Matematická analýza 1

Aplikace: Kubická interpolace

Tomáš Kalvoda[1], Pavel Paták[2]

[1]tomas.kalvoda@fit.cvut.cz, [2]pavel.patak@fit.cvut.cz

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze

21. února 2025
LS 2024/2025

Hlavní body

Hlavní výsledky této přednášky

- Vysvětlení problému interpolace.
- Konkrétní ukázka lineární a kubické interpolace.
- Zobecnění do 2D: Bézierovy křivky.

Hlavní body

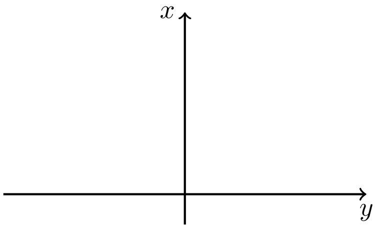
Interpolace: ukázka

Jak v těchto prezentacích vlastně vykreslujeme grafy funkcí? Většinou nejjednodušším způsobem: tzv. **lineární interpolací**.

Postup je jednoduchý: pro vykreslení $f(x) := 1 - x^2$ na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$

1. zvolme n vzorkovacích bodů $x_i = -1 + \frac{2}{n-1} \cdot (i-1)$, $i = 1, \ldots, n$,
2. vypočtěme vzorky $f(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$,
3. spojme sousední body $(x_i,\ f(x_i))$ a $(x_{i+1},\ f(x_{i+1}))$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, úsečkou.

Pro dobrý výsledek je nutné volit vzorkovací mřížku dostatečně hustou.



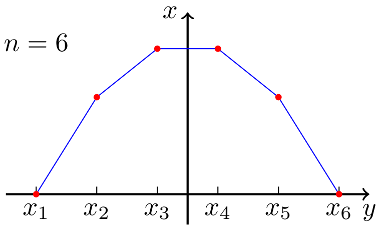
Interpolace: ukázka

Jak v těchto prezentacích vlastně vykreslujeme grafy funkcí? Většinou nejjednodušším způsobem: tzv. **lineární interpolací**.

Postup je jednoduchý: pro vykreslení $f(x) := 1 - x^2$ na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$

1. zvolme n vzorkovacích bodů $x_i = -1 + \frac{2}{n-1} \cdot (i-1)$, $i = 1, \ldots, n$,
2. vypočtěme vzorky $f(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$,
3. spojme sousední body $(x_i,\ f(x_i))$ a $(x_{i+1},\ f(x_{i+1}))$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, úsečkou.

Pro dobrý výsledek je nutné volit vzorkovací mřížku dostatečně hustou.



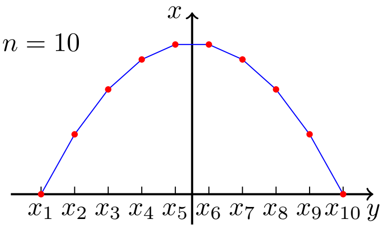
Interpolace: ukázka

Jak v těchto prezentacích vlastně vykreslujeme grafy funkcí? Většinou nejjednodušším způsobem: tzv. **lineární interpolací**.

Postup je jednoduchý: pro vykreslení $f(x) := 1 - x^2$ na intervalu $\langle -1, 1\rangle$

1. zvolme n vzorkovacích bodů $x_i = -1 + \frac{2}{n-1} \cdot (i-1)$, $i = 1, \ldots, n$,
2. vypočtěme vzorky $f(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$,
3. spojme sousední body $(x_i,\ f(x_i))$ a $(x_{i+1},\ f(x_{i+1}))$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, úsečkou.

Pro dobrý výsledek je nutné volit vzorkovací mřížku dostatečně hustou.



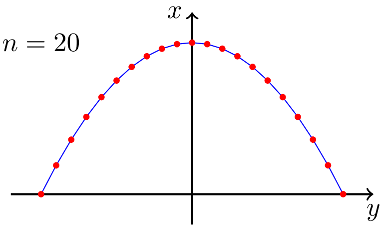
Interpolace: ukázka

Jak v těchto prezentacích vlastně vykreslujeme grafy funkcí? Většinou nejjednodušším způsobem: tzv. **lineární interpolací**.

Postup je jednoduchý: pro vykreslení $f(x) := 1 - x^2$ na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$

1. zvolme n vzorkovacích bodů $x_i = -1 + \frac{2}{n-1} \cdot (i-1)$, $i = 1, \ldots, n$,
2. vypočtěme vzorky $f(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$,
3. spojme sousední body $(x_i,\ f(x_i))$ a $(x_{i+1},\ f(x_{i+1}))$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, úsečkou.

