Matematická analýza 1

Věty o přírůstku funkce

Tomáš Kalvoda[1], Pavel Paták[2]

[1]tomas.kalvoda@fit.cvut.cz, [2]pavel.patak@fit.cvut.cz

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze

21. února 2025
LS 2024/2025

Hlavní body

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$$

1. Lagrangeova věta o přírůstku funkce
2. Důsledky pro monotonii funkce
3. Důsledky pro konvexnost/konkávnost
4. l'Hospitalovo pravidlo

$$\operatorname{sgn} f'(x)$$

$$\operatorname{sgn} f''(x)$$

Hlavní výsledky této přednášky

- Lagrangeova věta o přírůstku funkce a její důsledky.
- Vztah první derivace a monotonie funkce.
- Vztah druhé derivace a konvexity/konkavity funkce.
- L'Hospitalovo pravidlo.

Hlavní body

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$$

1. Lagrangeova věta o přírůstku funkce
2. Důsledky pro monotonii funkce
3. Důsledky pro konvexnost/konkávnost
4. l'Hospitalovo pravidlo

$$\operatorname{sgn} f'(x)$$

$$\operatorname{sgn} f''(x)$$

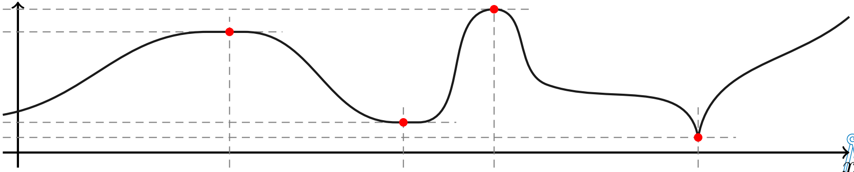
Definice (Lokální extrémy funkce):

Řekneme, že funkce f má v bodě $a \in D_f$

1. **lokální maximum**,

právě když existuje okolí (v krajním bodě D_f jednostranné) $U_a \subset D_f$ bodu a tak, že (popořadě)

1. pro všechna $x \in U_a$ platí $f(x) \leq f(a)$,



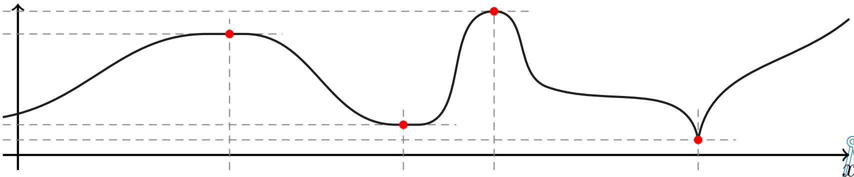
Definice (Lokální extrémy funkce):

Řekneme, že funkce f má v bodě $a \in D_f$

1. **lokální maximum**,
2. **lokální minimum**,

právě když existuje okolí (v krajním bodě D_f jednostranné) $U_a \subset D_f$ bodu a tak, že (popořadě)

1. pro všechna $x \in U_a$ platí $f(x) \leq f(a)$,
2. pro všechna $x \in U_a$ platí $f(x) \geq f(a)$,



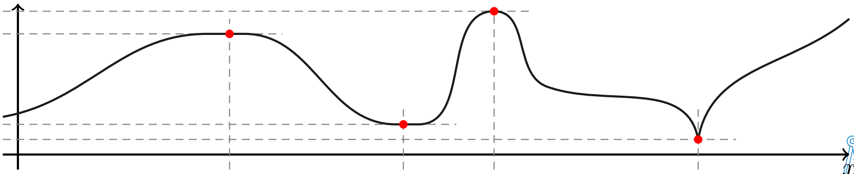
Definice (Lokální extrémy funkce):

Řekneme, že funkce f má v bodě $a \in D_f$

1. **lokální maximum**,
2. **lokální minimum**,
3. **ostré lokální maximum**,

právě když existuje okolí (v krajním bodě D_f jednostranné) $U_a \subset D_f$ bodu a tak, že (popořadě)

1. pro všechna $x \in U_a$ platí $f(x) \leq f(a)$,
2. pro všechna $x \in U_a$ platí $f(x) \geq f(a)$,
3. pro všechna $x \in U_a \setminus \{a\}$ platí $f(x) < f(a)$,



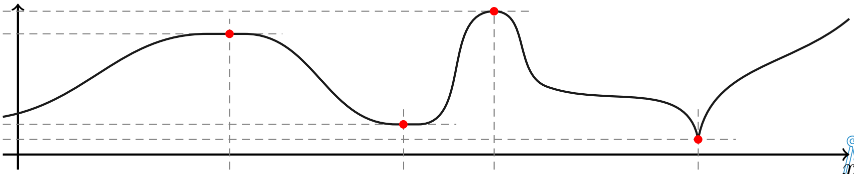
Definice (Lokální extrémy funkce):

Řekneme, že funkce f má v bodě $a \in D_f$

1. **lokální maximum**,
2. **lokální minimum**,
3. **ostré lokální maximum**,
4. **ostré lokální minimum**,

právě když existuje okolí (v krajním bodě D_f jednostranné) $U_a \subset D_f$ bodu a tak, že (popořadě)

1. pro všechna $x \in U_a$ platí $f(x) \leq f(a)$,
2. pro všechna $x \in U_a$ platí $f(x) \geq f(a)$,
3. pro všechna $x \in U_a \setminus \{a\}$ platí $f(x) < f(a)$,
4. pro všechna $x \in U_a \setminus \{a\}$ platí $f(x) > f(a)$.



Lokální extrémy funkce

Věta (Nutná podmínka existence lokálního extrému):

Nechť funkce f má v bodě a lokální extrém. Potom buď $f'(a) = 0$, nebo derivace v bodě a neexistuje.

Lokální extrémy funkce

Věta (Nutná podmínka existence lokálního extrému):

Nechť funkce f má v bodě a lokální extrém. Potom buď $f'(a) = 0$, nebo derivace v bodě a neexistuje.

Důkaz.

Provedeme sporem.

