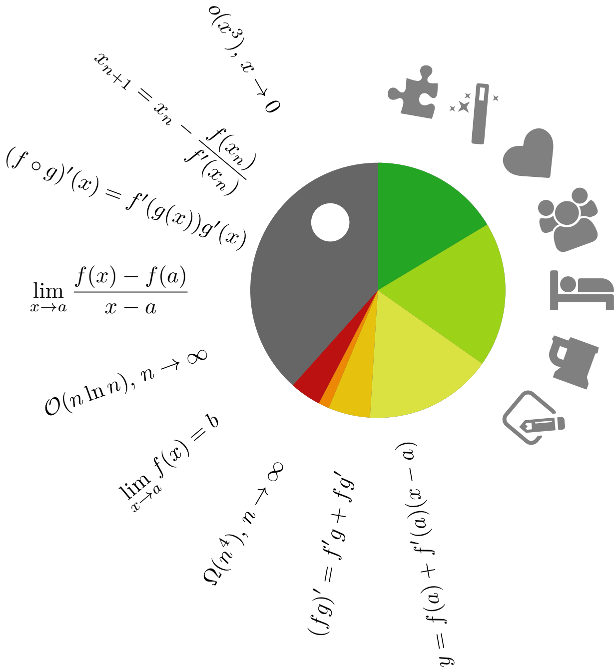
Matematická analýza 1

Pavel Hrabák[1]

Tomáš Kalvoda[2]

Ivo Petr[3]

[1]KAM FIT ČVUT, pavel.hrabak@fit.cvut.cz
[2]KAM FIT ČVUT, tomas.kalvoda@fit.cvut.cz
[3]KAM FIT ČVUT, ivo.petr@fit.cvut.cz



Letní semestr 2024/2025, 13. března 2025

Vysázeno pomocí LaTeX
Zdroj připraven pomocí WooWoo verze 0.4.4 a FIT PDF Templa
v0.2.7
zdrojový kód a hlášení chyb
katalog pojmů a tvrzení
Tomáš Kalvoda, KAM FIT ČVUT, 2017–2024

Obsah

1 Úvod

1.1 Obecné poznámky

Tento dokument doplňuje slidy k přednášce předmětu Matematická analýza 1 (BI--MA1) na Fakultě informačních technologií (FIT) Českého vysokého učení technického v Praze (ČVUT). Přednášky předmětu se opírají o slidy, které slouží primárně jako doplněk k živé prezentaci a příliš se nehodí ke studiu či tisku. Slidy zejména neobsahují vysvětlující komentáře přednášejícího a mohou být proto bez těchto podpůrných informací nejasné, až matoucí. V tomto textu je uvedeno vše co na slidech, včetně dalších dodatečných informací a zajímavostí.

Nejprve je vhodné seznámit milé čtenářstvo s historií výuky matematické analýzy na FIT. Jednosemestrální předmět Základy matematické analýzy (BI-ZMA), předchůdce BI-MA1 a BI-MA2, byl po zrodu fakulty nejprve vyučován pod vedením prof. Ing. Edity Pelantové, CSc. (KM FJFI). Poté předmět převzali Ing. Tomáš Kalvoda, PhD. a doc. RNDr. Jaroslav Milota, CSc. V roce 2021 byl při reakreditaci studijního programu tento předmět rozdělen a přepracován do dvousemestrálního kurzu Matematická analýza 1 a 2. V prvních dvou bězích byl přednášen Ing. Tomáše Kalvodou, Ph.D. a Ing. Ivo Petrem, Ph.D. Aktuální letní semestr došlo ke změně a druhého zmíněného přednášejícího vystřídal RNDr. Pavel Paták, Ph.D. Tento text, a pojetí výuky vůbec, jsou výsledkem tohoto postupného vývoje.

Informace týkající se samotné organizace předmětu, jako například podmínky získání zápočtu a složení zkoušky, jsou uvedeny na oficiálních stránkách předmětu BI-MA1. Studentům je dále k dispozici elektronická cvičebnice příkladů MARAST, kde lze najít příklady, přípravy pro prosemináře a i procvičovací kvízy. Dále jsou zájemcům k dispozici Anki kartičky s pojmy a tvrzeními a myšlenková mapa pojmů a tvrzení.

1.2 Poznámky k obsahu

O Matematické analýze bylo napsáno již mnoho učebnic, skript a knih s rozmanitými přístupy k problematice a různé úrovně. Případným zájemcům o další studium, či alternativní způsob výkladu, lze doporučit publikace [4] a [5]. Ze zahraniční literatury by našeho čtenáře mohly zaujmout knížky [7], [8], [1], či [6]. Tyto knihy ovšem pokrývají podstatně více látky než tento text. Je proto nutné při jejich využití vycházet z materiálů určených pro tento předmět. Zájemce o motivačně bohatý text pokrývající i historické detaily týkající se této látky lze doporučit vynikající knížku [9].

V letním semestru se v BI-MA1 postupně zabýváme

1. číselnými množinami, zejména reálnými čísly (Kapitola 2),
2. reálnými funkcemi jedné reálné proměnné a reálnými číselnými posloupnostmi (Kapitola 3 a 4),
3. limitami funkcí a posloupností a úzce souvisejícím konceptem spojitosti funkce (Kapitoly 5, 6 a 7),
4. hlavním výsledkem je pak diferenciální počet funkce jedné reálné proměnné (*differential calculus*; Kapitoly 8 a 9), kde se protíná několik témat z dřívějších kapitol,
5. v neposlední řadě se snažíme ve zbývajícím čase probrat i některé zajímavé aplikace vybudované teorie (Kapitola 10).

1.3 Formální náležitosti

Tento úvod využijeme k seznámení čtenáře s formálními náležitostmi tohoto dokumentu. Pro větší přehlednost a zvýraznění logické struktury látky je výklad standardně členěn do definic, vět a dalších tvrzení, důkazů, příkladů a občas i poznámek. Připomeňme čtenáři význam takto označených částí textu:

- *Definice* ukotvuje definovaný pojem. V celém textu má od tohoto okamžiku daný pojem jednoznačný význam (porovnejte s definicí funkce/metody ve zdrojovém kódu vašeho oblíbeného programovacího jazyka).

- *Věta* (případně *Tvrzení*, *Důsledek*, *Lemma*) obsahuje tvrzení o již dříve definovaných pojmech.
- *Důkaz* je argument postavený na logických pravidlech zaručující pravdivost daného tvrzení (věty, důsledku či lemmatu). Jde v podstatě o certifikát pravdivosti. Jedná se také o vynikající okamžik pro otestování chápání látky, důkazy jsou podstatnou částí každého matematického dílka.

Pouze ze začátku výkladu některé pojmy, které by studentům měly být známy už z dřívějšího studia, explicitně neformulujeme jako samostatné definice, ale stručně je pouze připomínáme přímo v textu[1].

Rovnice, obrázky a matematické objekty jsou v textu číslovány v rámci kapitol. Odkaz na rovnici poznáte podle závorek, např. (2.1) je odkaz na první číslovanou rovnici v druhé kapitole. Konec důkazů označujeme symbolem[2] □. Na konci tohoto dokumentu je čtenáři k dispozici seznam používaných symbolů (Kapitola 14) se stručným vysvětlením významu, rejstřík pojmů pro pohodlnější vyhledávání a seznam zajímavých odkazů na literaturu. Dále je hlavní text doplněn dvěma dodatky (Kapitoly 11 a 12), které obsahují shrnutí základních vlastností zobrazení a elementárních funkcí.

V textu se také průběžně vyskytují „otázky“, které kontrolují čtenářovo porozumění. Odpovědi na tyto otázky naleznete na konci PDF nebo je lze rovnou rozkliknout v HTML verzi dokumentu.

Pokud laskavý čtenář nebo čtenářka v textu objeví nejasnosti či chyby, nechť je prosím hlásí formou *issue* v BI-MA1 repozitář na fakultním gitlabu. Alternativně k tomuto účelu může využít i email (tomas.kalvoda@fit.cvut.cz). Tento úvod zakončíme motivačním citátem.

> *The calculus was the first achievement of modern mathematics and it is difficult to overestimate its importance. I think it defines more unequivocally than anything else the inception of modern mathematics; and the system of mathematical analysis, which is its logical development, still constitutes the greatest technical advance in exact thinking.*
>
> *John von Neumann*

[1] Stále by však takovéto pojmy měly být dohledatelné v indexu.

[2] Tzv. Halmosův náhrobek. Paul Halmos (1916 – 2006) byl americký matematik maďarského původu.

2 Reálná čísla

V tomto kurzu předpokládáme, že čtenář je již seznámen se základními způsoby zadání množin (výčtem, vlastností), množinovými operacemi (průnik, sjednocení, rozdíl a doplněk) a orientuje se mezi číselnými množinami (přirozená, celá, racionální a reálná čísla – těm se ale v této kapitole budeme věnovat znovu a podrobněji). Dále na straně čtenáře předpokládáme znalost vlastností elementárních funkcí (polynomiální, racionální, mocninné, exponenciální, logaritmické a trigonometrické). V neposlední řadě též vyžadujeme znalost základních kombinatorických vztahů, to jest definici a kombinatorický význam faktoriálu, kombinačního čísla či znalost binomické věty. Z předchozího studia také vyžadujeme znalost zobrazení a souvisejících pojmů.

Pokud si čtenář v některých z těchto zmíněných partiích není jistý, může si znalosti osvěžit například v prázdninovém Přípravném kurzu matematiky (BI-PKM) nebo s pomocí své oblíbené učebnice středoškolské matematiky. Pro pohodlí čtenáře a pro zafixování notace některé z těchto partií látky stručně shrnujeme v Kapitole 11 a Kapitole 12 Některá z těchto témat jsou i obsahem prvního prosemináře, který chápeme jako úvodní rozcvičku před hlavními tématy semestru. V neposlední řadě je dobré si osvěžit některé partie prvosemestrálních předmětů BI-DML a BI-LA1.

Náš výklad nyní zahájíme axiomatickým[1] popisem množiny reálných čísel, která v našem výkladu matematické analýzy představuje ústřední pojem. V průběhu tohoto a příštího semestru budeme totiž studovat

- reálné číselné posloupnosti (Kapitola 4),
- reálné funkce jedné reálné proměnné (Kapitola 3),
- reálné číselné řady (BI-MA2, kapitola),
- reálné funkce více reálných proměnných (BI-MA2, kapitola).

[1] Samotné kontrukci množiny reálných čísel se nevěnujeme.

Je tedy očividné, že znalost vlastností množiny reálných čísel budeme intenzivně využívat. Množinu reálných čísel nejprve představíme jako přirozené rozšíření množiny racionálních čísel.

Mezi hlavní výsledky této kapitoly, které by si studenti a studentky měli odnést z této kapitoly, resp. které by si měli případně osvěžit, patří zejména následující body:

- orientace mezi číselnými množinami, chápání zásadní rozdílnosti mezi množinou racionálních čísel $\mathbb{Q}$ a množinou reálných čísel $\mathbb{R}$,
- osvojení si algebraických operací v rozšířené reálné ose $\overline{\mathbb{R}}$,
- osvojení si pojmů okolí bodu a hromadného bodu množiny,
- chápání zásadního rozdílu mezi množinou tzv. strojových čísel a $\mathbb{R}$.

2.1 Přirozená, celá a racionální čísla

Varování 2.1: V tomto textu symbol $\subset$ používáme ve smyslu neostré inkluze, tj. každá množina A je pro nás podmnožinou sama sebe, platí $A \subset A$. Pokud chceme zdůraznit, že dvě množiny v tomto vztahu jsou vzájemně různé, tak použijeme symbolu $\subsetneq$. Tj. žádná množina A nesplní $A \subsetneq A$. V tomto textu tento symbol používáme ale jen velmi výjimečně.

Označme $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ množinu přirozených čísel, $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ množinu celých čísel a $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \text{ a } p, q \text{ jsou nesoudělná} \right\}$ množinu racionálních čísel. Na těchto množinách, které jsou v množinovém vztahu $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q}$, umíme přirozeně sčítat a násobit, přičemž všechny tři množiny jsou vůči těmto operacím *uzavřené*[2]. Tyto operace dále pro každé $a, b, c \in \mathbb{Q}$ (nebo $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{N}$) splňují:

$$
\begin{aligned}
a + b &= b + a, & a \cdot b &= b \cdot a, && \text{(komutativita)},\\
a + (b + c) &= (a + b) + c, & a \cdot (b \cdot c) &= (a \cdot b) \cdot c, && \text{(asociativita)},\\
a \cdot (b + c) &= (a \cdot b) + (a \cdot c), & & && \text{(distributivita)}.
\end{aligned}
$$

V souladu se zažitou konvencí zavádíme přednost násobení před sčítáním a distributivitu, proto bez nebezpečí nedorozumění můžeme zkráceně zapsat také bez

[2]To znamená, že výsledek operace nad čísly z dané množiny je opět číslo z této množiny.

uzávorkování na pravé straně, tedy

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Poznámka 2.1: Priorita operací je v programovacích jazycích známa pod termínem *operator precedence*. Viz např. prioritu operátorů v jazyce C. Uvědomte si, že bez zavedení této konvence například výraz $3 \cdot 5 + 7$ nemá smysl – nelze ho jednoznačně interpretovat. Tento postřeh není vázán pouze na sčítání a násobení reálných čísel. I když tato poznámka může znít triviálně, existuje řada studentů, kteří se ve svých úvahách právě kvůli lajdáckému závorkování dostanou do potíží[3].

„Inverzními" operacemi ke sčítání a násobení jsou odčítání a dělení nenulovým číslem. Vůči nim však nejsou všechny výše uvedené množiny uzavřené. Jak už víme, přirozená čísla můžeme bez omezení pouze sčítat a násobit, aniž bychom množinu přirozených čísel opustili. Celá čísla můžeme bez omezení navíc odčítat a racionální čísla odčítat a dělit jakýmkoli nenulovým racionálním číslem. Znamená to tedy, že v $\mathbb{Z}$ můžeme (jednoznačně) řešit rovnice typu

$$a + x = b, \quad a, b \in \mathbb{Z},$$

pro neznámou $x \in \mathbb{Z}$. Toto nelze říct o množině přirozených čísel (rovnice $x + 5 = 3$ pro neznámou x nemá mezi přirozenými čísly řešení). Podobně v $\mathbb{Q}$ můžeme řešit rovnice typu

$$q \cdot x = p, \quad p, q \in \mathbb{Q}, \ q \neq 0,$$

pro neznámou $x \in \mathbb{Q}$. Toto tvrzení ale neplatí o celých číslech (rovnice $4x = 5$ nemá celočíselné řešení x).

Poznámka 2.2 (Co to všechno znamená?)**:** Za tímto rozšiřováním číselných množin je možné vidět praktickou potřebu popisu stále sofistikovanějších reálných situací. Přirozená čísla nám postačí k popisu počtu stejných objektů (deset krav, jeden vlk atp.). V jejich rámci už ale snadno nevyjádříme např. koncept „dluhu". Tento problém odstraňují celá čísla. Pomocí celých čísel ale nejsme jednoduše schopni popisovat části celků (půl koláče, tři pětiny senátu atp.). Tento nedostatek odstraňují racionální čísla. S jejich pomocí můžeme snadno pracovat se zlomky (částmi) celků. Za chvilku si ukážeme i motivaci pro přechod od racionálních k reálným číslům. Tento přechod bude motivován v podstatě geometrickými úvahami.

[3] Ty mohou být drobné, ale i fatální.

Podívejme se nyní podrobněji na algebraickou[4] strukturu racionálních čísel. Mezi racionálními čísly existují čísla 0 (nula) a 1 (jedna) splňující

$$a + 0 = 0 + a = a \quad \text{a} \quad a \cdot 1 = 1 \cdot a = a,$$

pro každé $a \in \mathbb{Q}$. Dále ke každému $a = \frac{q}{p} \in \mathbb{Q}$ existuje číslo $-a = \frac{-q}{p} \in \mathbb{Q}$ splňující $a + (-a) = (-a) + a = 0$. Podobně, ke každému nenulovému číslu $a = \frac{q}{p} \in \mathbb{Q}$ existuje číslo $a^{-1} = \frac{p \operatorname{sgn} q}{|q|} \in \mathbb{Q}$ splňující $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$.

V předchozích odstavcích jsme si ukázali, že množina racionálních čísel spolu s operacemi sčítání a násobení splňuje asociativní, distributivní a komutativní zákony, existují v ní prvky 0 a 1 a opačné, resp. inverzní, prvky popsané výše. To znamená, že racionální čísla spolu s operacemi sčítání a násobení tvoří **číselné těleso**. S tímto pojmem jste se již setkali v (BI-LA1, Definice).

Všechny tyto vlastnosti tělesa $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ lze pomocí grupové terminologie (viz BI-LA1) kompaktně vyjádřit následujícími požadavky:

- $(\mathbb{Q}, +)$ je Abelovská grupa s neutrálním prvkem 0 (nula),
- $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ je Abelovská grupa s neutrálním prvkem 1 (jednička),
- platí distributivita násobení vůči sčítání.

Otázka 2.1: Tvoří přirozená čísla spolu s operacemi sčítání a násobení těleso? A jak je tomu v případě celých čísel?

Uspořádání racionálních čísel

Vraťme se zpět k racionálním číslům. Vedle výše zmíněných algebraických vlastností mají racionální čísla další zajímavé vlastnosti. Racionální čísla lze porovnávat podle velikosti. Jsou-li a a b racionální čísla, pak zápisem $a < b$ vyjadřujeme, že číslo a je (ostře) menší než číslo b, a tuto vlastnost definujeme jako

$$a < b, \quad \text{právě když} \quad 0 < b - a, \tag{2.1}$$

přičemž pro racionální číslo $c = b - a$ zapsané v základním tvaru jako $c = \frac{p}{q}$ platí $c > 0$, právě když $p, q \in \mathbb{N}$ (čitatel i jmenovatel jsou kladná přirozená čísla).

[4]Tj. co se sčítání/odčítání a násobení/dělení týče.

