Matematická analýza 1

Derivace funkce

Tomáš Kalvoda[1], Pavel Paták[2]

[1]tomas.kalvoda@fit.cvut.cz, [2]pavel.patak@fit.cvut.cz

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze

21. února 2025
LS 2024/2025

Hlavní body

1. Rychlost a hledání tečny
2. Derivace funkce
3. Vlastnosti derivace
4. Derivace elementárních funkcí: přehled a příklady
5. Derivace vyšších řádů

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$\sin'(x) = \cos x$$

Hlavní výsledky této přednášky

- Motivace k zavedení pojmu derivace.
- Definice derivace funkce.
- Vlastnosti derivace funkce a její výpočet.
- Derivace elementárních funkcí.

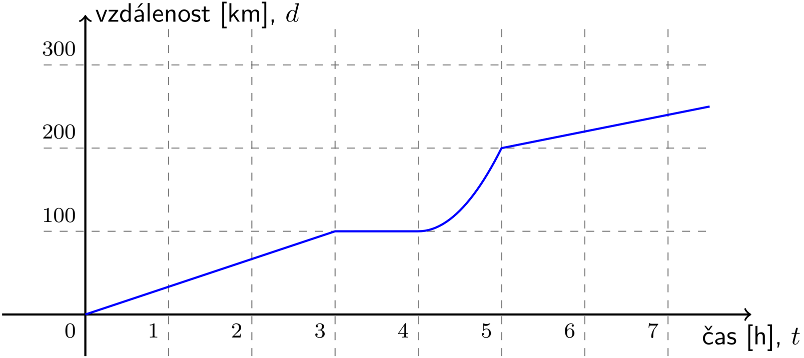
Hlavní body

1. Rychlost a hledání tečny
2. Derivace funkce
3. Vlastnosti derivace
4. Derivace elementárních funkcí: přehled a příklady
5. Derivace vyšších řádů

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

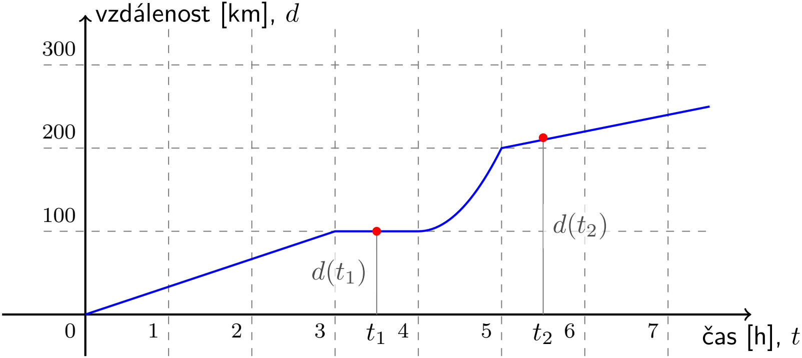
$$\sin'(x) = \cos x$$

Motivace: rychlost (míra změny)



- Tento graf zachycuje vzdálenost uraženou tělesem (např. vozidlem) v závislosti na čase. Uražená vzdálenost tělesa d je tedy *funkcí* času t.

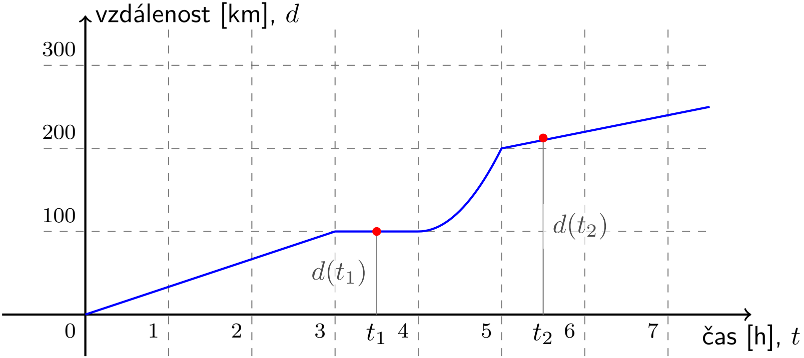
Motivace: rychlost (míra změny)



- Průměrná rychlost tělesa mezi okamžiky $t_1 < t_2$ je dána podílem

$$\frac{d(t_2) - d(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\text{celková vzdálenost}}{\text{celkový čas}}.$$

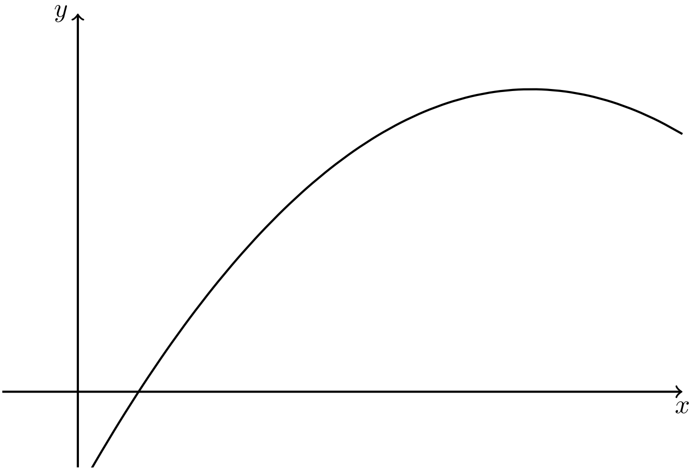
Motivace: rychlost (míra změny)



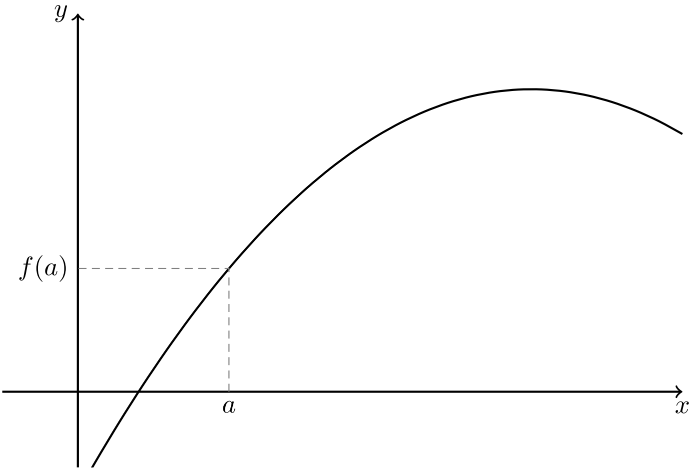
- Čím jsou t_1 a t_2 navzájem blíže, tím lépe průměrná rychlost odpovídá okamžité rychlosti vozidla. V čase t_1 se tedy těleso pohybuje okamžitou rychlostí

$$\lim_{t_2 \to t_1} \frac{d(t_2) - d(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

