Matematická analýza 1

Aplikace: Newtonova metoda

Tomáš Kalvoda[1], Pavel Paták[2]

[1]tomas.kalvoda@fit.cvut.cz, [2]pavel.patak@fit.cvut.cz

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze

21. února 2025
LS 2024/2025

Hlavní body

$$f(x) = 0$$

1. Newtonova metoda
2. Newtonova metoda: problémy
3. Ukázky

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Hlavní výsledky této přednášky

- Aplikace doposud vybudované teorie, zajímavé ukázky.

- Newtonova metoda: numerické hledání řešení rovnic $f(x) = 0$.

Hlavní body

$$f(x) = 0$$

1. Newtonova metoda
2. Newtonova metoda: problémy
3. Ukázky

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Ilustrační příklad $\sqrt[3]{c}$

Vzpomeňme si na metodu půlení intervalu a problém hledání řešení rovnice $f(x) = 0$. V této přednášce se zaměříme na konkrétní případ:

Příklad.

Vypočtěte **třetí odmocninu** z kladného reálného čísla c.

Ilustrační příklad $\sqrt[3]{c}$

Vzpomeňme si na metodu půlení intervalu a problém hledání řešení rovnice $f(x) = 0$. V této přednášce se zaměříme na konkrétní případ:

Příklad.

Vypočtěte **třetí odmocninu** z kladného reálného čísla c.

- Jak řešení nalézt, máme-li k dispozici kalkulátor umožňující pouze sčítat, násobit a dělit čísla?

Ilustrační příklad $\sqrt[3]{c}$

Vzpomeňme si na metodu půlení intervalu a problém hledání řešení rovnice $f(x) = 0$. V této přednášce se zaměříme na konkrétní případ:

Příklad.

Vypočtěte **třetí odmocninu** z kladného reálného čísla c.

- Jak řešení nalézt, máme-li k dispozici kalkulátor umožňující pouze sčítat, násobit a dělit čísla?
- Třetí odmocnina patří mezi často používané funkce, najdete ji i ve většině jednoduchých kapesních kalkulátorů.

Analýza problému

- Buď $c > 0$. Označme hledanou třetí odmocninu symbolem x, tj. $x = \sqrt[3]{c}$. Ekvivalentně to znamená řešit rovnici $x^3 = c$.

Analýza problému

- Buď $c > 0$. Označme hledanou třetí odmocninu symbolem x, tj. $x = \sqrt[3]{c}$. Ekvivalentně to znamená řešit rovnici $x^3 = c$.

- Označíme-li $f(x) := x^3 - c$, je námi hledané číslo x *řešením rovnice*

$$f(x) = 0.$$

Analýza problému

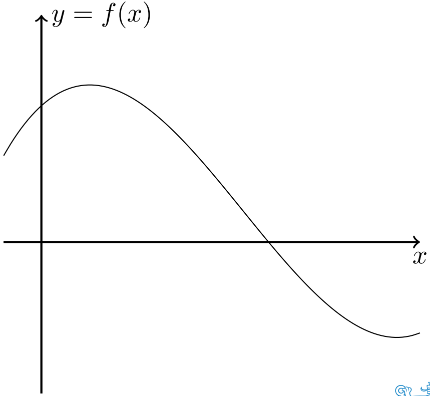
- Buď $c > 0$. Označme hledanou třetí odmocninu symbolem x, tj. $x = \sqrt[3]{c}$. Ekvivalentně to znamená řešit rovnici $x^3 = c$.
- Označíme-li $f(x) := x^3 - c$, je námi hledané číslo x *řešením rovnice*

$$f(x) = 0.$$

- Tuto rovnici bychom se mohli pokusit řešit nám již známou **metodou půlení intervalu** (jaké dva počáteční body byste zvolili?). Nyní si však ukážeme další způsob, tzv. **Newtonovu metodu**.

