Matematická analýza 1

Průběh funkce

Tomáš Kalvoda[1], Pavel Paták[2]

[1]tomas.kalvoda@fit.cvut.cz, [2]pavel.patak@fit.cvut.cz

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze

21. února 2025
LS 2024/2025

Hlavní body

Hlavní výsledky této přednášky

- Inflexní body a asymptoty.
- Úloha „vyšetřování průběhu funkce“.
- Demonstrace poznatků z posledních přednášek na příkladech.

Hlavní body

Inflexní body, asymptoty

Dalšími zajímavými jevy v průběhu funkce mohou být inflexní body a asymptoty.

Definice (Inflexní bod):

Nechť f je spojitá v bodě c. Bod c nazýváme **inflexním bodem** funkce f, právě když existuje $\delta > 0$ takové, že f je ryze konvexní na intervalu $(c-\delta, c)$ a ryze konkávní na intervalu $(c, c+\delta)$, nebo naopak.

Inflexní body, asymptoty

Dalšími zajímavými jevy v průběhu funkce mohou být inflexní body a asymptoty.

Definice (Inflexní bod):

Nechť f je spojitá v bodě c. Bod c nazýváme **inflexním bodem** funkce f, právě když existuje $\delta > 0$ takové, že f je ryze konvexní na intervalu $(c-\delta, c)$ a ryze konkávní na intervalu $(c, c+\delta)$, nebo naopak.

Definice (Asymptoty):

- Řekneme, že funkce f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ **asymptotu** $x = a$, právě když $\lim_{x \to a+} f(x)$ nebo $\lim_{x \to a-} f(x)$ existuje a je rovna $+\infty$ nebo $-\infty$.

Inflexní body, asymptoty

Dalšími zajímavými jevy v průběhu funkce mohou být inflexní body a asymptoty.

Definice (Inflexní bod):

Nechť f je spojitá v bodě c. Bod c nazýváme **inflexním bodem** funkce f, právě když existuje $\delta > 0$ takové, že f je ryze konvexní na intervalu $(c - \delta, c)$ a ryze konkávní na intervalu $(c, c + \delta)$, nebo naopak.

Definice (Asymptoty):

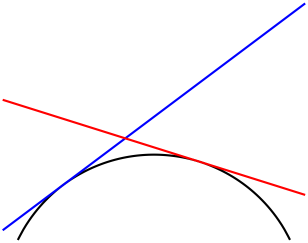
- Řekneme, že funkce f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ **asymptotu** $x = a$, právě když $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$ nebo $\lim\limits_{x \to a-} f(x)$ existuje a je rovna $+\infty$ nebo $-\infty$.
- Řekneme, že přímka $y = kx + q$ je **asymptotou** funkce f v $+\infty$, resp. v $-\infty$, když

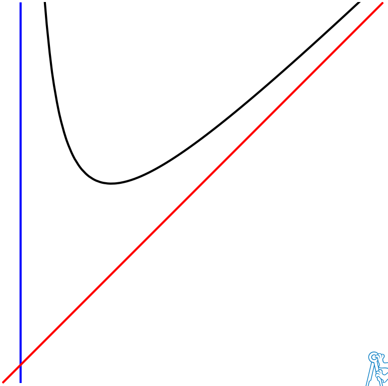
$$\lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - kx - q\big) = 0 \text{ resp. } \lim_{x \to -\infty} \big(f(x) - kx - q\big) = 0.$$

Inflexní body, asymptoty

Varování

Nepleťte si **tečny** s **asymptotami**!





Hledání asymptot

- Má-li být přímka $y = kx + q$ asymptotou funkce f v $+\infty$, pak nutně
  1. $0 = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x) - (kx + q)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{f(x)}{x} - k \right)$ a proto
  $$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}.$$
  2. Podobně
  $$q = \lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - kx \right),$$
  kde k jsme spočetli v předchozím bodu.