Pro dobrý výsledek je nutné volit vzorkovací mřížku dostatečně hustou.



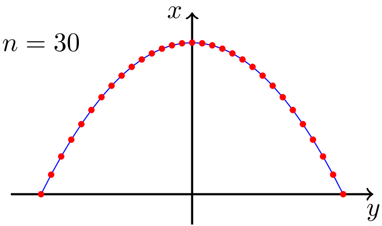
Interpolace: ukázka

Jak v těchto prezentacích vlastně vykreslujeme grafy funkcí? Většinou nejjednodušším způsobem: tzv. **lineární interpolací**.

Postup je jednoduchý: pro vykreslení $f(x) := 1 - x^2$ na intervalu $\langle -1, 1\rangle$

1. zvolme n vzorkovacích bodů $x_i = -1 + \frac{2}{n-1} \cdot (i-1)$, $i = 1, \ldots, n$,
2. vypočtěme vzorky $f(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$,
3. spojme sousední body $(x_i,\ f(x_i))$ a $(x_{i+1},\ f(x_{i+1}))$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, úsečkou.

Pro dobrý výsledek je nutné volit vzorkovací mřížku dostatečně hustou.



Interpolace: obecně

- Formálně lze úlohu **interpolace** popsat pro naše účely následovně:
- Mějme množinu $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, **bodů** v rovině $\{(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2 \mid i \in \hat{n}\}$ takových, že $x_i < x_{i+1}$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Úkolem je **nalézt spojité funkce** f_j, $j = 1, 2, \ldots, n-1$, splňující

$$f_1(x_1) = y_1, \qquad f_{n-1}(x_n) = y_n,$$
$$f_j(x_j) = f_{j+1}(x_j) = y_j, \qquad \text{pro } j = 2, 3, \ldots, n-1.$$

Interpolace: obecně

- Formálně lze úlohu **interpolace** popsat pro naše účely následovně:
- Mějme množinu $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, **bodů** v rovině $\{(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2 \mid i \in \hat{n}\}$ takových, že $x_i < x_{i+1}$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Úkolem je **nalézt spojité funkce** f_j, $j = 1, 2, \ldots, n-1$, splňující

$$
\begin{aligned}
&f_1(x_1) = y_1, && f_{n-1}(x_n) = y_n, \\
&f_j(x_j) = f_{j+1}(x_j) = y_j, && \text{pro } j = 2, 3, \ldots, n-1.
\end{aligned}
$$

- Sestrojíme-li pak funkci f s $D_f = \langle x_1, x_n \rangle$ předpisem

$$f(x) := f_j(x) \text{ pokud } x \in \langle x_j, x_{j+1} \rangle,$$

pak je tato funkce spojitá a její graf prochází všemi body (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$.

Interpolace: obecně

- Formálně lze úlohu **interpolace** popsat pro naše účely následovně:
- Mějme množinu $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, **bodů** v rovině $\{(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2 \mid i \in \hat{n}\}$ takových, že $x_i < x_{i+1}$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Úkolem je **nalézt spojité funkce** f_j, $j = 1, 2, \ldots, n-1$, splňující

$$f_1(x_1) = y_1, \qquad f_{n-1}(x_n) = y_n,$$
$$f_j(x_j) = f_{j+1}(x_j) = y_j, \qquad \text{pro } j = 2, 3, \ldots, n-1.$$

- Sestrojíme-li pak funkci f s $D_f = \langle x_1, x_n \rangle$ předpisem

$$f(x) := f_j(x) \text{ pokud } x \in \langle x_j, x_{j+1} \rangle,$$

pak je tato funkce spojitá a její graf prochází všemi body (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$.

- Samozřejmě *existuje celá řada způsobů*, jak tuto úlohu vyřešit. Typicky musíme specifikovat jaké funkce f uvažujeme a doplnit další požadavky.

Interpolace: lineární

- Spojit dva body v rovině přímkou je jednoduché. Přímka je totiž *jednoznačně* zadána dvěma body.

Interpolace: lineární

- Spojit dva body v rovině přímkou je jednoduché. Přímka je totiž *jednoznačně* zadána dvěma body.

