (a, b)$.

Spojitost (na intervalu)

Nyní do této doby lokální pojem spojitosti rozšíříme na celé intervaly.

Definice (Spojitá funkce (na intervalu) / *continuous function*):

Funkce f je **spojitá na intervalu** J, právě když $f\big|_J$ (f zúženo na J) je spojitá v každém bodě intervalu J.
Funkci f nazýváme **spojitou**, právě když je f spojitá v každém bodě svého definičního oboru. Množinu všech spojitých funkcí definovaných na intervalu J značíme $\mathcal{C}(J)$.

Poznámka:

Speciálně tedy pro funkci f platí:

- f *je spojitá na intervalu* (a, b), právě když f je spojitá v každém bodě $x \in (a, b)$.
- f *je spojitá na intervalu* $\langle a, b)$, právě když f je spojitá v každém bodě $x \in (a, b)$ a v bodě a je spojitá zprava.

Spojitost (na intervalu)

Nyní do této doby lokální pojem spojitosti rozšíříme na celé intervaly.

Definice (Spojitá funkce (na intervalu) / *continuous function*):

Funkce f je **spojitá na intervalu** J, právě když $f\big|_J$ (f zúženo na J) je spojitá v každém bodě intervalu J.
Funkci f nazýváme **spojitou**, právě když je f spojitá v každém bodě svého definičního oboru. Množinu všech spojitých funkcí definovaných na intervalu J značíme $\mathcal{C}(J)$.

Poznámka:

Speciálně tedy pro funkci f platí:

- *f je spojitá na intervalu* (a, b), právě když f je spojitá v každém bodě $x \in (a, b)$.
- *f je spojitá na intervalu* $\langle a, b)$, právě když f je spojitá v každém bodě $x \in (a, b)$ a v bodě a je spojitá zprava.
- *f je spojitá na intervalu* $(a, b\rangle$, právě když f je spojitá v každém bodě $x \in (a, b)$ a v bodě b je spojitá zleva.

Spojitost (na intervalu)

Nyní do této doby lokální pojem spojitosti rozšíříme na celé intervaly.

Definice (Spojitá funkce (na intervalu) / *continuous function*):

Funkce f je **spojitá na intervalu** J, právě když $f\big|_J$ (f zúženo na J) je spojitá v každém bodě intervalu J.
Funkci f nazýváme **spojitou**, právě když je f spojitá v každém bodě svého definičního oboru. Množinu všech spojitých funkcí definovaných na intervalu J značíme $\mathcal{C}(J)$.

Poznámka:

Speciálně tedy pro funkci f platí:

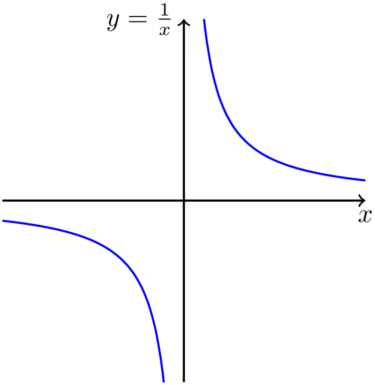
- *f je spojitá na intervalu* (a,b), právě když f je spojitá v každém bodě $x \in (a,b)$.
- *f je spojitá na intervalu* $\langle a,b)$, právě když f je spojitá v každém bodě $x \in (a,b)$ a v bodě a je spojitá zprava.
- *f je spojitá na intervalu* $(a,b\rangle$, právě když f je spojitá v každém bodě $x \in (a,b)$ a v bodě b je spojitá zleva.
- *f je spojitá na intervalu* $\langle a,b\rangle$, právě když f je spojitá v každém bodě $x \in (a,b)$, v bodě a je spojitá zprava a v bodě b je spojitá zleva.

Spojitost (na intervalu): příklad

Příklad.

Funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ je...

- ...spojitá v každém bodě množiny $\mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) = D_f$.
- ...spojitá na intervalu $(-\infty, 0)$.
- ...spojitá na intervalu $(0, +\infty)$.
- ...spojitá.
- ...není spojitá v bodě $a = 0$.
- ...není spojitá na intervalu $(-1, 1)$.



Hlavní body

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

$$f : (a, b) \to \mathbb{R}$$

Řešení rovnic

Řadu problémů lze formulovat jako hledání řešení rovnice

$$f(x) = 0.$$

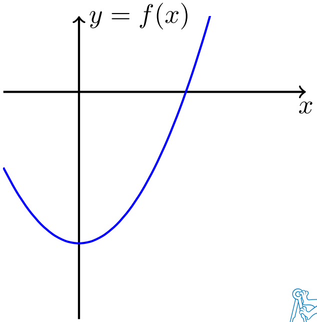
V této části ukážeme jednoduchou postačující podmínku pro existenci řešení takovéto rovnice a algoritmus hledající alespoň jedno z možných řešení.

Příklad.

Vypočítat numerickou hodnotu $\sqrt{2}$ znamená řešit rovnici

$$f(x) = x^2 - 2 = 0$$

pro neznámou $x \in D_f = \mathbb{R}$.



Řešení rovnic: metoda půlení intervalu

Věta (Metoda půlení intervalu / *bisection method*):

Nechť funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť $f(a) \cdot f(b) < 0$. Potom existuje bod $c \in (a, b)$ takový, že $f(c) = 0$.

Řešení rovnic: metoda půlení intervalu

Věta (Metoda půlení intervalu / *bisection method*):

Nechť funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť $f(a) \cdot f(b) < 0$. Potom existuje bod $c \in (a, b)$ takový, že $f(c) = 0$.

Důkaz: Položme $a_1 := a$ a $b_1 := b$. Protože znaménka $f(a_1)$ a $f(b_1)$ jsou *různá*, nastane právě jedna ze tří možností

1. $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) = 0$,
2. znaménka $f(a_1)$ a $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)$ jsou různá,
3. znaménka $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)$ a $f(b_1)$ jsou různá.