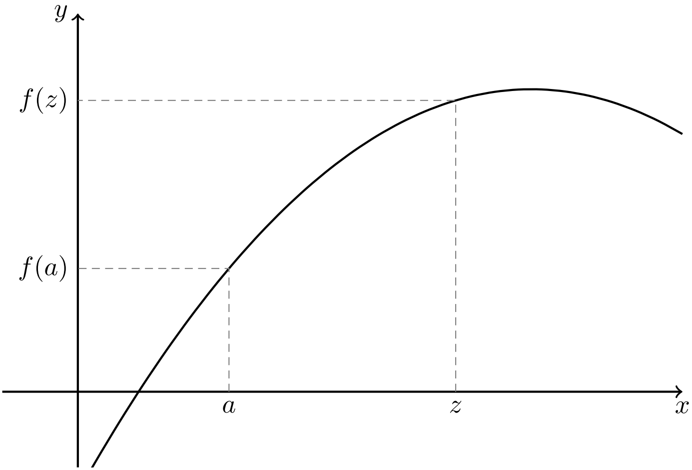
Motivace: tečna ke grafu funkce (geometrie)



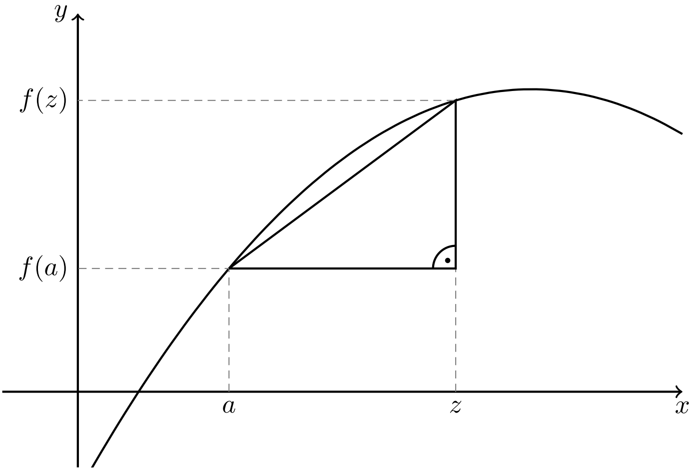
Motivace: tečna ke grafu funkce (geometrie)



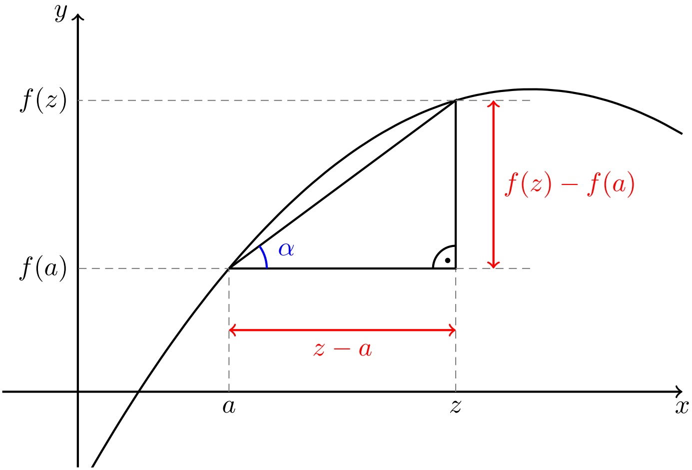
Motivace: tečna ke grafu funkce (geometrie)



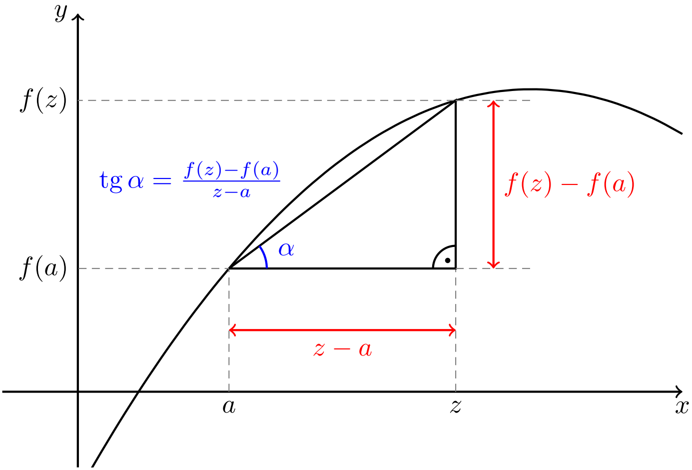
Motivace: tečna ke grafu funkce (geometrie)



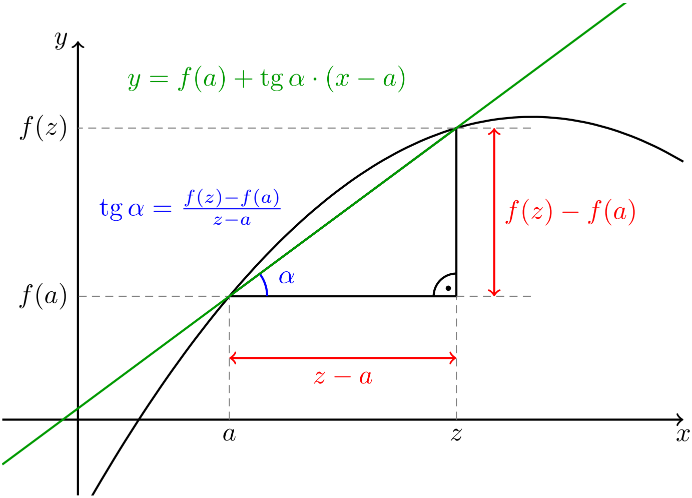
Motivace: tečna ke grafu funkce (geometrie)



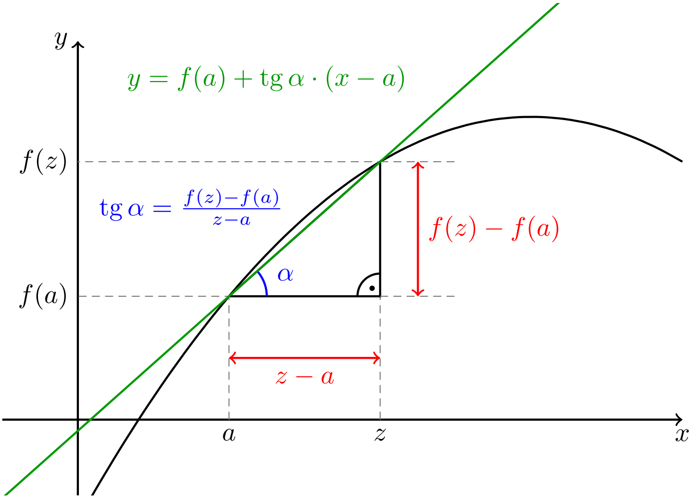
Motivace: tečna ke grafu funkce (geometrie)