Takto zavedené porovnání (označované symbolem $<$) představuje relaci (ostrého) *uspořádání* na $\mathbb{Q}$, která je *úplná*, tj. pro libovolná dvě různá racionální čísla a a b lze rozhodnout, zdali $a < b$, nebo $b < a$. Když $b < a$, tak říkáme, že a je (ostře) větší než b, a zapisujeme $a > b$.

Tato relace uspořádání $<$ je svázána s operací sčítání a násobení známými středoškolskými pravidly pro počítání s nerovnicemi. Připomeňme, že pro každé $a, b, c \in \mathbb{Q}$ platí tvrzení

$$a < b \quad \Rightarrow \quad a + c < b + c, \tag{2.2}$$

a

$$a > 0 \wedge b > 0 \quad \Rightarrow \quad a \cdot b > 0.$$

Z těchto vlastností lze snadno odvodit další známé vztahy, jako například

$$a < b \wedge c > 0 \quad \Rightarrow \quad a \cdot c < b \cdot c$$

a

$$a < b \wedge c < 0 \quad \Rightarrow \quad a \cdot c > b \cdot c$$

platné pro každé racionální a, b a c. Vzpomeňte si na středoškolské úlohy na řešení nerovnic.

Otázka 2.2: Pokud platí nerovnost $a < b$ pro dvě reálná čísla $a, b \in \mathbb{R}$, plyne odtud pak nerovnost $a^2 < b^2$?

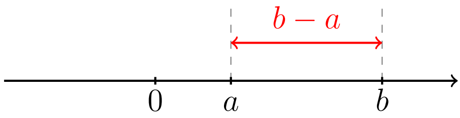
Otázka 2.3: Pomocí výše definovaného uspořádání $<$ na množině racionálních čísel (viz rovnici (2.1) a text hned pod ní) dokažte implikaci (2.2).

Otázka 2.4: Pomocí výše zmíněné definice uspořádání prvků množiny $\mathbb{Q}$ dokažte, že $\frac{7}{8} < \frac{8}{7}$.

Poznámka 2.3: Pomocí uspořádání $<$ můžeme zavést také (neostré) uspořádání $a \leq b$, ekvivalentní platnosti $a < b$ nebo $a = b$. Pod $a \geq b$ máme pak přirozeně na mysli $b \leq a$.

Otázka 2.5: Předpokládejme, že máme racionální čísla a a b splňující $a < b$. Platí potom nutně i nerovnost $a \leq b$?

Díky existenci úplného uspořádání $<$ na množině $\mathbb{Q}$ si můžeme racionální čísla geometricky představovat jako **body** na číselné ose, viz Obrázek 2.1. Skutečně, protože umíme každé racionální číslo porovnat s každým jiným racionálním číslem,



Obrázek 2.1: Číselná osa s body $a, b \in \mathbb{Q}$. Zde $a < b$ a proto vzdálenost b od a je $b - a$.

můžeme je tímto způsobem uspořádat *na přímce*. Bez tohoto úplného uspořádání bychom k takovémuto lineárnímu znázornění racionálních čísel neměli žádné opodstatnění.

Neúplnost racionálních čísel

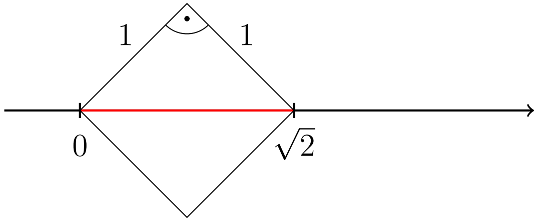
Jak již bylo zmíněno, racionální čísla obvykle graficky znázorňujeme jako body na tzv. **číselné ose**, tj. na přímce s vyznačeným počátkem odpovídajícím číslu 0. Na Obrázku 2.1 je tímto způsobem znázorněno uspořádání dvou racionálních čísel a jejich vzdálenost.

V tomto geometrickém znázornění racionálních čísel je každému racionálnímu číslu přiřazen jeden bod na číselné ose. Opak však *neplatí*. Existují body na této idealizované přímce[5], které neodpovídají žádnému racionálnímu číslu. Pokud by číselná osa byla tvořena pouze racionálními čísly, byla by „děravá“. Ilustrujme toto tvrzení na následujícím příkladu.

Příklad 2.1: Neexistuje kladné racionální řešení rovnice $x^2 = 2$. Geometricky toto tvrzení odpovídá nemožnosti popsat bod odpovídající konci úhlopříčky čtverce o straně s velikostí 1 otočeného o $45°$ a s vrcholem v bodě 0 pomocí racionálního čísla, viz Obrázek 2.2.

Dokažme toto tvrzení **sporem**. Předpokládejme opak, tj. že existují nesoudělná $p, q \in \mathbb{N}$ splňující $p/q = \sqrt{2}$. Potom $(p/q)^2 = 2$ a tudíž p^2 $(= 2q^2)$ je nutně sudé číslo, čili i p je sudé. Lze ho proto vyjádřit ve tvaru $p = 2k$, kde $k \in \mathbb{N}$. Potom ale platí $p^2 = 4k^2 = 2q^2$, resp. $2k^2 = q^2$. Číslo q^2 a tedy i q je proto sudé. To ale znamená, že p a q jsou soudělná (obě jsou dělitelná číslem 2), což je ale spor s naším předpokladem nesoudělnosti p a q.

[5] Pojem bodu na číselné ose zde chápeme intuitivně. Korektní matematická definice již ve skutečnosti využívá reálných čísel.



Obrázek 2.2: Bod na **číselné ose** odpovídající „číslu" $\sqrt{2}$ lze zjevně zkonstruovat pomocí úhlopříčky čtverce o straně délky 1. Lze ho ale *popsat* pomocí racionálního čísla? Příklad 2.1 ukazuje, že ne.

Poznámka 2.4: Dále si povšimněme, že ačkoliv symbol $\sqrt{2}$ pro nás má dobrý geometrický význam (délka úhlopříčky čtverce o straně délky 1) a označujeme jím kladné reálné řešení algebraické rovnice $x^2 = 2$, tak vůbec v tento okamžik není jasné, jakou má vlastně numerickou hodnotu! Tomuto důležitému tématu se budeme věnovat později během semestru.

2.2 Axiom úplnosti a reálná čísla

Nyní ukážeme, jak obecně zformulovat v tento okamžik vágní požadavek „bezděrovosti" číselné osy. Předpokládejme, že máme množinu $\mathbb{R}$, která obsahuje racionální čísla, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, a máme na ní definované operace násobení, sčítání, jejich „inverze" (odčítání a dělení) a také uspořádání $<$ a všechny tyto operace mají *stejné* vlastnosti jako u racionálních čísel (tj. jedná se o **úplně uspořádané číselné těleso**, viz výše).

Absolutní hodnota a vzdálenost reálných čísel

Uspořádání $<$ množiny $\mathbb{R}$ nám nyní umožňuje definovat veledůležitý pojem absolutní hodnoty a vzdálenosti mezi body $\mathbb{R}$. **Vzdálenost** dvou reálných čísel a a b definujeme jako hodnotu $|a-b|$, kde $|x|$ je **absolutní hodnota** $x \in \mathbb{R}$ definovaná vztahem

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{pro } x \geq 0, \\ -x, & \text{pro } x < 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Tento zápis je třeba číst takto: hodnota $|x|$ je definována jako x, pokud x je nezáporné, a jako $-x$, pokud x je záporné. Způsob zápisu použitý v rovnici (2.3) je poměrně častý a ještě na něj několikrát narazíme. V oblíbeném programovacím jazyce Python bychom například psali

```
def abs(x):
  if x >= 0:
    return x
  elif x < 0:
    return -x
```

Otázka 2.6: Uvažme funkci

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x^2 > 1, \\ 2, & x \in \left\langle -1, \frac{1}{2} \right) , \\ 3, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete hodnoty $f(-1/2)$, $f(-2)$ a $f(1)$.

Absolutní hodnota splňuje řadu důležitých vlastností, přímo z definiční rovnosti (2.3) snadno nahlédnete následující vztahy:

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|, \quad |-a| = |a| \quad \text{a} \quad |a/c| = |a|/|c|,$$

platné pro každé reálné a, b a nenulové c. Dále z definice okamžitě plynou nerovnosti

$$-|a| \leq a \leq |a|, \tag{2.4}$$

platné pro každé $a \in \mathbb{R}$.

Další fundamentální vlastností absolutní hodnoty je tzv. trojúhelníková nerovnost, kterou během semestru několikrát v důležité okamžiky využijeme.

Věta 2.1 (Trojúhelníková nerovnost)**:** Pro libovolná reálná a a b platí nerovnost

$$|a + b| \leq |a| + |b|. \tag{2.5}$$

Důkaz. Využijeme nerovností (2.4), tj. $a \leq |a|$ a $-a \leq |a|$ platné pro libovolné $a \in \mathbb{R}$. Uvažme libovolné $a, b \in \mathbb{R}$. Pokud $a + b \geq 0$, potom $|a + b| = a + b \leq |a| + |b|$. Je-li $a + b < 0$, potom $|a + b| = -(a + b) = -a + (-b) \leq |a| + |b|$. □

Absolutní hodnota oplývá ještě jednou užitečnou vlastností, kterou použijeme později během semestru. Jde o další nerovnost, kterou si zformulujeme jako tvrzení.

Tvrzení 2.1 (O absolutní hodnotě rozdílu absolutních hodnot)**:** Pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$.

Důkaz. Skutečně, díky trojúhelníkové nerovnosti platí

$$|x| - |y| = |x - y + y| - |y| \leq |x - y| + |y| - |y| = |x - y|$$

a po prohození x za y a jednoduché úpravě pak i $|x| - |y| \geq -|x - y|$. Čili dohromady $-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y|$, což je ekvivalentní dokazovanému tvrzení. $\square$

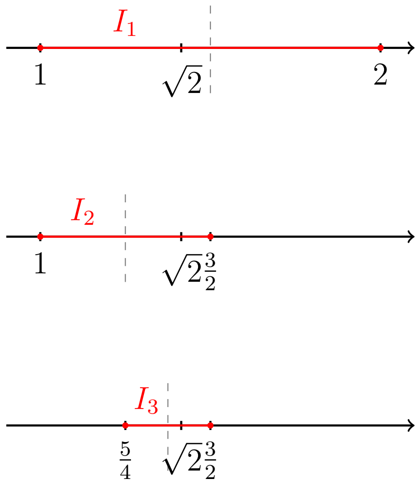
Bezděrovost reálné osy

Než se pustíme do formulace axiomu úplnosti, musíme zavést, či připomenout, ještě jeden důležitý pojem. Pro $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, označme $\langle a, b\rangle := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ a nazvěme tuto množinu **uzavřeným intervalem** a body a, b koncovými body tohoto intervalu. **Délkou intervalu** $\langle a, b\rangle$ nazýváme číslo $|b - a|$, tj. vzdálenost jeho koncových bodů. K dalším typům intervalů se vrátíme ještě v Podkapitole 2.4. Z vlastností absolutní hodnoty, které jsou stejné jako pro racionální čísla, plyne nerovnost $|x - y| \leq |b - a|$ platná pro každé $x, y \in \langle a, b\rangle$.

Vraťme se nyní k Příkladu 2.1 a číslu $\sqrt{2}$. Předpokládejme, že $\mathbb{R}$ již obsahuje kladné řešení rovnice $x^2 = 2$, které značíme $\sqrt{2}$. Pro $\sqrt{2}$ musí platit $\sqrt{2} \in \langle 1, 2\rangle = I_1$ (protože $a < 1$ implikuje $a^2 < a \cdot 1 < 1$ a $a > 2$ implikuje $a^2 > a \cdot 2 > 2$, tudíž pro $\sqrt{2}$ nemůže platit ani $\sqrt{2} < 1$, ani $\sqrt{2} > 2$). Rozpůlením I_1 podobným způsobem zjistíme, že $\sqrt{2} \in \langle 1, \frac{3}{2}\rangle = I_2$ (protože $a > 3/2$ implikuje $a^2 > 9/4 > 2$). Pokračujeme dále půlením těchto uzavřených intervalů. Protože takto konstruované koncové body jsou vždy racionální čísla a $\sqrt{2}$ racionální není (viz Příklad 2.1), nikdy se nestane, že by po nějakém dělení byl bod $\sqrt{2}$ koncovým bodem intervalu, a postup tak lze libovolně opakovat. Dostáváme tudíž intervaly I_n, $n \in \mathbb{N}$, uvnitř kterých leží $\sqrt{2}$.

Pro takto zkonstruované intervaly I_n platí inkluze $I_{n+1} \subset I_n$ a délka intervalu I_n je $\frac{1}{2^{n-1}}$. Tudíž $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ je nejvýše jednoprvková množina. Opravdu, pro každé 2 různé body, mezi nimiž je nutně vzdálenost $d > 0$, existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že délka intervalu I_m je menší než d, a nemohou tedy oba současně patřit do I_m a tedy ani do průniku $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. Náš požadavek $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ v tomto případě znamená, že

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \left\{\sqrt{2}\right\}.$$



Obrázek 2.3: Ilustrace ke konstrukci intervalů I_1, I_2 a I_3 obsahujících $\sqrt{2}$ s racionálními koncovými body.

Grafickou ilustraci konstrukce těchto intervalů lze nalézt na Obrázku 2.3.

Obecný požadavek, aby množina $\mathbb{R}$ „neměla díry“, můžeme nyní přesně formulovat jako tzv. **axiom úplnosti**: *Každý systém uzavřených a do sebe se vnořujících intervalů, jejichž délky jsou libovolně malé, má neprázdný průnik.* Podrobněji, pokud jsou I_n, $n \in \mathbb{N}$, uzavřené intervaly splňující

1. $I_n \supset I_{n+1}$ pro libovolné $n \in \mathbb{N}$, tj. $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$.

2. pro každé $\varepsilon > 0$ existuje přirozené n tak, že délka I_n je menší než ε,

pak

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset. \tag{2.6}$$

Je důležité si uvědomit, že axiom úplnosti je to jediné, co odlišuje reálná čísla od racionálních čísel. Jak bylo ukázáno výše na příkladu $\sqrt{2}$, racionální čísla tento axiom nesplňují. Algebraicky (vzhledem k $+$ a $\cdot$) mají jinak tyto množiny shodné vlastnosti. Pro úplnost dodejme, že reálná čísla také znázorňujeme jako body na číselné ose, přičemž nyní již každému bodu na této ose odpovídá právě jedno reálné číslo. Z tohoto důvodu číselnou osu nazýváme také **reálnou osou**.

Poznámka 2.5: V axiomu úplnosti je zásadní požadavek na neprázdnost průniku vzájemně do sebe vnořených uzavřených intervalů. Podmínka na jejich délku není nutná, ale zase pěkně vystihuje jádro problému a proto ji do axiomu zahrnujeme.

Reálná čísla: shrnutí vlastností

V tomto textu tedy využíváme axiomatickou definici množiny reálných čísel, která intuitivně představuje číselný analog geometrické představy přímky. Skutečná konstrukce[6] takovéhoto tělesa je nad rámec tohoto kurzu. Klasická konstrukce pomocí tzv. Dedekindových[7] řezů historicky spadá až do druhé poloviny *devatenáctého* století. Vlastnosti množiny reálných čísel shrnuje následující definice.

Definice 2.1 (Reálná čísla / *Real numbers*)**:** Množinu reálných čísel $\mathbb{R}$ chápeme jako číselné těleso $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, které je vybavené úplným uspořádáním $<$ a které splňuje axiom úplnosti.

Pro pohodlí čtenáře explicitně vypíchněme, co vše za požadavky na operace $+$, $\cdot$ a $<$ je vlastně v předchozí definici nakladeno:

- asociativní zákony pro $+$ a $\cdot$,
- komutativní zákony pro $+$ a $\cdot$,
- distributivní zákon ($\cdot$ vůči $+$),
- existence nuly (neutrální prvek vůči $+$) a jedničky (neutrální prvek vůči $\cdot$),
- existence opačných prvků (vůči $+$),
- existence inverzních prvků (vůči $\cdot$ a pouze pro nenulové prvky) ,
- úplné uspořádání $<$,
- axiom úplnosti.

[6] Důkaz existence.

[7] Richard Dedekind (1831 – 1916) byl německý matematik. Více o tomto tématu se lze dozvědět v předmětu BI-ALO.

2.3 Rozšířená reálná osa

Pro budoucí úvahy týkající se limit posloupností i funkcí je výhodné formálně rozšířit reálnou osu o dva další prvky „ležící v nekonečnu“ označované symboly „$+\infty$“ a „$-\infty$“.

Definice 2.2 (Rozšířená reálná osa / *extended real number line*)**:** Množinu reálných čísel spolu se symboly $+\infty$ a $-\infty$, tj. množinu $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, nazýváme **rozšířenou množinou reálných čísel** (případně též **rozšířenou reálnou osou**) a značíme ji symbolem $\overline{\mathbb{R}}$.

Každý prvek množiny $\overline{\mathbb{R}}$ je tedy buď reálné číslo, nebo jeden ze symbolů $+\infty$, $-\infty$. Na tyto body se můžeme dívat jako na idealizované „konce“ číselné osy („kompaktifikace“ $\mathbb{R}$). Nejčastěji o nich mluvíme jako o „plus nekonečnu“ a „minus nekonečnu“.

Na množině $\overline{\mathbb{R}}$ přirozeně a intuitivně zavádíme uspořádání následujícím způsobem: $a < +\infty$ pro každé $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ a $-\infty < a$ pro každé $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Například platí $\pi < +\infty$, $6 > -\infty$ nebo $-\infty < +\infty$. Množina $\overline{\mathbb{R}}$ je tedy úplně uspořádaná, stejně jako $\mathbb{R}$ (nebo $\mathbb{Q}$).

Při počítání limit budeme chtít provádět algebraické operace nejen s reálnými čísly, ale i s některými výrazy obsahujícími právě zavedené symboly nekonečen. Proto musíme rozšířit i algebraické operace sčítání a násobení na $\overline{\mathbb{R}}$, tím se zabývá následující definice.