Řešení rovnic: metoda půlení intervalu

Věta (Metoda půlení intervalu / *bisection method*):

Nechť funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť $f(a)\cdot f(b) < 0$. Potom existuje bod $c \in (a, b)$ takový, že $f(c) = 0$.

Důkaz: Položme $a_1 := a$ a $b_1 := b$. Protože znaménka $f(a_1)$ a $f(b_1)$ jsou *různá*, nastane právě jedna ze tří možností

1. $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) = 0$,
2. znaménka $f(a_1)$ a $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)$ jsou různá,
3. znaménka $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)$ a $f(b_1)$ jsou různá.

Dále postupujeme podle toho, která z těchto možností nastala:

1. Hledaným bodem c je $\frac{a_1+b_1}{2}$ a věta je dokázána.
2. Položme $a_2 := a_1$ a $b_2 := \frac{a_1+b_1}{2}$.
3. Položme $a_2 := \frac{a_1+b_1}{2}$ a $b_2 = b_1$.

Pokud nenastala první možnost, proveďme stejnou úvahu s a_2 a b_2 místo a_1 a b_1.

Tímto způsobem postupně konstruujeme další a_3, b_3, atd. Pokud v některém z kroků nastane první možnost (tj. existuje n tak, že $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) = 0$), pak je věta dokázána.

Tímto způsobem postupně konstruujeme další a_3, b_3, atd. Pokud v některém z kroků nastane první možnost (tj. existuje n tak, že $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) = 0$), pak je věta dokázána.
V opačném případě jsme zkonstruovali posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ splňující

$$a_n, b_n \in \langle a, b\rangle, \quad a \leq a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n \leq b, \quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}},$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Tímto způsobem postupně konstruujeme další a_3, b_3, atd. Pokud v některém z kroků nastane první možnost (tj. existuje n tak, že $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) = 0$), pak je věta dokázána.
V opačném případě jsme zkonstruovali posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ splňující

$$a_n, b_n \in \langle a, b\rangle, \quad a \leq a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n \leq b, \quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}},$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$.
Obě posloupnosti jsou monotónní a omezené, tudíž existují jejich konečné limity, $a_n \to \alpha$ a $b_n \to \beta$ při $n \to \infty$. Navíc

$$\beta - \alpha = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{2^{n-1}} = 0.$$

Obě posloupnosti tedy mají stejnou limitu, označme ji $c := \alpha = \beta \in \langle a, b\rangle$.

Tímto způsobem postupně konstruujeme další a_3, b_3, atd. Pokud v některém z kroků nastane první možnost (tj. existuje n tak, že $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) = 0$), pak je věta dokázána.
V opačném případě jsme zkonstruovali posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ splňující

$$a_n, b_n \in \langle a, b\rangle, \quad a \leq a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n \leq b, \quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}},$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$.
Obě posloupnosti jsou monotónní a omezené, tudíž existují jejich konečné limity, $a_n \to \alpha$ a $b_n \to \beta$ při $n \to \infty$. Navíc

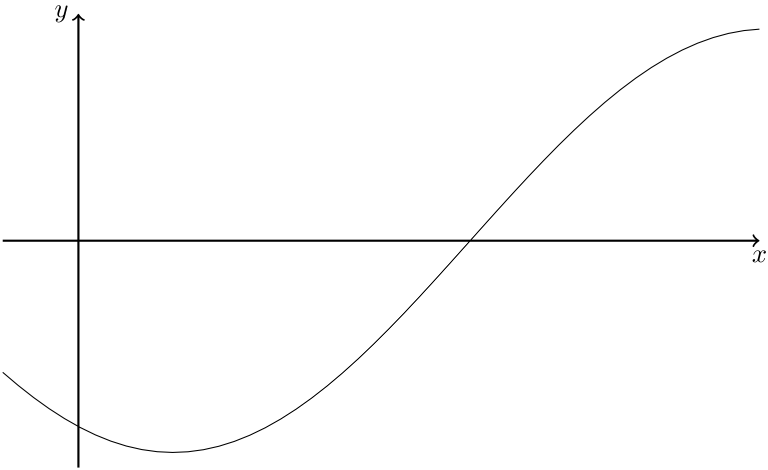
$$\beta - \alpha = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{2^{n-1}} = 0.$$

Obě posloupnosti tedy mají stejnou limitu, označme ji $c := \alpha = \beta \in \langle a, b\rangle$.
Ze spojitosti funkce f v bodě c a Heineho věty nyní plyne

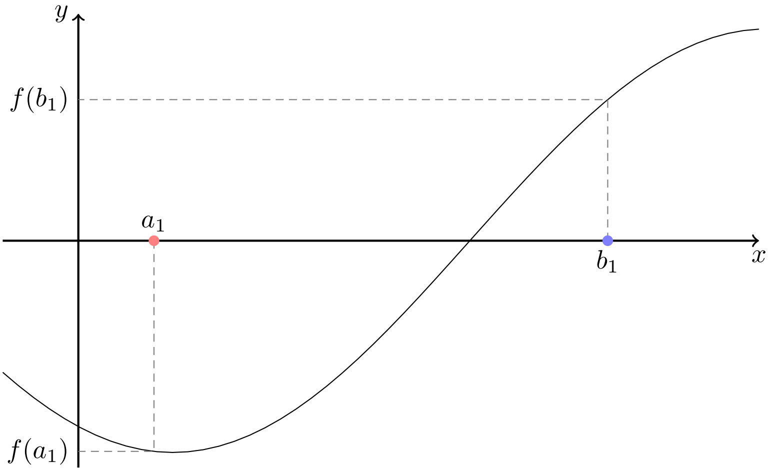
$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(c).$$

Ale protože všechny $f(a_n)$ mají různé znaménko od $f(b_n)$ mohou poslední rovnosti nastat pouze v případě že $f(c) = 0$.

