Matematická analýza 1

Extrémy funkce

Tomáš Kalvoda[1], Pavel Paták[2]

[1]tomas.kalvoda@fit.cvut.cz, [2]pavel.patak@fit.cvut.cz

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze

21. února 2025
LS 2024/2025

Hlavní body

Optimalizace

- Řada zajímavých a praktických úloh spočívá v hledání maxim (či minim) jistých funkcí, v tzv. optimalizaci. Například:
  - Jak distribuovat objednané zboží mezi zákazníky co nejefektivněji, tj. s co **nejmenšími** náklady na dopravu?
  - Jak sestavit jídelníček splňující zadané dietologické podmínky a **minimalizovat** při tom náklady?
  - Jak efektivně distribuovat pohonné hmoty a materiál na frontu a současně **maximalizovat** protivníkovy ztráty?

Optimalizace

- Řada zajímavých a praktických úloh spočívá v hledání maxim (či minim) jistých funkcí, v tzv. optimalizaci. Například:
  - Jak distribuovat objednané zboží mezi zákazníky co nejefektivněji, tj. s co **nejmenšími** náklady na dopravu?
  - Jak sestavit jídelníček splňující zadané dietologické podmínky a **minimalizovat** při tom náklady?
  - Jak efektivně distribuovat pohonné hmoty a materiál na frontu a současně **maximalizovat** protivníkovy ztráty?
- Optimalizace se dále využívá ve **strojovém učení**. V řadě metod z této oblasti (např. rozpoznávání) pod termínem „učení“ nenajdeme nic jiného než hledání (přibližného) maxima/minima jisté komplikované funkce.

Optimalizace

- Řada zajímavých a praktických úloh spočívá v hledání maxim (či minim) jistých funkcí, v tzv. optimalizaci. Například:
  - Jak distribuovat objednané zboží mezi zákazníky co nejefektivněji, tj. s co **nejmenšími** náklady na dopravu?
  - Jak sestavit jídelníček splňující zadané dietologické podmínky a **minimalizovat** při tom náklady?
  - Jak efektivně distribuovat pohonné hmoty a materiál na frontu a současně **maximalizovat** protivníkovy ztráty?
- Optimalizace se dále využívá ve **strojovém učení**. V řadě metod z této oblasti (např. rozpoznávání) pod termínem „učení“ nenajdeme nic jiného než hledání (přibližného) maxima/minima jisté komplikované funkce.
- Zde v BI-MA1 se při hledání maxim a minim omezíme na reálné funkce reálné proměnné. Řada zaváděných konceptů se ovšem dále používá i v případě funkcí více proměnných, čemuž se budeme věnovat v BI-MA2.

Hlavní body

1. Lokální extrémy funkce
2. Maximum/minimum a supremum/infimum
3. Globální extrémy funkce
4. Kritéria pro hledání extrémů funkce

Připomenutí z minulé přednášky:

Definice (Lokální extrémy funkce):

Řekneme, že funkce f má v bodě $a \in D_f$

1. **lokální maximum**,

právě když existuje okolí (v krajním bodě D_f jednostranné) $U_a \subset D_f$ bodu a tak, že (popořadě)

1. pro všechna $x \in U_a$ platí $f(x) \leq f(a)$,

Připomenutí z minulé přednášky:

Definice (Lokální extrémy funkce):

Řekneme, že funkce f má v bodě $a \in D_f$

1. **lokální maximum**,
2. **lokální minimum**,

právě když existuje okolí (v krajním bodě D_f jednostranné) $U_a \subset D_f$ bodu a tak, že (popořadě)

1. pro všechna $x \in U_a$ platí $f(x) \leq f(a)$,
2. pro všechna $x \in U_a$ platí $f(x) \geq f(a)$,

Připomenutí z minulé přednášky:

Definice (Lokální extrémy funkce):

Řekneme, že funkce f má v bodě $a \in D_f$

1. **lokální maximum**,
2. **lokální minimum**,
3. **ostré lokální maximum**,

právě když existuje okolí (v krajním bodě D_f jednostranné) $U_a \subset D_f$ bodu a tak, že (popořadě)