- Pro zadané (x_i, y_i), $i \in \hat{n}$, $n \geq 2$, proto hledáme konstanty a_j, b_j, definující funkci $f_j(x) = a_j x + b_j$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$, splňující

$$
\begin{aligned}
a_1 x_1 + b_1 &= y_1, \\
a_j x_j + b_j &= y_j, \quad \text{pro } j = 2, 3, \ldots, n-1, \\
a_{j+1} x_j + b_{j+1} &= y_j, \quad \text{pro } j = 2, 3, \ldots, n-1, \\
a_{n-1} x_n + b_{n-1} &= y_n.
\end{aligned}
$$

To je ovšem soustava $(n-1) + (n-1)$ **lineárních rovnic** pro $(n-1) + (n-1)$ neznámých (konkrétně a_i, b_i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$), kterou umíme řešit nástroji Lineární algebry.

Hlavní body

Interpolace: kubická (*spline*)

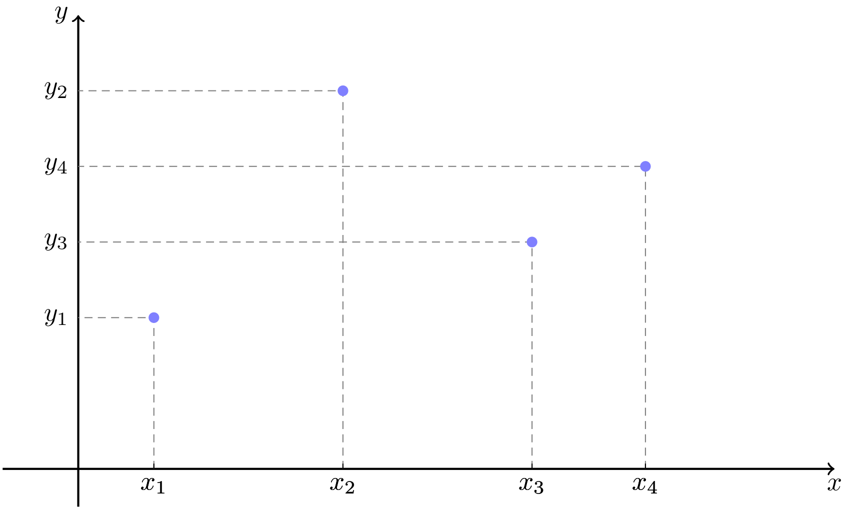
- Místo lineárních funkcí se při interpolaci často využívá polynomů **třetího stupně**, $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Jde o polynomy nejnižšího stupně mající inflexní bod.

- Polynom 3. stupně je, na rozdíl od lineární funkce, jednoznačně zadán čtyřmi parametry. Jak je volit? Očividně nyní máme více neznámých než rovnic!

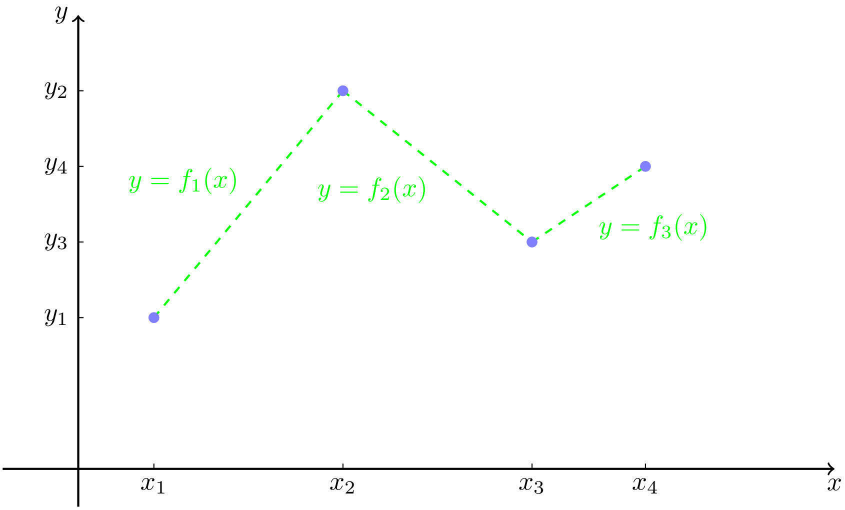
- Této volnosti využijeme k nakladení dalších podmínek, k získání „hezčího“ výsledku. Budeme chtít, aby „švy“ byly nejen spojité, ale aby na sebe jednotlivé interpolační funkce navazovaly se **stejnou derivací** (tedy sklonem).