Lokální extrémy funkce

Věta (Nutná podmínka existence lokálního extrému):

Nechť funkce f má v bodě a lokální extrém. Potom buď $f'(a) = 0$, nebo derivace v bodě a neexistuje.

Důkaz.

Provedeme sporem. Kdyby např. $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$, potom lze nalézt $\delta > 0$ tak, že pro všechna $x \in (a - \delta,\ a + \delta) \setminus \{a\}$ platí

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0.$$

Lokální extrémy funkce

Věta (Nutná podmínka existence lokálního extrému):

Nechť funkce f má v bodě a lokální extrém. Potom buď $f'(a) = 0$, nebo derivace v bodě a neexistuje.

Důkaz.

Provedeme sporem. Kdyby např. $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$, potom lze nalézt $\delta > 0$ tak, že pro všechna $x \in (a - \delta,\ a + \delta) \setminus \{a\}$ platí

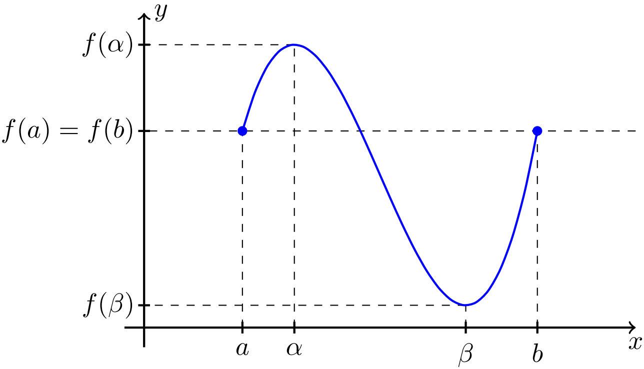
$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0.$$

Tudíž

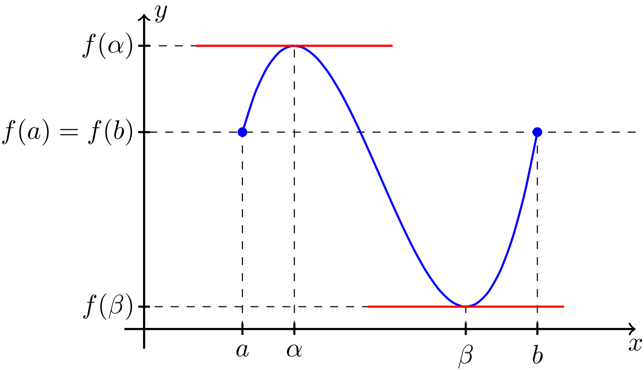
- $f(x) > f(a)$ pro $x \in (a,\ a + \delta)$,
- $f(x) < f(a)$ pro $x \in (a - \delta, a)$.

Funkce f tedy v a nemá lokální extrém. Podobně lze postupovat v případě $f'(a) < 0$. □

Pozorování



Pozorování



Pro „pěknou“ funkci, mající v krajních bodech jistého intervalu stejné funkční hodnoty, existuje uvnitř tohoto intervalu bod, kde má její graf tečnu rovnoběžnou s osou x.

Formálně tento postřeh vystihuje **Rolleova věta**.

Rolleova věta

Věta (Rolleova):

Nechť funkce f splňuje podmínky

Rolleova věta

Věta (Rolleova):

Nechť funkce f splňuje podmínky

1. f je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$,

Rolleova věta

Věta (Rolleova):

Nechť funkce f splňuje podmínky

1. f je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$,
2. f má derivaci v každém bodě intervalu (a, b),

Rolleova věta

Věta (Rolleova):

Nechť funkce f splňuje podmínky

1. f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$,
2. f má derivaci v každém bodě intervalu (a, b),
3. $f(a) = f(b)$.

Rolleova věta

Věta (Rolleova):

Nechť funkce f splňuje podmínky

1. f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$,
2. f má derivaci v každém bodě intervalu (a, b),
3. $f(a) = f(b)$.

Potom existuje $c \in (a, b)$ tak, že $f'(c) = 0$.

Rolleova věta

Věta (Rolleova):

Nechť funkce f splňuje podmínky

1. f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$,
2. f má derivaci v každém bodě intervalu (a, b),
3. $f(a) = f(b)$.

Potom existuje $c \in (a, b)$ tak, že $f'(c) = 0$.

Náčrt důkazu.

Pokud je funkce f konstantní na intervalu $\langle a, b\rangle$, pak lze za c volit libovolné číslo z intervalu (a, b).

Rolleova věta

Věta (Rolleova):

Nechť funkce f splňuje podmínky

1. f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$,
2. f má derivaci v každém bodě intervalu (a, b),
3. $f(a) = f(b)$.

Potom existuje $c \in (a, b)$ tak, že $f'(c) = 0$.

Náčrt důkazu.

Pokud je funkce f konstantní na intervalu $\langle a, b\rangle$, pak lze za c volit libovolné číslo z intervalu (a, b).

V případě, že f není konstantní na $\langle a, b\rangle$, pak je $f(\langle a, b\rangle) = \langle A, B\rangle$ uzavřený interval (plyne ze spojitosti f). Existují tedy $\alpha, \beta \in \langle a, b\rangle$ tak, že
$A = f(\alpha) < f(\beta) = B$.

Rolleova věta

Věta (Rolleova):

Nechť funkce f splňuje podmínky

1. f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$,
2. f má derivaci v každém bodě intervalu (a, b),
3. $f(a) = f(b)$.

Potom existuje $c \in (a, b)$ tak, že $f'(c) = 0$.

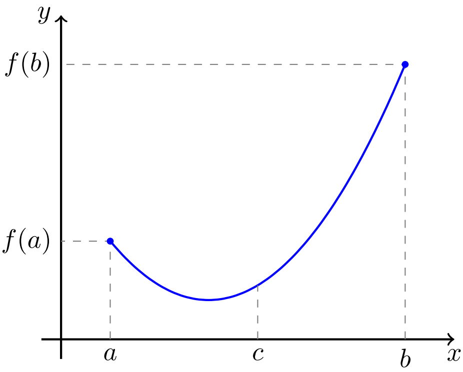
Náčrt důkazu.