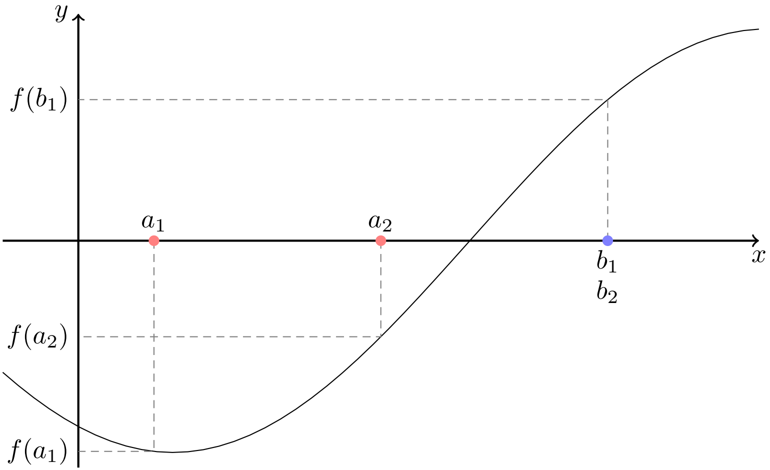
Ilustrace metody půlení intervalu



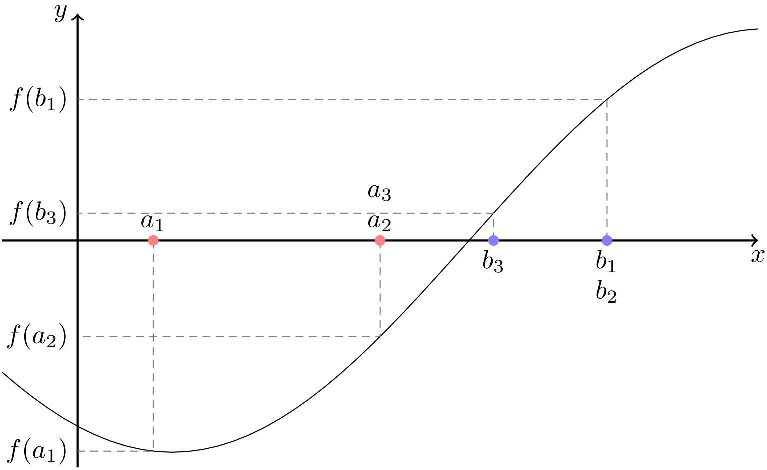
Ilustrace metody půlení intervalu



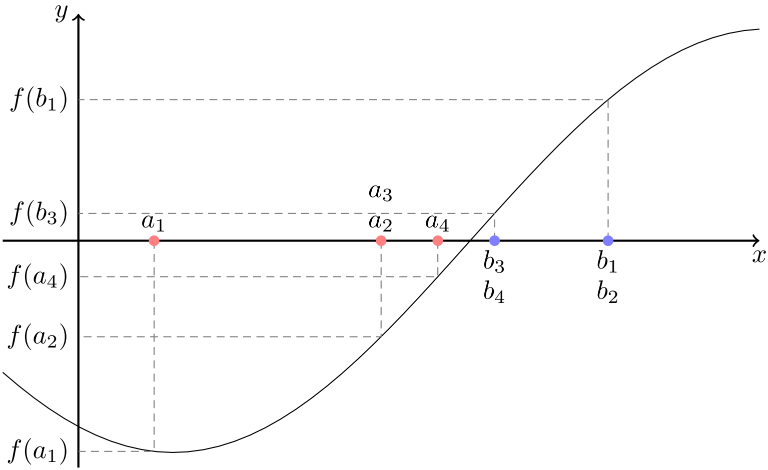
Ilustrace metody půlení intervalu



Ilustrace metody půlení intervalu



Ilustrace metody půlení intervalu



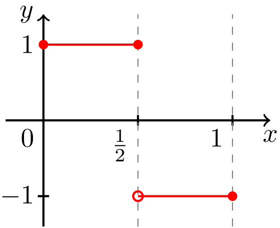
Řešení rovnic: metoda půlení intervalu

Poznámka:

Předpoklad *spojitosti* v předešlé větě je naprosto podstatný. Jako příklad uvažme funkci

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle, \\ -1, & x \in \left(\frac{1}{2}, 1 \right\rangle \end{cases}$$

na intervalu $\langle a, b \rangle = \langle 0, 1 \rangle$. Sice $f(0) \cdot f(1) = -1 < 0$, ale neexistuje bod $x \in (0, 1)$ splňující $f(x) = 0$.



Řešení rovnic: metoda půlení intervalu

Poznámka (Komentář k důkazu):

- V důkazu jsme **využili** celou řadu výsledků z předchozích přednášek (věta o limitě monotónní posloupnosti, Heineho věta, spojitost, aj.)
- Důkaz předcházející věty je *konstruktivní*. Tvrzení věty, existenci čísla c, jsme dokázali jeho konstrukcí.
- Algoritmus použitý v důkazu se nazývá *metoda půlení intervalu* (*bisection method*) a lze ho prakticky použít k hledání řešení rovnice $f(x) = 0$.
- Algoritmus kontroluje i přesnost výpočtu, v každém kroku iterace platí nerovnosti $a_n \leq c \leq b_n$, $n = 1, 2, 3 \ldots$ Víme proto kdy výpočetní smyčku ukončit.