Interpolace: kubická (*spline*)

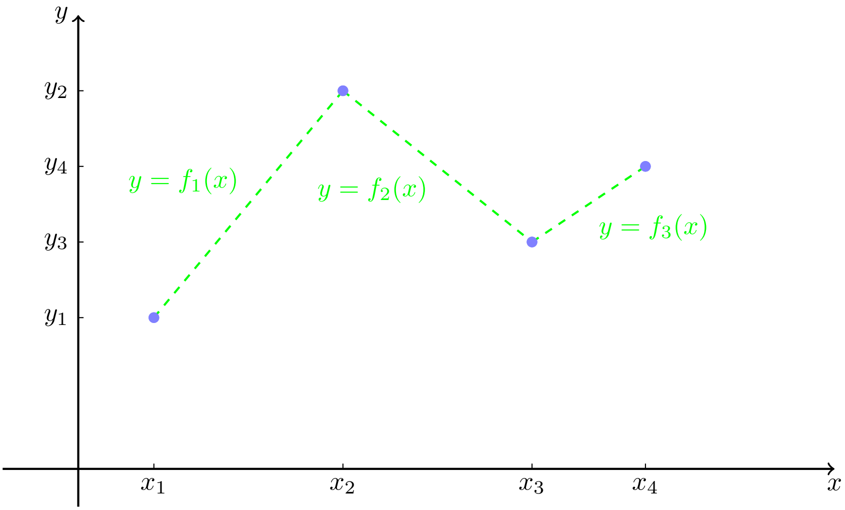
- Místo lineárních funkcí se při interpolaci často využívá polynomů **třetího stupně**, $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Jde o polynomy nejnižšího stupně mající inflexní bod.
- Polynom 3. stupně je, na rozdíl od lineární funkce, jednoznačně zadán čtyřmi parametry. Jak je volit? Očividně nyní máme více neznámých než rovnic!
- Této volnosti využijeme k nakladení dalších podmínek, k získání „hezčího“ výsledku. Budeme chtít, aby „švy“ byly nejen spojité, ale aby na sebe jednotlivé interpolační funkce navazovaly se **stejnou derivací** (tedy sklonem).
- Jako ukázkový příklad si popíšeme způsob jak interpolovat mezi čtyřmi předem zadanými body (které jsme mohli získat např. vzorkováním předem dané funkce).



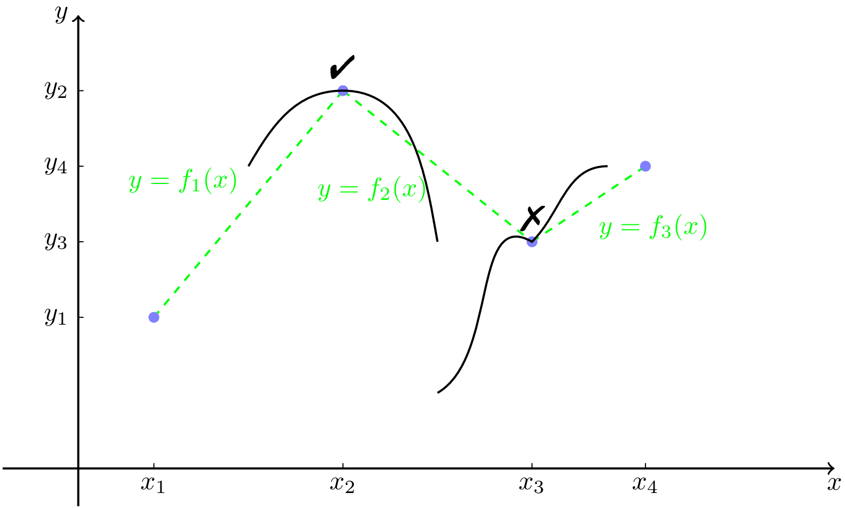
Nechť jsou zadány body (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4).



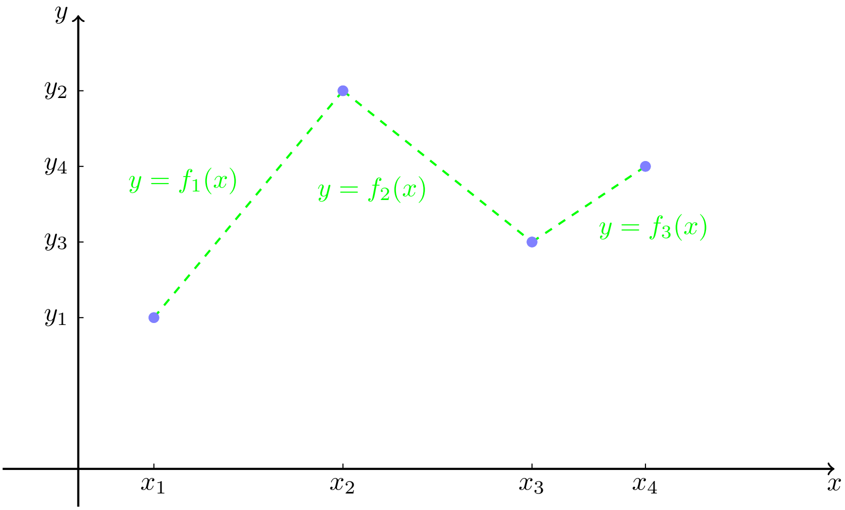
Body spojíme třemi kubickými polynomy $y = f_1(x) = a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1$ a podobně pro $y = f_2(x)$, $y = f_3(x)$. Tj. je třeba určit **12** neznámých.