Pokud je funkce f konstantní na intervalu $\langle a, b\rangle$, pak lze za c volit libovolné číslo z intervalu (a, b).

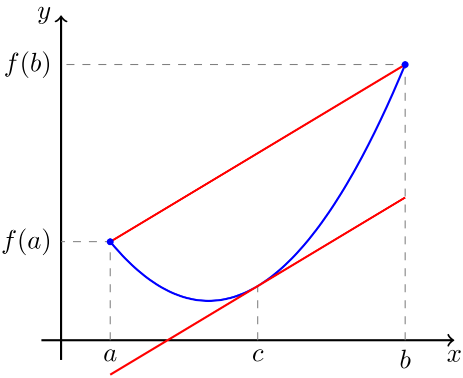
V případě, že f není konstantní na $\langle a, b\rangle$, pak je $f(\langle a, b\rangle) = \langle A, B\rangle$ uzavřený interval (plyne ze spojitosti f). Existují tedy $\alpha, \beta \in \langle a, b\rangle$ tak, že $A = f(\alpha) < f(\beta) = B$.

Protože $f(a) = f(b)$ leží alespoň jeden z bodů α, β uvnitř (a, b). Označme tento bod c. Funkce f má v bodě c lokální extrém, a proto $f'(c) = 0$. Skutečně, funkce f má totiž derivaci v každém bodě intervalu (a, b).

Pozorování



Pozorování



Přírůstek funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$ je roven hodnotě $f(b) - f(a)$. Lze ho vyjádřit pomocí derivace funkce f?

Existuje tečna se stejným sklonem jako přímka procházející body $(a, f(a))$ a $(b, f(b))$?

Tento problém řeší **Lagrangeova věta** (O přírůstku funkce).

Věta o přírůstku funkce

Věta (Lagrangeova, O přírůstku funkce):

Nechť funkce f splňuje podmínky

Věta o přírůstku funkce

Věta (Lagrangeova, O přírůstku funkce):

Nechť funkce f splňuje podmínky

1. f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$,

Věta o přírůstku funkce

Věta (Lagrangeova, O přírůstku funkce):

Nechť funkce f splňuje podmínky

1. f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$,
2. f má derivaci v každém bodě intervalu (a, b).

Věta o přírůstku funkce

Věta (Lagrangeova, O přírůstku funkce):

Nechť funkce f splňuje podmínky

1. f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$,
2. f má derivaci v každém bodě intervalu (a, b).

Potom existuje bod $c \in (a, b)$ tak, že $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Věta o přírůstku funkce

Věta (Lagrangeova, O přírůstku funkce):

Nechť funkce f splňuje podmínky

1. f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$,
2. f má derivaci v každém bodě intervalu (a, b).

Potom existuje bod $c \in (a, b)$ tak, že $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Důkaz.

Položme $g(x) := f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$.

Věta o přírůstku funkce

Věta (Lagrangeova, O přírůstku funkce):

Nechť funkce f splňuje podmínky

1. f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$,
2. f má derivaci v každém bodě intervalu (a, b).

Potom existuje bod $c \in (a, b)$ tak, že $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Důkaz.

Položme $g(x) := f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$. Tato funkce je spojitá na $\langle a, b\rangle$, má derivaci v každém bodě intervalu (a, b) a navíc $g(a) = g(b) = f(a)$.

Věta o přírůstku funkce

Věta (Lagrangeova, O přírůstku funkce):

Nechť funkce f splňuje podmínky

1. f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$,
2. f má derivaci v každém bodě intervalu (a, b).

Potom existuje bod $c \in (a, b)$ tak, že $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Důkaz.

Položme $g(x) := f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$. Tato funkce je spojitá na $\langle a, b\rangle$, má derivaci v každém bodě intervalu (a, b) a navíc $g(a) = g(b) = f(a)$. Proto podle Rolleovy věty existuje $c \in (a, b)$ tak, že

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

Věta o přírůstku funkce: komentář

- Rovnost
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$
v Lagrangeově větě lze přepsat do tvaru
$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$
Přírůstek funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$ tak máme vyjádřen pomocí **délky daného intervalu a hodnoty derivace funkce** f.
- Tvrzení Lagrangeovy věty je **existenční**, o c pouze víme, že leží někde v intervalu (a, b).

Věta o přírůstku funkce: komentář

- Rovnost
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$
v Lagrangeově větě lze přepsat do tvaru
$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$
Přírůstek funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$ tak máme vyjádřen pomocí **délky daného intervalu a hodnoty derivace funkce** f.
- Tvrzení Lagrangeovy věty je **existenční**, o c pouze víme, že leží někde v intervalu (a, b).
- Lagrangeova věta nám umožňuje **z vlastností první derivace odvozovat vlastnosti funkce samotné**. Například: pokud bychom věděli, že derivace $f'(x)$ je kladná na (a, b), pak i $f'(c) > 0$ ať už je c jaké chce a tudíž $f(b) > f(a)$!
- Toto (a analogická) pozorování budou mít důležité důsledky pro monotoniii a konvexitu/konkavitu funkce. Systematicky se jimi budeme zabývat ve zbytku této přednášky.

Hlavní body

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$$

1. Lagrangeova věta o přírůstku funkce
2. Důsledky pro monotonii funkce
3. Důsledky pro konvexnost/konkávnost
4. l'Hospitalovo pravidlo

$$\operatorname{sgn} f'(x)$$

$$\operatorname{sgn} f''(x)$$

Monotonie funkce: věta

Zaveďme nejprve ještě jeden pomocný pojem.

Definice (Vnitřek intervalu):

Nechť J je interval s krajními body a a b. Potom **vnitřkem intervalu** J nazveme otevřený interval (a,b). Značíme ho $J^\circ = (a,b)$.

Vztah derivace a různých typů monotonie funkce popisuje následující věta.

Monotonie funkce: věta

Zaveďme nejprve ještě jeden pomocný pojem.

Definice (Vnitřek intervalu):

Nechť J je interval s krajními body a a b. Potom **vnitřkem intervalu** J nazveme otevřený interval (a, b). Značíme ho $J^\circ = (a, b)$.