Hledání asymptot

- Má-li být přímka $y = kx + q$ asymptotou funkce f v $+\infty$, pak nutně
  1. $0 = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x) - (kx + q)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - k \right)$ a proto
  $$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}.$$
  2. Podobně
  $$q = \lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - kx \right),$$
  kde k jsme spočetli v předchozím bodu.
- Není těžké si rozmyslet, že pokud q a k splňují výše uvedené rovnosti, pak přímka $y = kx + q$ je asymptotou funkce f v $+\infty$.
- Případ $-\infty$ se ošetří podobně.

Příklad.

Nalezněte asymptoty funkce $f(x) = \dfrac{x^2+2}{|x-1|} + 1.$

Příklad.

Nalezněte asymptoty funkce $f(x) = \dfrac{x^2+2}{|x-1|} + 1$.

- Bod $x = 1$ nepatří do D_f a $\lim\limits_{x \to 1_{\pm}} f(x) = +\infty$. Tudíž přímka $x = 1$ je asymptotou f v bodě 1.

Příklad.

Nalezněte asymptoty funkce $f(x) = \dfrac{x^2+2}{|x-1|} + 1$.

- Bod $x = 1$ nepatří do D_f a $\lim\limits_{x \to 1_{\pm}} f(x) = +\infty$. Tudíž přímka $x = 1$ je asymptotou f v bodě 1.
- Hledejme asymptotu v $+\infty$,

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+2}{x^2-x} + \frac{1}{x} = 1,$$

$$q = \lim_{x \to +\infty} f(x) - {\color{blue}k}x = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+2}{x-1} + 1 - {\color{blue}1} \cdot x = \lim_{x \to +\infty} \frac{2+x}{x-1} + 1 = 2.$$

Příklad.

Nalezněte asymptoty funkce $f(x) = \dfrac{x^2+2}{|x-1|} + 1$.

- Bod $x = 1$ nepatří do D_f a $\lim\limits_{x \to 1_\pm} f(x) = +\infty$. Tudíž přímka $x = 1$ je asymptotou f v bodě 1.
- Hledejme asymptotu v $+\infty$,

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2}{x^2-x} + \frac{1}{x} = 1,$$

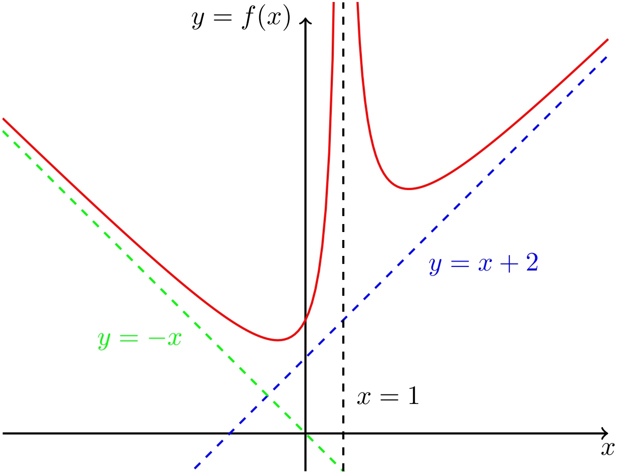
$$q = \lim_{x\to+\infty} f(x) - kx = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2}{x-1} + 1 - 1\cdot x = \lim_{x\to+\infty} \frac{2+x}{x-1} + 1 = 2.$$

- Podobně, pro asymptotu v $-\infty$ máme

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2}{-x^2+x} + \frac{1}{x} = -1,$$

$$q = \lim_{x\to-\infty} f(x) - kx = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2}{-x+1} + 1 - (-1)\cdot x = 0.$$

Graf funkce z příkladu



Hlavní body

Průběh funkce

Při vyšetřování průběhu funkce zkoumáme:

Průběh funkce

Při vyšetřování průběhu funkce zkoumáme:

1. definiční obor funkce f, průsečíky grafu s osami, symetrie (sudost, lichost, periodicita),

Průběh funkce

Při vyšetřování průběhu funkce zkoumáme:

1. definiční obor funkce f, průsečíky grafu s osami, symetrie (sudost, lichost, periodicita),
2. spojitost, body nespojitosti, existenci asymptot, limity v krajních bodech/nekonečnech,

Průběh funkce

Při vyšetřování průběhu funkce zkoumáme:

1. definiční obor funkce f, průsečíky grafu s osami, symetrie (sudost, lichost, periodicita),
2. spojitost, body nespojitosti, existenci asymptot, limity v krajních bodech/nekonečnech,
3. existenci derivace f', monotonii funkce, lokální a globální extrémy,

Průběh funkce

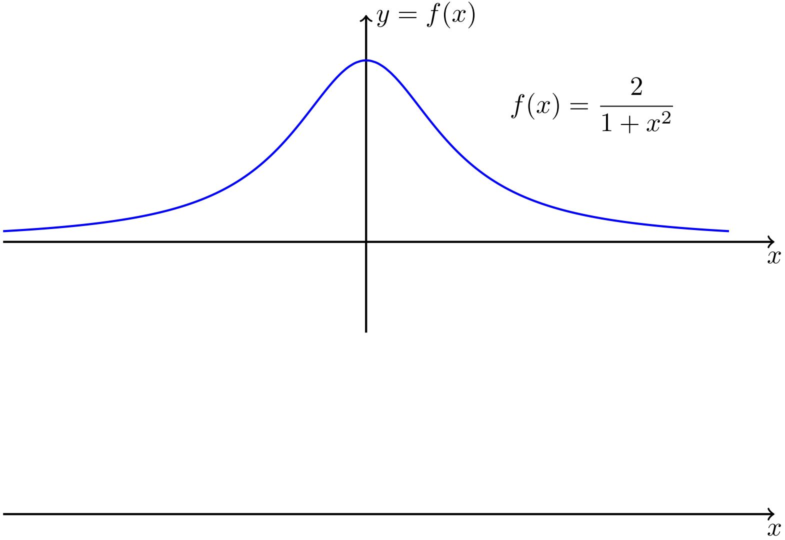
Při vyšetřování průběhu funkce zkoumáme:

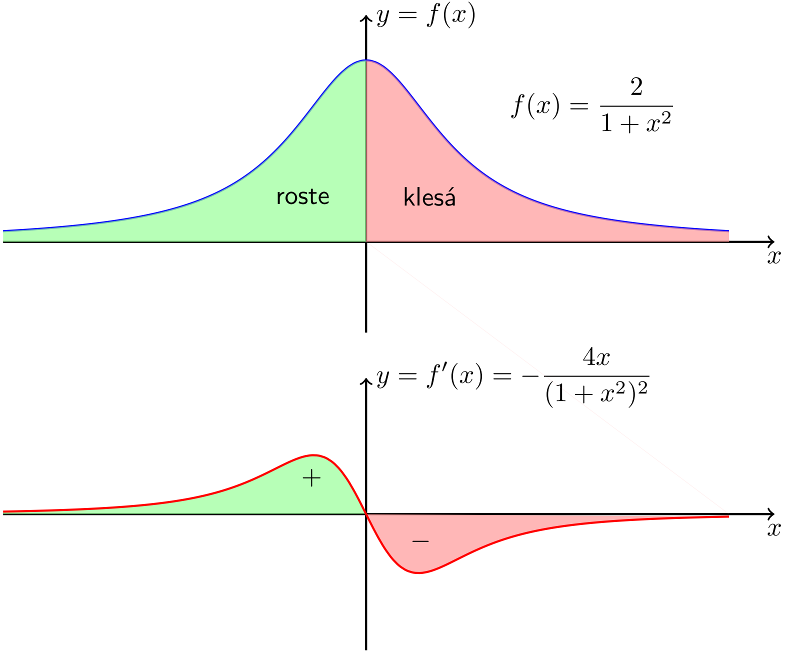
1. definiční obor funkce f, průsečíky grafu s osami, symetrie (sudost, lichost, periodicita),
2. spojitost, body nespojitosti, existenci asymptot, limity v krajních bodech/nekonečnech,
3. existenci derivace f', monotonii funkce, lokální a globální extrémy,
4. existenci druhé derivace f'', konvexnost a konkávnost,