Chceme, aby křivka byla „co nejhladší“. Zřejmým požadavkem tedy je (**6** rovnic) $f_1(x_1) = y_1$, $f_1(x_2) = f_2(x_2) = y_2$, $f_2(x_3) = f_3(x_3) = y_3$ a $f_3(x_4) = y_4$.

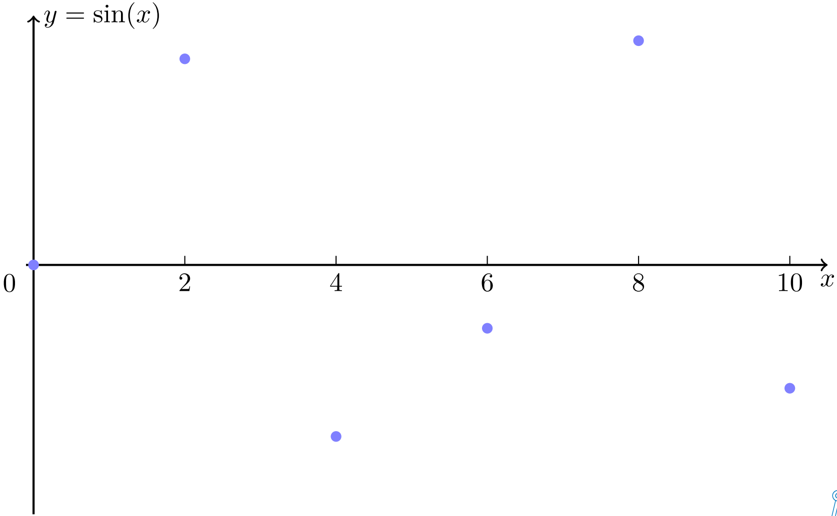


Dále požadujeme, aby na sebe křivky navazovaly se stejným sklonem, tj. $f_1'(x_2) = f_2'(x_2)$ a $f_2'(x_3) = f_3'(x_3)$, a konvexitou/konkavitou $f_1''(x_2) = f_2''(x_2)$ a $f_2''(x_3) = f_3''(x_3)$ (**4** rovnice).

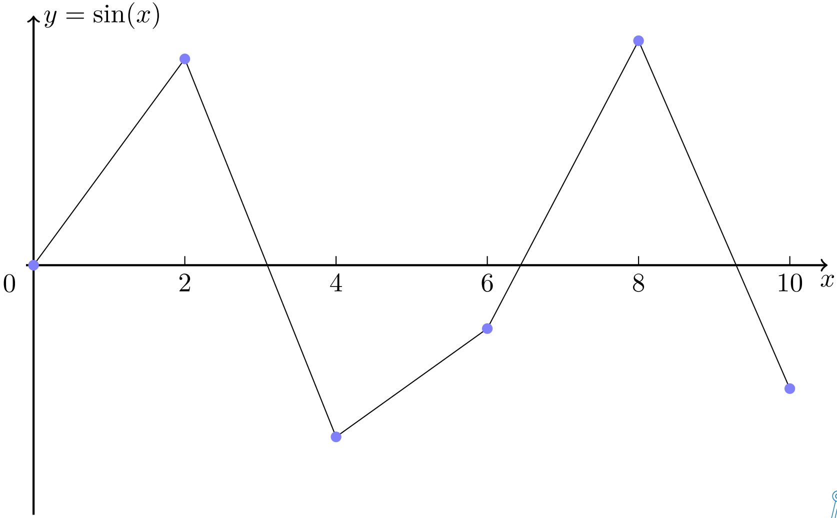


Dále můžeme po uživateli požadovat předepsání sklonů na krajích, tedy hodnoty $f_1'(x_1)$ a $f_3'(x_4)$ (**2** rovnice), zde přichází v úvahu více možných podmínek.