Newtonova metoda: myšlenka

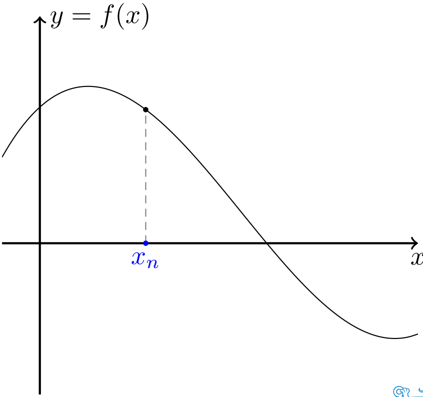
Myšlenka Newtonovy metody spočívá v konstrukci posloupnosti $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ aproximující řešení rovnice $f(x) = 0$. Konstrukce posloupnosti je následující:



Newtonova metoda: myšlenka

Myšlenka Newtonovy metody spočívá v konstrukci posloupnosti $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ aproximující řešení rovnice $f(x) = 0$. Konstrukce posloupnosti je následující:

1. Je dáno x_n.

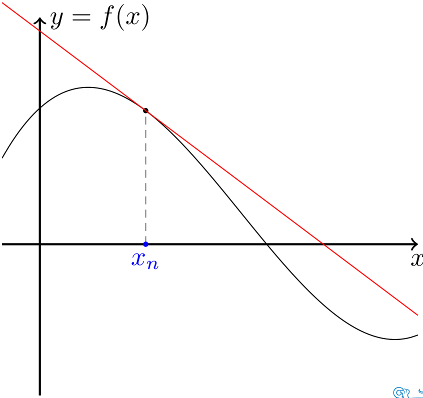


Newtonova metoda: myšlenka

Myšlenka Newtonovy metody spočívá v konstrukci posloupnosti $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ aproximující řešení rovnice $f(x) = 0$. Konstrukce posloupnosti je následující:

1. Je dáno x_n.
2. Sestroj tečnu funkce f v bodě x_n,

$$y = f(x_n) + f'(x_n) \cdot (x - x_n).$$



Newtonova metoda: myšlenka

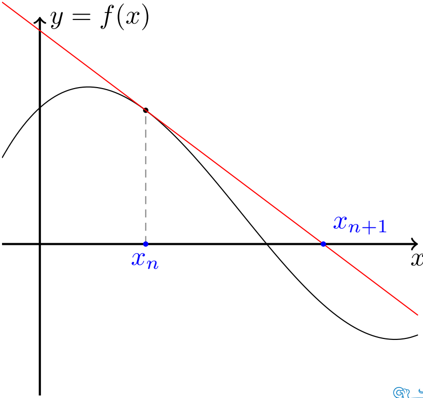
Myšlenka Newtonovy metody spočívá v konstrukci posloupnosti $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ aproximující řešení rovnice $f(x) = 0$. Konstrukce posloupnosti je následující:

1. Je dáno x_n.
2. Sestroj tečnu funkce f v bodě x_n,

$$y = f(x_n) + f'(x_n) \cdot (x - x_n).$$

3. Průsečík tečny s osou x nechť je další člen posloupnosti,

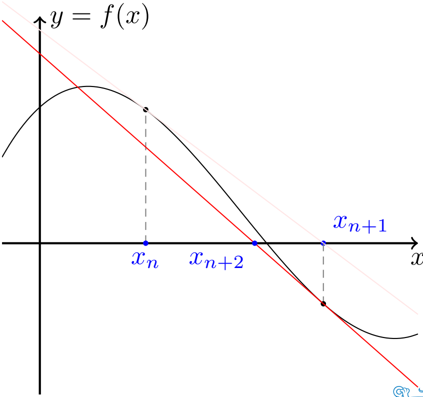
$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$



Newtonova metoda: myšlenka

Myšlenka Newtonovy metody spočívá v konstrukci posloupnosti $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ aproximující řešení rovnice $f(x) = 0$. Konstrukce posloupnosti je následující:

1. Je dáno x_n.
2. Sestroj tečnu funkce f v bodě x_n,
$$y = f(x_n) + f'(x_n) \cdot (x - x_n).$$
3. Průsečík tečny s osou x nechť je další člen posloupnosti,
$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$
4. Opakuj s x_{n+1} místo x_n.



Newtonova metoda: otázky

Z předchozího obrázku se může zdát, že vše je jasné. Avšak:

Poznámka (Otázky):

- Jak zvolit první člen posloupnosti? Závisí výsledek metody na této volbě?
- Má rovnice $f(x) = 0$ vůbec řešení?
- Konverguje takto zkonstruovaná posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$?
- Co když $f'(x_n) = 0$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$?

Newtonova metoda: otázky

Z předchozího obrázku se může zdát, že vše je jasné. Avšak:

Poznámka (Otázky):

- Jak zvolit první člen posloupnosti? Závisí výsledek metody na této volbě?
- Má rovnice $f(x) = 0$ vůbec řešení?
- Konverguje takto zkonstruovaná posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$?
- Co když $f'(x_n) = 0$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$?