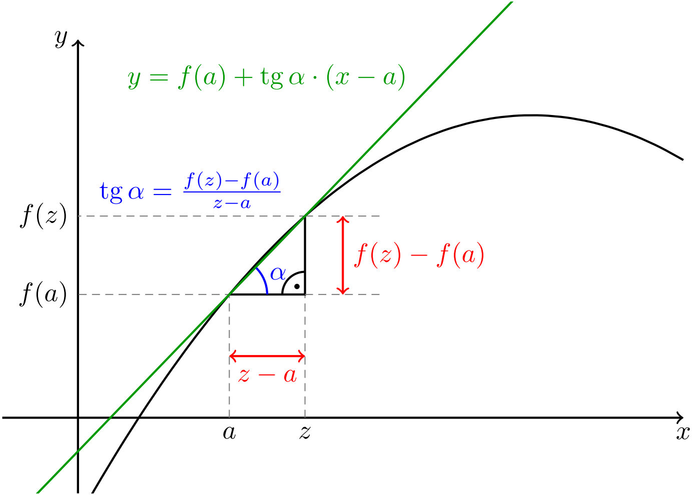
Motivace: tečna ke grafu funkce (geometrie)



Motivace: tečna ke grafu funkce (geometrie)



Motivace: tečna ke grafu funkce (geometrie)



Hlavní body

1. Rychlost a hledání tečny
2. Derivace funkce
3. Vlastnosti derivace
4. Derivace elementárních funkcí: přehled a příklady
5. Derivace vyšších řádů

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$\sin'(x) = \cos x$$

Definice derivace funkce

Následující definice by měla být nyní poměrně přirozená:

Definice (Derivace funkce v bodě / *derivative*):

Nechť f je funkce definovaná na okolí bodu $a \in \mathbb{R}$. Pokud existuje limita

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

nazveme její hodnotu **derivací funkce** f **v bodě** a a označíme $f'(a)$. Pokud je tato hodnota konečná (tj. $f'(a) \in \mathbb{R}$) řekneme, že funkce f je **diferencovatelná v bodě** a.

Definice derivace funkce

Následující definice by měla být nyní poměrně přirozená:

Definice (Derivace funkce v bodě / *derivative*):

Nechť f je funkce definovaná na okolí bodu $a \in \mathbb{R}$. Pokud existuje limita

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

nazveme její hodnotu **derivací funkce** f **v bodě** a a označíme $f'(a)$. Pokud je tato hodnota konečná (tj. $f'(a) \in \mathbb{R}$) řekneme, že funkce f je **diferencovatelná v bodě** a.

Definice (Derivace funkce):

Buď f funkce s definičním oborem D_f. Nechť M označuje množinu všech $a \in D_f$ takových, že existuje konečná derivace $f'(a)$. **Derivací funkce** f nazýváme funkci s definičním oborem M, která každému $x \in M$ přiřadí $f'(x)$. Tuto funkci značíme symbolem f'.

Definice derivace funkce

Poznámka (Značení I):

Derivace funkce f v bodě a se z různých historických důvodů značí i následujícími ekvivalentními způsoby

$$f'(a), \quad \dot{f}(a), \quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a).$$

Definice derivace funkce

Poznámka (Značení I):

Derivace funkce f v bodě a se z různých historických důvodů značí i následujícími ekvivalentními způsoby

$$f'(a), \quad \dot{f}(a), \quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a).$$

Poznámka (Značení II):

V případě funkcí zadaných výrazem často používáme zkrácené značení. Například pod $(x^2)'$ máme na mysli derivaci funkce $f(x) = x^2$, tj. f', případně derivaci této funkce v bodě x, tj. $f'(x)$.

Definice derivace funkce

Poznámka (Značení I):

Derivace funkce f v bodě a se z různých historických důvodů značí i následujícími ekvivalentními způsoby

$$f'(a), \quad \dot{f}(a), \quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a).$$

Poznámka (Značení II):

V případě funkcí zadaných výrazem často používáme zkrácené značení. Například pod $(x^2)'$ máme na mysli derivaci funkce $f(x) = x^2$, tj. f', případně derivaci této funkce v bodě x, tj. $f'(x)$.

Poznámka (Alternativní vyjádření):

Limitu v definici derivace lze ekvivalentně přepsat do tvaru, který je někdy výhodnější pro výpočty,

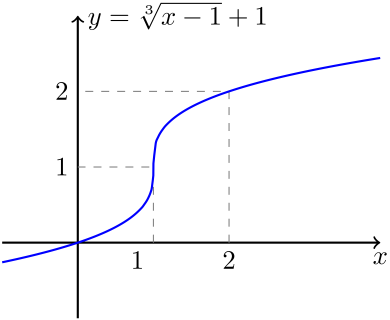
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Tečna ke grafu funkce

Definice (Tečna / *tangent line*):

Nechť existuje $f'(a)$. **Tečnou ke grafu funkce f v bodě a** nazýváme

1. přímku s rovnicí $x = a$ je-li funkce f spojitá v bodě a a $f'(a) = +\infty$ nebo $f'(a) = -\infty$.
2. přímku s rovnicí $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ je-li $f'(a) \in \mathbb{R}$.



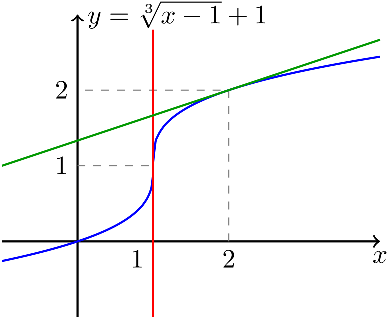
Ukázka funkce $f(x) = \sqrt[3]{x-1} + 1$.

Tečna ke grafu funkce

Definice (Tečna / *tangent line*):

Nechť existuje $f'(a)$. **Tečnou ke grafu funkce f v bodě** a nazýváme

1. přímku s rovnicí $x = a$ je-li funkce f spojitá v bodě a a $f'(a) = +\infty$ nebo $f'(a) = -\infty$.
2. přímku s rovnicí $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ je-li $f'(a) \in \mathbb{R}$.



Ukázka funkce $f(x) = \sqrt[3]{x-1} + 1$.

- Pro $a = 1$ platí $f'(1) = +\infty$ (vypočtěte!), tečnou zde je $x = 1$.
- Pro $a = 2$ platí $f'(2) = \frac{1}{3}$ (vypočtěte!), tečnou zde je $y = 2 + \frac{1}{3}(x - 2)$.

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Derivace konstantní funkce je rovna 0 v každém bodě.

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Derivace konstantní funkce je rovna 0 v každém bodě.

Je-li $f(x) = c \in \mathbb{R}$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, pak

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{c - c}{x - a} = \lim_{x\to a} 0 = 0$$

pro každé $a \in \mathbb{R}$.