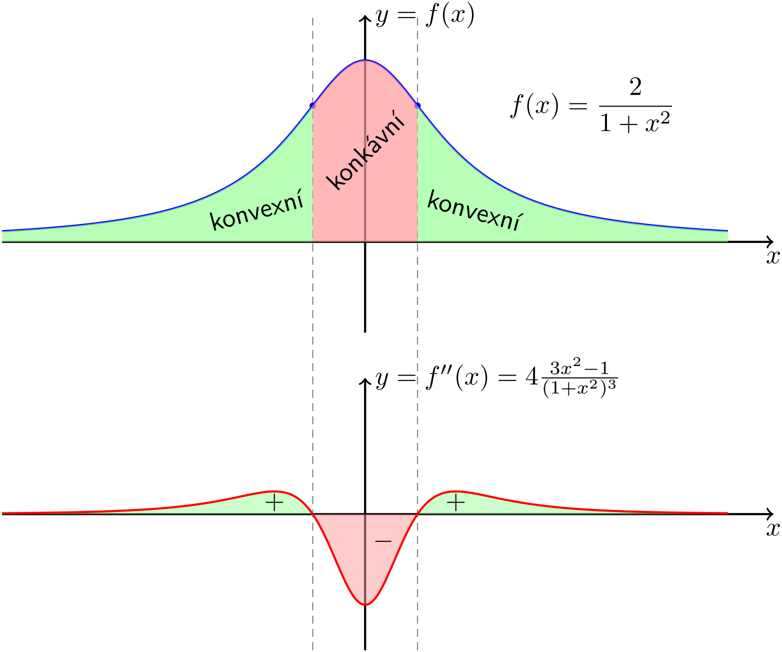
Průběh funkce

Při vyšetřování průběhu funkce zkoumáme:

1. definiční obor funkce f, průsečíky grafu s osami, symetrie (sudost, lichost, periodicita),
2. spojitost, body nespojitosti, existenci asymptot, limity v krajních bodech/nekonečnech,
3. existenci derivace f', monotonii funkce, lokální a globální extrémy,
4. existenci druhé derivace f'', konvexnost a konkávnost,
5. na základě těchto výsledků načrtneme graf funkce f.


$y = f(x)$
$f(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$
x
x


$y = f(x)$
$f(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$
roste
klesá
x
$y = f'(x) = -\dfrac{4x}{(1+x^2)^2}$
$+$
$-$
x


$y = f(x)$
$f(x) = \frac{2}{1+x^2}$
konvexní
konkávní
konvexní
x
$y = f''(x) = 4\frac{3x^2-1}{(1+x^2)^3}$
+
−
+
x

Hlavní body

Průběh exponenciály a logaritmu

Příklad.

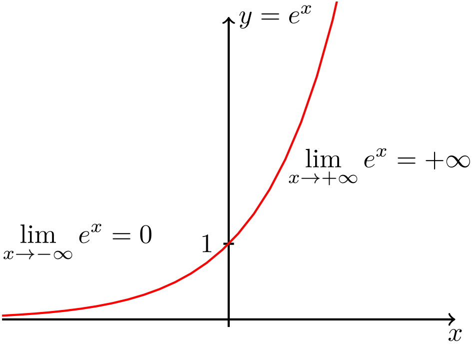
Vyšetřete průběh funkce $f(x) = e^x$.

Průběh exponenciály a logaritmu

Příklad.

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = e^x$.

Protože $f'(x) = f''(x) > 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$ je funkce $f(x)$ rostoucí a konvexní na celém $\mathbb{R}$. Asymptota funkce existuje pouze v $-\infty$ a její rovnicí je $y = 0$.



Průběh exponenciály a logaritmu

Příklad.

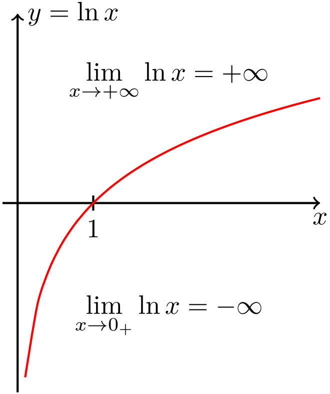
Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \ln x$.

Průběh exponenciály a logaritmu

Příklad.

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \ln x$.