1. pro všechna $x \in U_a$ platí $f(x) \leq f(a)$,
2. pro všechna $x \in U_a$ platí $f(x) \geq f(a)$,
3. pro všechna $x \in U_a \setminus \{a\}$ platí $f(x) < f(a)$,

Připomenutí z minulé přednášky:

Definice (Lokální extrémy funkce):

Řekneme, že funkce f má v bodě $a \in D_f$

1. **lokální maximum**,
2. **lokální minimum**,
3. **ostré lokální maximum**,
4. **ostré lokální minimum**,

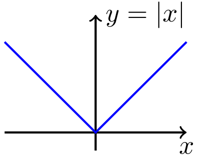
právě když existuje okolí (v krajním bodě D_f jednostranné) $U_a \subset D_f$ bodu a tak, že (popořadě)

1. pro všechna $x \in U_a$ platí $f(x) \leq f(a)$,
2. pro všechna $x \in U_a$ platí $f(x) \geq f(a)$,
3. pro všechna $x \in U_a \setminus \{a\}$ platí $f(x) < f(a)$,
4. pro všechna $x \in U_a \setminus \{a\}$ platí $f(x) > f(a)$.

Lokální extrémy funkce: příklady a poznámky

Příklad (Extrém v bodě s neexistující derivací).

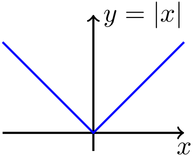
Uvažme funkci $f(x) := |x|$. Funkce f má jistě ostré lokální minimum v bodě 0 (ověřte pomocí definice!), ale její derivace v bodě 0 neexistuje.



Lokální extrémy funkce: příklady a poznámky

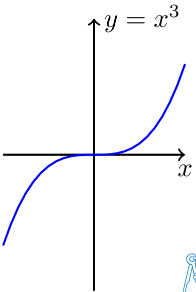
Příklad (Extrém v bodě s neexistující derivací).

Uvažme funkci $f(x) := |x|$. Funkce f má jistě ostré lokální minimum v bodě 0 (ověřte pomocí definice!), ale její derivace v bodě 0 neexistuje.



Příklad (Bod nulové derivace bez extrému).

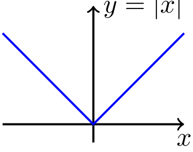
Funkce $f(x) := x^3$ má v bodě 0 nulovou derivaci, $f'(0) = 0$, avšak nenabývá v něm lokálního extrému. Je dokonce rostoucí na celém $\mathbb{R}$.



Lokální extrémy funkce: příklady a poznámky

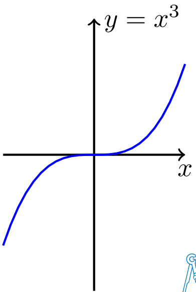
Příklad (Extrém v bodě s neexistující derivací).

Uvažme funkci $f(x) := |x|$. Funkce f má jistě ostré lokální minimum v bodě 0 (ověřte pomocí definice!), ale její derivace v bodě 0 neexistuje.



Příklad (Bod nulové derivace bez extrému).

Funkce $f(x) := x^3$ má v bodě 0 nulovou derivaci, $f'(0) = 0$, avšak nenabývá v něm lokálního extrému. Je dokonce rostoucí na celém $\mathbb{R}$.



Poznámka:

Nulovost nebo neexistence derivace v bodě je pouze nutná podmínka pro existenci lokálního extrému. Umožňuje nám tvrdit, kde lokální extrém nenastává.

Hlavní body

Připomenutí: Maximum a minimum množiny

Definice (Maximum a minimum množiny):

Buď $M \subset \mathbb{R}$. Číslo $\alpha \in M$ nazveme

- **maximem množiny** M právě když pro všechna $x \in M$ platí $x \leq \alpha$.
- **minimem množiny** M právě když pro všechna $x \in M$ platí $\alpha \leq x$.

Maximum, resp. minimum, množiny M značíme $\max M$, resp. $\min M$.

Připomenutí: Maximum a minimum množiny

Definice (Maximum a minimum množiny):

Buď $M \subset \mathbb{R}$. Číslo $\alpha \in M$ nazveme

- **maximem množiny** M právě když pro všechna $x \in M$ platí $x \leq \alpha$.
- **minimem množiny** M právě když pro všechna $x \in M$ platí $\alpha \leq x$.