Odpovědí na tyto otázky se v obecném případě nebudeme zabývat. Vraťme se k našemu konkrétnímu případu s třetí odmocninou, kde uvidíme jak na některé z nich odpovědět.

Příklad $\sqrt[3]{c}$

Newtonova metoda pro $f(x) = x^3 - c$

Je dáno $c > 0$ a funkce $f(x) = x^3 - c$. Newtonova metoda tudíž dává rekurentní vztah

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - c}{3x_n^2} = \frac{2}{3}x_n + \frac{c}{3x_n^2}.$$

Příklad $\sqrt[3]{c}$

Newtonova metoda pro $f(x) = x^3 - c$

Je dáno $c > 0$ a funkce $f(x) = x^3 - c$. Newtonova metoda tudíž dává rekurentní vztah

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - c}{3x_n^2} = \frac{2}{3}x_n + \frac{c}{3x_n^2}.$$

V našem případě si lze snadno všimnout, že:

- Funkce f je prostá, $f\big((0, +\infty)\big) = (-c, +\infty)$ a tudíž *existuje právě jedno* kladné řešení rovnice $f(x) = 0$.

Příklad $\sqrt[3]{c}$

Newtonova metoda pro $f(x) = x^3 - c$

Je dáno $c > 0$ a funkce $f(x) = x^3 - c$. Newtonova metoda tudíž dává rekurentní vztah

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - c}{3x_n^2} = \frac{2}{3}x_n + \frac{c}{3x_n^2}.$$

V našem případě si lze snadno všimnout, že:

- Funkce f je prostá, $f\big((0,+\infty)\big) = (-c,+\infty)$ a tudíž *existuje právě jedno* kladné řešení rovnice $f(x) = 0$.
- Konverguje-li posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ke konečné kladné limitě a, potom

$$a = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}x_n + \frac{c}{3x_n^2}\right) = \frac{2}{3}a + \frac{c}{3a^2}.$$

Tudíž a je hledané řešení,

$$a^3 = c, \quad \text{neboli} \quad f(a) = 0.$$

Příklad $\sqrt[3]{c}$

Věta (Vlastnosti $(x_n)_{n=1}^{\infty}$):

Buď $c > 0$ a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ posloupnost kladných reálných čísel splňující rekurentní vztah

$$x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{c}{3x_n^2}, \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

Potom tato posloupnost konverguje ke konečné kladné limitě.

Příklad $\sqrt[3]{c}$

Věta (Vlastnosti $(x_n)_{n=1}^{\infty}$):

Buď $c > 0$ a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ posloupnost kladných reálných čísel splňující rekurentní vztah

$$x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{c}{3x_n^2}, \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

Potom tato posloupnost konverguje ke konečné kladné limitě.

Důkaz.

Položme $g(x) := \frac{2}{3}x + \frac{c}{3x^2}$ pro $x > 0$. Vyšetřením průběhu zjistíme, že $g(x) \geq \sqrt[3]{c}$, kde rovnost nastává právě tehdy, když $x = \sqrt[3]{c}$. Tudíž:

Příklad $\sqrt[3]{c}$

Věta (Vlastnosti $(x_n)_{n=1}^{\infty}$):

Buď $c > 0$ a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ posloupnost kladných reálných čísel splňující rekurentní vztah

$$x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{c}{3x_n^2}, \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

Potom tato posloupnost konverguje ke konečné kladné limitě.

Důkaz.

Položme $g(x) := \frac{2}{3}x + \frac{c}{3x^2}$ pro $x > 0$. Vyšetřením průběhu zjistíme, že $g(x) \geq \sqrt[3]{c}$, kde rovnost nastává právě tehdy, když $x = \sqrt[3]{c}$. Tudíž:

- Pokud $x_1 = \sqrt[3]{c}$, potom $x_n = \sqrt[3]{c}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Příklad $\sqrt[3]{c}$

Věta (Vlastnosti $(x_n)_{n=1}^\infty$):

Buď $c > 0$ a $(x_n)_{n=1}^\infty$ posloupnost kladných reálných čísel splňující rekurentní vztah

$$x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{c}{3x_n^2}, \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

Potom tato posloupnost konverguje ke konečné kladné limitě.

Důkaz.