Řešení rovnic: metoda půlení intervalu

Poznámka (Komentář k důkazu):

- V důkazu jsme **využili** celou řadu výsledků z předchozích přednášek (věta o limitě monotónní posloupnosti, Heineho věta, spojitost, aj.)
- Důkaz předcházející věty je *konstruktivní*. Tvrzení věty, existenci čísla c, jsme dokázali jeho konstrukcí.
- Algoritmus použitý v důkazu se nazývá *metoda půlení intervalu* (*bisection method*) a lze ho prakticky použít k hledání řešení rovnice $f(x) = 0$.
- Algoritmus kontroluje i přesnost výpočtu, v každém kroku iterace platí nerovnosti $a_n \leq c \leq b_n$, $n = 1, 2, 3 \ldots$ Víme proto kdy výpočetní smyčku ukončit.

Předchozí věta má řadu důležitých důsledků. První, takřka evidentní, je následující (důkaz sporem snadný):

Důsledek:

Buď f spojitá funkce na intervalu J a nechť platí $f(x) \neq 0$ pro všechna $x \in J$. Potom pro všechna $x \in J$ platí buď $f(x) > 0$ nebo $f(x) < 0$.

Další důsledek

Následující tvrzení ukazuje pěkné chování spojitých funkcí. Navíc ho využijeme později v semestru při studiu extrémů funkcí.

Věta:

Buď f funkce spojitá na intervalu J. Potom obraz $f(J)$ intervalu J je buď interval, nebo jednoprvková množina.

Další důsledek

Následující tvrzení ukazuje pěkné chování spojitých funkcí. Navíc ho využijeme později v semestru při studiu extrémů funkcí.

Věta:

Buď f funkce spojitá na intervalu J. Potom obraz $f(J)$ intervalu J je buď interval, nebo jednoprvková množina.

Důkaz.

$f(J)$ je jednoprvková množina právě tehdy, když funkce f je konstantní. Ve zbytku důkazu předpokládejme, že f není konstantní.

Další důsledek

Následující tvrzení ukazuje pěkné chování spojitých funkcí. Navíc ho využijeme později v semestru při studiu extrémů funkcí.

Věta:

Buď f funkce spojitá na intervalu J. Potom obraz $f(J)$ intervalu J je buď interval, nebo jednoprvková množina.

Důkaz.

$f(J)$ je jednoprvková množina právě tehdy, když funkce f je konstantní. Ve zbytku důkazu předpokládejme, že f není konstantní.

Ukažme, že $f(J)$ je interval. K tomu je třeba ukázat, že pro libovolné dva prvky $\alpha, \beta \in f(J)$, $\alpha \neq \beta$, leží všechna γ mezi α a β také v $f(J)$.

Další důsledek

Následující tvrzení ukazuje pěkné chování spojitých funkcí. Navíc ho využijeme později v semestru při studiu extrémů funkcí.

Věta:

Buď f funkce spojitá na intervalu J. Potom obraz $f(J)$ intervalu J je buď interval, nebo jednoprvková množina.

Důkaz.

$f(J)$ je jednoprvková množina právě tehdy, když funkce f je konstantní. Ve zbytku důkazu předpokládejme, že f není konstantní.

Ukažme, že $f(J)$ je interval. K tomu je třeba ukázat, že pro libovolné dva prvky $\alpha, \beta \in f(J)$, $\alpha \neq \beta$, leží všechna γ mezi α a β také v $f(J)$.

Jistě existují $a, b \in J$, $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$ a BÚNO $a < b$. Položme $g(x) := f(x) - \gamma$. Funkce g je spojitá na $\langle a, b\rangle$, $g(a) = \alpha - \gamma$ a $g(b) = \beta - \gamma$ jsou nenulová s rozdílným znaménkem. Podle věty existuje $c \in (a, b)$ takové, že $g(c) = 0$, tj. $f(c) = \gamma$. □

Spojitost inverzní funkce

Věta (O inverzní funkci):

Buď f *ryze monotónní* a spojitá funkce na intervalu $D_f = I$. Potom k ní inverzní funkce f^{-1} je také ryze monotónní a spojitá na intervalu $J := f(I)$.

Spojitost inverzní funkce

Věta (O inverzní funkci):

Buď f *ryze monotónní* a spojitá funkce na intervalu $D_f = I$. Potom k ní inverzní funkce f^{-1} je také ryze monotónní a spojitá na intervalu $J := f(I)$.

Důkaz.

f^{-1} existuje a je ryze monotónní. J je dle předchozí věty interval. BÚNO předpokládejme, že funkce f je ostře rostoucí. Ukažme, že f^{-1} je spojitá zprava v každém bodě $b \in J$, který není pravým koncovým bodem. Ozn. $a := f^{-1}(b)$, tj. $f(a) = b$.

Spojitost inverzní funkce

Věta (O inverzní funkci):

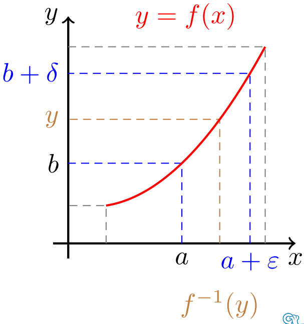
Buď f *ryze monotónní* a spojitá funkce na intervalu $D_f = I$. Potom k ní inverzní funkce f^{-1} je také ryze monotónní a spojitá na intervalu $J := f(I)$.

Důkaz.

f^{-1} existuje a je ryze monotónní. J je dle předchozí věty interval. BÚNO předpokládejme, že funkce f je ostře rostoucí. Ukažme, že f^{-1} je spojitá zprava v každém bodě $b \in J$, který není pravým koncovým bodem. Ozn. $a := f^{-1}(b)$, tj. $f(a) = b$.
Buď $\varepsilon > 0$. Potom pro $\delta := f(a+\varepsilon) - b$ a $y \in (b, b+\delta)$ platí

$$b < y < b + \delta = f(a+\varepsilon)$$
$$a = f^{-1}(b) < f^{-1}(y) < a + \varepsilon.$$

Tedy $f^{-1}(y) \in H_a(\varepsilon)$, $a = f^{-1}(b)$. Podobně pro spojitost zleva. $\square$



Hlavní body

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

$$f : (a, b) \to \mathbb{R}$$

Trigonometrické funkce

Příklad.