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Derivace konstantní funkce je rovna 0 v každém bodě.

Je-li $f(x) = c \in \mathbb{R}$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, pak

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{c - c}{x - a} = \lim_{x \to a} 0 = 0$$

pro každé $a \in \mathbb{R}$.

Poznámka:

Pozor, v tomto případě graf funkce $f(x) = c$ *splývá* s tečnou ke grafu funkce této funkce v libovolném bodě $y = c + 0 \cdot (x - 1) = c$.

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Pro derivaci funkce $f(x) = x^n$ platí $f'(x) = nx^{n-1}$, kde $n \in \mathbb{N}$ a $x \in D_f$. Platí totiž

$$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}.$$

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Pro derivaci funkce $f(x) = x^n$ platí $f'(x) = nx^{n-1}$, kde $n \in \mathbb{N}$ a $x \in D_f$. Platí totiž

$$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}.$$

Nejprve vhodně upravme zkoumaný výraz,

$$\begin{aligned}\frac{x^n - a^n}{x - a} &= \frac{1}{x-a} \cdot (x-a)\big(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1}\big) \\ &= \underbrace{x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1}}_{n \text{ členů}}.\end{aligned}$$

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Pro derivaci funkce $f(x) = x^n$ platí $f'(x) = nx^{n-1}$, kde $n \in \mathbb{N}$ a $x \in D_f$. Platí totiž

$$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}.$$

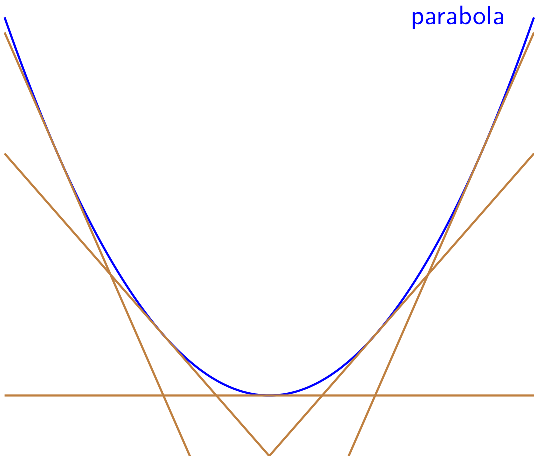
Nejprve vhodně upravme zkoumaný výraz,

$$\begin{aligned} \frac{x^n - a^n}{x - a} &= \frac{1}{x - a} \cdot (x - a)\big(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1}\big) \\ &= \underbrace{x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1}}_{n \text{ členů}}. \end{aligned}$$

Tudíž

$$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}.$$

Derivace funkce: příklady



Lze-li danou funkci derivovat, pak umíme zkonstruovat její tečny v libovolných bodech! Pojďme nyní derivovat elementární funkce.

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Derivace funkce $\sin x$ je funkce $\cos x$ a derivace funkce $\cos x$ je funkce $-\sin x$.

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Derivace funkce $\sin x$ je funkce $\cos x$ a derivace funkce $\cos x$ je funkce $-\sin x$.

Pomocí součtového vzorce pro $\sin$ dostáváme

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a}\frac{\sin(x)-\sin(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a}\frac{\sin(x-a+a)-\sin(a)}{x-a} = \\
&= \lim_{x\to a}\frac{\sin(x-a)\cos(a)+\cos(x-a)\sin(a)-\sin(a)}{x-a} = \\
&= \cos(a)\lim_{x\to a}\frac{\sin(x-a)}{x-a}+\sin(a)\lim_{x\to a}\frac{\cos(x-a)-1}{x-a} = \\
&= \cos(a)\cdot 1+\sin(a)\cdot 0 = \cos(a).
\end{aligned}$$

Využili jsme znalosti již spočtených limit a věty o limitě složené funkce.

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Derivace funkce $\sin x$ je funkce $\cos x$ a derivace funkce $\cos x$ je funkce $-\sin x$.

Pomocí součtového vzorce pro $\sin$ dostáváme

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{\sin(x)-\sin(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a}\frac{\sin(x-a+a)-\sin(a)}{x-a} = \\ &= \lim_{x\to a}\frac{\sin(x-a)\cos(a)+\cos(x-a)\sin(a)-\sin(a)}{x-a} = \\ &= \cos(a)\lim_{x\to a}\frac{\sin(x-a)}{x-a}+\sin(a)\lim_{x\to a}\frac{\cos(x-a)-1}{x-a} = \\ &= \cos(a)\cdot 1+\sin(a)\cdot 0 = \cos(a).\end{aligned}$$

Využili jsme znalosti již spočtených limit a věty o limitě složené funkce. Podobným způsobem můžeme odvodit

$$\lim_{x\to a}\frac{\cos(x)-\cos(a)}{x-a} = -\sin(a),$$

pro každé $a\in\mathbb{R}$.

Derivace funkce: příklady

Poznámka:

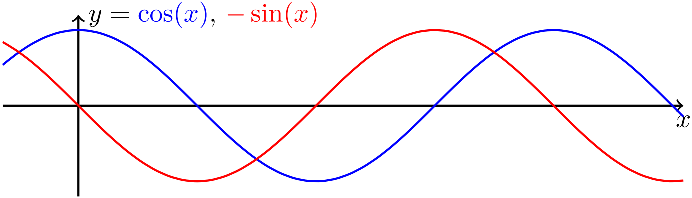
Ve výpočtu výše jsme použili znalost limity

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

a jejího důsledku

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos^2 h - 1}{h} \cdot \frac{1}{\cos h + 1} =$$
$$= -\lim_{h\to 0} \frac{\sin^2 h}{h^2} \cdot \frac{h}{\cos h + 1} = -1 \cdot \frac{0}{1+1} = 0.$$

Derivace funkce: příklady



Derivace funkce: příklady

Příklad.