Maximum, resp. minimum, množiny M značíme $\max M$, resp. $\min M$.

Například rozmyslete:

- $\max\{1, 2, 3\} = 3$,
- $\min\langle -1, 1\rangle = -1$.
- Některé množiny $M \subset \mathbb{R}$ nemusí mít minimum ani maximum. Například otevřený interval $M = (0, 1)$. Čísla 0 a 1 nejsou minimem/maximem, neboť $0, 1 \notin M$.

Supremum množiny $M \subset \mathbb{R}$

Problém neexistence maxima množiny $M = (0, 1)$ odstraníme zavedením obecnějšího pojmu. Intuitivně: prvky množiny M se můžeme přiblížit libovolně blízko k 1, ale nikdy jí nedosáhneme.

Definice (Supremum množiny):

Buď M neprázdná shora omezená podmnožina množiny reálných čísel. Číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ nazveme **supremem množiny** M, značíme $\sup M$, právě když

1. pro každé $x \in M$ platí $x \leq \alpha$, (α je **horní závora** M)
2. pokud $\beta \in \mathbb{R}$ také splňuje předchozí bod, pak $\alpha \leq \beta$. (α je nejmenší horní závora M)

Pokud množina M není shora omezená, pak klademe $\sup M := +\infty$. Pro prázdnou množinu klademe $\sup \emptyset := -\infty$.

Infimum množiny $M \subset \mathbb{R}$

Definice (Infimum množiny):

Buď M neprázdná zdola omezená podmnožina množiny reálných čísel. Číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ nazveme **infimem množiny** M, značíme $\inf M$, právě když

1. pro každé $x \in M$ platí $\alpha \leq x$, (α je **dolní závora** M)
2. pokud $\beta \in \mathbb{R}$ také splňuje předchozí bod, pak $\beta \leq \alpha$. (α je největší dolní závora M)

Pokud množina M není zdola omezená, pak klademe $\inf M := -\infty$. Pro prázdnou množinu klademe $\inf \emptyset := +\infty$.

Infimum množiny $M \subset \mathbb{R}$

Definice (Infimum množiny):

Buď M neprázdná zdola omezená podmnožina množiny reálných čísel. Číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ nazveme **infimem množiny** M, značíme $\inf M$, právě když

1. pro každé $x \in M$ platí $\alpha \leq x$, (α je **dolní závora** M)
2. pokud $\beta \in \mathbb{R}$ také splňuje předchozí bod, pak $\beta \leq \alpha$. (α je největší dolní závora M)

Pokud množina M není zdola omezená, pak klademe $\inf M := -\infty$. Pro prázdnou množinu klademe $\inf \emptyset := +\infty$.

Věta:

Buď M podmnožina množiny reálných čísel. Potom existuje její infimum ($\inf M$) a supremum ($\sup M$).

Infimum množiny $M \subset \mathbb{R}$

Definice (Infimum množiny):

Buď M neprázdná zdola omezená podmnožina množiny reálných čísel. Číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ nazveme **infimem množiny** M, značíme $\inf M$, právě když

1. pro každé $x \in M$ platí $\alpha \leq x$, (α je **dolní závora** M)
2. pokud $\beta \in \mathbb{R}$ také splňuje předchozí bod, pak $\beta \leq \alpha$. (α je největší dolní závora M)

Pokud množina M není zdola omezená, pak klademe $\inf M := -\infty$. Pro prázdnou množinu klademe $\inf \emptyset := +\infty$.

Věta:

Buď M podmnožina množiny reálných čísel. Potom existuje její infimum $(\inf M)$ a supremum $(\sup M)$.

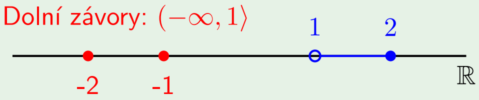
Důkaz.

Na přednášce vynecháváme, plyne z Axiomu úplnosti množiny reálných čísel. $\square$

Supremum a infimum: příklady

Příklad.

Platí $\inf(1, 2\rangle = 1$.