Vztah derivace a různých typů monotonie funkce popisuje následující věta.

Věta (O derivaci a typech monotonie):

Nechť f je spojitá na intervalu J a nechť pro každé $x \in J^\circ$ existuje $f'(x)$. Potom platí následujících pět tvrzení:

Monotonie funkce: věta

Zaveďme nejprve ještě jeden pomocný pojem.

Definice (Vnitřek intervalu):

Nechť J je interval s krajními body a a b. Potom **vnitřkem intervalu** J nazveme otevřený interval (a, b). Značíme ho $J^\circ = (a, b)$.

Vztah derivace a různých typů monotonie funkce popisuje následující věta.

Věta (O derivaci a typech monotonie):

Nechť f je spojitá na intervalu J a nechť pro každé $x \in J^\circ$ existuje $f'(x)$. Potom platí následujících pět tvrzení:

1. $\big(\forall x \in J^\circ\big)\big(f'(x) \geq 0\big) \Rightarrow f$ je rostoucí na J,

Monotonie funkce: věta

Zaveďme nejprve ještě jeden pomocný pojem.

Definice (Vnitřek intervalu):

Nechť J je interval s krajními body a a b. Potom **vnitřkem intervalu** J nazveme otevřený interval (a, b). Značíme ho $J^\circ = (a, b)$.

Vztah derivace a různých typů monotonie funkce popisuje následující věta.

Věta (O derivaci a typech monotonie):

Nechť f je spojitá na intervalu J a nechť pro každé $x \in J^\circ$ existuje $f'(x)$. Potom platí následujících pět tvrzení:

1. $(\forall x \in J^\circ)\big(f'(x) \geq 0\big) \Rightarrow f$ je rostoucí na J,
2. $(\forall x \in J^\circ)\big(f'(x) \leq 0\big) \Rightarrow f$ je klesající na J,

Monotonie funkce: věta

Zaveďme nejprve ještě jeden pomocný pojem.

Definice (Vnitřek intervalu):

Nechť J je interval s krajními body a a b. Potom **vnitřkem intervalu** J nazveme otevřený interval (a, b). Značíme ho $J^\circ = (a, b)$.

Vztah derivace a různých typů monotonie funkce popisuje následující věta.

Věta (O derivaci a typech monotonie):

Nechť f je spojitá na intervalu J a nechť pro každé $x \in J^\circ$ existuje $f'(x)$. Potom platí následujících pět tvrzení:

1. $\big(\forall x \in J^\circ\big)\big(f'(x) \geq 0\big) \Rightarrow f$ je rostoucí na J,
2. $\big(\forall x \in J^\circ\big)\big(f'(x) \leq 0\big) \Rightarrow f$ je klesající na J,
3. $\big(\forall x \in J^\circ\big)\big(f'(x) > 0\big) \Rightarrow f$ je ostře rostoucí na J,

Monotonie funkce: věta

Zaveďme nejprve ještě jeden pomocný pojem.

Definice (Vnitřek intervalu):

Nechť J je interval s krajními body a a b. Potom **vnitřkem intervalu** J nazveme otevřený interval (a, b). Značíme ho $J^\circ = (a, b)$.

Vztah derivace a různých typů monotonie funkce popisuje následující věta.

Věta (O derivaci a typech monotonie):

Nechť f je spojitá na intervalu J a nechť pro každé $x \in J^\circ$ existuje $f'(x)$. Potom platí následujících pět tvrzení:

1. $\big(\forall x \in J^\circ\big)\big(f'(x) \geq 0\big) \Rightarrow f$ je rostoucí na J,
2. $\big(\forall x \in J^\circ\big)\big(f'(x) \leq 0\big) \Rightarrow f$ je klesající na J,
3. $\big(\forall x \in J^\circ\big)\big(f'(x) > 0\big) \Rightarrow f$ je ostře rostoucí na J,
4. $\big(\forall x \in J^\circ\big)\big(f'(x) < 0\big) \Rightarrow f$ je ostře klesající na J,

Monotonie funkce: věta

Zaveďme nejprve ještě jeden pomocný pojem.

Definice (Vnitřek intervalu):

Nechť J je interval s krajními body a a b. Potom **vnitřkem intervalu** J nazveme otevřený interval (a, b). Značíme ho $J^\circ = (a, b)$.

Vztah derivace a různých typů monotonie funkce popisuje následující věta.

Věta (O derivaci a typech monotonie):

Nechť f je spojitá na intervalu J a nechť pro každé $x \in J^\circ$ existuje $f'(x)$. Potom platí následujících pět tvrzení:

1. $\big(\forall x \in J^\circ\big)\big(f'(x) \geq 0\big) \Rightarrow f$ je rostoucí na J,
2. $\big(\forall x \in J^\circ\big)\big(f'(x) \leq 0\big) \Rightarrow f$ je klesající na J,
3. $\big(\forall x \in J^\circ\big)\big(f'(x) > 0\big) \Rightarrow f$ je ostře rostoucí na J,
4. $\big(\forall x \in J^\circ\big)\big(f'(x) < 0\big) \Rightarrow f$ je ostře klesající na J,
5. $\big(\forall x \in J^\circ\big)\big(f'(x) = 0\big) \Rightarrow f$ je konstantní na J,

Monotonie funkce: důkaz

Dokážeme jenom jedno z tvrzení, ostatní se dokáží naprosto stejně, jen stačí upravit znaménko nerovnosti, resp. rovnosti.

Důkaz 1. tvrzení.