Funkce $\sin$ a $\cos$ jsou spojité v každém bodě $a \in \mathbb{R}$.

Trigonometrické funkce

Příklad.

Funkce $\sin$ a $\cos$ jsou spojité v každém bodě $a \in \mathbb{R}$.

Připomeňme známé, v minulé přednášce vypočtené, limity

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{x \to 0} \cos x = 1.$$

Trigonometrické funkce

Příklad.

Funkce $\sin$ a $\cos$ jsou spojité v každém bodě $a \in \mathbb{R}$.

Připomeňme známé, v minulé přednášce vypočtené, limity

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{x \to 0} \cos x = 1.$$

Podle součtového vzorce pro funkci $\sin$ platí

$$\sin x = \sin\big((x-a)+a\big) = \sin(x-a)\cos(a) + \cos(x-a)\sin(a)$$

Trigonometrické funkce

Příklad.

Funkce $\sin$ a $\cos$ jsou spojité v každém bodě $a \in \mathbb{R}$.

Připomeňme známé, v minulé přednášce vypočtené, limity

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{x \to 0} \cos x = 1.$$

Podle součtového vzorce pro funkci $\sin$ platí

$$\sin x = \sin\big((x-a)+a\big) = \sin(x-a)\cos(a) + \cos(x-a)\sin(a)$$

Tudíž podle věty o limitě složené funkce a součinu/součtu limit platí

$$\lim_{x \to a} \sin x = 0 \cdot \cos(a) + 1 \cdot \sin a = \sin a.$$

Což ukazuje spojitost funkce $\sin$. Spojitost funkce $\cos$ se ukáže analogicky.

Trigonometrické funkce

Příklad.

Funkce $\sin$ a $\cos$ jsou spojité v každém bodě $a \in \mathbb{R}$.

Připomeňme známé, v minulé přednášce vypočtené, limity

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{x \to 0} \cos x = 1.$$

Podle součtového vzorce pro funkci $\sin$ platí

$$\sin x = \sin\big((x-a)+a\big) = \sin(x-a)\cos(a) + \cos(x-a)\sin(a)$$

Tudíž podle věty o limitě složené funkce a součinu/součtu limit platí

$$\lim_{x \to a} \sin x = 0 \cdot \cos(a) + 1 \cdot \sin a = \sin a.$$

Což ukazuje spojitost funkce $\sin$. Spojitost funkce $\cos$ se ukáže analogicky.

Důsledek:

Z tohoto příkladu a z věty o spojitosti podílu dvou funkcí ihned plyne, že funkce tg a cotg jsou spojité v každém bodě svého definičního oboru.

Trigonometrické funkce

Příklad.

Protože už víme, že funkce $\sin$, $\cos$, tg a cotg jsou spojité na svých definičních oborech, a vhodně zúžené jsou i ryze monotónní, ihned odtud dostáváme spojitost inverzních funkcí

$$\begin{aligned}
\arcsin &= \left(\sin\Big|_{\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle}\right)^{-1}, \\
\arccos &= \left(\cos\Big|_{\langle 0,\pi\rangle}\right)^{-1}, \\
\operatorname{arctg} &= \left(\operatorname{tg}\Big|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}\right)^{-1}, \\
\operatorname{arccotg} &= \left(\operatorname{cotg}\Big|_{(0,\pi)}\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Exponenciála

Jak jsme už zmínili na začátku semestru, jednu vlastnost exponenciální funkce o základu e (exponenciály) budeme muset v tento okamžik postulovat, než tuto funkci v příštím semestru korektně zavedeme.

Navíc k „algebraickým“ vlastnostem e^x přidáváme následující vlasnost, kterou nyní bereme jako součást axiomatické definice e^x:

Doplňující vlastnost e^x

Exponenciála e^x splňuje následující vztah

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1.$$

V příští přednášce vysvětlíme význam této podmínky, v podstatě zde předepisujeme požadavek na derivaci funkce e^x.

Exponenciála

Příklad.

Funkce e^x je spojitá v každém bodě $a \in \mathbb{R}$

Exponenciála

Příklad.

Funkce e^x je spojitá v každém bodě $a \in \mathbb{R}$

Argumentace v tomto případě sleduje podobné kroky jako u trigonometrických funkcí:

- **Spojitost v** 0: Nejprve ukážeme rovnost $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^x = 1$. Pro libovolné $\varepsilon > 0$ ze vztahu
$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$$
plyne existence $\delta > 0$, BÚNO $\delta < \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$, takového, že pro $x \in U_0(\delta) \neq \{0\}$ platí $|(\mathrm{e}^x - 1)/x - 1| < \varepsilon$ a pro tato x pak i
$$|\mathrm{e}^x - 1| = \left|\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}\right| \cdot |x| < (1+\varepsilon)\cdot\delta < (1+\varepsilon)\cdot\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} = \varepsilon.$$

Exponenciála

Příklad.