Pro derivaci funkce $f(x) = \mathrm{e}^x$ platí $f'(x) = \mathrm{e}^x$. Pro každé $a \in \mathbb{R}$ platí

$$\lim_{x \to a} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^a}{x - a} = \mathrm{e}^a.$$

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Pro derivaci funkce $f(x) = \mathrm{e}^x$ platí $f'(x) = \mathrm{e}^x$. Pro každé $a \in \mathbb{R}$ platí

$$\lim_{x \to a} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^a}{x - a} = \mathrm{e}^a.$$

V minulé přednášce jsme zmínili axiom

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1.$$

Derivace funkce: příklady

Příklad.
Pro derivaci funkce $f(x) = \mathrm{e}^x$ platí $f'(x) = \mathrm{e}^x$. Pro každé $a \in \mathbb{R}$ platí

$$\lim_{x \to a} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^a}{x - a} = \mathrm{e}^a.$$

V minulé přednášce jsme zmínili axiom

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1.$$

Podle věty o limitě složené funkce a o limitě součinu funkcí platí

$$\lim_{x \to a} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^a}{x - a} = \lim_{x \to a} \mathrm{e}^a \cdot \frac{\mathrm{e}^{x-a} - 1}{x - a} = \mathrm{e}^a \cdot 1 = \mathrm{e}^a.$$

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Pro derivaci funkce $f(x) = \ln x$ platí $f'(x) = \frac{1}{x}$, $x \in D_f = (0, +\infty)$. Pro každé kladné $a \in (0, +\infty)$ platí

$$\lim_{x \to a} \frac{\ln(x) - \ln(a)}{x - a} = \frac{1}{a}.$$

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Pro derivaci funkce $f(x) = \ln x$ platí $f'(x) = \frac{1}{x}$, $x \in D_f = (0, +\infty)$. Pro každé kladné $a \in (0, +\infty)$ platí

$$\lim_{x \to a} \frac{\ln(x) - \ln(a)}{x - a} = \frac{1}{a}.$$

V minulé přednášce jsme odvodili vztah

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1.$$

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Pro derivaci funkce $f(x) = \ln x$ platí $f'(x) = \frac{1}{x}$, $x \in D_f = (0, +\infty)$. Pro každé kladné $a \in (0, +\infty)$ platí

$$\lim_{x \to a} \frac{\ln(x) - \ln(a)}{x - a} = \frac{1}{a}.$$

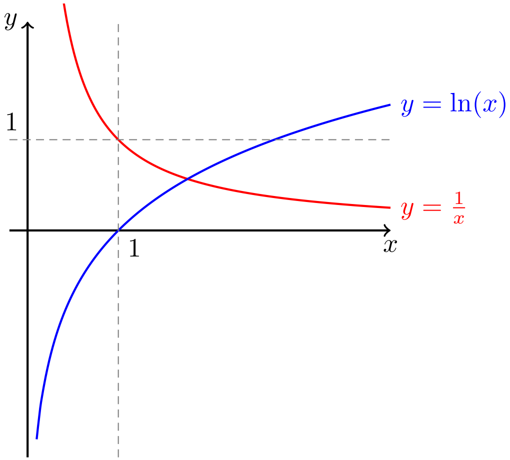
V minulé přednášce jsme odvodili vztah

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1.$$

Podobně jako v předchozím příkladu nyní

$$\lim_{x \to a} \frac{\ln(x) - \ln(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\ln \frac{x}{a}}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{a} - 1\right)}{a\left(\frac{x}{a} - 1\right)} = \frac{1}{a} \cdot 1 = \frac{1}{a}.$$

Grafy funkcí $f(x) = \ln(x)$ a $g(x) = \frac{1}{x}$ pro $x > 0$.



Hlavní body

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$\sin'(x) = \cos x$$

Vztah spojitosti a diferencovatelnosti

Věta (O vztahu diferencovatelnosti a spojitosti):

Je-li f funkce diferencovatelná v bodě a, pak je spojitá v bodě a. Tj. platí

$$f'(a) \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Vztah spojitosti a diferencovatelnosti

Věta (O vztahu diferencovatelnosti a spojitosti):

Je-li f funkce diferencovatelná v bodě a, pak je spojitá v bodě a. Tj. platí

$$f'(a) \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Důkaz.

Elementární úpravou a použitím věty o limitě součtu/součinu

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x) &= \lim_{x\to a} \big(f(x) - f(a) + f(a)\big) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \cdot (x-a) + f(a) = \\ &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \cdot \lim_{x\to a} (x-a) + f(a) = f'(a)\cdot 0 + f(a) = f(a).\end{aligned}$$

Tedy $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Poznamenejme, že „diferencovatelnost“ znamená $f'(a) \in \mathbb{R}$ a výraz na konci výpočtu proto má smysl. □

Vztah spojitosti a diferencovatelnosti

Poznámka:

Obrácené tvrzení neplatí. Přesněji, ze spojitosti funkce f v bodě a neplyne její diferencovatelnost v bodě a.

Vztah spojitosti a diferencovatelnosti

Poznámka:

Obrácené tvrzení neplatí. Přesněji, ze spojitosti funkce f v bodě a neplyne její diferencovatelnost v bodě a.

Příklad.

Funkce $f(x) = |x|$ nemá derivaci v bodě 0.

Vztah spojitosti a diferencovatelnosti

Poznámka:

Obrácené tvrzení neplatí. Přesněji, ze spojitosti funkce f v bodě a neplyne její diferencovatelnost v bodě a.

Příklad.

Funkce $f(x) = |x|$ nemá derivaci v bodě 0.

Pro $x \neq 0 = a$ platí

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{|x|}{x} = \operatorname{sgn} x.$$

Tudíž $f'(0)$ opravdu neexistuje.

Vztah spojitosti a diferencovatelnosti

Poznámka:

Obrácené tvrzení neplatí. Přesněji, ze spojitosti funkce f v bodě a neplyne její diferencovatelnost v bodě a.

Příklad.

Funkce $f(x) = |x|$ nemá derivaci v bodě 0.

Pro $x \neq 0 = a$ platí

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{|x|}{x} = \operatorname{sgn} x.$$

Tudíž $f'(0)$ opravdu neexistuje.

Lze definovat derivaci funkce f v bodě a zleva i zprava jako limity

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{a} \quad f'_-(a) = \lim_{x \to a-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Pak by v případě $f(x) = |x|$ platilo $f'_+(0) = 1$ a $f'_-(0) = -1$.

Nástroje pro výpočet derivací

Věta (Derivace součtu, součinu a podílu):

Nechť funkce f a g jsou diferencovatelné v bodě a. Potom platí

- $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,
- $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$,
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$, pokud $g(a) \neq 0$.

Nástroje pro výpočet derivací

Věta (Derivace součtu, součinu a podílu):

Nechť funkce f a g jsou diferencovatelné v bodě a. Potom platí

- $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,
- $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$,
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$, pokud $g(a) \neq 0$.

Důkaz vzorce pro součet.

Přímočarý výpočet s využitím věty o limitě součtu,

$$(f+g)'(a) = \lim_{x\to a} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x-a} =$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} + \lim_{x\to a} \frac{g(x) - g(a)}{x-a} = f'(a) + g'(a).$$

Za uvedených předpokladů platí $f'(a), g'(a) \in \mathbb{R}$ a uvedenou větu lze použít. □

Nástroje pro výpočet derivací

Důkaz vzorce pro součin.