Nyní $D_f = (0, +\infty)$ a $f'(x) = \frac{1}{x} > 0$ a $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ pro každé $x > 0$. Tudíž f je rostoucí a konkávní, jedinou asymptotou je přímka $x = 0$.



Ukázkový příklad

Příklad.

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \sqrt[3]{3x^2 - x^3}$.

Ukázkový příklad

Příklad.

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \sqrt[3]{3x^2 - x^3}$.

1. Odmocnina je lichá, tedy $D_f = \mathbb{R}$. Průsečík s osou y je $f(0) = 0$. Průsečíky s osou x jsou řešením rovnice

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2(3 - x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 0 \text{ a } x_2 = 3.$$

Odtud ihned plyne, že funkce nemůže být sudá, lichá ani periodická (ve všech těchto případech by muselo být průsečíkem i $x = -3$).

Ukázkový příklad

Příklad.

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \sqrt[3]{3x^2 - x^3}$.

1. Odmocnina je lichá, tedy $D_f = \mathbb{R}$. Průsečík s osou y je $f(0) = 0$. Průsečíky s osou x jsou řešením rovnice

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2(3-x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 0 \text{ a } x_2 = 3.$$

Odtud ihned plyne, že funkce nemůže být sudá, lichá ani periodická (ve všech těchto případech by muselo být průsečíkem i $x = -3$).

2. Funkce je spojitá na celém $\mathbb{R}$. Zkoumejme existenci asymptot v $\pm\infty$,

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \sqrt[3]{\frac{3}{x} - 1} = -1,$$
$$q = \lim_{x \to \pm\infty} \big(f(x) - kx\big) = \lim_{x \to \pm\infty} \sqrt[3]{3x^2 - x^3} + x = 1.$$

Přímka $y = -x + 1$ je tedy asymptotou v $+\infty$ i $-\infty$.

Ukázkový příklad

3. Pro derivaci funkce f platí

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x-x^2}{|3x^2-x^3|^{2/3}}, & x \neq 0, 3, \\ -\infty, & x = 3, \\ \text{neexistuje}, & x = 0. \end{cases}$$

Ukázkový příklad

3. Pro derivaci funkce f platí

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x-x^2}{|3x^2-x^3|^{2/3}}, & x \neq 0, 3, \\ -\infty, & x = 3, \\ \text{neexistuje}, & x = 0. \end{cases}$$

Nulovým bodem derivace je 2. Kandidáty na lokální extrém jsou tudíž body 0 (derivace neexistuje) a 2 (derivace je 0).

Ukázkový příklad

3. Pro derivaci funkce f platí

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x - x^2}{|3x^2 - x^3|^{2/3}}, & x \neq 0, 3, \\ -\infty, & x = 3, \\ \text{neexistuje}, & x = 0. \end{cases}$$

Nulovým bodem derivace je 2. Kandidáty na lokální extrém jsou tudíž body 0 (derivace neexistuje) a 2 (derivace je 0).

interval	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, 3)$	$(3, +\infty)$
znaménko f'	$-$	$+$	$-$	$-$
monotonie f	klesá	roste	klesá	klesá

Všude ostře i na uzavřených intervalech.

Ukázkový příklad

3. Pro derivaci funkce f platí

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x-x^2}{|3x^2-x^3|^{2/3}}, & x \neq 0, 3, \\ -\infty, & x = 3, \\ \text{neexistuje}, & x = 0. \end{cases}$$

Nulovým bodem derivace je 2. Kandidáty na lokální extrém jsou tudíž body 0 (derivace neexistuje) a 2 (derivace je 0).

interval	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, 3)$	$(3, +\infty)$
znaménko f'	$-$	$+$	$-$	$-$
monotonie f	klesá	roste	klesá	klesá

Všude ostře i na uzavřených intervalech.

Spojitost funkce na celém $\mathbb{R}$ implikuje lokální minimum v bodě 0 ($f(0) = 0$) a maximum v bodě 2 ($f(2) = \sqrt[3]{4}$).