Funkce e^x je spojitá v každém bodě $a \in \mathbb{R}$

Argumentace v tomto případě sleduje podobné kroky jako u trigonometrických funkcí:

- **Spojitost v** 0: Nejprve ukážeme rovnost $\lim_{x \to 0} \mathrm{e}^x = 1$. Pro libovolné $\varepsilon > 0$ ze vztahu
$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$$
plyne existence $\delta > 0$, BÚNO $\delta < \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$, takového, že pro $x \in U_0(\delta) \neq \{0\}$ platí $|(\mathrm{e}^x - 1)/x - 1| < \varepsilon$ a pro tato x pak i
$$|\mathrm{e}^x - 1| = \left|\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}\right| \cdot |x| < (1+\varepsilon) \cdot \delta < (1+\varepsilon) \cdot \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} = \varepsilon.$$
- **Spojitost v** $a \in \mathbb{R}$: Nyní stačí použít základní vlastnosti exponenciály a větu o limitě součinu. Pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ platí
$$\lim_{x \to a} \mathrm{e}^x = \lim_{x \to a} \mathrm{e}^{a+x-a} = \mathrm{e}^a \lim_{x \to a} \mathrm{e}^{x-a} = \mathrm{e}^a \cdot 1 = \mathrm{e}^a.$$

Exponenciála

U exponenciály se ještě na chvíli zastavme a zformulujme několik poznámek.

- Exponenciální funkci o základu $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ jsme definovali předpisem $a^x := \mathrm{e}^{x \ln(a)}$, $x \in \mathbb{R}$. Proto nám věta o limitě složené funkce dává

$$\lim_{x \to b} a^x = \lim_{x \to b} \mathrm{e}^{x \ln(a)} = \mathrm{e}^{b \ln(a)} = a^b$$

a i funkce a^x je spojitá v každém bodě $b \in \mathbb{R}$.

Exponenciála

U exponenciály se ještě na chvíli zastavme a zformulujme několik poznámek.

- Exponenciální funkci o základu $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ jsme definovali předpisem $a^x := \mathrm{e}^{x\ln(a)}$, $x \in \mathbb{R}$. Proto nám věta o limitě složené funkce dává

$$\lim_{x\to b} a^x = \lim_{x\to b} \mathrm{e}^{x\ln(a)} = \mathrm{e}^{b\ln(a)} = a^b$$

  a i funkce a^x je spojitá v každém bodě $b \in \mathbb{R}$.
- Pro limity v nekonečnech platí (stejně pro základ $a > 1$, opačně pro $a < 1$)

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty \quad \text{a} \quad \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0.$$

  K tomu je potřeba si připomenout následující fakta, stručně:
  - Dle axiomatické definice e^x platí $\mathrm{e}^1 > \mathrm{e}^0 = 1$ a $\mathrm{e}^n = \mathrm{e}\cdots\mathrm{e}$ ($n$krát).
  - Limity geometrických posloupností počítat umíme, konkrétně

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^n = +\infty \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-n} = 0.$$

  - Využijeme-li navíc známou monotonii e^x dostaneme dokazované tvrzení.

Logaritmus

Příklad.

Funkce $\ln$ je spojitá v každém bodě $a \in \mathbb{R}^+$.

Logaritmus

Příklad.

Funkce $\ln$ je spojitá v každém bodě $a \in \mathbb{R}^+$.

Již víme, že exponenciála je spojitá funkce v každém bodě svého definičního oboru. Navíc víme, že je ostře rostoucí (tedy i ryze monotonní).

Logaritmus

Příklad.

Funkce $\ln$ je spojitá v každém bodě $a \in \mathbb{R}^+$.

Již víme, že exponenciála je spojitá funkce v každém bodě svého definičního oboru. Navíc víme, že je ostře rostoucí (tedy i ryze monotonní).

Z věty O inverzní funkci ihned plyne spojitost logaritmu $\ln$ v libovolném bodě jejího definičního oboru.

Logaritmus

Příklad.

Funkce $\ln$ je spojitá v každém bodě $a \in \mathbb{R}^+$.

Již víme, že exponenciála je spojitá funkce v každém bodě svého definičního oboru. Navíc víme, že je ostře rostoucí (tedy i ryze monotonní).

Z věty O inverzní funkci ihned plyne spojitost logaritmu $\ln$ v libovolném bodě jejího definičního oboru.

Platí tedy

$$\lim_{x \to a} \ln x = \ln a,$$

pro každé $a \in (0, +\infty)$. Navíc

$$\lim_{x \to 0_+} \ln x = -\infty \quad \text{a} \quad \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty.$$

Spojitost $\sqrt[k]{x}$ a $|x|$

- Z dřívějších přednášek plyne okamžitě plyne spojitost odmocnin a absolutní hodnoty.

Spojitost $\sqrt[k]{x}$ a $|x|$

- Z dřívějších přednášek plyne okamžitě plyne spojitost odmocnin a absolutní hodnoty.

- Víme, že platí
$$\lim_{x \to a} \sqrt[k]{x} = \sqrt[k]{a} \quad \text{a} \lim_{x \to 0_+} \sqrt[k]{x} = 0$$
pro $a > 0$ a $k = 2, 3, \ldots$, a tedy $\sqrt[k]{x}$ je spojitá na intervalu $\langle 0, +\infty)$.

Spojitost $\sqrt[k]{x}$ a $|x|$

- Z dřívějších přednášek plyne okamžitě plyne spojitost odmocnin a absolutní hodnoty.

- Víme, že platí
$$\lim_{x\to a} \sqrt[k]{x} = \sqrt[k]{a} \quad \text{a} \lim_{x\to 0_+} \sqrt[k]{x} = 0$$
pro $a > 0$ a $k = 2, 3, \ldots$, a tedy $\sqrt[k]{x}$ je spojitá na intervalu $\langle 0, +\infty)$.

- Obdobně, protože
$$\lim_{x\to a} |x| = |a|$$
pro $a \in \mathbb{R}$, platí, že $|x|$ je spojitá na $\mathbb{R}$.

Hlavní body

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

1. Definice a kritéria spojitosti
2. Důsledky spojitosti
3. Spojitost elementárních funkcí
4. Typy nespojitostí
5. Důsledky

$$f : (a, b) \to \mathbb{R}$$

Typy nespojitosti: odstranitelná nespojitost

Zamysleme se jakým způsobem může spojitost funkce v bodě „selhat".