Použijeme větu o limitě součtu/součinu a dále využijeme existence $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a) \in \mathbb{R}$ plynoucí z diferencovatelnosti f v bodě a:

$$
\begin{aligned}
(f\cdot g)'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{(f\cdot g)(x) - (f\cdot g)(a)}{x-a} = \\
&= \lim_{x\to a} \frac{(f\cdot g)(x) - f(x)g(a) + f(x)g(a) - (f\cdot g)(a)}{x-a} = \\
&= \lim_{x\to a} \left(f(x)\frac{g(x)-g(a)}{x-a} + \frac{f(x)-f(a)}{x-a} g(a) \right) = \\
&= f(a)g'(a) + f'(a)g(a).
\end{aligned}
$$

Za uvedených předpokladů mají všechny operace smysl v $\mathbb{R}$. $\square$

Důkaz vzorce pro podíl na přednášce vynecháváme.

Nástroje pro výpočet derivací

Poznámka:

Pravidlo pro derivaci součinu se někdy též nazývá **Leibnizovo pravidlo**. Platí tedy například

$$\begin{aligned}(\sin(x)\cos(x))' &= \cos(x)\cos(x) - \sin(x)\sin(x) = \cos(2x),\\ (x\sin(x))' &= 1\cdot\sin(x) + x\cdot\cos(x)\end{aligned}$$

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Pro derivace funkcí tg a cotg platí

$$\mathrm{tg}'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\},$$
$$\mathrm{cotg}'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Pro derivace funkcí tg a cotg platí

$$\operatorname{tg}'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}, \quad x \in \mathbb{R} \smallsetminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z} \right\},$$
$$\operatorname{cotg}'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}, \quad x \in \mathbb{R} \smallsetminus \left\{ k\pi \middle| k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Pomocí pravidla pro derivaci podílu dostáváme vztahy

$$\operatorname{tg}'(x) = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \right)' = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)},$$
$$\operatorname{cotg}'(x) = \left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)} \right)' = \frac{-\sin^2(x) - \cos^2(x)}{\sin^2(x)} = -\frac{1}{\sin^2(x)},$$

platné na příslušných definičních oborech.

Derivace složené funkce

Věta (Derivace složené funkce):

Nechť g je funkce diferencovatelná v bodě a, f je diferencovatelná v bodě $g(a)$. Potom funkce $f \circ g$ je diferencovatelná v bodě a a platí

$$(f \circ g)'(a) = f'\big(g(a)\big) \cdot g'(a).$$

Derivace složené funkce

Věta (Derivace složené funkce):

Nechť g je funkce diferencovatelná v bodě a, f je diferencovatelná v bodě $g(a)$. Potom funkce $f \circ g$ je diferencovatelná v bodě a a platí

$$(f \circ g)'(a) = f'\big(g(a)\big) \cdot g'(a).$$

Důkaz.

Na okolí bodu a položme

$$h(x) := \begin{cases} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)}, & g(x) \neq g(a) \\ f'(g(a)), & g(x) = g(a). \end{cases}$$

Potom platí

$$\frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a} = h(x) \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a}.$$

Podle věty o limitě složené funkce platí $h(x) \to f'(g(a))$ když $x \to a$ a tedy i podle věty o limitě součinu $(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$. $\square$

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Platí tedy například:

$$\left(e^{x^2}\right)' = e^{x^2} \cdot 2x, \quad \big(\sin\big(\cos(x)\big)\big)' = \cos\big(\cos(x)\big) \cdot \big(-\sin(x)\big).$$

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Platí tedy například:

$$\left(e^{x^2}\right)' = e^{x^2} \cdot 2x, \quad \left(\sin\left(\cos(x)\right)\right)' = \cos\left(\cos(x)\right) \cdot \left(-\sin(x)\right).$$

Příklad.

Derivace funkce $h(x) = x^\alpha$, $x > 0$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, je opět $h'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Platí tedy například:

$$\left(e^{x^2}\right)' = e^{x^2} \cdot 2x, \quad \left(\sin\left(\cos(x)\right)\right)' = \cos\left(\cos(x)\right) \cdot \left(-\sin(x)\right).$$

Příklad.

Derivace funkce $h(x) = x^\alpha$, $x > 0$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, je opět $h'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

- Víme, že pro kladné $x > 0$ platí $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$. Označme $f(x) = e^x$ vnější funkci a $g(x) = \alpha \ln(x)$ vnitřní funkcí, tedy $x^\alpha = f(g(x))$.

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Platí tedy například:

$$\left(e^{x^2}\right)' = e^{x^2} \cdot 2x, \quad \left(\sin\left(\cos(x)\right)\right)' = \cos\left(\cos(x)\right) \cdot \left(-\sin(x)\right).$$

Příklad.

Derivace funkce $h(x) = x^\alpha$, $x > 0$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, je opět $h'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

- Víme, že pro kladné $x > 0$ platí $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$. Označme $f(x) = e^x$ vnější funkci a $g(x) = \alpha \ln(x)$ vnitřní funkcí, tedy $x^\alpha = f(g(x))$.
- Potom podle věty o derivaci složené funkce máme

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = e^{\alpha \ln x} \cdot \frac{\alpha}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}, \quad x > 0.$$

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Derivace funkce $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, kde $a > 0$ je $f'(x) = a^x \ln a$.

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Derivace funkce $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, kde $a > 0$ je $f'(x) = a^x \ln a$.

- Platí $h(x) = e^{x \ln a}$. Označme vnější funkci $f(x) = e^x$ a vnitřní funkci $g(x) = x \ln a$.

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Derivace funkce $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, kde $a > 0$ je $f'(x) = a^x \ln a$.

- Platí $h(x) = e^{x \ln a}$. Označme vnější funkci $f(x) = e^x$ a vnitřní funkci $g(x) = x \ln a$.
- Potom
$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \ln a.$$

Derivace inverzní funkce

Věta (Derivace inverzní funkce):

Buďte f spojitá a ryze monotónní na intervalu $I = (a, b)$ a bod $c \in I$. Má-li inverzní funkce f^{-1} konečnou nenulovou derivaci v bodě $f(c)$, potom má f derivaci v bodě c a platí

$$f'(c) = \frac{1}{(f^{-1})'(f(c))}.$$

Derivace inverzní funkce

Věta (Derivace inverzní funkce):

Buďte f spojitá a ryze monotónní na intervalu $I = (a, b)$ a bod $c \in I$. Má-li inverzní funkce f^{-1} konečnou nenulovou derivaci v bodě $f(c)$, potom má f derivaci v bodě c a platí

$$f'(c) = \frac{1}{(f^{-1})'(f(c))}.$$

Důkaz: Označme $d = f(c)$. Všimněme si, že pro $x \in I$, $x \neq c$ platí

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \left(\frac{f^{-1}\big(f(x)\big) - f^{-1}(d)}{f(x) - d}\right)^{-1} = \Big(g\big(f(x)\big)\Big)^{-1},$$

kde

$$g(x) = \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(d)}{x - d}, \quad \text{pro } x \in f(I),\ x \neq d.$$

Derivace inverzní funkce

Podle předpokladu je ale

$$\lim_{x\to d} g(x) = \big(f^{-1}\big)'(d)$$

konečná nenulová, $\lim\limits_{x\to c} f(x) = d$ a $f(x) \neq d$ pro $x \neq c$.