Definice 2.3 (Algebraické operace na $\overline{\mathbb{R}}$)**:** Nechť $a \in \overline{\mathbb{R}}$, v závislosti na jeho hodnotě klademe

$$
\begin{aligned}
\text{pro } a > -\infty : &\qquad a + (+\infty) = (+\infty) + a := +\infty,\\
\text{pro } a < +\infty : &\qquad a + (-\infty) = (-\infty) + a := -\infty,\\
\text{pro } a > 0 : &\qquad a \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot a := +\infty,\\
\text{pro } a < 0 : &\qquad a \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot a := -\infty,\\
\text{pro } a > 0 : &\qquad a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a := -\infty,\\
\text{pro } a < 0 : &\qquad a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a := +\infty.
\end{aligned}
$$

Dále klademe $\frac{1}{+\infty} = \frac{1}{-\infty} := 0$. Rozdíl definujeme vztahem $a - b := a + (-b)$, podíl $\frac{a}{b} := a \cdot \frac{1}{b}$, pouze v případě že výraz na pravé straně má smysl jakožto operace mezi reálnými čísly nebo je definován výše. Konečně pak $-(+\infty) := -\infty$, $-(-\infty) := +\infty$, $|+\infty| = |-\infty| := +\infty$, $\sqrt[k]{+\infty} := +\infty$ a $\sqrt[2k-1]{-\infty} := -\infty$ pro libovolné $k \in \mathbb{N}$.

Motivací pro tuto definici je hlavně věta O limitě součtu, součinu a podílu (Věta 6.1), ke které se dostaneme později během semestru. Při druhém čtení doporučujeme na tomto místě čtenáři si rovnou připomenout poznámky u zmíněné věty.

Ukažme si nyní konkrétní příklad operací, které nyní můžeme v $\overline{\mathbb{R}}$ provádět.

Příklad 2.2: Například tak v $\overline{\mathbb{R}}$ platí

$$
\begin{aligned}
4 + (+\infty) &= +\infty, & -2 \cdot (-\infty) &= +\infty,\\
\frac{10^{10^{10}}}{-\infty} &= 0, & +\infty - (-\infty) &= +\infty,\\
\frac{1}{+\infty} &= 0, & 10 \cdot (+\infty) + (+\infty) &= +\infty.
\end{aligned}
$$

Doporučuji v každé z těchto rovností rozmyslet, který bod v Definici 2.3 byl použit.

Pozor! Množina $\overline{\mathbb{R}}$ vybavená operacemi uvedenými v Definici 2.3 již netvoří těleso. Algebraické operace jsme totiž (z dobrých důvodů, jak uvidíme později) ani nedefinovali pro všechny možné hodnoty operandů.

Varování 2.2 (Nedefinované výrazy)**:** Nedefinovány zůstávají mimo jiné následující výrazy:

$$
+\infty - (+\infty), \quad +\infty + (-\infty), \quad 0 \cdot (\pm\infty), \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty},
$$
$$
-\infty - (-\infty), \quad -\infty + (+\infty), \quad \frac{a}{0} \text{ pro } a \in \overline{\mathbb{R}}.
$$

Opravdu, v žádném z bodů Definice 2.3 nejsou takovéto situace definovány.

Otázka 2.7: Patří symbol „∞“ do množiny $\overline{\mathbb{R}}$?

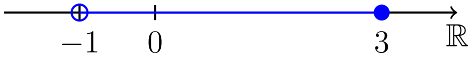
Otázka 2.8: Jaká je hodnota výrazu

$$
\frac{(-\infty)^3 + \pi}{2 + \frac{1}{\sqrt{+\infty}}}\,?
$$

Pečlivě svou odpověď zdůvodněte pomocí Definice 2.3.

2.4 Okolí bodu na rozšířené číselné ose

V této sekci připomeneme definici různých typů intervalů a dále zadefinujeme nový pojem „okolí bodu“ na reálné ose. Tento pojem budeme intenzivně využívat v dalším výkladu a i v dalších předmětech. Nejprve si připomeňme známé intervaly.



Obrázek 2.4: Polouzavřený interval $(-1, 3\rangle$ je tvořen všemi reálnými čísly ostře většími než -1 a současně menšími nebo rovno 3.

Intervaly

Výše v textu, v Podkapitole 2.2, jsme připomněli pojem uzavřeného intervalu. Tuto definici nyní zopakujme a rozšiřme i o další známé typy **intervalů**. Nechť pro $a, b \in \mathbb{R}$ platí $a < b$. Potom definujeme

otevřený interval:	$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$,
uzavřený interval:	$\langle a, b\rangle := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$,
polootevřený (polouzavřený) interval:	$\langle a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$,
polootevřený (polouzavřený) interval:	$(a, b\rangle := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$.

Dále definujeme **neomezené intervaly**

$$
\begin{aligned}
(a, +\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\},\\
\langle a, +\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\},\\
(-\infty, b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\},\\
(-\infty, b\rangle &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\},\\
(-\infty, +\infty) &:= \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Ve všech těchto intervalech mluvíme o a jako o **počátečním bodu** a o b jako o **koncovém bodu** intervalu. O bodech a a b souhrnně mluvíme jako o **krajních bodech** daných intervalů. Grafickou ilustraci jednoho polouzavřeného intervalu uvádíme na Obrázku 2.4.

Pro neomezené intervaly s krajním bodem 0 navíc občas používáme speciální značení:

$$
\mathbb{R}^+ = (0, +\infty), \quad \mathbb{R}^- = (-\infty, 0), \quad \mathbb{R}_0^+ = \langle 0, +\infty), \quad \mathbb{R}_0^- = (-\infty, 0\rangle,
$$

tedy popořadě kladná, záporná, nezáporná a nekladná reálná čísla.

Poznámka 2.6 (Značení intervalů)**:** V některých zdrojích lze narazit na alternativní značení otevřených a uzavřených intervalů využívající hranatých závorek. Například „$[1,2]$“ by představoval náš uzavřený interval $\langle 1,2\rangle$ a „$]-1,1[$“ pak náš otevřený interval $(-1,1)$.

Aby to nebylo tak jednoduché, tak existuje ještě „kompromisní“ varianta značení, která používá hranaté závorky k označení uzavřených intervalů (např. $[1,2]$) a kulaté závorky k označení otevřených intervalů (např. $(1,2)$).

Ani jedno z těchto značení zde v tomto textu, resp. celém předmětu, nevyužíváme a striktně se držíme kulatých a špičatých závorek.

V předchozích odstavcích jsme o některých podmnožinách reálné osy mluvili jako o „omezených“, resp. „neomezených“. Tento pojem je zřejmě intuitivně uchopitelný, ale pro úplnost uveďme i jeho formální definici.

Definice 2.4 (Omezená a neomezená množina / *bounded and unbounded set*)**:** Množinu reálných čísel $A \subset \mathbb{R}$ nazýváme **omezenou**, právě když existuje reálná konečná konstanta $K > 0$ taková, že pro každé $x \in A$ platí nerovnost $|x| < K$. Množinu $A \subset \mathbb{R}$ nazýváme **neomezenou**, právě když není omezená. Tedy pro každé reálné konečné $K > 0$ existuje $x \in A$ splňující $|x| \geq K$.

Příklad 2.3: Například množina $\mathbb{N}$ je neomezená. Naproti tomu množina $\{\sin(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ je omezená. Jistě pro všechna přirozená čísla platí $|\sin(n)| < 4$ nebo $|\sin(n)| < 1$. Všimněte si, že v Definici 2.4 se nevyžaduje, aby konstanta K byla nejmenší možná, stačí libovolná splňující uvedenou podmínku[8].

Otázka 2.9: Změnil by se význam pojmu „omezená množina“ zavedený v Definici 2.4, pokud bychom podmínku $|x| < K$ nahradili za $|x| \leq K$?

Otázka 2.10: Které z následujících množin jsou omezené a které neomezené?

a. $\left\{\frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$,

b. $\{\operatorname{tg} x \mid x \in (-\pi/4, \pi/4)\}$,

c. $\{\operatorname{tg} x \mid x \in (-\pi/4, \pi/2)\}$,

d. $\{x \in \mathbb{R} \mid \sin(x) = 0\}$,

e. množina všech prvočísel,

[8] Najít úplně všechny takové konstanty nemusí být jednoduché.

f. množina všech cifer v desítkovém zápisu čísla π.

Svou argumentaci pečlivě založte na Definici 2.4, tj. buď nalezněte vhodnou omezující konstantu, nebo dokažte, že taková neexistuje.

Okolí bodu $a \in \mathbb{R}$

Dalším důležitým pojmem, který pro čtenáře může být novým, je **okolí bodu**. Tento pojem je pro náš výklad poměrně ústřední, spousta dalších důležitých pojmů, jako hromadný bod, limita nebo derivace, tohoto pojmu využívají (ať už přímo, nebo nepřímo). Okolí bodu máme k dispozici ve dvou typech: podle toho, jestli oním bodem je reálné číslo nebo $\pm\infty$. V této části textu se věnujeme případu $a \in \mathbb{R}$.

Definice 2.5 (Okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ / *neighborhood*)**:** Nechť $a \in \mathbb{R}$ je reálné číslo a $\varepsilon \in \mathbb{R}$ je kladné, $\varepsilon > 0$. Otevřený interval $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ nazýváme **okolím bodu** a **o poloměru** ε a značíme $U_a(\varepsilon)$. Někdy též o této množině mluvíme jako o ε-**okolí bodu** a.

Alternativně můžeme tato okolí popsat pomocí vzdálenosti bodů na reálné ose, resp. absolutní hodnoty. Je-li $a \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$, pak $x \in U_a(\varepsilon)$ platí právě, když $|x-a| < \varepsilon$. Bod x tedy patří do okolí $U_a(\varepsilon)$ bodu $a \in \mathbb{R}$ právě tehdy, když jeho vzdálenost od a je menší než ε, symbolicky

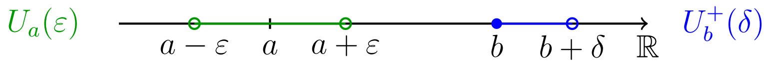
$$U_a(\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| < \varepsilon\}.$$

O parametru ε se z očividných důvodů často mluví jako o **poloměru** a o bodu a jako o **středu** okolí $U_a(\varepsilon)$.

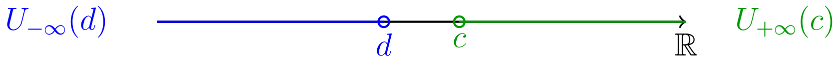
Okolí $U_a(\varepsilon)$ zavedená v Definice 2.5 též často nazýváme oboustranná, tyto množiny se totiž „rozprostírají" na obě strany od bodu a, tedy *okolo* bodu a (odtud by měla být patrná motivace pro volbu názvu „okolí"). Značení pomocí symbolu „U" pochází z německého slovíčka *die Umgebung* pro „okolí". Grafické znázornění tohoto typu okolí na reálné ose je uvedeno na Obrázku 2.5.

Dále zavádíme tzv. jednostranná okolí bodu $a \in \mathbb{R}$. Grafickou reprezentaci tohoto typu okolí uvádíme na Obrázku 2.5.

Definice 2.6 (Jednostranná okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ / *One-sided neighborhoods*)**:** Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon \in \mathbb{R}$ splňuje $\varepsilon > 0$. Polouzavřený interval $\langle a, a+\varepsilon)$, resp. $(a-\varepsilon, a\rangle$, nazýváme **pravým**, resp. **levým**, ε-okolím bodu a a značíme ho $U_a^+(\varepsilon)$, resp. $U_a^-(\varepsilon)$.



Obrázek 2.5: Okolí $U_a(\varepsilon)$ bodu a o poloměru ε (zelené) a pravé okolí $U_b^+(\delta)$ bodu b s parametrem δ (modré) graficky znázorněné na reálné ose.



Obrázek 2.6: Okolí $U_{+\infty}(c) = (c, +\infty)$ a $U_{-\infty}(d) = (-\infty, d)$ graficky znázorněné na reálné ose.

Důvod pro použití slovíčka „jednostranné“ je patrně očividné. Pro větší názornost i tento typ okolí naleznete ilustrovaný na Obrázku 2.5.

Okolí bodů $+\infty$ a $-\infty$

Pro další výklad (zejména o limitách posloupností a funkcí) je vhodné definovat i okolí bodů $+\infty$ a $-\infty$ patřících do množiny $\overline{\mathbb{R}}$. Následující definice přesně tento další druh okolí zavádí.

Definice 2.7 (Okolí $+\infty$ a $-\infty$)**:** Nechť $c \in \mathbb{R}$. Otevřený interval $(c,\ +\infty)$, resp. $(-\infty, c)$, nazýváme **okolím bodu $+\infty$, resp. $-\infty$,** v $\mathbb{R}$ a značíme $U_{+\infty}(c)$, resp. $U_{-\infty}(c)$.

Pro zadané $c \in \mathbb{R}$ tedy do množiny $U_{+\infty}(c)$ patří všechna reálná čísla, která jsou ostře větší než c. Grafická reprezentace takovéhoto typu okolí je uvedena na Obrázku 2.6.

Všimněte si, že pro všechna zavedená okolí bodů $a \in \mathbb{R}$ platí $a \in U_a(\varepsilon)$, $a \in U_a^+(\varepsilon)$ a $a \in U_a^-(\varepsilon)$. Naopak ovšem $+\infty \notin U_{+\infty}(c)$ a $-\infty \notin U_{-\infty}(c)$.

Okolí bodu z $\overline{\mathbb{R}}$

„Okolí bodu“ teď tedy máme definované pro libovolné $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Všimněte si, že toto okolí je vždy podmnožinou $\mathbb{R}$. V zájmu zjednodušení značení zavádíme následující zastřešující pojem.

Definice 2.8 (Okolí bodu / *neighborhood*)**:** Pod **okolím bodu** $a \in \overline{\mathbb{R}}$, ozn. U_a, máme na mysli buď okolí $U_a(\varepsilon)$ pro nějaké $a \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$, nebo okolí $U_{\pm\infty}(c)$ pro nějaké $c \in \mathbb{R}$.

Příklad 2.4: Procvičme si výše zavedené názvosloví,

- interval $(-1, 1)$ je okolím bodu 0 s poloměrem 1, jedná se o $U_0(1)$,
- interval $\langle -1, 1\rangle$ není okolím bodu 0, ale obsahuje jakožto podmnožiny nekonečně mnoho okolí bodu 0 nebo i bodu $1/2$,
- interval $(-1, 2)$ není okolím bodu 0, jedná se ovšem o okolí bodu $1/2$ s poloměrem $3/2$,
- interval $(-10, +\infty)$ je okolím bodu $+\infty$, jedná se o $U_{+\infty}(-10)$,
- interval $(-\infty, 1\rangle$ není okolím bodu $+\infty$ ani $-\infty$,
- interval $\langle 2, 3)$ je pravým okolím bodu 2, jedná se o $U_2^+(1)$.

Laskavé čtenářstvo si v tento okamžik jistě rádo vymyslí další příklady. U těchto úvah silně doporučujeme si situaci graficky znázornit na reálné ose.

Otázka 2.11: Který z následujících intervalů

$$(-\infty, -10), \quad (-\infty, 0), \quad (-\infty, 10), \quad (-\infty, +\infty)$$

není okolím bodu $-\infty$?

2.5 Hromadný bod množiny

Pomocí pojmu okolí můžeme formalizovat užitečný jev „hromadění se“ prvků množiny. Tento pojem bude zásadní pro pozdější definici limity funkce/posloupnosti.

Definice 2.9 (Hromadný bod množiny / *Cluster point of a set*)**:** Bod $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ nazýváme **hromadným bodem množiny** $M \subset \mathbb{R}$, právě když v každém okolí U_α bodu α leží nějaký prvek množiny M *různý* od α.

Povšimněte si, že hromadný bod α množiny M nemusí nutně být prvkem množiny M. Názorně toto uvidíme na následujícím příkladu.

Obrázek 2.7: Hromadný bod množiny $M = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$ je 0. Je to jediný hromadný bod, který tato množina má.

Příklad 2.5: Jako ilustrační příklad uvažme množinu $M = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$ (viz Obrázek 2.7). Tato množina má jediný hromadný bod $\alpha = 0$.

- Ukažme, že $\alpha = 0$ je opravdu hromadný bod množiny M. Je-li $U_0(\varepsilon)$ okolí bodu $\alpha = 0$ o poloměru $\varepsilon > 0$, pak $\frac{1}{n} \in M$ leží v tomto okolí pro libovolné $n > \frac{1}{\varepsilon}$ (ano, tato nerovnost je ekvivalentní podmínce $\frac{1}{n} < \varepsilon$). Každé okolí bodu 0 tak skutečně obsahuje nějaký prvek množiny M různý od 0.

- Nyní ukažme, že libovolné nenulové α *není* hromadným bodem množiny M. Musíme postupně prozkoumat tři situace. Je-li α záporné, potom okolí $U_\alpha\big(|\alpha|/2\big)$ zřejmě celé leží na záporné části reálné osy a tedy neobsahuje žádný prvek množiny M. Je-li $\alpha = \frac{1}{k} \in M$, pak vezmeme-li $\varepsilon = \frac{1}{2k(k+1)}$ (polovina vzdálenosti k nejbližšímu dalšímu prvku množiny M), pak $U_\alpha(\varepsilon) \cap M = \{\alpha\}$, což vylučuje hromadnost tohoto α. Konečně, je-li $\alpha \notin M$ kladné, pak je-li opět $\frac{1}{m}$ prvek M nejblíže α (a takový jistě existuje, v případě existence dvou takových prvků zvolme libovolný z nich), pak $U_\alpha(\varepsilon) \cap M$ s $\varepsilon = |\alpha - 1/m|/2$ je dokonce prázdná množina a toto α tedy není hromadným bodem množiny M.

V rámci procvičování osvojení si pojmů hromadný bod a okolí bodu doporučuji nakreslit si všechny situace o kterých se mluví v předchozích bodech na reálné ose.