Poznámka (Odstranitelná nespojitost):

Mějme funkci f, která je definována na okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ vyjma bod a, *ale* $\lim_{x \to a} f(x) = c \in \mathbb{R}$.
Potom se takovéto nespojitosti můžeme zbavit dodefinováním této funkce v bodě a hodnotou c, tj. nová funkce

$$g(x) := \begin{cases} f(x), & x \in D_f, \\ c, & x = a, \end{cases}$$

s definičním oborem $D_g = D_f \cup \{a\}$ je již spojitá v bodě a a $f = g|_{D_f}$.
Funkce g je tzv. **spojité rozšíření funkce f v bodě** a.

Typy nespojitosti: odstranitelná nespojitost

Příklad.

Typickým příkladem funkce s odstranitelnou nespojitostí je funkce

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}, \quad D_f = \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}.$$

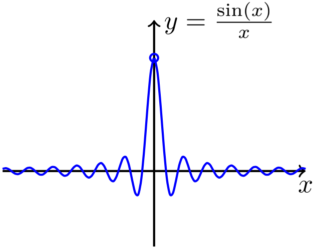
Tato funkce není spojitá v bodě 0. Z předchozího výkladu již víme, že

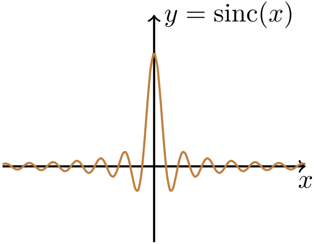
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Proto funkce

$$\operatorname{sinc}(x) := \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

je již spojitá na celém $D_{\text{sinc}} = \mathbb{R}$.





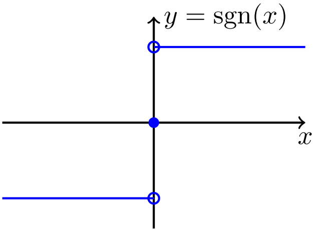
Typy nespojitosti: „konečný skok“

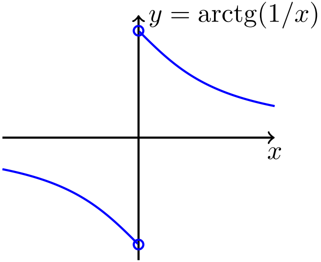
Poznámka (Konečný skok):

Opět mějme funkci definovanou na okolí bodu a, s možnou výjimkou bodu a samotného. Nyní ovšem předpokládejme, že existují jednostranné limity v bodě a, ale

$$c_+ := \lim_{x \to a+} f(x) \neq c_- := \lim_{x \to a-} f(x).$$

Takovouto funkci již nelze spojitě dodefinovat, případně předefinovat, v bodě a. Zadáním funkční hodnoty v bodě a bychom maximálně mohli získat funkci spojitou v bodě a zprava, *nebo* zleva.





Typy nespojitosti: „nekonečný skok“, neexistence limity

Dále může spojitost selhat následujícími dvěma způsoby.

Poznámka („Nekonečný skok“):

Mějme opět funkci f definovanou na okolí bodu a s možnou výjimkou budu a samotného.
Funkce f má limitu (alespoň zleva nebo zprava) v bodě a rovnou $+\infty$ nebo $-\infty$.
Například $\frac{1}{x}$ v nule.

Poznámka (Neexistence limity):

Mějme opět funkci f definovanou na okolí bodu a s možnou výjimkou budu a samotného.
Funkce f nemá limitu (alespoň zleva nebo zprava) v bodě a.
Například $\sin(\frac{1}{x})$ v nule.

Hlavní body

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

$$f : (a, b) \to \mathbb{R}$$

Logaritmus

Vedle limit $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$ a $\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$ bude důležitou roli hrát i následující:

Lemma:

Platí

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

Logaritmus

Vedle limit $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$ a $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ bude důležitou roli hrát i následující:

Lemma:

Platí

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

Důkaz.

Nejprve zkoumaný výraz vhodně upravme,

$$\frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{\ln(x+1)}{x+1-1} = \frac{1}{\frac{e^{\ln(x+1)}-1}{\ln(x+1)}}.$$

Ze spojitosti logaritmu víme, že $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x+1) = 0$. Věta o limitě složené funkce a znalost $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ dávají kýžený výsledek. $\square$

Logaritmus

Vedle limit $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$ a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ bude důležitou roli hrát i následující:

Lemma:

Platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

Důkaz.

Nejprve zkoumaný výraz vhodně upravme,

$$\frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{\ln(x+1)}{x+1-1} = \frac{1}{\frac{e^{\ln(x+1)}-1}{\ln(x+1)}}.$$

Ze spojitosti logaritmu víme, že $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x+1) = 0$. Věta o limitě složené funkce a znalost $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ dávají kýžený výsledek. $\square$

A odtud dále plyne...

Lemma:

Platí

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e} \quad \text{a} \quad \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}.$$

Lemma:

Platí

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}\quad \text{a}\quad \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}.$$

Důkaz.

Opět zkoumaný výraz nejprve upravme (dle definice a^x o základu jiném než e), $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$.

Lemma:

Platí

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e} \quad \text{a} \quad \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}.$$

Důkaz.

Opět zkoumaný výraz nejprve upravme (dle definice a^x o základu jiném než e), $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$.
Díky spojitosti exponenciály stačí zkoumat limitu jejího argumentu. Pro ten však platí $x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$.

Lemma:

Platí

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e} \quad \text{a} \quad \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}.$$

Důkaz.