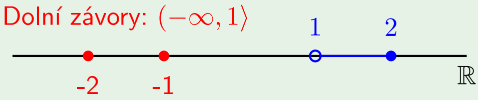


Číslo 1 je skutečně největší dolní závora množiny $(1, 2\rangle$.

Supremum a infimum: příklady

Příklad.

Platí $\inf(1, 2\rangle = 1$.



Číslo 1 je skutečně největší dolní závora množiny $(1, 2\rangle$.

Příklad.

Pro interval $J = (-2, 1\rangle$ platí

$$\max J = 1, \qquad \sup J = 1, \qquad \min J \text{ neexistuje}, \qquad \inf J = -2.$$

Supremum a infimum: značení

Pro funkci $f : D_f \to \mathbb{R}$ a množinu $M \subset D_f$ klademe

$$\inf_M f = \inf_{x \in M} f(x) := \inf\{f(x) \mid x \in M\},$$
$$\sup_M f = \sup_{x \in M} f(x) := \sup\{f(x) \mid x \in M\}.$$

Supremum a infimum: značení

Pro funkci $f : D_f \to \mathbb{R}$ a množinu $M \subset D_f$ klademe

$$\inf_M f = \inf_{x \in M} f(x) := \inf\{f(x) \mid x \in M\},$$
$$\sup_M f = \sup_{x \in M} f(x) := \sup\{f(x) \mid x \in M\}.$$

A dále

$$\max_M f = \max_{x \in M} f(x) := \max\{f(x) \mid x \in M\},$$
$$\min_M f = \min_{x \in M} f(x) := \min\{f(x) \mid x \in M\},$$

za předpokladu, že uvedená maxima a minima existují. Připomeňme, že jejich existence je zaručena např. pokud f je spojitá a M je uzavřený interval.

Hlavní body

1. Lokální extrémy funkce
2. Maximum/minimum a supremum/infimum
3. Globální extrémy funkce
4. Kritéria pro hledání extrémů funkce

Globální extrémy funkce

Definice (Globální extrém funkce):

Mějme funkci f a množinu $M \subset D_f$. **Globálním maximem (resp. minimem) funkce f na množině M** nazýváme hodnotu $\max_M f$ (resp. $\min_M f$), existují-li.

Pokud vynecháme specifikaci množiny M, pak máme na mysli případ $M = D_f$.

Globální extrémy funkce

Definice (Globální extrém funkce):

Mějme funkci f a množinu $M \subset D_f$. **Globálním maximem (resp. minimem) funkce f na množině M** nazýváme hodnotu $\max_M f$ (resp. $\min_M f$), existují-li.

Pokud vynecháme specifikaci množiny M, pak máme na mysli případ $M = D_f$.

V této definici zdůrazňujeme funkční hodnotu, maximální/minimální hodnota může být nabyta ve více bodech.

Globální extrémy funkce

Definice (Globální extrém funkce):

Mějme funkci f a množinu $M \subset D_f$. **Globálním maximem (resp. minimem) funkce f na množině M** nazýváme hodnotu $\max_M f$ (resp. $\min_M f$), existují-li.
Pokud vynecháme specifikaci množiny M, pak máme na mysli případ $M = D_f$.

V této definici zdůrazňujeme funkční hodnotu, maximální/minimální hodnota může být nabyta ve více bodech.

Příklad.

Rozmyslete si následující jednoduchá tvrzení o funkci $f(x) = 2x$:

- Funkce f nemá globální maximum ani minimum (nemá globální extrém).
- Na množině $M = \langle -1, +\infty)$ má f globální minimum v bodě -1 s hodnotou -2 a nemá globální maximum.
- Na množině $(-1, 2\rangle$ nemá f globální minimum a má globální maximum v bodě 2 s hodnotou 4.