Buďte $x_1, x_2 \in J$ taková, že $x_1 < x_2$. Podle Lagrangeovy věty o přírůstku funkce aplikované na interval $\langle x_1, x_2 \rangle$ existuje $c \in (x_1, x_2)$ tak, že

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Protože $c \in J^\circ$, je $f'(c) \geq 0$. Navíc $x_2 - x_1 > 0$. Tudíž

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2).$$

Celkem jsme pro libovolná $x_1, x_2 \in J$ splňující $x_1 < x_2$ ukázali, že $f(x_1) \leq f(x_2)$ a f je proto rostoucí na J. $\square$

Monotonie funkce: příklad

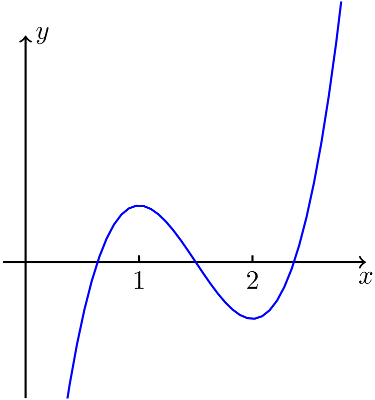
Poznámka:

Hlavním výsledkem předchozí věty tedy je: Je-li funkce f diferencovatelná, pak o tom zda roste/klesá rozhoduje znaménko její derivace.

Monotonie funkce: příklad

Poznámka:

Hlavním výsledkem předchozí věty tedy je: Je-li funkce f diferencovatelná, pak o tom zda roste/klesá rozhoduje znaménko její derivace.



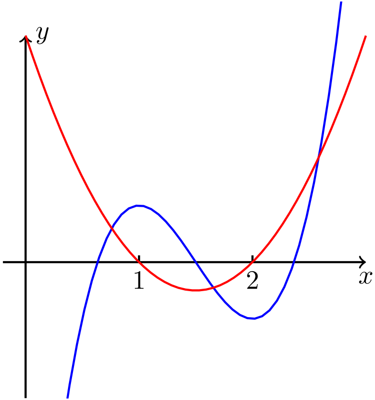
Uvažme funkci

$$f(x) := 2x^3 - 9x^2 + 12x - \frac{9}{2}$$

Monotonie funkce: příklad

Poznámka:

Hlavním výsledkem předchozí věty tedy je: Je-li funkce f diferencovatelná, pak o tom zda roste/klesá rozhoduje znaménko její derivace.



Uvažme funkci

$$f(x) := 2x^3 - 9x^2 + 12x - \frac{9}{2}$$

pro jejíž derivaci platí

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 - 18x + 12 \\ &= 6(x-1)(x-2). \end{aligned}$$

Hlavní body

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$$

1. Lagrangeova věta o přírůstku funkce
2. Důsledky pro monotonii funkce
3. Důsledky pro konvexnost/konkávnost
4. l'Hospitalovo pravidlo

$$\operatorname{sgn} f'(x)$$

$$\operatorname{sgn} f''(x)$$

Konvexnost a konkávnost funkce

Nejprve zavedeme dva nové pojmy, o kterých tato část přednášky pojednává.

Definice (Konvexnost/konkávnost v bodě):

Nechť funkce f je diferencovatelná v bodě $a \in D_f$. Pokud existuje okolí U_a bodu a takové, že pro všechna $x \in U_a \setminus \{a\}$ leží body $(x, f(x))$ nad (resp. pod) tečnou funkce f v bodě a, tj.

$$f(x) > f(a) + f'(a)(x-a), \text{ (resp. } f(x) < f(a) + f'(a)(x-a)),$$

pak f nazveme **ryze konvexní (resp. konkávní) v bodě** a.
Pokud pro body $(x, f(x))$ výše připustíme možnost ležet na tečně (tj. připustíme neostré nerovnosti), pak f nazveme **konvexní (resp. konkávní) v bodě** a.

Konvexnost a konkávnost funkce

Nejprve zavedeme dva nové pojmy, o kterých tato část přednášky pojednává.

Definice (Konvexnost/konkávnost v bodě):

Nechť funkce f je diferencovatelná v bodě $a \in D_f$. Pokud existuje okolí U_a bodu a takové, že pro všechna $x \in U_a \setminus \{a\}$ leží body $(x, f(x))$ nad (resp. pod) tečnou funkce f v bodě a, tj.

$$f(x) > f(a) + f'(a)(x-a), \ \text{(resp. } f(x) < f(a) + f'(a)(x-a)\text{)},$$

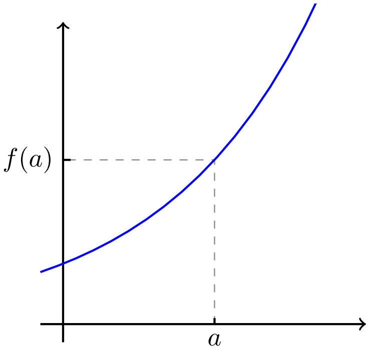
pak f nazveme **ryze konvexní (resp. konkávní) v bodě** a.
Pokud pro body $(x, f(x))$ výše připustíme možnost ležet na tečně (tj. připustíme neostré nerovnosti), pak f nazveme **konvexní (resp. konkávní) v bodě** a.

Definice (Konvexnost/konkávnost):

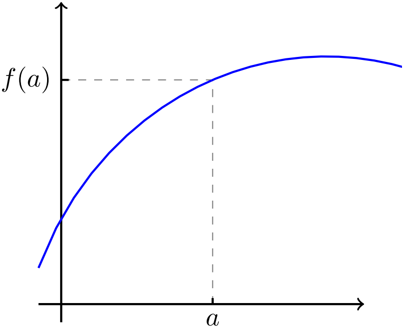
Funkci f nazveme **(ryze) konvexní (resp. konkávní) na intervalu** J, právě když je na tomto intervalu spojitá a je (ryze) konvexní (resp. konkávní) v každém bodě intervalu J°.

Konvexnost a konkávnost funkce: ilustrace

Konvexnost



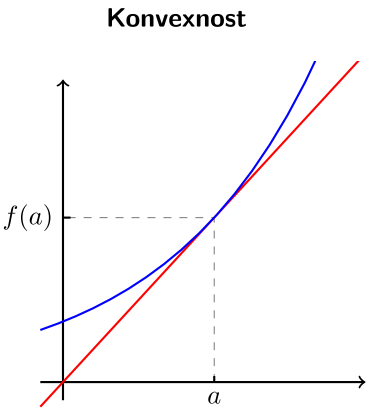
Konkávnost

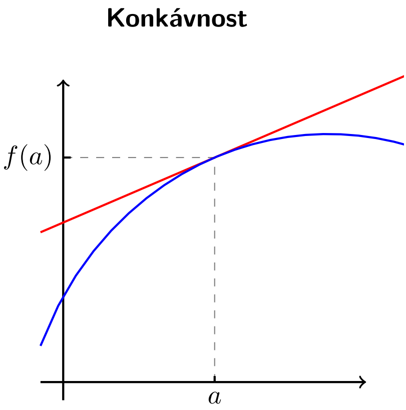


Poznámka (Jazyková vsuvka):

V latině znamená *convexum* údolí a *concavum* výduť.