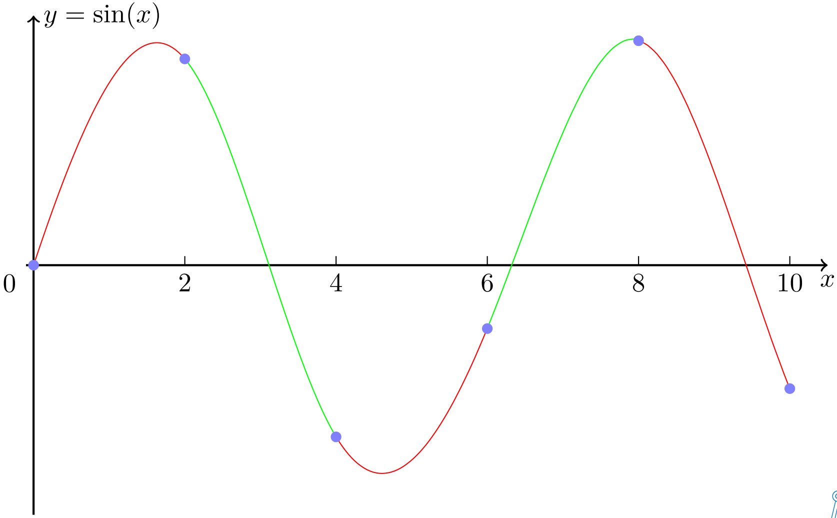
Ilustrační příklad



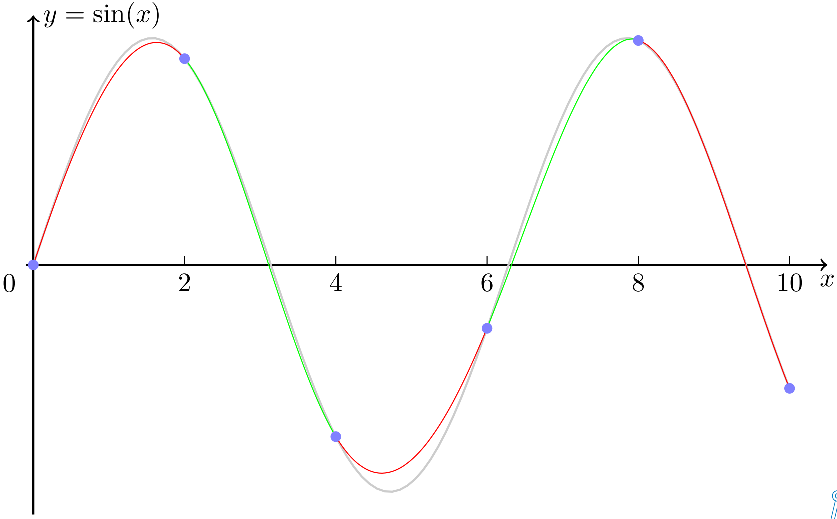
Ilustrační příklad



Ilustrační příklad



Ilustrační příklad



Hlavní body

Křivka

Jistým nedostatkem předchozích úvah je nutnost nahlížet na body jako na vzorky nějaké funkce (zleva doprava, ve vhodném souřadném systému). Obecněji můžeme chtít pouze nějakým způsobem spojit dva (a více bodů) v rovině „křivkou".

Definice (Křivka / *curve*):

Buďte f a g dvě spojité funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom zobrazení $F : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^2$ definované předpisem

$$F(t) = \big(f(t), g(t)\big), \quad t \in \langle a, b\rangle,$$

nazýváme **křivkou v** $\mathbb{R}^2$.

Křivka

Jistým nedostatkem předchozích úvah je nutnost nahlížet na body jako na vzorky nějaké funkce (zleva doprava, ve vhodném souřadném systému). Obecněji můžeme chtít pouze nějakým způsobem spojit dva (a více bodů) v rovině „křivkou“.

Definice (Křivka / *curve*):

Buďte f a g dvě spojité funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom zobrazení $F : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^2$ definované předpisem

$$F(t) = \big(f(t), g(t)\big), \quad t \in \langle a, b\rangle,$$

nazýváme **křivkou v** $\mathbb{R}^2$.

Poznámka:

Symbol v definici představuje uspořádanou dvojici dvou reálných čísel (bod v $\mathbb{R}^2$). Zobrazení F tedy každému $t \in \langle a, b\rangle$ přiřadí $F(t)$, bod v rovině $\mathbb{R}^2$.

Křivka: příklady

Příklad.

Jednoduchým příkladem může být úsečka spojující dva body $A, B \in \mathbb{R}^2$. Tu lze snadno parametrizovat předpisem

$$F(t) = A + (B - A)t, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Zde $B - A$ je směrový vektor příslušné přímky procházející oběma body. Platí $F(0) = A$ a $F(1) = B$.