Globální extrémy funkce

Již jsme zmínili, že pro spojitou funkcí platí $f(\langle a,b\rangle) = \langle A,B\rangle$. Odtud dostáváme:

Věta (Globální extrém spojité funkce na uzavřeném intervalu):

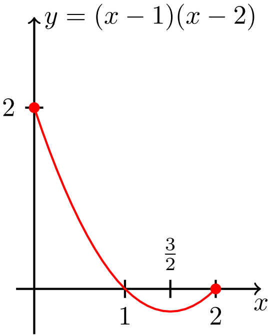
Funkce f spojitá a definovaná na uzavřeném intervalu $\langle a,b\rangle$ má globální maximum i minimum na tomto intervalu. Tyto globální extrémy mohou být nabyty v krajních bodech a, b a v bodech, kde je derivace funkce f rovna 0 nebo neexistuje.

Globální extrémy funkce

Již jsme zmínili, že pro spojitou funkcí platí $f(\langle a, b\rangle) = \langle A, B\rangle$. Odtud dostáváme:

Věta (Globální extrém spojité funkce na uzavřeném intervalu):

Funkce f spojitá a definovaná na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ má globální maximum i minimum na tomto intervalu. Tyto globální extrémy mohou být nabyty v krajních bodech a, b a v bodech, kde je derivace funkce f rovna 0 nebo neexistuje.



Jako **příklad** uvažme funkci

$$f(x) = (x-1)(x-2)$$

na intervalu $\langle 0, 2\rangle$. Derivace je nulová v bodě $\frac{3}{2}$, porovnáním funkčních hodnot

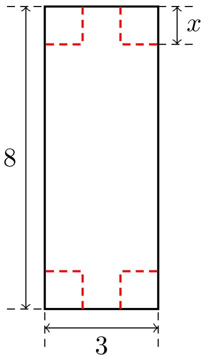
$$f(0) = 2, \quad f\left({}^{3}\!/\!{}_{2}\right) = -{}^{1}\!/\!{}_{4}, \quad f(2) = 0$$

uzavíráme že globální maximum je v bodě 0 s hodnotou 2 a globální minimum je v bodě $\frac{3}{2}$ s hodnotou $-{}^{1}\!/\!{}_{4}$.

Globální extrémy funkce: příklad

Příklad.

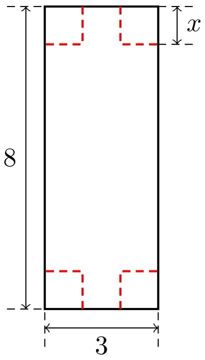
Z papíru tvaru obdélníka se stranami 8 cm a 3 cm vyrobíme krabičku tak, že vystřihneme ze všech čtyř rohů stejné čtverce. Krabička bude mít výšku rovnou straně tohoto čtverce. Nalezněte délku strany čtverce, při níž bude objem krabičky největší.



Globální extrémy funkce: příklad

Příklad.

Z papíru tvaru obdélníka se stranami 8 cm a 3 cm vyrobíme krabičku tak, že vystřihneme ze všech čtyř rohů stejné čtverce. Krabička bude mít výšku rovnou straně tohoto čtverce. Nalezněte délku strany čtverce, při níž bude objem krabičky největší.



Označme stranu vystřihnutých čtverců symbolem x. Pro objem krabičky $O(x)$ platí

$$O(x) = x(8-2x)(3-2x) = 4x^3 - 22x^2 + 24x,$$

kde $x \in \langle 0, {}^3/_2 \rangle$.
Derivace $O(x)$ je nula pouze v bodech 3 a ${}^2/_3$, ovšem pouze ${}^2/_3 \in \langle 0, {}^3/_2 \rangle$. V tomto bodě nastává i maximum $O({}^2/_3) = {}^{200}/_{27}\,\mathrm{cm}^3$, protože $O(0) = O({}^3/_2) = 0$.

Globální extrémy funkce: příklad

Příklad.

Uzavřenost intervalu v předchozí větě je podstatná. Jako příklad uvažme funkci

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-4}$$

spojitou na otevřeném intervalu $J = (0, 4)$. Tato funkce nemá na J ani maximum ani minimum.

Globální extrémy funkce: příklad

Příklad.

Uzavřenost intervalu v předchozí větě je podstatná. Jako příklad uvažme funkci

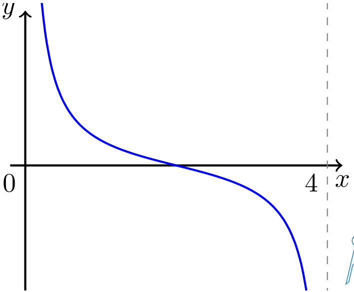
$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-4}$$

spojitou na otevřeném intervalu $J = (0,4)$. Tato funkce nemá na J ani maximum ani minimum.