Opět zkoumaný výraz nejprve upravme (dle definice a^x o základu jiném než e), $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$.
Díky spojitosti exponenciály stačí zkoumat limitu jejího argumentu. Pro ten však platí $x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$.
O funkci $\frac{1}{x}$ víme, že má limitu v $+\infty$ i v $-\infty$ rovnou 0. Z předchozího lemmatu a věty o limitě složené funkce pak ihned dostáváme

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1 \quad \text{a} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1.$$

Tudíž

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e} \quad \text{a} \quad \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}.$$

□

Důsledek:

Pro libovolnou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ splňující $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$ platí

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = \mathrm{e}.$$

Speciálně platí $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} = \mathrm{e}.$

Důsledek:

Pro libovolnou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ splňující $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$ platí

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = \mathrm{e}.$$

Speciálně platí $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n} = \mathrm{e}.$

Důkaz: V důsledku předchozího lemmatu a Heineho věty dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{|a_n|}\right)^{|a_n|} = \mathrm{e} \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{-|a_n|}\right)^{-|a_n|} = \mathrm{e}.$$

Důsledek:

Pro libovolnou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ splňující $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$ platí

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = \mathrm{e}.$$

Speciálně platí $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} = \mathrm{e}.$

Důkaz: V důsledku předchozího lemmatu a Heineho věty dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{|a_n|}\right)^{|a_n|} = \mathrm{e} \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{-|a_n|}\right)^{-|a_n|} = \mathrm{e}.$$

Vezměme nyní libovolné $\varepsilon > 0$. Z platnosti předchozích limit plyne existence $N_1 \in \mathbb{N}$ a $N_2 \in \mathbb{N}$ takových, že pro každé $n > N_1$ platí

$$\left| \left(1 + \frac{1}{|a_n|}\right)^{|a_n|} - \mathrm{e} \right| < \varepsilon$$

a pro každé $n > N_2$ platí

$$\left|\left(1 + \frac{1}{-|a_n|}\right)^{-|a_n|} - \mathrm{e}\right| < \varepsilon.$$

a pro každé $n > N_2$ platí

$$\left| \left(1 + \frac{1}{-|a_n|} \right)^{-|a_n|} - \mathrm{e} \right| < \varepsilon.$$

Položme $N := \max(N_1, N_2)$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $a_n = |a_n|$ nebo $a_n = -|a_n|$.

a pro každé $n > N_2$ platí

$$\left| \left(1 + \frac{1}{-|a_n|}\right)^{-|a_n|} - \mathrm{e} \right| < \varepsilon.$$

Položme $N := \max(N_1, N_2)$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $a_n = |a_n|$ nebo $a_n = -|a_n|$.

Tudíž pro každé $n > N$ dostáváme

$$\left| \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} - \mathrm{e} \right| < \varepsilon,$$

čímž je platnost limitního vztahu dokázána z definice. □

Hlavní body

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

6 Dodatek

$$f : (a,b) \to \mathbb{R}$$

Komentář

- Drobný vylepšením metody *bisekce* pro hledání nulových bodů funkce f je metoda *regula falsi*. Viz např. tento blog post na MARASTu. V průběhu semestru se setkáme s ještě jednou metodou zaměřenou na tento problém (Newtonova metoda).

Komentář

- Drobný vylepšením metody *bisekce* pro hledání nulových bodů funkce f je metoda *regula falsi*. Viz např. tento blog post na MARASTu. V průběhu semestru se setkáme s ještě jednou metodou zaměřenou na tento problém (Newtonova metoda).
- Shrňme na tomto místě axiomatickou definici e^x. Tato funkce splňuje
    - $D_{\mathrm{e}^x} = \mathbb{R}$, $H_{\mathrm{e}^x} = (0, +\infty)$, je ostře rostoucí, $\mathrm{e}^0 = 1$.
    - Pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^y$, $(\mathrm{e}^x)^y = \mathrm{e}^{xy}$.
    - $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$.

Komentář

- Drobný vylepšením metody *bisekce* pro hledání nulových bodů funkce f je metoda *regula falsi*. Viz např. tento blog post na MARASTu. V průběhu semestru se setkáme s ještě jednou metodou zaměřenou na tento problém (Newtonova metoda).
- Shrňme na tomto místě axiomatickou definici e^x. Tato funkce splňuje
    - $D_{\mathrm{e}^x} = \mathbb{R}$, $H_{\mathrm{e}^x} = (0, +\infty)$, je ostře rostoucí, $\mathrm{e}^0 = 1$.
    - Pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^y$, $(\mathrm{e}^x)^y = \mathrm{e}^{xy}$.
    - $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$.
- Limita
$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$$
se často bere jako definice Eulerova čísla e. Lze i ukázat, že pro každé přirozené n platí odhad
$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$
a Eulerovo číslo tak můžeme teoreticky spočítat v libovolné přesnosti.

Komentář

- Drobný vylepšením metody *bisekce* pro hledání nulových bodů funkce f je metoda *regula falsi*. Viz např. tento blog post na MARASTu. V průběhu semestru se setkáme s ještě jednou metodou zaměřenou na tento problém (Newtonova metoda).
- Shrňme na tomto místě axiomatickou definici e^x. Tato funkce splňuje
  - $D_{\mathrm{e}^x} = \mathbb{R}$, $H_{\mathrm{e}^x} = (0, +\infty)$, je ostře rostoucí, $\mathrm{e}^0 = 1$.
  - Pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^y$, $(\mathrm{e}^x)^y = \mathrm{e}^{xy}$.
  - $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1.$
- Limita
$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$$
se často bere jako definice Eulerova čísla e. Lze i ukázat, že pro každé přirozené n platí odhad
$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$
a Eulerovo číslo tak můžeme teoreticky spočítat v libovolné přesnosti.
- Příští semestr si ukážeme elegantnější definici Eulerova čísla i exponenciální funkce pomocí číselných řad.