Příklad 2.6: Množina $M = \{1\}$ nemá ani jeden hromadný bod. Opravdu, pokud vezmeme $\alpha = 1$, pak každé okolí U_α obsahuje pouze 1, ale žádný *jiný* prvek množiny M. Pokud vezmeme $\alpha \neq 1$, tak pro $\varepsilon = |\alpha - 1|/2$, tj. polovinu vzdálenosti α od 1, je průnik $U_\alpha(\varepsilon)$ a M dokonce prázdný a neobsahuje žádný prvek množiny M.

V Definici 2.9 se v každém okolí vyžaduje existence alespoň jednoho bodu množiny M. Není těžké si rozmyslet následující jednoduché tvrzení dávající další důvod pro označení hromadných bodů množiny jakožto „hromadných“.

Tvrzení 2.2 (O hromadění bodů kolem hromadných bodů)**:** Bod $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ je hromadným bodem množiny M, právě když v každém okolí U_α bodu α leží nekonečně mnoho bodů množiny M.

Důkaz. Dokážeme postupně obě implikace.

- $\Rightarrow$: Mějme okolí U_α bodu α. Bod α je hromadným bodem množiny M a proto existuje bod x_1 různý od α patřící do M i U_α, tj. $x_1 \in M \cap U_\alpha$ a $x_1 \neq \alpha$. Nyní zvolme okolí V_α bodu α o poloměru menším, než vzdálenost α od x_1. I v tomto okolí nutně leží bod x_2 patřící do M, V_α a tedy i U_α, různý od α. Tímto způsobem induktivně sestrojíme nekonečně mnoho vzájemně různých bodů x_1, x_2,... množiny M ležících v U_α.

- $\Leftarrow$: Tento směr je snadný. Máme-li okolí U_α bodu α v kterém leží nekonečně mnoho členů množiny M, pak v něm jistě leží *nějaký* (alespoň jeden) bod množiny M různý od α. □

Tím je důkaz ekvivalence dokončen.

Z předchozího tvrzení také ihned plyne, že každá konečná množina nemá ani jeden hromadný bod. Aby množina mohla mít hromadný bod, musí být nutně nekonečná.

Otázka 2.12: Kolik hromadných bodů má množina $A = \{1 \mid n \in \mathbb{N}\}$?

Příklad 2.7: Rozmyslete následující situace:

- Každý bod množiny $\langle 0, 1\rangle$ je hromadným bodem množiny $M = (0, 1)$.
- Množina $M = \mathbb{N}$ má právě jeden hromadný bod, $+\infty$.
- Množina $M = \mathbb{Z}$ má právě dva hromadné body, $+\infty$ a $-\infty$.
- Množina $M = \mathbb{R}$ má jako hromadný bod libovolný prvek z $\overline{\mathbb{R}}$.
- Každá množina M s konečným počtem prvků nemá ani jeden hromadný bod.

Své závěry pečlivě vysvětlete s využitím Definice 2.9, případně Tvrzení 2.2.

Poznámka 2.7: K tomu, aby bod α byl hromadným bodem sjednocení dvou množin M a N stačí, aby byl hromadným bodem jedné z nich. Pozor ovšem, máme-li α hromadný bod množiny M i N, pak ještě nutně nemusí být hromadným bodem průniku M a N, například množiny

$$M = \left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{a} \quad N = \left\{ -\frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$$

mají obě hromadný bod 0, ale jejich průnik je dokonce prázdná množina, která nemá žádný hromadný bod.

Poznámka 2.8: Množina racionálních čísel $\mathbb{Q}$ má jako hromadné body libovolné reálné číslo $\mathbb{R}$ (toto je sice intuitivní, ale netriviální výsledek plynoucí z axiomu úplnosti) a dále body $+\infty$ a $-\infty$.

Otázka 2.13: V předchozím příkladu jsme viděli množinu s dvěma hromadnými body i s nekonečně mnoha hromadnými body. Vymyslete příklad množiny mající právě tři hromadné body.

Otázka 2.14: Nechť α je hromadným bodem množiny $A \subset \mathbb{R}$. Mějme nějakou množinu $B \subset \mathbb{R}$, která obsahuje množinu A, tj. $A \subset B$. Je α hromadným bodem množiny B?

2.6 Reprezentace čísel v počítači

Na závěr této kapitoly učiníme několik důležitých poznámek k reprezentaci čísel v počítačích. Nejedná se o zcela podrobný výklad této problematiky. Je ale dobré si uvědomit, zvlášť pro studenty fakulty informatického zaměření, jaký je rozdíl mezi reálnými čísly a „strojovými čísly“ („*float*“). Zkušenost ukazuje, že i ve vyšších ročnících s těmito koncepty studenti zápasí.

Nejprve připomeňme známá fakta z BI-DML.

- Číselné množiny $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$ jsou *nekonečné*, tj. nemají konečný počet prvků.
- Množiny $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$ jsou nekonečné a *spočetné* (mají stejnou mohutnost jako $\mathbb{N}$).
- Množina reálných čísel $\mathbb{R}$ je dokonce *nespočetná* (Cantorův diagonální argument).

Protože paměť počítačů je omezená, je zřejmé, že *v celé obecnosti* nelze ani jednu z těchto množin v počítači reprezentovat. Jak uvidíme na konci této podkapitoly, tak nedostatečnost reprezentace v případě reálných čísel $\mathbb{R}$ je zásadnější než v případě $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q}$.

Celá čísla

Celá čísla lze snadno reprezentovat v binární soustavě, tj. celé číslo $k \in \mathbb{Z}$ lze vyjádřit například ve tvaru

$$k = +\sum_{j=0}^{n} k_j 2^j \geq 0 \quad \text{resp.} \quad k = -1 - \sum_{j=0}^{n} k_j 2^j < 0,$$

kde $n \in \mathbb{N}_0$ je přirozené číslo a $k_0, \dots, k_n \in \{0, 1\}$.

Typicky pro fixní n v paměti ukládáme znaménko (jeden bit) a $k_0, \dots, k_n$ ($n+1$ bitů), tedy v paměti zaberem $n+2$ bitů. Tímto způsobem pokryjeme jistou *konečnou podmnožinu* množiny $\mathbb{Z}$. I kdybychom n neomezili (*libovolná přesnost*, viz např. GNU MP (GMP) knihovnu), pak pro většinu hodnot narazíme na konečnou paměť našeho stroje.

Například pro 64 bitový *integer* se znaménkem je největší, resp. nejmenší, reprezentovatelná hodnota

$$+\sum_{j=0}^{62} 1 \cdot 2^j = 9\,223\,372\,036\,854\,775\,807,$$

$$-1 - \sum_{j=0}^{62} 1 \cdot 2^j = -9\,223\,372\,036\,854\,775\,808\,.$$

Což, přiznejme si, v porovnání s většinou celých čísel nejsou žádné velké hodnoty.

Algebraické operace mezi takto popsanými celými čísly probíhají exaktně a nedochází při nich k chybám, vyjma problému s přetečením a podtečením.

Příklad 2.8 (Čtyřbitová ukázka)**:** Pokud bychom měli pro náš číselný typ k dispozici pouze čtyři bity, pak by situace vypadala následovně. V paměti bychom měli uložen jeden bit $s \in \{0, 1\}$ pro znaménko a tři bity $k_0, k_1, k_2 \in \{0, 1\}$ pro binární cifry. Každému řetězci $sk_0k_1k_2 \in \{0, 1\}^4$ je pak přiřazeno číslo

$$f(sk_0k_1k_2) := \begin{cases} +(k_0 + k_1 2 + k_2 2^2), & \text{pokud } s = 0, \\ -1 - (k_0 + k_1 2 + k_2 2^2), & \text{pokud } s = 1. \end{cases} \tag{2.7}$$

$sk_0k_1k_2$	$f(sk_0k_1k_2)$	$sk_0k_1k_2$	$f(sk_0k_1k_2)$
0000	0	1000	-1
0100	1	1100	-2
0010	2	1010	-3
0110	3	1110	-4
0001	4	1001	-5
0101	5	1101	-6
0011	6	1011	-7
0111	7	1111	-8

Tabulka 2.2: Výpis 4bitových celých čísel se znaménkém z Příkladu 2.8. Tento datový typ tedy popisuje celá čísla od -8 do 7, tj. množinu $\{-8, -7, \ldots, 6, 7\}$. Dekódování binárního řetězce provádíme pomocí zobrazení f definovaného v rovnici (2.7).

V tomto případě můžeme všechna tato čísla i pěkně vypsat, dekódovací tabulka je znázorněna v Tabulce 2.2. Máme tak konečnou množinu o $2^4 = 16$ členech popisující celá čísla od -8 do 7, tedy množinu $\{-8, -7, \ldots, 6, 7\}$. To je samozřejmě velmi malinká podmnožina množiny $\mathbb{Z}$. Aritmetické operace sčítání a odčítání lze provádět exaktně, správně zde dostaneme například $2 \cdot (-3) = -6$ nebo $-2 + 7 = 5$. Velmi často ale narazíme na fatální přetečení/podtečení (*overflow* / *underflow*).

Racionální čísla

Racionální čísla můžeme v paměti uchovávat jakožto dvě celá čísla. Algebraické operace mezi racionálními čísly vycházejí z algebraických operací mezi celými čísly a tedy i je lze vykonávat exaktně (bez chyby). Stále ovšem hrozí problém nemožnosti reprezentovat příliš velký (v absolutní hodnotě) jmenovatel nebo čitatel. Některé programovací jazyky (např. parametrický typ `Rational{T}` v Julia, třídy `std::ratio` v C++ a `Fraction` v Pythonu, atp.) a různé CAS (*Mathematica*, SageMath a příbuzní) umožňují pracovat s racionálními čísly tímto exaktním způsobem. Znovu upozorňujeme na zásadní rozdílnost tohoto přístupu od přístupu založeném na číslech s plovoucí desetinnou tečkou (tzv. *float*), kterému se budeme věnovat v následující části textu.

Strojová čísla: IEEE-754

Nejpoužívanějším standardem pro práci s čísly s tzv. pohyblivou desetinnou čárkou je standard IEEE-754 [3]. Tento standard je zcela jistě historicky nejrozšířenější a nejpoužívanější. Díky jeho podpoře na úrovni hardware, jsou výpočty s těmito čísly velmi rychlé. Za rychlost je ale nutné zaplatit nepřesností ve výpočtech, které mohou mít fatální důsledky pro výpočty. Implementace „matematického algoritmu“ tak nemusí být zcela jednoduchá, protože akumulace numerických chyb může některé z těchto postupů učinit prakticky nepoužitelné.

Nejedná se ovšem o jediný možný způsob práce s aproximací reálných čísel na počítači. Existují i další přístupy jako například Unum (*universal numbers*) nebo intervalová aritmetika. Do těchto oblastí v tomto textu zabíhat nebudeme. Zvídavé čtenářstvo se může dozvědět více z uvedených odkazů.

Reálná čísla můžeme popsat v binárním ciferném tvaru, jehož část za „desetinnou“ tečkou může ovšem být nekonečná. V závislosti na hodnotě mantisy $m \in \mathbb{Z}$, exponentu $e \in \mathbb{Z}$ (maximálně d bitů), znaménka $s \in \{0, 1\}$ a typového parametru $b \in \mathbb{Z}$ postupujeme takto:

- Pro $0 < e < 2^d - 1$ a m klademe $x = (-1)^s \cdot (1.m_2)_2 \cdot 2^{e-b}$ (tzv. **normalizované číslo**).
- Pro $e = 0$ a $m \neq 0$ klademe $x = (-1)^s \cdot (0.m_2)_2 \cdot 2^{1-b}$ (tzv. **subnormální číslo**).
- Pro $e = 0$, $m = 0$ a $s = 0$ klademe $x = +0$ (pro $s = 1$ pak $x = -0$).
- Pro $e = 2^d - 1$, $m = 0$ a $s = 0$ klademe $x = +$`Inf`.
- Pro $e = 2^d - 1$, $m = 0$ a $s = 1$ klademe $x = -$`Inf`.
- Pro $e = 2^d - 1$ a $m \neq 0$ klademe $x =$ `NaN` (*Not a Number*).

Omezení těchto parametrů definovaná ve standardu IEEE-754 jsou uvedena v Tabulce 2.4.

Příklad 2.9: Podobně jako v Příkladu 2.8 se pojďme podívat, jak by mohla vypadat takováto čísla ve velmi extrémně malém, ale konkrétním, příkladě 5 bitů. Těchto 5 bitů rozdělme následujícím způsobem:

- 1 bit pro znaménko $s \in \{0, 1\}$,

přesnost	mantisa m	$d =$ počet bitů e	parametr b
poloviční (binary16)	10 bitů	5	15
jednoduchá (binary32)	23 bitů	8	127
dvojitá (binary64)	52 bitů	11	1 023
čtyřnásobná (binary128)	112 bitů	15	16 383

Tabulka 2.4: Parametry různých strojově číselných datových typů. Ve všech případech ještě máme jeden bit pro znaménko, $s \in \{0, 1\}$.

- 2 bity pro signifikand $m_0, m_1 \in \{0, 1\}$, tj. $m \in \{0, 1, 2, 3\}$,
- 2 bity pro exponent $e_0, e_1 \in \{0, 1\}$, tj. $e \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Parametr b zvolíme analogicky (viz Tabulku 2.4) jako 1. Dále v souladu se značením výše máme $d = 2$.

Řetězce $sm_0m_1e_0e_1 \in \{0, 1\}^5$, kterých je celkem $2^5 = 32$ různých, pak dekódujeme podle popisu výše následujícím způsobem. Speciální hodnota `+Inf`, resp. `-Inf`, odpovídá situaci $e = 3$, $m = 0$ a $s = 1$, resp. $s = 0$, tj. řetězcům

$$f(00011) = +\texttt{Inf} \quad \text{a} \quad f(10011) = -\texttt{Inf}.$$

Kladná, resp. záporná, nula odpovídá situaci $e = m = 0$ a $s = 0$, resp. $s = 1$, tedy

$$f(00000) = +0 \quad \text{a} \quad f(10000) = -0.$$

Následujících šest řetězců splňujících $e = 3$ a $m \neq 0$ nepředstavuje žádná čísla, jde o `NaN`,

$$f(01011) = f(00111) = f(01111) = \texttt{NaN},$$
$$f(11011) = f(10111) = f(11111) = \texttt{NaN}.$$

Pro normalizovaná čísla máme hodnoty $e = 1, 2$, m a s libovolné, dostáváme tak celkem $2 \cdot 4 \cdot 2 = 16$ normalizovaných čísel

$$
\begin{aligned}
f(00010) &= (+1) \cdot (1.00)_2 \cdot 2^{1-1} = 1, & f(10010) &= (-1) \cdot (1.00)_2 \cdot 2^{1-1} = -1,\\
f(01010) &= (+1) \cdot (1.10)_2 \cdot 2^{1-1} = \frac{3}{2}, & f(11010) &= (-1) \cdot (1.10)_2 \cdot 2^{1-1} = -\frac{3}{2},\\
f(00110) &= (+1) \cdot (1.01)_2 \cdot 2^{1-1} = \frac{5}{4}, & f(10110) &= (-1) \cdot (1.01)_2 \cdot 2^{1-1} = -\frac{5}{4},\\
f(01110) &= (+1) \cdot (1.11)_2 \cdot 2^{1-1} = \frac{7}{4}, & f(11110) &= (-1) \cdot (1.11)_2 \cdot 2^{1-1} = -\frac{7}{4},\\
f(00001) &= (+1) \cdot (1.00)_2 \cdot 2^{2-1} = 2, & f(10001) &= (-1) \cdot (1.00)_2 \cdot 2^{2-1} = -2,\\
f(01001) &= (+1) \cdot (1.10)_2 \cdot 2^{2-1} = 3, & f(11001) &= (-1) \cdot (1.10)_2 \cdot 2^{2-1} = -3,\\
f(00101) &= (+1) \cdot (1.01)_2 \cdot 2^{2-1} = \frac{5}{2}, & f(10101) &= (-1) \cdot (1.01)_2 \cdot 2^{2-1} = -\frac{5}{2},\\
f(01101) &= (+1) \cdot (1.11)_2 \cdot 2^{2-1} = \frac{7}{2}, & f(11101) &= (-1) \cdot (1.11)_2 \cdot 2^{2-1} = -\frac{7}{2},
\end{aligned}
$$

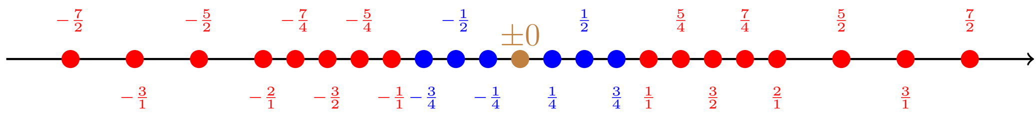
Pro subnormální čísla máme hodnoty $e = 0$, $m \neq 0$ a s libovolné, dostáváme tak celkem $1 \cdot 3 \cdot 2 = 6$ subnormálních čísel

$$
\begin{aligned}
f(01000) &= (+1) \cdot (0.10)_2 \cdot 2^{1-1} = \frac{1}{2}, & f(11000) &= (-1) \cdot (0.10)_2 \cdot 2^{1-1} = -\frac{1}{2},\\
f(00100) &= (+1) \cdot (0.01)_2 \cdot 2^{1-1} = \frac{1}{4}, & f(10100) &= (-1) \cdot (0.01)_2 \cdot 2^{1-1} = -\frac{1}{4},\\
f(01100) &= (+1) \cdot (0.11)_2 \cdot 2^{1-1} = \frac{3}{4}, & f(11100) &= (-1) \cdot (0.11)_2 \cdot 2^{1-1} = -\frac{3}{4}.
\end{aligned}
$$

Shrňme si stručně výsledky tohoto příkladu. Hypotetický pěti bitový datový typ popsaný v tomto příkladě svých 32 hodnot interpretuje jako

- 2 speciální hodnoty `+Inf` a `-Inf`,
- 2 nuly $+0$ a -0,
- 6 nečíselných hodnot `NaN`,
- 16 normalizovaných čísel, zkráceně zapsaných jako

$$\left\{\pm 1, \pm\frac{5}{4}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{7}{4}, \pm 2, \pm\frac{5}{2}, \pm 3, \pm\frac{7}{2}\right\},$$



Obrázek 2.8: Grafická reprezentace čísel popsaných v Příkladě 2.9. V tomto pěti bitovém případě máme 16 normalizovaných čísel (červeně), 6 subnormálních čísel (modře) a 2 nuly (hnědě). Dále zbývají dvě nekonečna a 6 NaN hodnot, které na obrázku znázorněny přirozeně nejsou.