Skutečně, platí totiž

$$\lim_{x\to 0_+} f(x) = +\infty - \frac{1}{4} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 4_-} f(x) = \frac{1}{4} + (-\infty) = -\infty.$$



Hlavní body

1. Lokální extrémy funkce
2. Maximum/minimum a supremum/infimum
3. Globální extrémy funkce
4. Kritéria pro hledání extrémů funkce

Vztah monotonie a extrémů

Vedle definice můžeme k hledání extrémů využít i dvě kritéria, která si v závěru této přednášky ukážeme.

Vztah monotonie a extrémů

Vedle definice můžeme k hledání extrémů využít i dvě kritéria, která si v závěru této přednášky ukážeme.

Věta:

Mějme funkci f a bod $a \in D_f$ takové, že f je spojitá v bodě a. Potom pokud

- f je (ostře) rostoucí na nějakém levém okolí bodu a a (ostře) klesající na nějakém pravém okolí bodu a, potom má v f v bodě (ostré) lokální maximum.
- f je (ostře) klesající na nějakém levém okolí bodu a a (ostře) rostoucí na nějakém pravém okolí bodu a, potom má v f v bodě (ostré) lokální minimum.

Důkaz.

Přímočaré ověření definice. $\square$

Vztah monotonie a extrémů

Vedle definice můžeme k hledání extrémů využít i dvě kritéria, která si v závěru této přednášky ukážeme.

Věta:

Mějme funkci f a bod $a \in D_f$ takové, že f je spojitá v bodě a. Potom pokud

- f je (ostře) rostoucí na nějakém levém okolí bodu a a (ostře) klesající na nějakém pravém okolí bodu a, potom má v f v bodě (ostré) lokální maximum.
- f je (ostře) klesající na nějakém levém okolí bodu a a (ostře) rostoucí na nějakém pravém okolí bodu a, potom má v f v bodě (ostré) lokální minimum.

Důkaz.

Přímočaré ověření definice. □

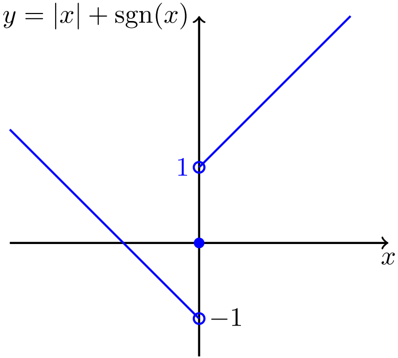
Důsledek:

Mějme funkci f diferencovatelnou na okolí bodu $a \in D_f$. Pokud derivace funkce f v bodě a mění znaménko, potom má v bodě a ostrý lokální extrém.

Vztah monotonie a extrémů: příklady

Příklad.

Požadavek spojitosti v předchozí větě je podstatný. Například funkce $f(x) = |x| + \operatorname{sgn}(x)$ je ostře rostoucí na $(0, +\infty)$ a ostře klesající na $(-\infty, 0)$, ale v bodě 0 nemá (ostré) lokální minimum.



Vztah monotonie a extrémů: příklady

Příklad.

Na funkci $f(x) = |x|$ je už předchozí věta aplikovatelná:

- f je spojitá (jistě i v bodě 0),
- pro $x > 0$ je $f'(x) = 1$ a je proto ostře rostoucí na $(0, +\infty)$,
- pro $x < 0$ je $f'(x) = -1$ a je proto ostře klesající na $(-\infty, 0)$.

Funkce f v bodě 0 ostré lokální minimum (což ale víme i jednodušeji přímo z definice).

Vztah monotonie a extrémů: příklady

Příklad.

Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x) = x\mathrm{e}^{-2x^2}$.