Příklad.

Jako další příklad uvažme známou jednotkovou kružnici, kdy $\langle a, b \rangle = \langle 0, 2\pi \rangle$ a $F(t) = \big(\cos(t), \sin(t)\big)$.

Křivka: tečný vektor

- Každý graf spojité funkce f nad uzavřeným intervalem $J \subset D_f$ lze přirozeně chápat jako křivku s parametrizací

$$F(t) = (t, f(t)), \quad t \in J.$$

- Naopak, ne každá křivka představuje graf nějaké funkce (viz předchozí příklad kružnice).

Křivka: tečný vektor

- Každý graf spojité funkce f nad uzavřeným intervalem $J \subset D_f$ lze přirozeně chápat jako křivku s parametrizací

$$F(t) = (t, f(t)), \quad t \in J.$$

- Naopak, ne každá křivka představuje graf nějaké funkce (viz předchozí příklad kružnice).
- Místo tečny můžeme pro některé křivky zavést koncept tečného vektoru:

Definice (Tečný vektor):

Máme-li křivku $F(t) = (f(t), g(t))$, $t \in \langle a, b\rangle$ a jsou-li f a g na intervalu $\langle a, b\rangle$ diferencovatelné (v krajích bereme jednostranné derivace), pak pokud je vektor

$$F'(t) := (f'(t), g'(t)), \quad t \in \langle a, b\rangle$$

nenulový, tak ho nazýváme **tečným vektorem křivky F v bodě $F(t)$**.

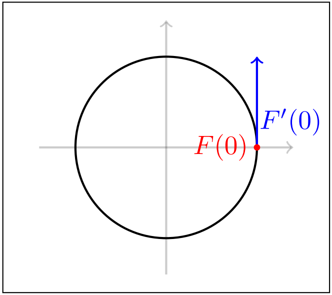
Křivka: tečný vektor

Ukažme si předchozí definici tečného vektoru na konkrétním případě jednotkové kružnice. Tu jsme parametrizovali předpisem

$$F(t) = \big(\cos(t), \sin(t)\big), \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Potom máme

$$F'(t) = \big(-\sin(t), \cos(t)\big), \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$



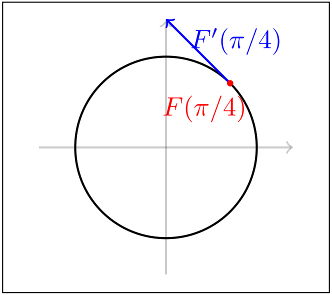
Křivka: tečný vektor

Ukažme si předchozí definici tečného vektoru na konkrétním případě jednotkové kružnice. Tu jsme parametrizovali předpisem

$$F(t) = \big(\cos(t), \sin(t)\big), \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Potom máme

$$F'(t) = \big(-\sin(t), \cos(t)\big), \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$



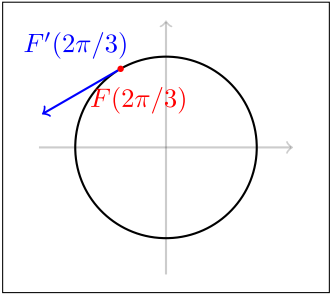
Křivka: tečný vektor

Ukažme si předchozí definici tečného vektoru na konkrétním případě jednotkové kružnice. Tu jsme parametrizovali předpisem

$$F(t) = \big(\cos(t), \sin(t)\big), \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Potom máme

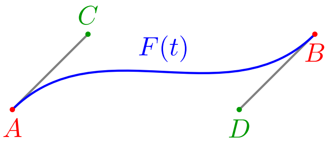
$$F'(t) = \big(-\sin(t), \cos(t)\big), \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$



Hlavní body

Bézierovy křivky

- Známým příkladem křivek jsou Bézierovy křivky. V této sekci se s nimi krátce seznámíme.
- Asi jste s nimi pracovali v nějakém grafickém editoru v následující jednoduché formě: Jsou zadány dva body A a B v rovině, které chceme spojit **křivkou** a další dva body C a D, které udávají **tečný vektor** s kterým bod A opouštíme (C) a pod kterým do B vstupujeme (D):



- Tímto způsobem je předepsáno **osm** reálných hodnot (dva body $\mathbb{R}^2$ a dva vektory $\mathbb{R}^2$). Je proto přirozené hledat složky $F(t)$ jako **kubické polynomy** (**osm** reálných koeficientů). Opět se tak dostáváme ke kubické interpolaci.

Bézierovy křivky

Bézierovy křivky lze systematicky popsat následujícím obecným způsobem.