- 6 subnormálních čísel, zkráceně zapsaných jako

$$\left\{\pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{4}\right\}.$$

Grafickou ilustraci uvádíme na Obrázku 2.8.

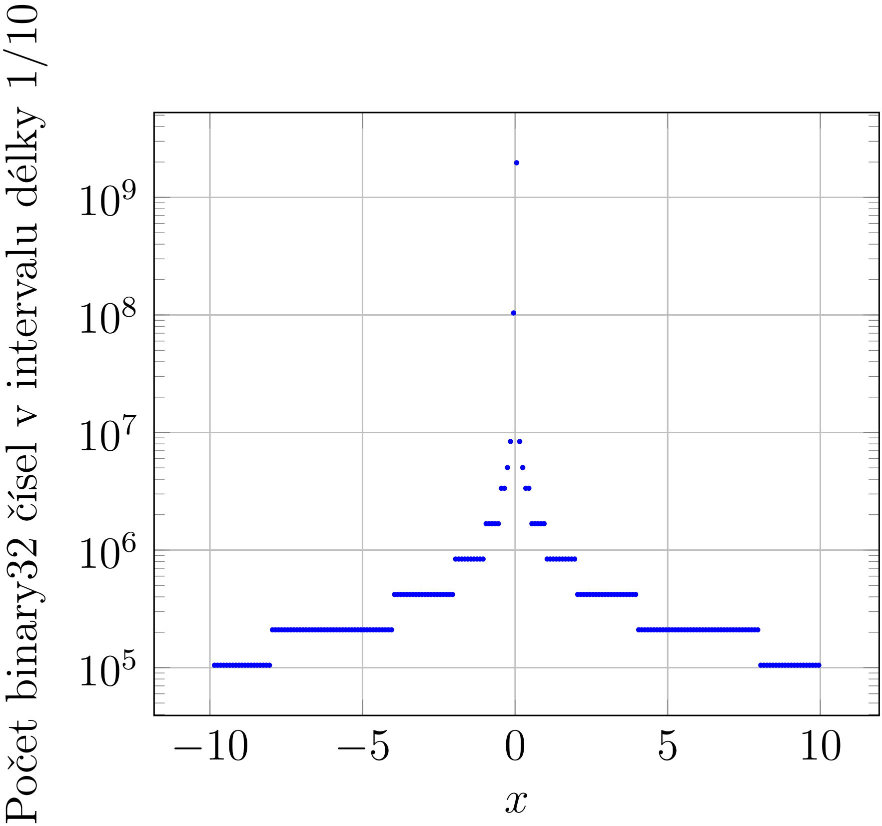
Z výše uvedeného je patrné, že z množiny $\mathbb{R}$ jsme schopni popsat vždy jen velmi omezenou a konečnou množinu tzv. strojových čísel. Navíc každé takové číslo je racionální.

Dále standard definuje, jak se zaokrouhluje při provádění algebraických operací a při ukládání čísel, která nejsou exaktně vyjádřitelná ve zvolené přesnosti. Většina algebraických operací s takovýmito čísly je tudíž nutně zatížena *chybou*. V důsledku toho operace mezi strojovými čísly *ztrácí* řadu očekávaných vlastností (jako asociativita nebo distributivita). Dále se tato chyba může postupně kumulovat, nebo i zásadně projevit i jen při jedné operaci.

Výhodou strojových čísel je samozřejmě *rychlost* operací, které probíhají na úrovni hardware. Cena za to je dána výše zmíněnými problémy. Při implementaci „matematického algoritmu“ je proto nutné se zabývat i vlivem zaokrouhlovacích chyb. Některé algoritmy nejsou pro implementaci ve strojových číslech z těchto důvodů vhodné, například Gaussova eliminace. Těmito problémy se (mimo jiné) zabývá **numerická matematika**.

Zaokrouhlování, vedle podtečení a přetečení, není jedinou patologií strojových čísel. Rozložení těchto čísel po číselné ose je silně nerovnoměrné. Daleko od nuly jsou mezery mezi čísly poměrně velké! Graficky lze tento efekt vyjádřit pomoci histogramu uvedeného na Obrázku 2.9.

Poznámka 2.9: Všimněte si, že každé strojové číslo je nutně tvaru podílu celého čísla a nějaké mocniny *dvou*. Ne každé takové číslo ovšem je strojové.



Obrázek 2.9: Rozložení 32 bitových strojových čísel okolo 0. Porovnejte s 5 bitovou situací prezentovanou na Obrázku 2.8.

Otázka 2.15: Uvažme standardní 64 bitová strojová čísla. Jaké je největší a druhé největší číslo (`Inf` teď neuvažujeme) přesně reprezentovatelné v tomto datovém typu? Jaká je mezi nimi mezera?

Otázka 2.16: Číslo 1 je strojové číslo. V dvojité přesnosti určete nejmenší strojové číslo, které je větší než 1. Tj. které „následuje“ hned za 1.

Příklad čísel $1/2$ a $1/3$

Pojďme se podívat na konkrétní příklad. Uvažme v dnešní době standardní dvojitou přesnost (64 bitový *float*).

Číslo $\frac{1}{2}$ je rámci tohoto datového typu přesně reprezentovatelné jako normalizované strojové číslo, protože

$$\frac{1}{2} = (+1) \cdot (1.0 \cdots 0)_2 \cdot 2^{1022-1023}.$$

Číslo $\frac{1}{3}$ už přesně reprezentovatelné není[9], jeho binární rozvoj je nekonečný[10]:

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} &= \frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^j = \frac{1}{4}\cdot(1.01010101\overline{01})_2 \approx \\ &\approx (+1)\cdot(1.\underbrace{0101\cdots01}_{52\text{ bitů}})_2 \cdot 2^{1021-1023} = \frac{6\,004\,799\,503\,160\,661}{18\,014\,398\,509\,481\,984} = q.\end{aligned}$$

Zde jsme zaokrouhlili směrem k nule. V počítači proto tímto způsobem nemůže být číslo $1/3$ uloženo přesně! Přesně je v něm uloženo výše zmíněné q.

Problémy s chybami při provádění algebraických operací můžeme nyní ilustrovat explicitně. Platí následující rovnosti:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6},\quad \frac{1}{2}+q=\frac{15\,011\,998\,757\,901\,653}{18\,014\,398\,509\,481\,984},\quad \frac{1}{2}+q\approx\frac{3\,752\,999\,689\,475\,413}{4\,503\,599\,627\,370\,496}.$$

kde $\approx$ opět znázorňuje, jaké číslo bychom dostali po zaokrouhlení do strojových čísel.

Operace s `+Inf` a `-Inf`

V Definici 2.3 jsme zavedli (některé) algebraické operace mezi prvky množiny $\overline{\mathbb{R}}$. Znovu připomínáme, že motivací pro tuto definici je Věta 6.1, které se budeme věnovat podrobněji později. Standard IEEE-754 vedle popisu reprezentace strojových čísel a speciálních hodnot `+Inf`, `-Inf`, `NaN` (*Not a Number*), `+0` a `-0` i určuje hodnoty algebraických operací, kde jeden z operandů je některá z těchto speciálních hodnot.

[9] Ať už zvolíte kolik bitů přesnosti chcete!

[10] Zde lehce předbíháme k nekonečným řadám, reklama na BI-MA2.

Operace mezi těmito speciálními hodnotami takřka přesně odpovídají naší Definici 2.3. Je zde ovšem několik drobných rozdílů.

Při sčítání a odčítání se strojová nekonečna `+Inf` (zkráceně `Inf`) a `-Inf` chovají tak, jak bychom čekali. Například platí: `Inf + Inf = Inf`, `-Inf - Inf = -Inf`, `a + Inf = Inf` a `a - Inf = -Inf`, zde `a` je libovolné konečné strojové číslo (prvek $\mathbb{Q}$). V případech, které jsme v Definici 2.3 vynechali, nyní dostaneme `NaN` hodnotu. Tedy v podstatě chybu, například: `Inf - Inf = NaN`, `-Inf + Inf = NaN`.

Při násobení jsme také ve shodě s Definicí 2.3. Například platí `Inf * Inf = Inf`, `-Inf * Inf = -Inf`, `a * (-Inf) = +Inf` pro záporné konečné strojové `a`, atd. Pokud násobíme nulou (jedno kterou, `+0` zkráceně označujeme `0`) nekonečnou hodnotu, tak opět dostaneme chybu, resp. `NaN`. Například platí `0 * Inf = NaN`, `0 * (-Inf) = NaN`.

V souladu s Definicí 2.3 je i snaha o dělení dvou strojových nekonečen. Tento případ není definován, dostaneme `NaN`. Například platí `Inf / Inf = NaN`, `-Inf / Inf = N` atd.

Varování 2.3 (Nula, kladná nula a záporná nula)**:** Standard IEEE-754 zavádí kladnou nulu `+0` (zkráceně zapisujeme `0`) a zápornou nulu `-0`. „Nula bez přívlastku“ mezi strojovými čísly v pravém slova smyslu neexistuje. Tyto dvě nuly jsou ale často považovány za totožné (např. porovnání `+0 == -0` vrací `true`). Obě tyto nuly se chovají jako neutrální prvky vůči sčítání.

Z našeho úhlu pohledu toto není vhodné. V množině $\mathbb{R}$ i $\overline{\mathbb{R}}$ máme pouze jednu nulu 0, která není ani „kladná“ ani „záporná“. Je to nula.

Zbývá shrnout zatím neprobrané situace týkající se dělení. Zde se standard IEEE-754 od naší Definice 2.3 již zásadněji odlišuje, protože tu hraje roli znaménko strojové nuly. Nejprve, podíl konečného strojového čísla a nekonečna je nula, jejíž znaménko se řídí znaménky čitatele a jmenovatele podílu. Například platí: `a / (-Inf) = +0` a `a / Inf = -0` pro libovolné záporné konečné `a` (včetně záporné nuly), atd. Při dělení nulou pak mohou nastat dvě situace:

- podíly dvou (libovolných) nul vrací `NaN`, nejsou definovány. Tj. `+0 / +0 = NaN`, `-0 / -0 = NaN`, `+0 / -0 = NaN` a `-0 / +0 = NaN`.

- podíl, kde čitatel je *nenulové* strojové číslo (včetně nekonečných hodnot) a jmenovatel je jedna z nul, vyústí v nekonečnou hodnotu „se znaménkém daným znaménky čitatele a jmenovatele“. Například platí: `Inf / -0 = -Inf`, `a / +0 = -Inf` pro libovolné záporné nenulové strojové `a`, atd.

V tomto posledním odstavci se tedy Definice 2.3 a standard IEEE-754 zásadně odlišuje. Není to překvapivé, standard a naše definice jsou v tomto směru nekompatibilní (0 není `+0` ani `-0`). Kladná i záporná strojová nula se ovšem chová rozumně, zmíněnou Větu 6.1 by šlo upravit tak, aby vhodně motivovala i toto chování. My se tímto směrem nevydáváme, v matematice nebývá zvykem zápornou a kladnou nulu používat.

3 Funkce

V této kapitole vycházíme ze znalostí týkajících se zobrazení získaných v předmětu BI-DML. Pro pohodlí čtenáře v dodatku (Kapitola 11) ovšem na jednom místě shrnujeme všechny základní pojmy a informace týkající se této látky. Dále v dodatkové Kapitole 12 shrnujeme většinu důležitých vlastností tzv. elementárních funkcí, které byste většinou už měli znát ze střední školy.

Z popisu výše je patrné, že v této kapitole nebude větší množství nového materiálu. I tak můžeme vypíchnout následující zásadní body, které by si studentky a studenti měli odnést:

- reálná funkce jakožto speciální případ zobrazení,
- ještě speciálnější případ reálné funkce (zde zkráceně „funkce") jedné reálné proměnné,
- základní vlastnosti takovýchto funkcí,
- popis asymptotického chování funkcí pomocí symbolů o a $\mathcal{O}$ (zřejmě nejzásadnější „novinka").

3.1 Reálná funkce

Ústředním objektem našeho zájmu v tomto předmětu bude „reálná funkce". Pod tímto slovním spojením máme na mysli následující obecný koncept.

Definice 3.1 (Reálná funkce / *real function*)**:** Mějme $n \in \mathbb{N}$ a $A \subset \mathbb{R}^n$ neprázdnou množinu. Zobrazení f neprázdné množiny A do množiny reálných čísel $\mathbb{R}$, tj. symbolicky $f\colon A \to \mathbb{R}$, nazýváme **reálnou funkcí**. O množině A mluvíme jako o **definičním oboru funkce** f a značíme ji D_f. Dále množinu H_f všech $y \in \mathbb{R}$, pro která existuje $x \in A$ splňující $f(x) = y$, symbolicky

$$H_f := \{y \in \mathbb{R} \mid (\exists x \in A)(f(x) = y)\},$$

nazýváme **oborem hodnot funkce** f.

Připomeňme, že takovéto zobrazení f je formálně zadáno jako podmnožina kartézského součinu $A \times \mathbb{R}$. Funkční hodnotu zobrazení f v bodě $x \in A$ značíme standardně $f(x)$.

Poznámka 3.1 (Funkce vs. funkční hodnota)**:** Rozlišování mezi reálnou funkcí a její hodnotou je běžné i v programovacích jazycích. Například v Pythonu můžeme jediným příkazem vytvořit funkci f působící na svém argumentu předpisem $f(x) = x + 10$,

```
f = lambda x: x + 10
```

V proměnné `f` je nyní uložen objekt typu funkce, příkaz `type(f)` nám vrátí `function`. `f` má smysl samo o sobě (*an sich*). Teprve voláme-li funkci `f` s konkrétním argumentem, tak získáme funkční hodnotu. Například položíme-li `x=3` po vyhodnocení `f(x)` dostaneme `13`.

Poznámka 3.2 (Není funkce jako funkce)**:** Z programátorského pohledu zde mluvíme o tzv. **čisté funkci** (*pure function*). Většina „funkcí", které při programování používáte, nejsou funkce ve výše uvedeném smyslu (i kdybychom relaxovali požadavek na reálnou návratovou hodnotu – jejich výstup může být ovlivněn i něčím dalším, než hodnotou argumentů, a navíc mohou mít vedlejší efekty).

Poznámka 3.3: Uvedená Definice 3.1 je záměrně obecná a zastřešuje pojmy „reálná funkce reálné proměnné", „reálná posloupnost" a „reálná funkce více reálných proměnných", s kterými se budeme postupně podrobněji seznamovat.

Poznámka 3.4 (Závisle a nezávisle proměnné, značení)**:** Reálnou funkci reálné proměnné f také lze chápat jako formální popis závislosti dvou veličin (proměnných), např. x a y, kterou znázorňujeme v grafu s horizontální osou x a vertikální y, symbolicky v tomto případě píšeme $y = f(x)$. O x pak mluvíme jako o nezávisle proměnné a o y jako o závisle proměnné. Je-li totiž zadána hodnota proměnné x, pak pomocí f lze jednoznačně určit hodnotu proměnné y, Proto hodnota y závisí na hodnotě x, která je v tomto smyslu nezávislá. Tuto interpretaci často potkáte ve fyzice, ale pro její názornost ji občas budeme používat i zde.

Nezávisle proměnnou různých funkcí budeme označovat symboly n, k, či ℓ v situacích, kdy probíhají nějakou podmnožinu celých čísel („diskrétní proměnná“). Symboly x, y a z používáme pro „spojitou proměnnou“, nebo v situaci, kdy nemáme bližší informaci o definičním oboru.

Mezi reálnými funkcemi lze přirozeně provádět základní algebraické operace:

Definice 3.2 (Násobek, součet, součin a podíl reálných funkcí)**:** Mějme reálné funkce $f\colon A \to \mathbb{R}$ a $g\colon B \to \mathbb{R}$ a konstantu $c \in \mathbb{R}$.

- Potom definujeme **násobek reálné funkce** f konstantou c jako funkci

$$(cf)(x) := c \cdot f(x), \quad x \in D_{cf} := A.$$

- Pokud $C := A \cap B \neq \emptyset$, pak definujeme **součet funkcí** $f + g\colon C \to \mathbb{R}$ a **součin** $f \cdot g\colon C \to \mathbb{R}$ těchto reálných funkcí předpisy

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x) \quad \text{a} \quad (f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x) \quad \text{pro } x \in C.$$

- Dále pokud $D := \{x \in A \cap B \mid g(x) \neq 0\} \neq \emptyset$, pak definujeme **podíl funkcí** $\frac{f}{g}\colon D \to \mathbb{R}$ předpisem

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{pro } x \in D.$$

Poznámka 3.5: Pro ty z vás, kteří v letním semestru studujete i předmět BI-LA2, poznamenejme, že množina všech reálných funkcí definovaných právě na nějaké neprázdné množině $A \subset \mathbb{R}^n$ a vybavená operací sčítání a násobení konstantou z Definice 3.2 tvoří vektorový prostor. Pokud je množina A konečná, pak (a pouze pak) je prostor všech takovýchto funkcí konečnědimenzionální.

Otázka 3.1: Mějme funkce $f(x) = \sqrt{x}$ a $g(x) = \sqrt{-x}$. Najděte funkci $f + g$.

3.2 Reálná funkce reálné proměnné

V BI-MA1 se budeme zabývat reálnými funkcemi s pouze jednou reálnou proměnnou. Reálným funkcím více proměnných se budeme věnovat v zimním semestru v navazujícím předmětu BI-MA2.