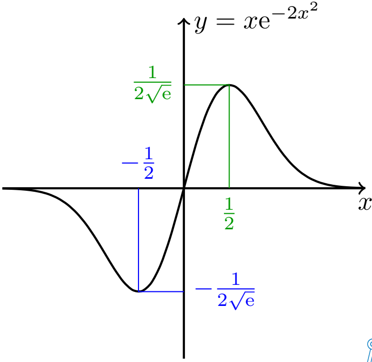
Pro derivaci této spojité funkce platí

$$f'(x) = (1 - 4x^2)\mathrm{e}^{-2x^2}.$$

Proto je $f'(x) > 0$ pro $|x| < 1/2$
a $f'(x) < 0$ pro $|x| > 1/2$.

Funkce f je proto ostře klesající na intervalech $(-\infty, -1/2\rangle$ a $\langle 1/2, +\infty)$ a ostře rostoucí na $\langle -1/2, 1/2\rangle$.

Má proto ostré lokální maximum v bodě $1/2$
a ostré lokální minimum v bodě $-1/2$.



Vztah konvexnosti a extrémů

Věta:

Nechť pro funkci f platí $f'(c) = 0$.

- Pokud je f konvexní v bodě c, pak má funkce f v bodě c lokální minimum.
- Pokud je f konkávní v bodě c, pak má funkce f v bodě c lokální maximum.

Vztah konvexnosti a extrémů

Věta:

Nechť pro funkci f platí $f'(c) = 0$.

- Pokud je f konvexní v bodě c, pak má funkce f v bodě c lokální minimum.
- Pokud je f konkávní v bodě c, pak má funkce f v bodě c lokální maximum.

Důkaz.

Stačí si uvědomit, že tečna v bodě c je dána přímkou $y = f(c)$ a využít definici konvexity/konkavity funkce f v bodě c. $\square$

Vztah konvexnosti a extrémů

Věta:

Nechť pro funkci f platí $f'(c) = 0$.

- Pokud je f konvexní v bodě c, pak má funkce f v bodě c lokální minimum.
- Pokud je f konkávní v bodě c, pak má funkce f v bodě c lokální maximum.

Důkaz.

Stačí si uvědomit, že tečna v bodě c je dána přímkou $y = f(c)$ a využít definici konvexity/konkavity funkce f v bodě c. $\square$

Poznámka:

- Pokud bychom požadovali ryzí konvexitu/konkavitu, pak dostaneme ostrá lokální minima/maxima.
- Tato věta se často používá pokud víme, že f má kladnou (nebo zápornou) druhou derivaci na okolí bodu c.

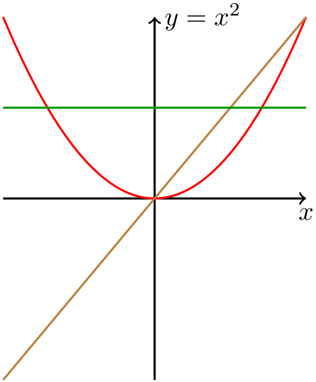
Vztah konvexnosti a extrémů: příklad

K zorientování se mezi různými znaménky derivací a souvislostí s monotonií, resp. konvexitou/konkavitou, může pomoci jednoduchý příklad známé funkce.

Funkce $f(x) = x^2$ má první derivaci $f'(x) = 2x$, která je kladná pro $x > 0$ a záporná pro $x < 0$ a nulová pro $x = 0$.

Druhá derivace $f''(x) = 2$ je vždy kladná.

Funkce f je ostře rostoucí na $\langle 0, +\infty)$ a ostře klesající na $(-\infty, 0\rangle$. V bodě 0 má ostré lokální minimum. Je konvexní na celém $\mathbb{R}$.



Hlavní body

5 Dodatek

Komentář

- V tento okamžik už máme skoro vše k tomu, abychom dokázali kvalitativně správně kreslit grafy funkcí. Tomu se budeme věnovat v příští přednášce.
- Příklady k procvičování hledání extrémů funkcí naleznete v Cvičebnici na MARASTu.
- Prakticky skutečně zajímavé optimalizační úlohy vyžadují použití více proměnných a proto se jim budeme věnovat v BI-MA2 při studiu funkcí více proměnných.
- Řada konceptů ale bude shodných či podobných jako zde u funkcí jedné proměnné. Je proto dobré se s nimi zevrubně seznámit už zde.