Konvexnost a konkávnost funkce: ilustrace





Poznámka (Jazyková vsuvka):

V latině znamená *convexum* údolí a *concavum* výduť.

Konvexnost a konkávnost funkce: poznámky

- Funkce f je konkávní na intervalu J, právě když $-f$ je konvexní na intervalu J. Stačí se tedy soustředit například na konvexní funkce.
- Požadavek spojitosti v definici konvexity/konkavity na intervalu ošetřuje případné krajní body intervalu J.
- Konvexita/konkavita má (vedle očividného geometrického významu) i pro vyšetřování extrémů funkcí. Touto souvislostí se budeme zabývat v dalších přednáškách.

Konvexnost, konkávnost a druhá derivace

Věta (Kritérium pro konvexnost):

Buď f funkce spojitá na intervalu J, která má druhou derivaci v každém bodě J°.

- $f''(x) \geq 0$ pro každé $x \in J^\circ$, právě když f je konvexní na intervalu J.
- Je-li $f''(x) > 0$ v každém bodě $x \in J^\circ$, pak je f ryze konvexní na J.

Konvexnost, konkávnost a druhá derivace

Věta (Kritérium pro konvexnost):

Buď f funkce spojitá na intervalu J, která má druhou derivaci v každém bodě J°.

- $f''(x) \geq 0$ pro každé $x \in J^\circ$, právě když f je konvexní na intervalu J.
- Je-li $f''(x) > 0$ v každém bodě $x \in J^\circ$, pak je f ryze konvexní na J.

Poznámka:

- Stejná věta platí i pro konkávní funkce. V tomto případě je znaménko druhé derivace (jejíž existence je předpokladem věty) záporné.
- Funkce $f(x) = x^4$ je ryze konvexní na $\mathbb{R}$, ale $f''(0) = 0$. Implikaci v druhém bodě věty nelze obrátit.

Konvexnost, konkávnost a druhá derivace

Důkaz $\Rightarrow$ ($\geq$, $>$ stejně).

Z předpokladu $f''(x) \geq 0$, $x \in J^\circ$ plyne, že f' je rostoucí na J°.

Konvexnost, konkávnost a druhá derivace

Důkaz $\Rightarrow$ ($\geq$, $>$ stejně).

Z předpokladu $f''(x) \geq 0$, $x \in J^\circ$ plyne, že f' je rostoucí na J°. Mějme $a \in J^\circ$ a $x \in J^\circ$ takové, že $x > a$.

Konvexnost, konkávnost a druhá derivace

Důkaz $\Rightarrow$ ($\geq$, $>$ stejně).

Z předpokladu $f''(x) \geq 0$, $x \in J^\circ$ plyne, že f' je rostoucí na J°. Mějme $a \in J^\circ$ a $x \in J^\circ$ takové, že $x > a$. Potom dle Lagrangeovy věty existuje $c \in (a, x)$ takové, že

$$f(x) = f(a) + f'(c)(x-a) \geq f(a) + f'(a)(x-a).$$

Skutečně: $a < c$ a proto $f'(a) \leq f'(c)$ a $x - a > 0$.

Konvexnost, konkávnost a druhá derivace

Důkaz $\Rightarrow$ ($\geq$, $>$ stejně).

Z předpokladu $f''(x) \geq 0$, $x \in J^\circ$ plyne, že f' je rostoucí na J°. Mějme $a \in J^\circ$ a $x \in J^\circ$ takové, že $x > a$. Potom dle Lagrangeovy věty existuje $c \in (a, x)$ takové, že

$$f(x) = f(a) + f'(c)(x-a) \geq f(a) + f'(a)(x-a).$$

Skutečně: $a < c$ a proto $f'(a) \leq f'(c)$ a $x - a > 0$.

Máme-li $x \in J^\circ$ takové, že $x < a$, pak existuje $c \in (x, a)$ takové, že

$$f(x) = f(a) + f'(c)(x-a) \geq f(a) + f'(a)(x-a).$$

Konvexnost, konkávnost a druhá derivace

Důkaz $\Rightarrow$ ($\geq$, $>$ stejně).

Z předpokladu $f''(x) \geq 0$, $x \in J^\circ$ plyne, že f' je rostoucí na J°. Mějme $a \in J^\circ$ a $x \in J^\circ$ takové, že $x > a$. Potom dle Lagrangeovy věty existuje $c \in (a, x)$ takové, že

$$f(x) = f(a) + f'(c)(x-a) \geq f(a) + f'(a)(x-a).$$

Skutečně: $a < c$ a proto $f'(a) \leq f'(c)$ a $x - a > 0$.

Máme-li $x \in J^\circ$ takové, že $x < a$, pak existuje $c \in (x, a)$ takové, že

$$f(x) = f(a) + f'(c)(x-a) \geq f(a) + f'(a)(x-a).$$

Skutečně: $c < a$ a proto $f'(c) \leq f'(a)$ a $f'(c)(x-a) \geq f'(a)(x-a)$, neboť nyní $x - a < 0$. $\square$

Konvexnost, konkávnost a druhá derivace

Důkaz $\Leftarrow$.

Postupujme sporem. Předpokládejme, že f je konvexní na J a současně existuje bod $a \in J^\circ$ splňující $f''(a) = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)-f'(a)}{x-a} < 0$.

Konvexnost, konkávnost a druhá derivace

Důkaz $\Leftarrow$.