Definice 3.3 (Reálná funkce reálné proměnné)**:** Zobrazení $f\colon D_f \to \mathbb{R}$, kde $D_f \subset \mathbb{R}$ je neprázdná množina reálných čísel, nazýváme **reálnou funkcí reálné proměnné**.

Poznámka 3.6: V celém kurzu BI-MA1 budeme termín *reálná funkce reálné proměnné* povětšinou zkracovat na termín **funkce**. Nebezpečí zmatení nehrozí, s funkcemi více proměnných se podrobněji setkáme až v BI-MA2.

Reálná funkce reálné proměnné je často zadána tzv. *explicitně*. Tedy pomocí funkčního předpisu typu $f(x) = V(x)$, kde $V(x)$ je nějaký výraz v proměnné x a bez explicitního udání definičního oboru. Např. „$f(x) = x^2 + 1$“. Tímto způsobem ovšem funkce není plně zadána. Jaký je její definiční obor? Buď musíme explicitně říci, jaký definiční obor uvažujeme, nebo konvenčně zvolíme největší možný definiční obor vzhledem k danému výrazu:

Definice 3.4 (Maximální definiční obor)**:** Funkci f zadanou pouze předpisem $V(x)$ chápeme definovanou na **maximálním**[1] **definičním oboru**, tedy na množině všech reálných x, pro které má výraz $V(x)$ smysl jakožto reálné číslo, a lze mu tedy jednoznačně přiřadit reálné číslo.

Pro připomenutí uvádíme Tabulku 3.2 s definičními obory několika známých funkcí. Podrobný přehled vlastností elementárních funkcí, včetně jejich definičních oborů, nalezne čtenář v dodatkové Kapitole 12.

Příklad 3.1: Pod funkcí f zadanou explicitně vzorcem $f(x) := \sqrt{x+1}$ si tedy představíme funkci $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ určenou tímto předpisem na maximálním definičním oboru, kterým je množina D_f takových $x \in \mathbb{R}$, že $\sqrt{x+1}$ má smysl a dává reálné číslo. Z požadavku $x + 1 \geq 0$ pak hned dostáváme maximální definiční obor $D_f = \langle -1, +\infty)$.

Tato funkce f je různá od funkce g zadané předpisem $g(x) := \sqrt{x+1}$ s definičním oborem $D_g := \langle 0, +\infty)$.

Příklad 3.2: Uvažme předpis $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$. Přirozeným definičním oborem f je množina

$$D_f = \langle 0, 1) \cup (1, +\infty).$$

Podmínky na „smysluplnost“ daného výrazu jsou totiž v tomto případě nenulovost jmenovatele a nezápornost argumentu odmocniny. Konkrétně $x - 1 \neq 0$ a $x \geq 0$.

Otázka 3.2: Zadává předpis $f(x) = \ln\Big(\ln\big(\sin(x)\big)\Big)$ funkci?

[1] Někdy též „přirozeném“ definičním oboru.

funkce	parametr	podmínka popisující definiční obor
$\frac{1}{x^k}$	$k \in \mathbb{N}$	$x \neq 0$
$\sqrt[2k]{x}$	$k \in \mathbb{N}$	$x \geq 0$
$\sqrt[2k+1]{x}$	$k \in \mathbb{N}_0$	$x \in \mathbb{R}$
e^x		$x \in \mathbb{R}$
$\ln(x)$		$x > 0$
$\sin(x)$		$x \in \mathbb{R}$
$\cos(x)$		$x \in \mathbb{R}$
$\mathrm{tg}(x)$		$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ pro $k \in \mathbb{Z}$
$\mathrm{cotg}(x)$		$x \neq k\pi$ pro $k \in \mathbb{Z}$
$\arcsin(x)$		$-1 \leq x \leq 1$
$\arccos(x)$		$-1 \leq x \leq 1$
$\mathrm{arctg}(x)$		$x \in \mathbb{R}$

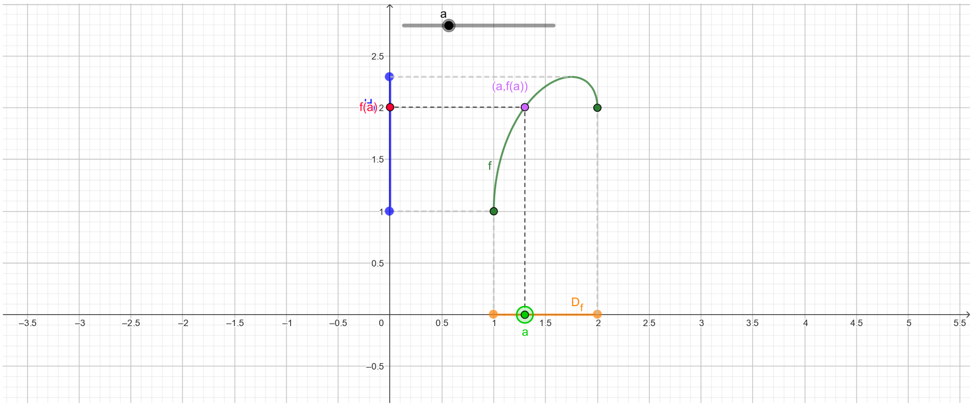
Tabulka 3.2: Maximální definiční obory některých elementárních funkcí.

Funkci $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ si často můžeme také představit, respektive nakreslit, pomocí jejího **grafu**. Tím máme na mysli podmnožinu roviny $\mathbb{R}^2$ zadanou předpisem $\Gamma_f := \{(x, y) \mid y = f(x), \text{ pro } x \in D_f\}$. Všimněte si, že graf funkce f, tj. množina Γ_f, představuje relaci (BI-DML, Definice), která formálně tuto funkci (zobrazení) definuje. V našem konkrétním případě reálné funkce reálné proměnné ovšem lze tuto množinu velmi názorně vizualizovat v rovině.

Velké množství ukázek grafů různých funkcí může čtenář nalézt v dodatkové Kapitole 12. Dále zde na Obrázku 3.1 čtenářstvu nabízíme interaktivní ukázku grafu funkce a souvisejících pojmů.

Protože jsou funkce speciálními případy zobrazení, přenáší se na ně pojmy prostá (injektivní), na (surjektivní) a vzájemně jednoznačná (bijektivní) funkce. Také ihned po zobrazeních zdědíme operace zúžení zobrazení, skládání zobrazení a inverzní zobrazení, a koncept rovnosti zobrazení. Viz Kapitolu 11.

V případě inverze se ovšem s prostým poděděním pojmu od zobrazení nespokojíme. Pro (nejen pouze) naše účely studia vlastností reálných funkcí reálné proměnné je přístup v BI-DML Definici 11.9 příliš striktní. Naše „funkce“ (Definice 3.3) chápeme jako zobrazení $A \to \mathbb{R}$, kde $A \subset \mathbb{R}$ je neprázdná množina a vždy zobrazujeme *do* $\mathbb{R}$. Například exponenciála, e^x, tak standardně není chápána jako surjektivní (na $\mathbb{R}$),



Obrázek 3.1: Interaktivní ilustrace k základním vlastnostem funkcí. Pomocí služby Geogebra vizualizujeme graf funkce $f(x) = 1 + \sqrt{x} + \sqrt{(x-1)(2-x)}$. Jejím maximálním definičním oborem je množina $D_f = \langle 1, 2\rangle \subset \mathbb{R}$, oborem hodnot je množina $H_f = \langle 1, 1+3\sqrt{3}/4\rangle$ (netriviální, budete umět odvodit pomocí diferenciálního počtu na konci semestru). Na obrázku můžete pohybovat bodem $a \in D_f$ a sledovat změnu funkční hodnoty $f(a) \in H_f$ a bodu $(a, f(a)) \in \Gamma_f$. (Otevřít v prohlížeči.)

není bijekcí a neměla by tak inverzi, i když je prostá. Zavádíme proto následující koncept inverzní funkce.

Definice 3.5 (Inverzní funkce)**:** Je-li $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ prostá funkce, pak **inverzní funkcí** $f^{-1}\colon H_f \to \mathbb{R}$ k zobrazení f definujeme pro každé $x \in H_f = f(D_f)$ předpisem $f^{-1}(x) := y$, kde y je (za uvedených předpokladů nutně jednoznačně daný) prvek množiny D_f splňující $x = f(y)$.

Příklad 3.3: S touto definicí je skutečně $\ln : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ inverzní funkcí k $e^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Obě funkce jsou prosté. Pouze ln je surjektivní.

Otázka 3.3: Existuje funkce, pro kterou by platilo $f^{-1}(x) = \frac{1}{f(x)}$ pro všechna $x \in D_{f^{-1}}$?

Pro popis chování funkcí se nám ještě mohou hodit následující dva pojmy.

Definice 3.6 (Omezená funkce / *bounded function*)**:** Funkci $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ nazýváme **omezenou**, právě když existuje konstanta $K \geq 0$ taková, že pro všechna $x \in D_f$ platí nerovnost $|f(x)| \leq K$.

Alternativně, přesněji ekvivalentně, bychom mohli říci, že funkce f je omezená, právě když její obor hodnot je omezená množina. Vzpomeňte si, že omezenost množiny $M \subset \mathbb{R}$ znamená existenci konstanty $K > 0$ takové, že $|x| \leq K$ pro všechna $x \in M$.

Otázka 3.4: Udejte příklad dvou funkcí, jedné omezené a jedné neomezené. Své volby řádně zdůvodněte.

Vedle omezenosti funkce zavedené v Definici 3.6 je pro popis funkcí užitečný i následující pojem.

Definice 3.7 (Konstantní funkce / *constant function*)**:** Funkci $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ nazýváme **konstantní**, právě když existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že pro všechna $x \in D_f$ platí $f(x) = c$.

Otázka 3.5: Dala by se konstantnost funkce $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ vyjádřit podmínkou nakladenou na její obor hodnot? Podobně jako jsme to výše udělali pro omezenost?

Otázka 3.6: Vymyslete funkci zadanou předpisem, který na první pohled formálně závisí na nezávisle proměnné x, ale která je ve skutečnosti konstantní.

Dále uvádíme pouze několik příkladů demonstrujících právě zmíněné pojmy v případě funkcí.

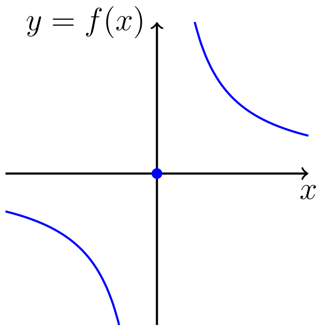
Příklad 3.4: Určete, zda je následující funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ prostá, na, případně bijektivní.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Řešení. Funkce f je prostá. Vskutku, předpokládejme, že existují $x_1 \neq x_2$ taková, že $f(x_1) = f(x_2)$. Protože $f(x)$ má dle definice výše vždy stejné znaménko jako x (tj. $\operatorname{sgn}(x) = \operatorname{sgn}(f(x))$, platí i pro $x = 0$), tak musí mít x_1 stejné znaménko jako x_2 a zjevně též musí být obě nenulová (protože $x_1 \neq x_2$ a $f(x)$ je nulová pouze pro $x = 0$). Předpokládejme, že jsou obě kladná. Potom $1/x_1 = 1/x_2$ je ekvivalentní $x_2 = x_1$ a dostáváme spor s předpokladem $x_1 \neq x_2$. Analogicky postupujeme, pokud by byla obě záporná.

Funkce f je také na. Pro $y = 0$ platí $f(0) = 0$ a pro $y \neq 0$ platí $f(1/y) = y$, tedy ke každému $y \in \mathbb{R}$ najdeme bod x takový, že $f(x) = y$. Celkově je tedy f bijektivní. Graf této funkce je znázorněn na Obrázku 3.2.

Příklad 3.5: Uvažme funkce $f(x) = \sqrt{x}$ a $g(x) = \sqrt{|x|}$ jejichž maximálními definičními obory jsou $D_f = \langle 0, +\infty)$ a $D_g = \mathbb{R}$. Funkce f je zúžením funkce g na množinu $\langle 0, +\infty)$. Platí tedy $f = g\big|_{\langle 0,+\infty)}$.



Obrázek 3.2: Graf funkce z Příkladu 3.4. Tato funkce je bijekcí množiny $\mathbb{R}$ se sebou samou.

Funkce f je prostá a příslušná inverzní funkce f^{-1} má definiční obor $D_{f^{-1}} = \langle 0, +\infty)$ a pro každé $x \geq 0$ platí $f^{-1}(x) = x^2$. Funkce g prostá není, protože např. $g(-1) = g(1) = 1$.

Příklad 3.6: Uvažujme funkce $f(x) = x^2$ a $g(x) = \sqrt{x}$. Maximálními definičními obory jsou $D_f = \mathbb{R}$ a $D_g = \langle 0, +\infty)$.

Složená funkce $g \circ f$ má definiční obor $D_{g\circ f} = f^{-1}\big(\langle 0, +\infty)\big) = \mathbb{R}$ a pro každé $x \in D_{g\circ f}$ platí $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{x^2} = |x|$. Složená funkce $f \circ g$ má definiční obor $D_{f\circ g} = g^{-1}\big(\mathbb{R}\big) = \langle 0, +\infty)$ a pro každé $x \in D_{f\circ g}$ platí $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (\sqrt{x})^2 = x$. Je tedy zřejmé, že $f \circ g \neq g \circ f$. Pokud ale zúžíme f na $\langle 0, +\infty)$, dostaneme už prostou funkci, ke které je funkce g inverzní. Tj. $\big(f|_{\langle 0,+\infty)}\big)^{-1} = g$.

Příklad 3.7: Funkce $f(x) = \sin^2(x) + \cos^2(x)$ je konstantní.

Skutečně, pro všechna $x \in D_f = \mathbb{R}$ platí známá trigonometrická rovnost $f(x) = 1$.

Příklad 3.8: Funkce $g(x) = \frac{1}{x}$, $D_g = (1, +\infty)$ je omezená. Funkce $h(x) = \frac{1}{x}$ omezená není.

Otázka 3.7: Mějme tři funkce f, g a h s definičními obory

$$D_f = \mathbb{R}, \quad D_g = \langle 0, +\infty), \quad D_h = \langle 0, +\infty)$$

dané předpisy

$$\begin{aligned} f(x) &= x, \quad x \in D_f, \\ g(x) &= x, \quad x \in D_g, \\ h(x) &= |x|, \quad x \in D_h. \end{aligned}$$

Které jsou si vzájemně rovny?

Typy monotonie funkce

Vedle známých vlastností funkcí (prostá, na, bijektivní) rozeznáváme několik typů monotonie funkcí. Tyto vlastnosti už využívají toho, že definiční obory i obory hodnot našich funkcí jsou podmnožiny reálných čísel, na kterých máme zavedené úplné uspořádání. Pro obecná zobrazení analog těchto pojmů nemáme.

Definice 3.8 (Typy monotonie funkcí)**:** Uvažme funkci $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ a množinu $M \subset D_f$. Potom funkci f nazýváme

- **rostoucí na množině** M, právě když pro každé $x_1, x_2 \in M$ splňující $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) \leq f(x_2)$,
- **klesající na množině** M, právě když pro každé $x_1, x_2 \in M$ splňující $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) \geq f(x_2)$,
- **ostře rostoucí na množině** M, právě když pro každé $x_1, x_2 \in M$ splňující $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) < f(x_2)$,
- **ostře klesající na množině** M, právě když pro každé $x_1, x_2 \in M$ splňující $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) > f(x_2)$.

Pokud některý z výše zmíněných pojmů použijeme bez reference na množinu M, pak za M bereme celý definiční obor uvažované funkce. Následující příklady ilustrují zcela elementární použití výše uvedené definice. Později během semestru si ukážeme i sofistikovanější metody umožňující odhalit typ monotonie funkce pomocí derivace.

Příklad 3.9: Například $f(x) = x^2$ pro $x \in D_f = \mathbb{R}$ je funkce rostoucí na $\langle 0, +\infty)$, ale nejedná se o rostoucí funkci.

Řešení. Funkce f jistě není rostoucí: její definiční obor je $\mathbb{R}$ a pro $x_1 = -2$ a $x_2 = 0$ splňující $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) = 4 > 0 = f(x_2)$.

Bavíme-li se ovšem o intervalu $\langle 0, +\infty)$, pak jsou-li x_1 a x_2 dvě nezáporná čísla splňující $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) = x_1^2 < x_1 x_2 < x_2^2 = f(x_2)$ (dvojnásobné násobení nerovnosti nezáporným číslem).

Příklad 3.10: Funkce $g(x) = -x^3$, $x \in D_f = \mathbb{R}$, je ostře klesající.

Řešení. Mějme $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ splňující $x_1 < x_2$. Rozmysleme si tři možné situace pokrývající všechny možnosti:

- Pokud $x_1 < 0$ a $x_2 > 0$, pak $g(x_1) = -x_1^3 > 0 > -x_2^3 = g(x_2)$.
- Pokud $0 \leq x_1 < x_2$, pak $x_1^3 < x_2^3$ a tedy $g(x_1) = -x_1^3 > -x_2^3 = g(x_2)$.
- Pokud $x_1 < x_2 \leq 0$, pak $x_1^3 < x_2^3$ a tedy $g(x_1) = -x_1^3 > -x_2^3 = g(x_2)$.

Není těžké si rozmyslet, že každá ostře rostoucí (nebo ostře klesající) funkce je prostá. Opak ale neplatí, ne každá prostá funkce je ostře klesající (nebo ostře rostoucí). Skutečně, podívejte se na funkci z Příkladu 3.4.

Otázka 3.8: Pokud pro nějaká $a, b \in \mathbb{R}$ platí $a < b$, plyne odtud i nerovnost $a \leq b$?

Poznámka 3.7 (Různé terminologie)**:** Ve světě neexistuje celková shoda na terminologii zavedené v Definici 3.8. Je možné, ze střední školy jsou zvyklí na konvenci, ve které se rozlišují „rostoucí“ (naše ostře rostoucí) „neklesající“ (naše rostoucí), „klesající“ (naše ostře klesající) a „nerostoucí“ (naše klesající). Volba, kterou činíme zde, je rozšířenější v anglických materiálech a navíc, jak později uvidíme, lépe ladí se vztahem těchto typů monotonie a znaménka derivace.