Položme $g(x) := \frac{2}{3}x + \frac{c}{3x^2}$ pro $x > 0$. Vyšetřením průběhu zjistíme, že $g(x) \geq \sqrt[3]{c}$, kde rovnost nastává právě tehdy, když $x = \sqrt[3]{c}$. Tudíž:

- Pokud $x_1 = \sqrt[3]{c}$, potom $x_n = \sqrt[3]{c}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.
- Pokud $x_1 > \sqrt[3]{c}$, potom $x_n > \sqrt[3]{c}$ pro libovolné $n \in \mathbb{N}$. Navíc posloupnost $(x_n)_{n=1}^\infty$ je ostře klesající:

  $$x_{n+1} - x_n = \frac{c - x_n^3}{3x_n^2} < 0,$$

  a zdola omezená číslem $\sqrt[3]{c}$. Tudíž je konvergentní s konečnou limitou.

Příklad $\sqrt[3]{c}$

Věta (Vlastnosti $(x_n)_{n=1}^{\infty}$):

Buď $c > 0$ a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ posloupnost kladných reálných čísel splňující rekurentní vztah

$$x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{c}{3x_n^2}, \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

Potom tato posloupnost konverguje ke konečné kladné limitě.

Důkaz.

Položme $g(x) := \frac{2}{3}x + \frac{c}{3x^2}$ pro $x > 0$. Vyšetřením průběhu zjistíme, že $g(x) \geq \sqrt[3]{c}$, kde rovnost nastává právě tehdy, když $x = \sqrt[3]{c}$. Tudíž:

- Pokud $x_1 = \sqrt[3]{c}$, potom $x_n = \sqrt[3]{c}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.
- Pokud $x_1 > \sqrt[3]{c}$, potom $x_n > \sqrt[3]{c}$ pro libovolné $n \in \mathbb{N}$. Navíc posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je ostře klesající:

  $$x_{n+1} - x_n = \frac{c - x_n^3}{3x_n^2} < 0,$$

  a zdola omezená číslem $\sqrt[3]{c}$. Tudíž je konvergentní s konečnou limitou.
- Pokud $0 < x_1 < \sqrt[3]{c}$, pak $x_2 > \sqrt[3]{c}$ a můžeme použít předchozí bod. □

Věta (Odhad chyby):

Je-li $c > 1$ a $x_1 > \sqrt[3]{c}$, potom

$$x_{n+1} - \sqrt[3]{c} \leq \left(x_n - \sqrt[3]{c}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N}$$

a

$$x_{n+1} - \sqrt[3]{c} \leq 2(x_{n+1} - x_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Důkaz.

Vynecháme. □

Věta (Odhad chyby):

Je-li $c > 1$ a $x_1 > \sqrt[3]{c}$, potom

$$x_{n+1} - \sqrt[3]{c} \leq \left(x_n - \sqrt[3]{c}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N}$$

a

$$x_{n+1} - \sqrt[3]{c} \leq 2(x_{n+1} - x_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Důkaz.

Vynecháme. □

Poznámka:

- Z první části tvrzení plyne: je-li chyba n-tého členu například 10^{-5}, pak chyba dalšího členu je již pouze 10^{-10} (tzv. kvadratická konvergence)!

Věta (Odhad chyby):

Je-li $c > 1$ a $x_1 > \sqrt[3]{c}$, potom

$$x_{n+1} - \sqrt[3]{c} \leq \left(x_n - \sqrt[3]{c}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N}$$

a

$$x_{n+1} - \sqrt[3]{c} \leq 2(x_{n+1} - x_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Důkaz.

Vynecháme. □

Poznámka:

- Z první části tvrzení plyne: je-li chyba n-tého členu například 10^{-5}, pak chyba dalšího členu je již pouze 10^{-10} (tzv. kvadratická konvergence)!
- Toto je pro praktické účely *velmi* důležitý výsledek. Pomocí dvou naposledy vypočtených členů posloupnosti můžeme odhadnout chybu mezi posledním členem a skutečnou hodnotou $\sqrt[3]{c}$ (tu neznáme!) a tím *dodržet požadovanou přesnost*.