Postupujme sporem. Předpokládejme, že f je konvexní na J a současně existuje bod $a \in J^\circ$ splňující $f''(a) = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)-f'(a)}{x-a} < 0$.
Existuje tedy $U_\delta(a) \subset J$ takové, že

$$\frac{f'(x) - f'(a)}{x - a} < 0 \quad \text{kdykoliv } x \in U_\delta(a) \setminus \{a\}.$$

Celkem tedy $f'(a) > f'(x)$ kdykoliv $x \in (a, a + \delta)$.

Konvexnost, konkávnost a druhá derivace

Důkaz $\Leftarrow$.

Postupujme sporem. Předpokládejme, že f je konvexní na J a současně existuje bod $a \in J^\circ$ splňující $f''(a) = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)-f'(a)}{x-a} < 0$.
Existuje tedy $U_\delta(a) \subset J$ takové, že

$$\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a} < 0 \quad \text{kdykoliv } x \in U_\delta(a) \setminus \{a\}.$$

Celkem tedy $f'(a) > f'(x)$ kdykoliv $x \in (a, a+\delta)$.
Z Lagrangeovy věty aplikované na interval $\langle a, x\rangle$ a funkci f plyne existence c takového, že

$$f(x) = f(a) + f'(c)(x-a) < f(a) + f'(a)(x-a)$$

pro libovolné $x \in (a, a+\delta)$, což je ve sporu s konvexitou f v bodě a. $\square$

Hlavní body

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$$

1. Lagrangeova věta o přírůstku funkce
2. Důsledky pro monotonii funkce
3. Důsledky pro konvexnost/konkávnost
4. l'Hospitalovo pravidlo

$$\operatorname{sgn} f'(x)$$

$$\operatorname{sgn} f''(x)$$

l'Hospitalovo pravidlo

Pro následující větu je vžité označení „pravidlo“. Jde ale o matematickou větu jako každou jinou.

Někdy se uvádí i jako „l'Hôpitalovo pravidlo“.

Guillaume François Antoine, Marquis de l'Hôpital byl francouzský matematik žijící v sedmnáctém století.

Věta (l'Hospitalovo pravidlo):

Nechť pro funkce f a g a bod $a \in \overline{\mathbb{R}}$ platí

l'Hospitalovo pravidlo

Pro následující větu je vžité označení „pravidlo". Jde ale o matematickou větu jako každou jinou.

Někdy se uvádí i jako „l'Hôpitalovo pravidlo".

Guillaume François Antoine, Marquis de l'Hôpital byl francouzský matematik žijící v sedmnáctém století.

Věta (l'Hospitalovo pravidlo):

Nechť pro funkce f a g a bod $a \in \overline{\mathbb{R}}$ platí

1. $\lim_a f = \lim_a g = 0$, nebo $\lim_a |g| = +\infty$,

l'Hospitalovo pravidlo

Pro následující větu je vžité označení „pravidlo". Jde ale o matematickou větu jako každou jinou.

Někdy se uvádí i jako „l'Hôpitalovo pravidlo".

Guillaume François Antoine, Marquis de l'Hôpital byl francouzský matematik žijící v sedmnáctém století.

Věta (l'Hospitalovo pravidlo):

Nechť pro funkce f a g a bod $a \in \overline{\mathbb{R}}$ platí

1. $\lim\limits_{a} f = \lim\limits_{a} g = 0$, nebo $\lim\limits_{a} |g| = +\infty$,
2. existuje okolí U_a bodu a splňující $U_a \smallsetminus \{a\} \subset D_{f/g} \cap D_{f'/g'}$,

l'Hospitalovo pravidlo

Pro následující větu je vžité označení „pravidlo“. Jde ale o matematickou větu jako každou jinou.

Někdy se uvádí i jako „l'Hôpitalovo pravidlo“.

Guillaume François Antoine, Marquis de l'Hôpital byl francouzský matematik žijící v sedmnáctém století.

Věta (l'Hospitalovo pravidlo):

Nechť pro funkce f a g a bod $a \in \overline{\mathbb{R}}$ platí

1. $\lim\limits_a f = \lim\limits_a g = 0$, nebo $\lim\limits_a |g| = +\infty$,
2. existuje okolí U_a bodu a splňující $U_a \setminus \{a\} \subset D_{f/g} \cap D_{f'/g'}$,
3. existuje $\lim\limits_a \dfrac{f'}{g'}$.

Potom existuje $\lim\limits_a \dfrac{f}{g}$ a platí $\lim\limits_a \dfrac{f}{g} = \lim\limits_a \dfrac{f'}{g'}$.

l'Hospitalovo pravidlo: důkaz

Důkaz případu $\frac{0}{0}$.

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $f(a) = g(a) = 0$, tj. f a g jsou spojité v 0.

l'Hospitalovo pravidlo: důkaz

Důkaz případu $\frac{0}{0}$.

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $f(a) = g(a) = 0$, tj. f a g jsou spojité v 0.

Označme $b = \lim_a \frac{f'}{g'}$ a uvažme libovolné U_b okolí bodu b. K němu existuje $V_a \subset U_a$ okolí bodu a takové, že je-li $x \in V_a \setminus \{a\}$, pak $f'(x)/g'(x) \in U_b$.

l'Hospitalovo pravidlo: důkaz

Důkaz případu $\frac{0}{0}$.

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $f(a) = g(a) = 0$, tj. f a g jsou spojité v 0.

Označme $b = \lim_a \frac{f'}{g'}$ a uvažme libovolné U_b okolí bodu b. K němu existuje $V_a \subset U_a$ okolí bodu a takové, že je-li $x \in V_a \smallsetminus \{a\}$, pak $f'(x)/g'(x) \in U_b$.

Pro libovolné $x \in V_a$, $x > a$, definujme funkci $h(t) := f(t) - \frac{f(x)}{g(x)} g(t)$ (N.B.: $g(x) \neq 0$). Potom h je spojitá na $\langle a, x \rangle$, pro její derivaci na (a, x) platí $h'(t) = f'(t) - \frac{f(x)}{g(x)} g'(t)$ a navíc $h(a) = h(x) = 0$.

l'Hospitalovo pravidlo: důkaz

Důkaz případu $\frac{0}{0}$.