Často chceme souhrnně mluvit o (ostře) rostoucích nebo klesajících funkcích. Proto zavádíme následující dva pojmy.

Definice 3.9 (Monotónní funkce)**:** Funkci, která je rostoucí nebo klesající, nazýváme **monotónní**. Funkci, která je ostře rostoucí nebo ostře klesající, nazýváme **ryze monotónní**.

Otázka 3.9: Existuje funkce, která je současně rostoucí i klesající?

Otázka 3.10: Je každá ryze monotónní funkce i monotónní?

Otázka 3.11: Je každá ostře rostoucí funkce i rostoucí?

Příklad 3.11 (Častý omyl)**:** Zřejmě pod vlivem definice typů monotonie pro posloupnosti (Definice 4.2) mají občas studenti tendenci komolit podmínky v Definici 3.8. Například vlastnost funkce být ostře rostoucí na intervalu I by mylně vyjádřili požadavkem: pro každé x z I platí nerovnost $f(x) < f(x+1)$.

Tento požadavek jistě nelze splnit pro intervaly, jejichž pravý krajní bod není $+\infty$. Ale to není zásadní problém. Kvantifikaci přes dvě hodnoty x_1 a x_2 omezené *pouze* podmínkou $x_1 < x_2$ nelze nahradit volbou dvou bodů x a $x+1$ posunutých o jedničku.

Názorně to lze ukázat například na následující funkci. Konkrétní předpis není tak zásadní, hlavní pointa je patrná z Obrázku 3.3. Uvažme funkci definovanou předpisem $f(x) = \lfloor x \rfloor + \lceil x \rceil - x$, $x \in D_f = \mathbb{R}$. Přímým dosazením pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ dostáváme

$$f(x+1) = \lfloor x \rfloor + 1 + \lceil x \rceil + 1 - x - 1 = f(x) + 1 > f(x).$$

Tj. tato funkce splňuje uvedenou mylnou podmínku. Porovnáme-li ale funkční hodnoty v bodech $1/4$ a $1/2$ pak dostaneme opačnou nerovnost,

$$\begin{aligned} f(1/4) &= 0 + 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}, \\ f(1/2) &= 0 + 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

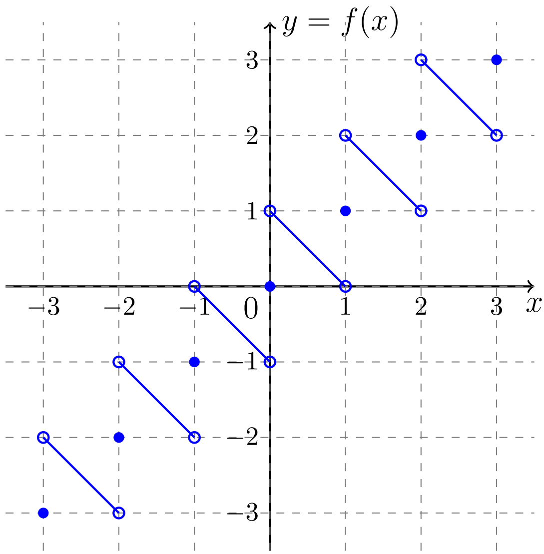
tj. $f(1/4) > f(1/2)$. Názorně tuto situaci ilustruje Obrázek 3.3.

Parita funkcí: sudost a lichost

Dalšími užitečnými vlastnostmi funkcí je sudost a lichost. Tyto vlastnosti vyjadřují symetričnost grafu vůči zrcadlení vzhledem k ose y, resp. bodové symetrii vůči počátku souřadného systému. Mohou nám tedy z poloviny zjednodušit například problém kreslení grafu dané funkce. Ukázku sudé a liché funkce najde čtenář na Obrázku 3.4.

Definice 3.10 (Sudá a lichá funkce / *even and odd functions*)**:** Mějme funkci $f\colon A \to \mathbb{R}$, jejíž definiční obor je symetrický vůči počátku, tedy pro každé $x \in D_f$ je i $-x \in D_f$. Funkci f nazýváme

- **sudou**, právě když pro každé $x \in D_f$ platí $f(-x) = f(x)$.



Obrázek 3.3: Graf funkce $f(x) = \lfloor x \rfloor + \lceil x \rceil - x$ z Příkladu 3.11. Tato funkce sice splňuje podmínku $f(x) < f(x+1)$ pro každé reálné x, ale není ostře rostoucí.

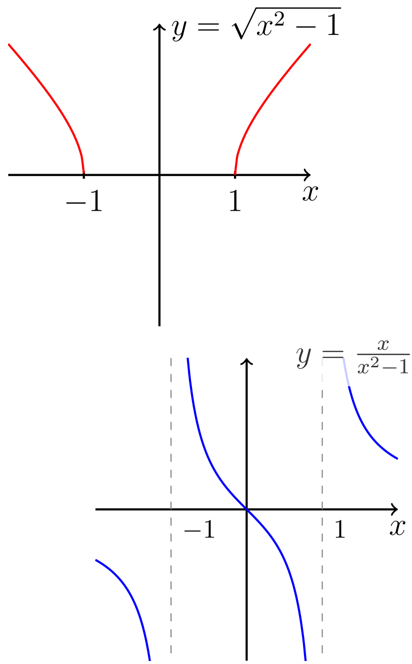
- **lichou**, právě když pro každé $x \in D_f$ platí $f(-x) = -f(x)$.

Při určování sudosti, resp. lichosti, dané funkce bývá výhodné využít chování těchto vlastností vůči součtu a součinu funkcí. To je obsahem následujícího pozorování.

Pozorování 3.1 (Chování sudosti/lichosti funkce vůči součinu/součtu.)**:** Platí následující dvě tvrzení, jejichž důkaz plyne velmi přímočaře přímo z definice[2]. V obou tvrzeních uvažujeme takové funkce, jejichž definiční obory mají neprázdný průnik.

- Součet dvou sudých funkcí je sudá funkce. Součet dvou lichých funkcí je lichá funkce.
- Součin dvou sudých, nebo lichých, funkcí je sudá funkce. Součin sudé a liché funkce je lichá funkce.

[2]Rozmyslete!



Obrázek 3.4: Grafická ukázka sudé (vlevo) a liché (vpravo) funkce.

Otázka 3.12: Jsou-li f sudá funkce a g lichá funkce definované na $\mathbb{R}$, jsou pak funkce

$$F(x) = f(x) \cdot g(x), \quad G(x) = x \cdot g(x)^2, \quad H(x) = f(x) + g(x)$$

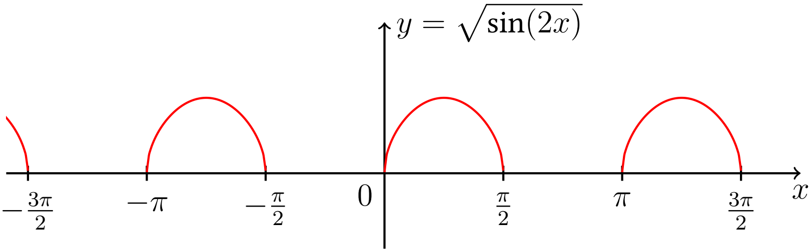
sudé nebo liché?

Otázka 3.13: Existuje funkce, která by byla sudá i lichá zároveň?

Periodicita funkce

Poslední zajímavou vlastností, kterou zde budeme občas potřebovat, je periodicita funkce.

Definice 3.11 (Periodická funkce / *periodic function*)**:** Mějme funkci $f\colon A \to \mathbb{R}$, konstantu $T > 0$ a nechť pro každé $x \in A$ je i $x + T$, $x - T \in A$. Pokud pro každé $x \in A$ platí $f(x \pm T) = f(x)$, pak funkci f nazýváme **periodickou funkcí** s **periodou** T.



Obrázek 3.5: Periodická funkce s periodou π.

Ukázku periodické funkce najde čtenář na Obrázku 3.5.

Poznámka 3.8: Pozor, periodická funkce nutně nemusí mít *nejmenší* periodu. Příkladem je libovolná konstantní funkce definovaná na $\mathbb{R}$ nebo tzv. Dirichletova funkce $D\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem

$$D(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q}, \\ 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Zkuste se zamyslet nad tím, jak vypadá graf této funkce D. Je také dobré poznamenat, že pro každé strojové číslo x platí $D(x) = 0$.

3.3 Intermezzo: Odhady

Než se pustíme do následující Podkapitoly 3.4, která se zabývá asymptotickými horními mezemi, je vhodné čtenáře a čtenářky seznámit s konceptem „odhadu“. Schopnost provádět vhodné „odhady“ neuplatníme jenom ve zmíněné kapitole, ale konkrétně i

- při studiu limit (Definice 5.2 a Definice 5.1) a dalších asymptotických vztahů (Podkapitola 4.7),
- při používání Věty o limitě sevřené funkce (resp. posloupnosti),
- při používání srovnávacího kritéria pro konvergenci řad (BI-MA2, Věta),
- při odhadování chyby aproximace pomocí Taylorova polynomu (BI-MA2, Věta),

- a v mnoha dalších situacích.

Toto téma dělá často studentům problémy. Tato část textu se snaží vyjasnit základní princip. Z výše uvedeného seznamu je patrné, že k procvičování této techniky bude mnoho příležitostí.

Řešení nerovnic

Během svého předchozího studia jste se jistě setkali s řešením nerovnic. Máme na mysli příklady typu[3]

$$f(x) \geq 0 \quad \text{nebo} \quad f(x) > 0,$$

kde $f(x)$ je jistý výraz v proměnné x (reálné, celočíselné, atp.). Naším úkolem je pak nalézt *všechny* hodnoty proměnné x, pro které daná nerovnost platí/neplatí. Tuto úlohu lze ale zpravidla exaktně vyřešit k plné spokojenosti pouze v několika málo (školních) příkladech. Řešení těchto úloh tak lze často chápat jako cvičení se v ekvivalentních úpravách a využívání vlastností funkcí[4], které se v úloze vyskytují.

Uvedené úlohy lze i velmi pěkně a názorně graficky interpretovat. Řešíme-li např. nerovnici $f(x) > 0$, tak se ptáme, pro jaká x je bod $(x, f(x))$ grafu funkce f *nad* osou x.

Zásadní u těchto úloh ovšem je, že zadání (ona nerovnice), je *dáno předem*. Řešitel (tj. student) rovnou dostává úlohu, kterou má řešit, v tomto směru se od něj nevyžaduje další mentální aktivita.

Co to je odhad?

Při odhadování se také zabýváme nerovnicemi a nerovnostmi, ale více „kreativním“ způsobem. Pokusme se koncept „odhadu“ přiblížit na konkrétním jednoduchém případě, který svou strukturou velmi odpovídá případům, které budeme řešit později.

Mějme opět funkci f a zkoumejme, kdy platí nerovnost $f(x) < 5$ (číslo 5 zde volíme uměle, nechceme tuto část výkladu zatěžovat zaváděním dalšího parametru). Proměnná (reálná či celočíselná) zde případně může být nějakým způsobem omezena. Třeba nás platnost této nerovnosti zajímá pro velká x, nebo pro x z nějakého okolí

[3]U každé nerovnice lze jednoduchou ekvivalentní úpravou jednu ze stran převést na nulu, znaménko nerovnosti lze měnit vynásobením nerovnice číslem -1.

[4]To samozřejmě není na škodu, ba naopak!

nějakého bodu. V typickém případě bude úloha $f(x) < 5$ prakticky neřešitelná technikami, které jste využívali dříve během svého studia (ve smyslu poznámek z předchozí podkapitoly). Ať budeme s nerovnicí $f(x) < 5$ cvičit libovolně, tak se nám zkrátka nepodaří ji převézt do tvaru, kdy bychom mohli jednoduše určit (všechna) vyhovující x.

Jak se tedy s problémem vypořádat? Použijeme odhad! Předchozí odstavec v podstatě říká, že výraz $f(x)$ je často příliš komplikovaný, než aby se s ním dalo nějak rozumně pracovat. Klíčem k úspěchu (pokud ho lze dosáhnout, to samozřejmě nemusí být jisté) je využít tranzitivity nerovnosti. Pokud pro všechna vhodná x platí nerovnost $f(x) < g(x)$ a následně nalezneme mezi těmito vhodnými x všechna taková, pro která platí $g(x) < 5$, pak $f(x) < 5$ pro ta samá x! Cílem odhadu samozřejmě je, aby úloha $g(x) < 5$ byla už jednodušší a řešitelná známými prostředky.

Funkci g, resp. výrazu $g(x)$, říkáme **horní odhad** funkce f, resp. výrazu $f(x)$, na množině M, právě když nerovnost $f(x) < g(x)$ platí pro všechna $x \in M$ (případně lze povolit i neostrou nerovnost, tím se nic zásadního nezmění). Stejným způsobem bychom mohli mluvit o **dolním odhadu**. Nyní se ovšem nabízí otázka, jak onen odhad nalézt. V podstatě se lze vydat následujícími dvěma cestami:

- Horní odhad $g(x)$ si tipneme, je nám nějak prozrazen (vidíme ho zmíněný ve studijním textu, v poznámkách od kamaráda, atp.), a poté se pokusíme standardními technikami dokázat, že nerovnost $f(x) < g(x)$ platí pro všechna požadovaná x. Tento přístup má ale mnoho možností k selhání. Třeba jsme špatně tipovali, třeba uvedenou nerovnici opět nelze jen tak jednoduše vyřešit ve středoškolském smyslu. Toto je častá past, či slepá ulička.

- Horní odhad $g(x)$ *cíleně zkonstruujeme* tak, abychom automaticky věděli, že nerovnost $f(x) < g(x)$ platí pro všechna uvažovaná x. K tomu využijeme základních vlastností nerovností a vlastností funkcí vyskytující se ve výrazu $f(x)$. Tj. místo pasivního přístupu popsaného v předchozím bodě je na naší straně vyžadována nějaká myšlenka, která nám umožní prvotní výraz zjednodušit a zároveň zajistit platnost potřebné nerovnosti.

Odhadů v dané situaci typicky existuje vícero. Ne všechny ale musí vést při řešení původní úlohy k cíli. Ty, které jsou sice pravdivé (ve smyslu platnosti oné nerovnosti), ale k cíli nevedou, často nazýváme „příliš hrubé“, už jsou moc vzdálené od počátečního výrazu.

Jednoduché odhady

Naším cílem je osvojit si schopnost provádění horních i dolních odhadů. V této části textu se pokusíme demonstrovat výše zmíněné koncepty na konkrétních příkladech.

Při odhadování používáme základní vlastnosti absolutních hodnot, zlomků, atp. Rozmyslete si například následující jednoduchá tvrzení o reálných číslech a, b, A, B:

- Pokud $|a| \leq A$ a $|b| \leq B$, potom podle trojúhelníkové nerovnosti platí $|a+b| \leq A + B$. Například $|\sin(x) + \cos(2x)| \leq 1 + 1 = 2$ pro všechna reálná x.
- Pokud $a < b$, potom $2a < a + b < 2b$.
- Pokud $0 < a < A$ a $b > B > 0$, potom $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{B}$ a proto i
$$\frac{a}{b} < \frac{A}{B}.$$
Pokud chceme zvětšit hodnotu zlomku, tak *zvětšujeme* hodnotu čitatele a *zmenšujeme* hodnotu jmenovatele. Naopak, pokud chceme hodnotu zlomku zmenšit, pak postupujeme opačně. Například pro všechna reálná x platí
$$\frac{2 + \sin(x)}{3 - \cos^2(x)} \leq \frac{2+1}{3-1} = \frac{3}{2}.$$
Musíme si také dávat pozor na znaménka, kdyby například B bylo záporné a b kladné, tak uvedený odhad jistě neplatí (záporné číslo nemůže být větší, než kladné).

Ve zbytku této části ukážeme několik komplikovanějších příkladů.

Příklad 3.12: Pro každé $|x| < 1$ (tj. $x \in U_0(1) = (-1, 1)$) platí

- $\frac{1}{2+x} < \frac{1}{2-1} = 1$ (zmenšili jsme jmenovatel).
- $\frac{1}{2+x} > \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$ (zvětšili jsme jmenovatel).
- $\frac{1+x}{2+x^2} < \frac{1+1}{2+0} = 1$ (zvětšili jsme čitatel a zmenšili jmenovatel[5]).
- $\frac{1+x}{2+x^2} > 0$ (dolní odhad pro čitatel je 0).

[5] Ano, pro $x = 0$ k žádné změně v jmenovateli nedošlo, ale to není příliš podstatné. Ostrá nerovnost stále platí, kvůli ostré nerovnosti v odhadu čitatele.

Zdůrazněme, že všechny vysvětlivky v závorkách, a tedy i uvedené odhady, vycházejí z předpokladu $|x| < 1$, ekvivalentně $-1 < x < 1$.

Příklad 3.13: Pro každé $x > 1$ (tj. $x \in U_{+\infty}(1) = (1, +\infty)$) platí

- $\frac{1}{2+x} < \frac{1}{0+x} = \frac{1}{x}$, nebo $\frac{1}{2+x} < \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$ (zmenšili jsme jmenovatel).
- $\frac{1}{2+x} > \frac{1}{2x+x} = \frac{1}{3x}$ (zvětšili jsme jmenovatel: když $x > 1$, pak $2x > 2$ a tedy i $2x + x > 2 + x$).
- $\frac{1+x}{2+x^2} < \frac{x+x}{0+x^2} = \frac{2}{x}$ (zvětšili jsme čitatel a zmenšili jmenovatel).
- $\frac{1+x}{2+x^2} > \frac{1+1}{2x^2+x^2} = \frac{2}{3x^2}$ (zmenšili jsme čitatel a zvětšili jmenovatel).

Zdůrazněme, že všechny vysvětlivky v závorkách, a tedy i uvedené odhady, vycházejí z předpokladu $x > 1$.