Derivace inverzní funkce

Podle předpokladu je ale
$$\lim_{x \to d} g(x) = \left(f^{-1}\right)'(d)$$
konečná nenulová, $\lim_{x \to c} f(x) = d$ a $f(x) \neq d$ pro $x \neq c$.

Podle věty o limitě složené funkce pak tedy

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \frac{1}{\left(f^{-1}\right)'(d)}.$$

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Již víme, že derivace $\ln$ je funkce $\frac{1}{x}$. $\ln$ je ale inverzní funkce k funkci e^x. Ověřme si vztah pro derivaci znovu pomocí věty o derivaci inverzní funkce.

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Již víme, že derivace $\ln$ je funkce $\frac{1}{x}$. $\ln$ je ale inverzní funkce k funkci e^x. Ověřme si vztah pro derivaci znovu pomocí věty o derivaci inverzní funkce.

Chceme derivovat $f(x) = \ln(x)$ na intervalu $I = (0, +\infty)$. Tato je spojitá, ryze monotónní a její inverzní funkcí je $f^{-1}(x) = e^x$.

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Již víme, že derivace $\ln$ je funkce $\frac{1}{x}$. $\ln$ je ale inverzní funkce k funkci e^x. Ověřme si vztah pro derivaci znovu pomocí věty o derivaci inverzní funkce.

Chceme derivovat $f(x) = \ln(x)$ na intervalu $I = (0, +\infty)$. Tato je spojitá, ryze monotónní a její inverzní funkcí je $f^{-1}(x) = e^x$.

Je-li $x \in I$, pak pro derivaci f^{-1} v bodě $f(x)$ platí

$$\left(f^{-1}\right)'\big(f(x)\big) = e^{\ln(x)} = x \in I.$$

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Již víme, že derivace $\ln$ je funkce $\frac{1}{x}$. $\ln$ je ale inverzní funkce k funkci e^x. Ověřme si vztah pro derivaci znovu pomocí věty o derivaci inverzní funkce.

Chceme derivovat $f(x) = \ln(x)$ na intervalu $I = (0, +\infty)$. Tato je spojitá, ryze monotónní a její inverzní funkcí je $f^{-1}(x) = e^x$.

Je-li $x \in I$, pak pro derivaci f^{-1} v bodě $f(x)$ platí

$$\left(f^{-1}\right)'\big(f(x)\big) = e^{\ln(x)} = x \in I.$$

Podle naší věty tedy je

$$\ln'(x) = f'(x) = \frac{1}{\left(f^{-1}\right)'\big(f(x)\big)} = \frac{1}{x},$$

což jsme očekávali.

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Pro derivaci funkce $\arcsin$ platí $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1, 1)$.

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Pro derivaci funkce $\arcsin$ platí $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1, 1)$.

Funkce $f = \arcsin$ je inverzní funkcí k funkci $\sin$ zúžené na interval $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$. Tj. $f^{-1} = \sin\big|_{\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle}$. Pro každé $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ již víme, že platí

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \cos x \neq 0.$$

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Pro derivaci funkce $\arcsin$ platí $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1, 1)$.

Funkce $f = \arcsin$ je inverzní funkcí k funkci $\sin$ zúžené na interval $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$. Tj. $f^{-1} = \sin\big|_{\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle}$. Pro každé $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ již víme, že platí

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \cos x \neq 0.$$

Podle věty o derivaci inverzní funkce máme pro každé $x \in (-1, 1)$ rovnost

$$\arcsin'(x) = f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(f(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}.$$

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Pro derivaci funkce $\arcsin$ platí $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1,1)$.

Funkce $f = \arcsin$ je inverzní funkcí k funkci $\sin$ zúžené na interval $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$. Tj. $f^{-1} = \sin\big|_{\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle}$. Pro každé $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ již víme, že platí

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \cos x \neq 0.$$

Podle věty o derivaci inverzní funkce máme pro každé $x \in (-1,1)$ rovnost

$$\arcsin'(x) = f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(f(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}.$$

Pro $x \in (-1,1)$ je ale

$$\cos\big(\arcsin(x)\big) = \sqrt{1 - \sin^2\big(\arcsin(x)\big)} = \sqrt{1-x^2} \neq 0,$$

a tudíž

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1,1).$$

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Pro derivaci funkce arctg platí

$$\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Pro derivaci funkce arctg platí

$$\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Chceme derivovat $f = \operatorname{arctg}$ na $I = \mathbb{R}$, kde je spojitá a monotónnní. Její inverzní funkce je $f^{-1} = \operatorname{tg}\big|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}$.

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Pro derivaci funkce arctg platí

$$\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Chceme derivovat $f = \operatorname{arctg}$ na $I = \mathbb{R}$, kde je spojitá a monotónnní. Její inverzní funkce je $f^{-1} = \operatorname{tg}\big|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}$. Pro každé $x \in I$ platí

$$(f^{-1})'\big(f(x)\big) = \operatorname{tg}'\big(\operatorname{arctg}(x)\big) = \frac{1}{\cos^2\big(\operatorname{arctg}(x)\big)} \neq 0,$$

protože $\operatorname{arctg}(x) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Pro derivaci funkce arctg platí

$$\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Chceme derivovat $f = \operatorname{arctg}$ na $I = \mathbb{R}$, kde je spojitá a monotónnní. Její inverzní funkce je $f^{-1} = \operatorname{tg}\big|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}$. Pro každé $x \in I$ platí

$$\left(f^{-1}\right)'\big(f(x)\big) = \operatorname{tg}'\big(\operatorname{arctg}(x)\big) = \frac{1}{\cos^2\big(\operatorname{arctg}(x)\big)} \neq 0,$$

protože $\operatorname{arctg}(x) \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Navíc je

$$\cos^2\left(\operatorname{arctg} x\right) = \frac{\cos^2\left(\operatorname{arctg} x\right)}{\sin^2\left(\operatorname{arctg} x\right) + \cos^2\left(\operatorname{arctg} x\right)} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arctg} x\right)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Pro derivaci funkce arctg platí

$$\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Chceme derivovat $f = \operatorname{arctg}$ na $I = \mathbb{R}$, kde je spojitá a monotónnní. Její inverzní funkce je $f^{-1} = \operatorname{tg}\big|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}$. Pro každé $x \in I$ platí

$$\left(f^{-1}\right)'\big(f(x)\big) = \operatorname{tg}'\left(\operatorname{arctg}(x)\right) = \frac{1}{\cos^2\left(\operatorname{arctg}(x)\right)} \neq 0,$$

protože $\operatorname{arctg}(x) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Navíc je

$$\cos^2\left(\operatorname{arctg} x\right) = \frac{\cos^2\left(\operatorname{arctg} x\right)}{\sin^2\left(\operatorname{arctg} x\right) + \cos^2\left(\operatorname{arctg} x\right)} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arctg} x\right)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Odtud

$$\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Hlavní body

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

1. Rychlost a hledání tečny
2. Derivace funkce
3. Vlastnosti derivace
4. **Derivace elementárních funkcí: přehled a příklady**
5. Derivace vyšších řádů

$$\sin'(x) = \cos x$$

Rekapitulace

Tabulka zatím známých derivací:

$f(x)$	$f'(x)$	
c, x^0	0	c nezávislá na x
x^n	nx^{n-1}	$x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$
x^n	nx^{n-1}	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n = -1, -2, \ldots$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$x > 0$ a $\alpha \in \mathbb{R}$
e^x	e^x	$x \in \mathbb{R}$
a^x	$a^x \ln a$	$x \in \mathbb{R}$, $a > 0$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$x \in \mathbb{R}$
$\operatorname{tg}(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{cotg}(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$	$x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Rekapitulace

Pokračování...

$f(x)$	$f'(x)$	
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1,1)$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1,1)$
$\operatorname{arctg}(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
$\operatorname{arccotg}(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Nalezněte derivaci funkce

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) + \operatorname{arctg} x, \quad x \neq 0.$$

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Nalezněte derivaci funkce

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) + \operatorname{arctg} x, \quad x \neq 0.$$

Postupně použijeme:

1. derivace součtu,

$$f'(x) \stackrel{1}{=} \left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)' + \operatorname{arctg}'(x)$$

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Nalezněte derivaci funkce

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) + \operatorname{arctg} x, \quad x \neq 0.$$

Postupně použijeme:

1. derivace součtu,
2. znalost derivace funkcí $\operatorname{arctg}(x)$, x^{-1} a derivace složené funkce,

$$f'(x) \overset{1}{=} \left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)' + \operatorname{arctg}'(x) \overset{2}{=} \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{1+x^2}$$

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Nalezněte derivaci funkce

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) + \operatorname{arctg} x, \quad x \neq 0.$$

Postupně použijeme:

1. derivace součtu,
2. znalost derivace funkcí $\operatorname{arctg}(x)$, x^{-1} a derivace složené funkce,
3. algebraické úpravy.

$$f'(x) \overset{1}{=} \left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)' + \operatorname{arctg}'(x) \overset{2}{=} \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{1+x^2} \overset{3}{=} 0$$

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Nalezněte derivaci funkce

$$f(x) = x^x, \quad x > 0.$$

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Nalezněte derivaci funkce

$$f(x) = x^x, \quad x > 0.$$

Postupně použijeme:

1. úprava výrazu před samotnou derivací,

$$f'(x) \stackrel{1}{=} \left(e^{x \ln x}\right)'$$

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Nalezněte derivaci funkce
$$f(x) = x^x, \quad x > 0.$$

Postupně použijeme:

1. úprava výrazu před samotnou derivací,
2. derivace složené funkce, znalost derivace funkce e^x,

$$f'(x) \stackrel{1}{=} \left(e^{x \ln x}\right)' \stackrel{2}{=} e^{x \ln x} \cdot (x \ln x)'$$

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Nalezněte derivaci funkce
$$f(x) = x^x, \quad x > 0.$$

Postupně použijeme:

1. úprava výrazu před samotnou derivací,
2. derivace složené funkce, znalost derivace funkce e^x,
3. derivace součinu a znalost derivace $\ln x$, resp. x,

$$f'(x) \overset{1}{=} \left(e^{x \ln x}\right)' \overset{2}{=} e^{x \ln x} \cdot \left(x \ln x\right)' \overset{3}{=} e^{x \ln x} \cdot \left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right)$$

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Nalezněte derivaci funkce
$$f(x) = x^x, \quad x > 0.$$

Postupně použijeme:

1. úprava výrazu před samotnou derivací,
2. derivace složené funkce, znalost derivace funkce e^x,
3. derivace součinu a znalost derivace $\ln x$, resp. x,
4. algebraické úpravy.

$$f'(x) \overset{1}{=} \left(e^{x\ln x}\right)' \overset{2}{=} e^{x\ln x} \cdot (x\ln x)' \overset{3}{=} e^{x\ln x} \cdot \left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) \overset{4}{=} x^x(1 + \ln x).$$

Hlavní body

1 Rychlost a hledání tečny

2 Derivace funkce

3 Vlastnosti derivace

4 Derivace elementárních funkcí: přehled a příklady

5 Derivace vyšších řádů

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$\sin'(x) = \cos x$$

Derivace vyšších řádů

Definice (Derivace vyšších řádů):

Derivací funkce f dostáváme novou funkci f', jejíž definiční obor ovšem může být menší než původní D_f. Nyní můžeme znovu derivovat f', tj. sestrojit f''. Rekurzivně tedy definujeme

$$f^{(0)}(x) = f(x), \quad f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}\right)'(x), \quad n \geq 1.$$

Derivace vyšších řádů

Definice (Derivace vyšších řádů):

Derivací funkce f dostáváme novou funkci f', jejíž definiční obor ovšem může být menší než původní D_f. Nyní můžeme znovu derivovat f', tj. sestrojit f''. Rekurzivně tedy definujeme

$$f^{(0)}(x) = f(x), \quad f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}\right)'(x), \quad n \geq 1.$$

Příklad.

Například pro $f(x) = x^3 - 2x + 4$ máme

$$f'(x) = 3x^2 - 2, \quad f''(x) = 6x, \quad f'''(x) = 6, \quad f^{(n)}(x) = 0 \; n \geq 4.$$

Hlavní body

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

6 Dodatek

$$\sin'(x) = \cos x$$

Komentář

- Celá řada fyzikálních zákonů je popsána formou soustav diferenciálních rovnic. Tedy rovnic, kde neznámé jsou funkce a ve kterých se typicky vyskytují jejich první a druhé derivace.

- Např. Newtonův pohybový zákon popisující pohyb hmotného bodu o hmotnosti m v trojrozměrném prostoru se souřadnicemi $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ pod vlivem síly $F = (F_x, F_y, F_z) \in \mathbb{R}^3$ zní

$$
\begin{aligned}
mx''(t) &= F_x(x(t), y(t), z(t), t), \\
my''(t) &= F_y(x(t), y(t), z(t), t), \\
mz''(t) &= F_z(x(t), y(t), z(t), t)
\end{aligned}
$$

  s počáteční polohou v čase 0 rovnou $(x(0), y(0), z(0))$.

- Pojem derivace příští semestr zobecníme i na funkce více proměnných. Budeme muset specifikovat, podle které proměnné derivujeme a získáme tak pojem parciální derivace.