Ilustrace iterace ($\sqrt[3]{7}$, 36 cifer)

Člen posloupnosti	Hodnota
x_1	7.0
x_2	4.71428571428571428571428571428571429
x_3	3.24784642966461148279330097511915694
x_4	2.38643130490037593935668895758001112
x_5	2.00066641679591817635777458039226767
x_6	1.91672239561208699369932626267864600
x_7	1.91293867672049370288664833049651171
x_8	1.91293118280174664702280424145842154
x_9	1.91293118277238910119956738659641893
x_{10}	1.91293118277238910119911683954876030
$\sqrt[3]{7}$	1.91293118277238910119911683954876028

Ilustrace iterace ($\sqrt[3]{7}$, 36 cifer)

Člen posloupnosti	Hodnota
x_1	7.0
x_2	4.714285714285714285714285714285714286
x_3	3.247846429664611482793300975119156940
x_4	2.386431304900375939356688957580011120
x_5	2.000666416795918176357774580392267670
x_6	1.916722395612086993699326262678646000
x_7	1.912938676720493702886648330496511710
x_8	1.912931182801746647022804241458421540
x_9	1.912931182772389101199567386596418930
x_{10}	1.912931182772389101199116839548760300
$\sqrt[3]{7}$	1.912931182772389101199116839548760280

Hlavní body

$$f(x) = 0$$

1. Newtonova metoda
2. Newtonova metoda: problémy
3. Ukázky

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Problémy

- Zásadním problémem, na který obecně není jednoduché odpověď, je volba prvního členu rekurentní posloupnosti. Je vždy potřeba využít znalost vlastností dané funkce.
- Při špatné volbě první aproximace se může posloupnost chovat velmi divoce!
- Na rozdíl od metody půlení intervalu nemáme iterace „pod kontrolou“, nemusí být monotónní.
- I přesto ale stojí za to Newtonovu metodu zkusit opatrně použít. „Typicky“ konverguje podstatně rychleji než např. metoda půlení intervalu.

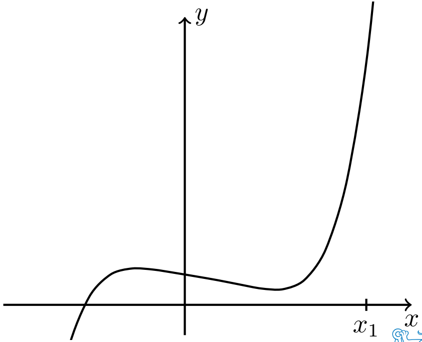
Problémy

Příklad.

Zkoumejme chování Newtonovy metody aplikované na $p(x) = x^5 - x^4 - x + 2$ s počátečním bodem $x_1 = 2$.

Rekurentní vzorec Newtonovy metody v tomto případě zní

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^5 - x_n^4 - x_n + 2}{5x_n^4 - 4x_n^3 - 1}.$$



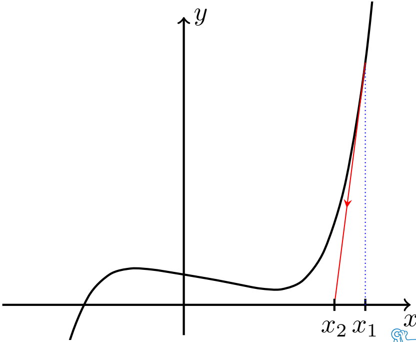
Problémy

Příklad.

Zkoumejme chování Newtonovy metody aplikované na $p(x) = x^5 - x^4 - x + 2$ s počátečním bodem $x_1 = 2$.

Rekurentní vzorec Newtonovy metody v tomto případě zní

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^5 - x_n^4 - x_n + 2}{5x_n^4 - 4x_n^3 - 1}.$$



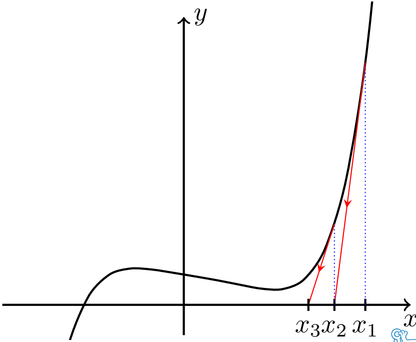
Problémy

Příklad.

Zkoumejme chování Newtonovy metody aplikované na $p(x) = x^5 - x^4 - x + 2$ s počátečním bodem $x_1 = 2$.

Rekurentní vzorec Newtonovy metody v tomto případě zní

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^5 - x_n^4 - x_n + 2}{5x_n^4 - 4x_n^3 - 1}.$$



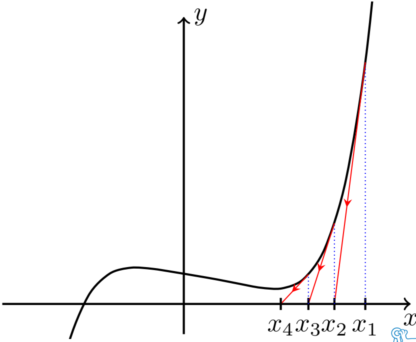
Problémy

Příklad.