Definice (Bernsteinův polynom):

Pro $n \in \mathbb{N}_0$ a celočíselné i splňující $0 \leq i \leq n$ definujeme Bernsteinův polynom $B_{i,n}$ předpisem

$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

N.B.: $B_{i,n}(0) = \delta_{i,0}$ a $B_{i,n}(1) = \delta_{i,n}$.

Bézierovy křivky

Bézierovy křivky lze systematicky popsat následujícím obecným způsobem.

Definice (Bernsteinův polynom):

Pro $n \in \mathbb{N}_0$ a celočíselné i splňující $0 \leq i \leq n$ definujeme Bernsteinův polynom $B_{i,n}$ předpisem

$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

N.B.: $B_{i,n}(0) = \delta_{i,0}$ a $B_{i,n}(1) = \delta_{i,n}$.

Definice (Bézierova křivka):

Pro $n+1$ kontrolních bodů $P_0, P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{R}^2$ definujeme křivku C předpisem

$$C(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i B_{i,n}(t), \quad t \in \langle 0, 1 \rangle,$$

a nazýváme ji Bézierovou křivkou s kontrolními body $P_0, P_1, \ldots, P_n$.

N.B.: $C(0) = P_0$ a $C(1) = P_n$.

Kvadratická Bézierova křivka

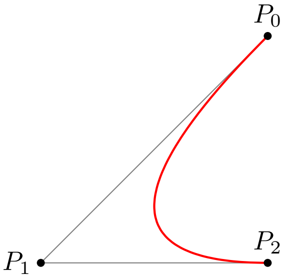
Uvažme například tři body

$$P_0 = (1,2),\ P_1 = (-2,-1),\ P_2 = (1,-1).$$

Potom

$$C(t) = P_0(1-t)^2 + P_1 \cdot 2t(1-t) + P_2 t^2 = \\ = \Big(1 - 6t + 6t^2,\ 2 - 6t + 3t^2\Big).$$

kde $t \in \langle 0, 1 \rangle$.

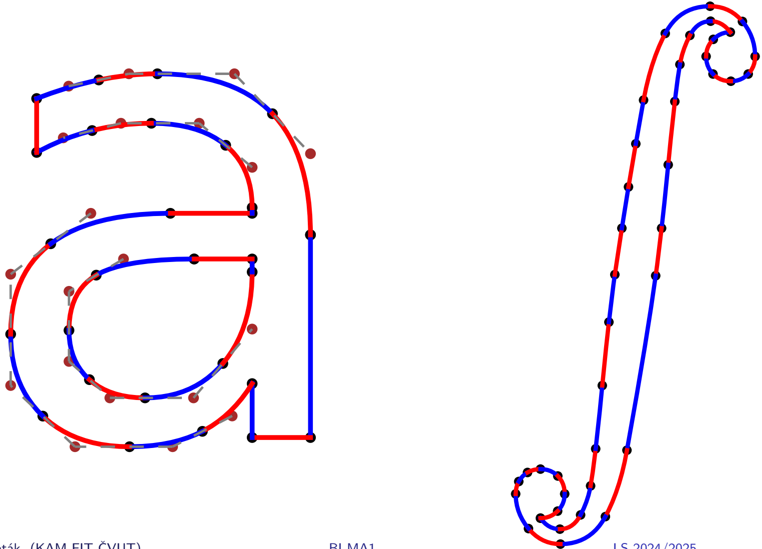


Bézierovy křivky v TrueType Fontech

Extrakt z `DejaVuSans.ttf`, písmeno „a“:

```
<TTGlyph name="a" xMin="123" yMin="-29" xMax="1069" yMax="1147"/>
  <contour>
    <pt x="702" y="563" on="1"/>
    <pt x="479" y="563" on="0"/>
    <pt x="307" y="461" on="0"/>
    <pt x="307" y="338" on="1"/>
    ...
    <pt x="885" y="563" on="1"/>
  </contour>
  <contour>
    <pt x="1069" y="639" on="1"/>
    <pt x="1069" y="0" on="1"/>
    <pt x="885" y="0" on="1"/>
    ...
    <pt x="1069" y="895" on="0"/>
  </contour>
</TTGlyph>
```

Bézierovy křivky v TrueType Fontech



Hlavní body

5 Dodatek

Komentář

- Tématu interpolace jsme zde jen lehce dotkli.
- Např. *Mathematica* ve výchozím nastavení používá při vykreslování kubickou interpolaci navzorkovaných bodů.
- Dalším nástrojem, který se k interpolaci často používá, jsou tzv. Lagrangeovy interpolační polynomy.