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $f(a) = g(a) = 0$, tj. f a g jsou spojité v 0.

Označme $b = \lim_a \frac{f'}{g'}$ a uvažme libovolné U_b okolí bodu b. K němu existuje $V_a \subset U_a$ okolí bodu $a$takové, že je-li $x \in V_a \setminus \{a\}$, pak $f'(x)/g'(x) \in U_b$.

Pro libovolné $x \in V_a$, $x > a$, definujme funkci $h(t) := f(t) - \frac{f(x)}{g(x)} g(t)$ (N.B.: $g(x) \neq 0$). Potom h je spojitá na $\langle a, x \rangle$, pro její derivaci na (a, x) platí $h'(t) = f'(t) - \frac{f(x)}{g(x)} g'(t)$ a navíc $h(a) = h(x) = 0$.

Podle Rolleovy věty existuje bod $c \in (a, x)$ takový, že $h'(c) = 0$, tj. $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \in U_b$.

l'Hospitalovo pravidlo: důkaz

Důkaz případu $\frac{0}{0}$.

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $f(a) = g(a) = 0$, tj. f a g jsou spojité v 0.

Označme $b = \lim_a \frac{f'}{g'}$ a uvažme libovolné U_b okolí bodu b. K němu existuje $V_a \subset U_a$ okolí bodu a takové, že je-li $x \in V_a \setminus \{a\}$, pak $f'(x)/g'(x) \in U_b$.

Pro libovolné $x \in V_a$, $x > a$, definujme funkci $h(t) := f(t) - \frac{f(x)}{g(x)} g(t)$ (N.B.: $g(x) \neq 0$). Potom h je spojitá na $\langle a, x\rangle$, pro její derivaci na (a, x) platí $h'(t) = f'(t) - \frac{f(x)}{g(x)} g'(t)$ a navíc $h(a) = h(x) = 0$.

Podle Rolleovy věty existuje bod $c \in (a, x)$ takový, že $h'(c) = 0$, tj. $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \in U_b$.

Celkem jsme ukázali, že $\displaystyle\lim_{x\to a_+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Důkaz limity zleva se provede analogicky. $\square$

l'Hospitalovo pravidlo: příklady

Příklad.

Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(x)}{\sin(x)}.$$

Pomocí l'Hospitalova pravidla

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(x)}{\sin(x)} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\cos(x)} = 1.$$

l'Hospitalovo pravidlo: příklady

Příklad.

Vypočtěte limitu

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin(x)}{\sin(x)}.$$

Pomocí l'Hospitalova pravidla

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin(x)}{\sin(x)} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\cos(x)} = 1.$$

Příklad.

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x \to 0_+} x \ln(x)$.

Nejprve musíme výraz upravit do tvaru kdy lze aplikovat l'Hospitalovo pravidlo.

$$\lim_{x \to 0_+} x \ln(x) = \lim_{x \to 0_+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x \to 0_+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0_+} (-x) = 0.$$

l'Hospitalovo pravidlo: příklad

Příklad.

Vypočtěte limitu

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2}.$$

l'Hospitalovo pravidlo: příklad

Příklad.

Vypočtěte limitu
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2}.$$

Nyní je třeba l'Hospitalovo pravidlo použít dvakrát,
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty.$$

l'Hospitalovo pravidlo: poznámky

Příklad (Důležitost předpokladů).

Při použití l'Hospitalova pravidla je nutné zkontrolovat předpoklady. Slepým použitím formule můžeme dostat špatný výsledek:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+\sin(x)}{x+\sin(x)} \overset{1}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2+\cos(x)}{1+\cos(x)} \overset{2}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{-\sin(x)}{-\sin(x)} = 1.$$

Chyba v tomto výpočtu je dvojnásobná:

1. Není splněn 2. ani 3. předpoklad l'Hospitalova pravidla.
2. Limita napravo od $\overset{1}{=}$ vůbec neexistuje. Nemá tedy smysl pokračovat ve výpočtu.

Limitu lze snadno spočíst bez l'Hospitalova pravidla,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+\sin(x)}{x+\sin(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2+\frac{\sin(x)}{x}}{1+\frac{\sin(x)}{x}} = 2.$$

l'Hospitalovo pravidlo: poznámky

Příklad (Bludný kruh).

V následujícím případě sice všechny předpoklady platí, ale ani opakované použití nevede k cíli

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}.$$

Po druhém použití dostaneme stejný výraz s kterým jsme začínali.

Tuto limitu můžeme snadno spočítat bez použití l'Hospitalova pravidla,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}} = 1.$$

l'Hospitalovo pravidlo: poznámky

Hlavní body

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$$

5 Dodatek

$$\operatorname{sgn} f'(x)$$

$$\operatorname{sgn} f''(x)$$

Komentář

- Konvexnost a konkávnost, geometrickou kvalitu grafu funkce, lze vyjádřit i bez tečny a derivace.

- V našem pojetí například funkce $|x|$ není konvexní na $\mathbb{R}$. V pojetí uvedeném na následujících slidech už je.

Konvexnost a konkávnost funkce

Definice (Zobecnění konvexnosti/konkávnosti):

Funkci f definovanou na intervalu J nazveme *konvexní* (resp. *konkávní*) *na intervalu* J, právě když pro každé $x_1, x_2, x_3 \in J$ splňující $x_1 < x_2 < x_3$, leží bod $(x_2, f(x_2))$ buďto pod (resp. nad) přímkou spojující body $(x_1, f(x_1))$ a $(x_3, f(x_3))$, nebo na ní.

Definice (Zobecnění ryzí konvexnosti/konkávnosti):

Funkci f definovanou na intervalu J nazveme *ryze konvexní* (resp. *ryze konkávní*) *na intervalu* J, právě když pro každé $x_1, x_2, x_3 \in J$ splňující $x_1 < x_2 < x_3$, leží bod $(x_2, f(x_2))$ pod (resp. nad) přímkou spojující body $(x_1, f(x_1))$ a $(x_3, f(x_3))$.

Konvexnost a konkávnost funkce: ilustrace