Ukázkový příklad

3. Pro derivaci funkce f platí

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x - x^2}{|3x^2 - x^3|^{2/3}}, & x \neq 0, 3, \\ -\infty, & x = 3, \\ \text{neexistuje}, & x = 0. \end{cases}$$

Nulovým bodem derivace je 2. Kandidáty na lokální extrém jsou tudíž body 0 (derivace neexistuje) a 2 (derivace je 0).

interval	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, 3)$	$(3, +\infty)$
znaménko f'	$-$	$+$	$-$	$-$
monotonie f	klesá	roste	klesá	klesá

Všude ostře i na uzavřených intervalech.

Spojitost funkce na celém $\mathbb{R}$ implikuje lokální minimum v bodě 0 ($f(0) = 0$) a maximum v bodě 2 ($f(2) = \sqrt[3]{4}$).

Navíc ze spojitosti na $\mathbb{R}$ a z limit $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \mp\infty$ plyne $H_f = \mathbb{R}$.

Ukázkový příklad

4. Pro druhou derivaci v bodech $x \neq 0, 3$ dostáváme

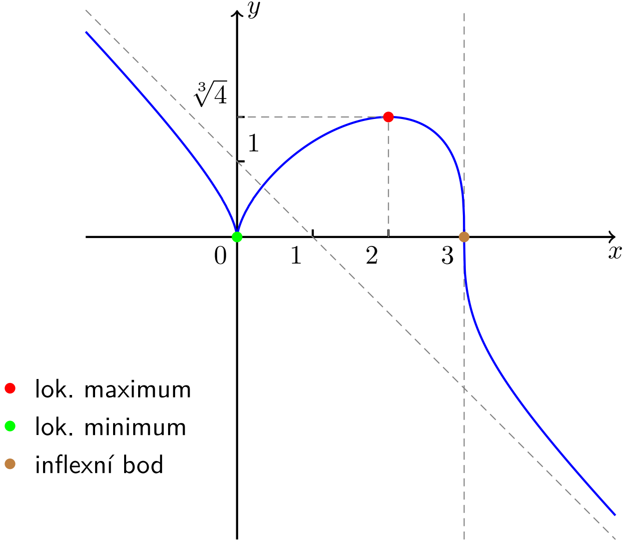
$$f''(x) = \frac{2x^{-4/3}}{\sqrt[3]{(x-3)^5}}.$$

Znaménko závisí pouze na znaménku jmenovatele (čitatel je kladný),

interval	$(-\infty, 0)$	$(0, 3)$	$(3, +\infty)$
znaménko f''	$-$	$-$	$+$
	(ryze) konkávní	konkávní	konvexní

Ukázkový příklad

5. Nyní můžeme načrtnout graf funkce f.



Příklad

Velmi často můžeme narazit (a během semestru ještě narazíme) na úlohy, které nejsou explicitně zadané jako „úlohy na vyšetřování průběhu funkce“, ale které na tuto úlohu přímočaře vedou.

Příklad.

Dokažte nerovnost $\ln(1+x) \leq x$ platnou pro $x > -1$.

Příklad

Velmi často můžeme narazit (a během semestru ještě narazíme) na úlohy, které nejsou explicitně zadané jako „úlohy na vyšetřování průběhu funkce“, ale které na tuto úlohu přímočaře vedou.

Příklad.

Dokažte nerovnost $\ln(1+x) \leq x$ platnou pro $x > -1$.

Zkoumaná nerovnost je ekvivalentní nerovnosti $f(x) := x - \ln(1+x) \geq 0$. Tj. otázkou je, jak vypadá obor hodnot funkce f, resp. jaké minimální hodnoty může f nabývat.

Funkce f je spojitá na $(-1, +\infty)$. Pro její derivaci platí $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$. Funkce f je proto ostře klesající na $(-1, 0\rangle$ a ostře rostoucí na $\langle 0, +\infty)$. V bodě 0 má tato funkce ostré lokální minimum s hodnotou $f(0) = 0$.

Odtud ihned plyne, že pro každé $x > -1$ platí $f(x) \geq 0$, což jsme měli dokázat.

Hlavní body

Komentář

- Příklady k procvičování této tématiky naleznete v Cvičebnici na MARASTu.