Zkoumejme chování Newtonovy metody aplikované na $p(x) = x^5 - x^4 - x + 2$ s počátečním bodem $x_1 = 2$.

Rekurentní vzorec Newtonovy metody v tomto případě zní

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^5 - x_n^4 - x_n + 2}{5x_n^4 - 4x_n^3 - 1}.$$



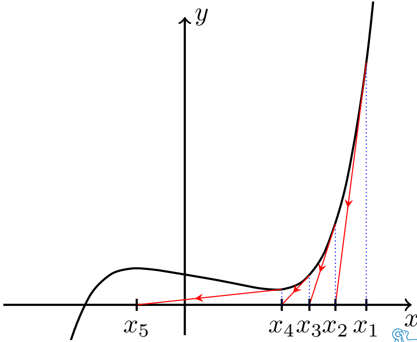
Problémy

Příklad.

Zkoumejme chování Newtonovy metody aplikované na $p(x) = x^5 - x^4 - x + 2$ s počátečním bodem $x_1 = 2$.

Rekurentní vzorec Newtonovy metody v tomto případě zní

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^5 - x_n^4 - x_n + 2}{5x_n^4 - 4x_n^3 - 1}.$$



Problémy

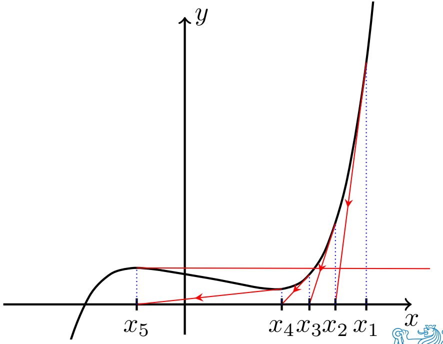
Příklad.

Zkoumejme chování Newtonovy metody aplikované na $p(x) = x^5 - x^4 - x + 2$ s počátečním bodem $x_1 = 2$.

Rekurentní vzorec Newtonovy metody v tomto případě zní

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^5 - x_n^4 - x_n + 2}{5x_n^4 - 4x_n^3 - 1}.$$

n	x_n
1	2.
2	1.6595744680851063
3	1.3729685700681316
4	1.0686067391904803
5	−0.5293373794223353
6	169.52057927559713
7	135.65665311569666



Hlavní body

$$f(x) = 0$$

1. Newtonova metoda
2. Newtonova metoda: problémy
3. Ukázky

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Naivní obecná Python implementace (1/2)

```python
def newton(f, df, x0, eps=1e-12, maxiter=1000):
    xnew, xold = x0 - f(x0) / df(x0), x0
    k = 1

    while abs(xnew - xold) > eps and k < maxiter:
        xnew, xold = xnew - f(xnew) / df(xnew), xnew
        k += 1

    if k == maxiter:
        raise Exception("Maximum number of interation reached!")
    else:
        return xnew
```

Naivní obecná Python implementace (2/2)

Pak například získáme:

```
print(newton(lambda x: x**2 - 2, lambda x: 2 * x, 1.0))
# => 1.414213562373095

print(newton(lambda x: x**3 - 3, lambda x: 3 * x**2, 1.0))
# => 1.4422495703074083

from math import sqrt
print(newton(lambda x: sqrt(x) - 2,
             lambda x: 1 / (2 * sqrt(x)), 3.0))
# => 4.0
```

Python se na takovéto numerické výpočty příliš nehodí, volíme ho vzhledem k čitelnosti (takřka pseudokód). Smysluplnější by bylo použít například Julia, FORTRAN nebo C.

Fast inverse square root

Následující kód pochází z 3D FPS *Quake III Arena* a slouží k rychlému výpočtu funkčních hodnot $\frac{1}{\sqrt{x}}$ používaných při normalizaci vektorů. (*Cenzurováno.*)

```
float Q_rsqrt( float number )
{
  long i;
  float x2, y;
  const float threehalfs = 1.5F;

  x2 = number * 0.5F;
  y  = number;
  i  = * ( long * ) &y;          // evil floating point bit level hacking
  i  = 0x5f3759df - ( i >> 1 ); // what the f**k?
  y  = * ( float * ) &i;
  y  = y * ( threehalfs - ( x2 * y * y ) );      // 1st iteration
  //  y  = y * ( threehalfs - ( x2 * y * y ) );  // 2nd iteration,
                                                 // this can be removed

  return y;
}
```