Příklad 3.14: Nalezněte nějaké okolí $U_{+\infty}(c)$ bodu $+\infty$ tak, aby

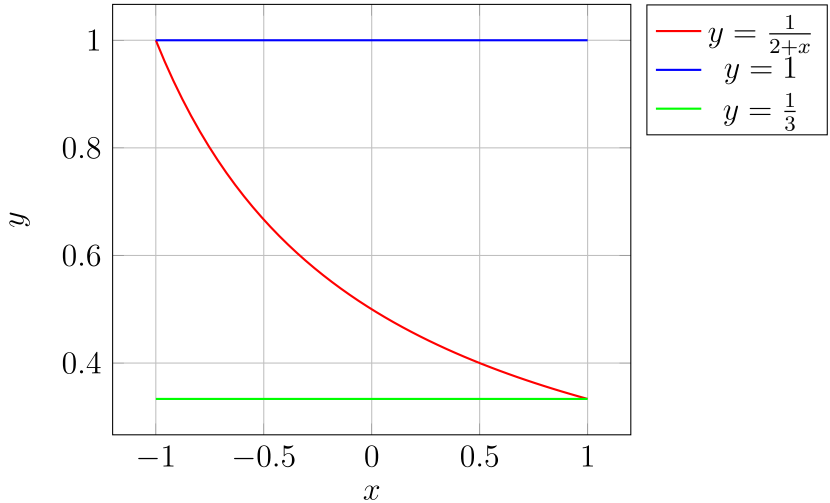
$$\frac{6x}{1+x^3} \leq 2. \tag{3.1}$$

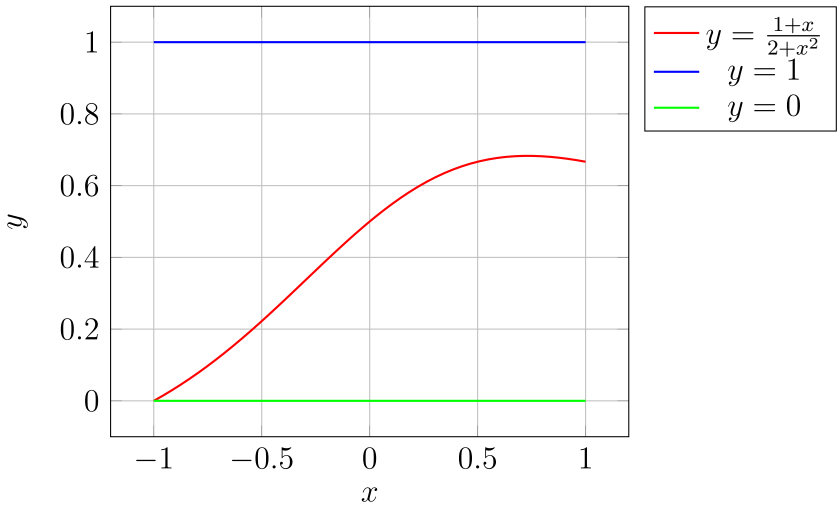
Řešení. Kdybychom postupovali „klasickým“ způsobem, tak bychom pro $x \neq -1$ zmíněnou nerovnici převedli na ekvivalentní nerovnici $2x^3 - 6x + 2 \geq 0$. Poté bychom hledali kořeny polynomu třetího stupně na levé straně. Zde by ovšem nastal problém, protože onen kořen nelze jen tak uhodnout. Intuitivně (případně i z prozkoumání obrázku) je ovšem zřejmé, že jistě existuje okolí $+\infty$, na kterém tato nerovnost platí. To nám ovšem nedává žádnou kvantitativní informaci o tom, jaké to okolí je.

Naštěstí tuto úlohu ale dokážeme velmi snadno vyřešit i pomocí odhadu. V zadání se po nás nechce největší takové okolí a tak můžeme skutečně nalézt nějaké libovolné vyhovující požadavkům. Navíc by čtenáři mělo být jasné, že úlohu (3.1) lze vyřešit (zamyslete se nad chováním jmenovatele a čitatele zlomku na levé straně této nerovnosti).

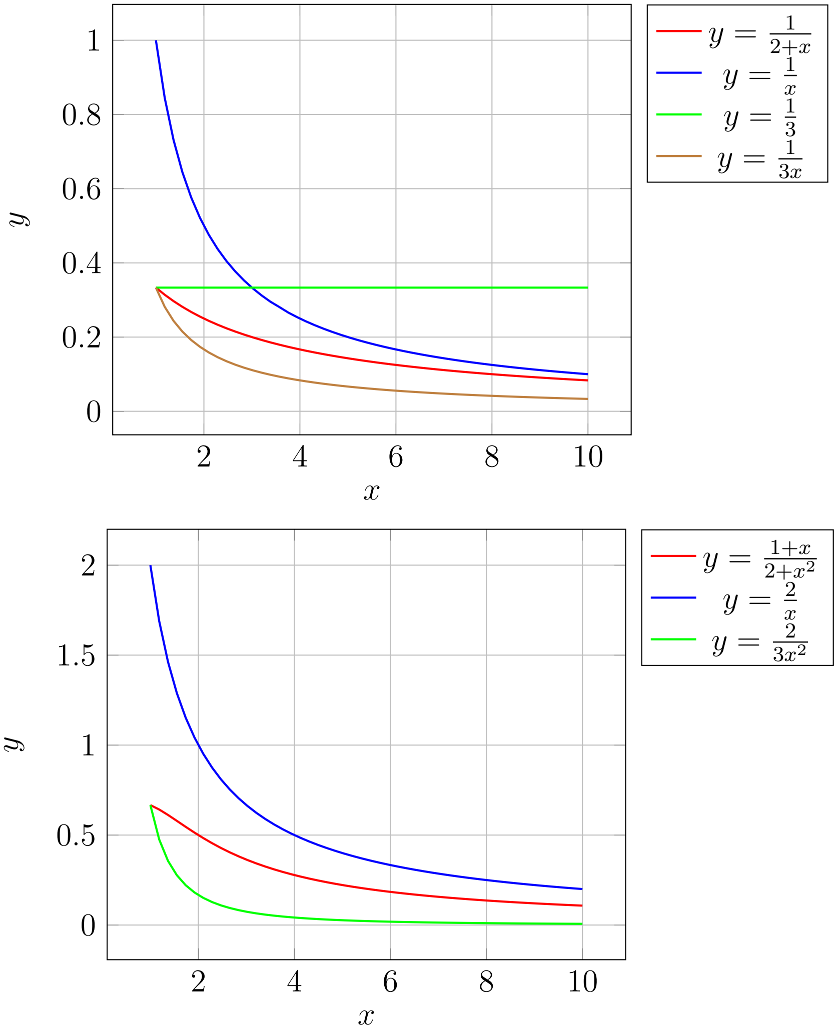
Hledáme okolí $+\infty$, a proto se z počátku omezme třeba na $x > 0$. Za tohoto předpokladu je čitatel kladný. A při snaze o zmenšení jmenovatele (hodnotu zlomku chceme zvětšit) můžeme použít nerovnost $1 + x^3 > x^3 > 0$. Jinak řečeno, pro všechna $x > 0$ platí

$$\frac{6x}{1+x^3} < \frac{6x}{x^3} = \frac{6}{x^2}.$$





Obrázek 3.6: Grafy funkcí z Příkladu 3.12 spolu s jejich dolními a horními odhady odvozenými tamtéž. Červený graf odpovídá vždy odhadované funkci. Na horizontální ose se omezujeme na $|x| < 1$, které se Příklad 3.12 týká. Druhý graf nám naznačuje, že provedený horní odhad byl zřejmě příliš hrubý.



Obrázek 3.7: Grafy funkcí z Příkladu 3.13 spolu s jejich dolními a horními odhady odvozenými tamtéž. Červený graf odpovídá vždy odhadované funkci. Na horizontální ose se omezujeme na $x \in (1, 10)$, které se Příklad 3.13 týká, celou množinu $(1, +\infty)$ zde samozřejmě zobrazit nemůžeme.

To je náš odhad. Nyní stačí vyřešit pro jaká $x > 0$ platí nerovnost

$$\frac{6}{x^2} \leq 2.$$

To už je výrazně jednodušší úloha, která je ekvivalentní úloze $x^2 \geq 3$, které mezi kladnými čísly x vyhovují právě $x \in \langle\sqrt{3}, +\infty)$, ale klidně bychom mohli použít i $x \in (3, +\infty)$. Uvědomte si, že vzhledem k zadání nemusíme hledat největší možné okolí.

Požadovaná nerovnost (3.1) tak platí určitě[6] na okolí $(\sqrt{3}, +\infty)$.

3.4 Asymptotické horní meze o a $\mathcal{O}$

Velmi často potřebujeme porovnávat chování funkčních hodnot dvou funkcí, když se jejich argument blíží nějaké hodnotě. Například:

- Funkce $f(x)$ „klesá" v bodě $a = 1$ „rychleji" k nule než $(x-1)^2$.
- Funkce $g(x)$ „neroste rychleji" než $\sqrt{x}$ pro x jdoucí do nekonečna.
- Funkce $f(x)$ a $g(x)$ se „chovají stejně", když x jde k 0.

Slovíčka jako „rychleji" nebo „chovají" jsou poměrně *vágní*. Co tím *přesně* míníme? Co to znamená?[7]

Tyto, a další asymptotické vztahy, nacházejí široké uplatnění v různých aplikacích. Studenti FITu na ně nejčastěji narazí při porovnávání výpočetních a paměťových složitostí algoritmů. Jedná se ale o šikovný nástroj umožňující efektivně mluvit o chování funkcí obecně, využijeme ho například i v BI-MA2 při studiu Taylorových polynomů.

V této části textu představíme dva způsoby (o a $\mathcal{O}$), jak první dva body přesně kvantifikovat. K tomuto tématu se ovšem vrátíme i později během semestru. V Podkapitolách 5.7 a 4.7 zavedeme i další způsoby porovnávání asymptotického chování funkcí a posloupností ($\sim$, Θ, Ω a ω). Později i ukážeme, jak k zkoumání těchto vztahů využívat limity (Podkapitola 5.8).

[6] Nevíme, jestli tato množina je největší možná, pravděpodobně ne, ale to není problém.
[7] Při druhém čtení doporučuji porovnat tuto pasáž s textem na začátku Podkapitoly 6.5.

Asymptotická horní mez $\mathcal{O}$

Začneme asi nejznámějším asymptotickým symbolem $\mathcal{O}$. Tuto notaci rozšířil zejména Edmund Landau (německý matematik, 1877 – 1938). Tato notace nachází uplatnění nejen v teoretické informatice a matematice, ale i ve fyzice a obecně kdykoliv se snažíme vystihnout a popsat chování „komplikovaných" funkcí pomocí „jednodušších" funkcí (asymptotika).

Představme si, že zkoumáme počet operací $f(n)$, které musí jistý algoritmus vykonat, je-li jeho vstup délky $n \in \mathbb{N}$. Byli bychom rádi, kdyby se choval *nejhůře* lineárně „pro velká n". To znamená, že bychom se spokojili se závislostmi jako $f(n) = n$, $f(n) = 2n - 1$, $f(n) = 10n + 1$, nebo ještě lépe $f(n) = \sqrt{n}$ nebo $f(n) = \ln(n)$. Už by nás ale nepotěšila závislost $f(n) = n^2$.

Ukažme si ještě jednu motivaci, ke které se dostaneme při studiu Taylorových polynomů v BI-MA2. Máme dvě funkce f a g a snažíme se vyjádřit, jak se chová velikost rozdílu $f(x) - g(x)$ pro x na okolí nějakého bodu a, pro jednoduchost zde zvolme $a = 0$. Můžeme být například v situaci, kdy počítat funkční hodnoty jedné z nich je těžké, nebo nemožné, a snažíme se ji nahradit tou druhou funkcí. Zajímá nás, jak dobrá je tato aproximace pro $x \to 0$. Byli bychom spokojení, kdyby tento rozdíl šel k nule nejhůře kvadraticky. Tj. spokojíme se s $f(x) - g(x) = 2x^2$, nebo $f(x) - g(x) = 10x^4$, ale už by se nám nelíbilo $f(x) - g(x) = x$ pro $x \to 0$.

Následující pojem souhrnně vystihuje tyto – na první pohled lehce různorodé – situace.

Definice 3.12 (Asymptotická horní mez $\mathcal{O}$)**:** Mějme dvě funkce f, g a bod $a \in \overline{\mathbb{R}}$ takový, že a je hromadným bodem množiny $D_f \cap D_g$ a existuje okolí V_a splňující[8] $(V_a \cap D_f) \smallsetminus \{a\} = (V_a \cap D_g) \smallsetminus \{a\}$.

Řekneme, že **funkce f je asymptoticky shora omezená funkcí g pro x jdoucí k a**, symbolicky

$$f(x) = \mathcal{O}(g(x)) \text{ pro } x \to a,$$

právě když existuje kladná konstanta $c \in \mathbb{R}$ a okolí U_a bodu a tak, že pro všechna $x \in (U_a \cap D_f \cap D_g) \smallsetminus \{a\}$ platí

$$|f(x)| \leq c \cdot |g(x)|.$$

Rovnost v zápise $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ je potřeba chápat spíše ve smyslu $f(x) \in \mathcal{O}(g(x))$. Tedy ve smyslu příslušnosti funkce f k množině všech funkcí, které jsou

[8] Vágně bychom mohli říci, že definiční obory obou funkcí vypadají na okolí bodu a stejně.

shora asymptoticky omezené funkcí g (pro x jdoucí k jistému bodu). Zápis s rovností je ale zdaleka nejrozšířenější, vzhledem k použití této notace i vhodnější (viz dále). Také se v případě $\mathcal{O}$ často používá slovní spojení „$f(x)$ je nejvýše řádu $g(x)$ pro $x \to a$".

Příklad 3.15: Vraťme se k prvnímu motivačnímu odstavci před Definicí 3.12. V následujících bodech uvažujeme dvě funkce f a g definované na $D_f = D_g = \mathbb{N}$. Jediným hromadným bodem množiny $D_f \cap D_g = \mathbb{N}$ je bod $+\infty$ a porovnáváme proto chování těchto funkcí v bodě $+\infty$, v nekonečnu. Dále si povšimněte, že $+\infty$ nepatří do definičního oboru uvedených funkcí ani do okolí $+\infty$ a nemusíme se jím zabývat (v Definici 3.12 se v kvantifikaci nezávisle proměnné explicitně odstraňuje a první podmínka na podobnost definičních oborů je triviálně splněna).

- Pro $f(n) = n$ a $g(n) = n$ platí $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$, tj. $n = \mathcal{O}(n)$, pro $n \to +\infty$. Skutečně, v definici můžeme triviálně zvolit $c = 1$ a $U_{+\infty} = (0, +\infty)$. Pro všechna $n \in U_{+\infty} \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}$ platí $|n| = n \leq 1 \cdot n = 1 \cdot |n|$.

- Pro $f(n) = 2n + 1$ a $g(n) = n$ platí $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$, tj. $2n + 1 = \mathcal{O}(n)$, pro $n \to +\infty$. Skutečně, v definici můžeme triviálně zvolit $c = 3$ a $U_{+\infty} = (0, +\infty)$. Pro všechna $n \in U_{+\infty} \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}$ platí $|2n+1| = 2n+1 \leq 2n+n = 3n = 3 \cdot |n|$.

- Pro $f(n) = \sqrt{n}$ a $g(n) = n$ platí $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$, tj. $\sqrt{n} = \mathcal{O}(n)$, pro $n \to +\infty$. Skutečně, v definici můžeme triviálně zvolit $c = 1$ a $U_{+\infty} = (0, +\infty)$. Pro všechna $n \in U_{+\infty} \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}$ platí $\left|\sqrt{n}\right| = \sqrt{n} \leq \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} = 1 \cdot |n|$.

Následující tvrzení plyne velmi přímočaře rovnou z Definice 3.12. Doporučujeme čtenáři, aby si jeho důkaz samostatně promyslel.

Tvrzení 3.1 (Alternativní formulace vztahu $\mathcal{O}$)**:** Mějme dvě funkce f, g a bod a splňující úvodní předpoklady uvedené v Definici 3.12 a dále předpokládejme, že hodnota $g(x)$ je nenulová na nějaké množině $(V_a \cap D_g) \setminus \{a\}$, kde V_a je okolí bodu a. Potom $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ pro $x \to a$, právě když existuje konstanta $c > 0$ taková, že nerovnost

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq c,$$

platí pro každé $x \in (U_a \cap D_g \cap D_f) \setminus \{a\}$, kde U_a je nějaké okolí bodu a.

Jinak vágněji, nepřesněji a stručněji řečeno: pro funkci g nenulovou na okolí bodu a (s možnou výjimkou bodu a) je platnost $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ pro $x \to a$ *ekvivalentní omezenosti* podílu $f(x)/g(x)$ na okolí bodu a, s možnou výjimkou bodu a. Odtud je pěkně vidět, že nenulová multiplikativní konstanta, ať už násobící f či g, nemá vliv na platnost vztahu $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$.

Příklad 3.16: Pro $x \to +\infty$ platí $\sin(x) = \mathcal{O}(1)$, ale neplatí $x^2 = \mathcal{O}(x)$ pro $x \to +\infty$.

Řešení. Argumentovat můžeme využitím předchozího Tvrzení 3.1. Konstantní funkce s hodnotou 1 i funkce x jsou nenulové (dokonce kladné) třeba na $U_{+\infty}(1) = (1, +\infty)$. V případě prvního vztahu díky znalosti oboru hodnot funkce sin platí

$$\left| \frac{\sin(x)}{1} \right| = |\sin(x)| \leq 1.$$

Podíl $\sin(x)/1$ je tedy omezený na zmíněném okolí a skutečně platí $\sin(x) = \mathcal{O}(1)$ pro $x \to +\infty$.

V druhém případně pro x ze zmíněného okolí $U_{+\infty}(1)$ platí

$$\left| \frac{x^2}{x} \right| = |x| = x.$$

Tento výraz může například nabývat libovolné přirozeněčíselné hodnoty (zde jednoduše $x = n \in \mathbb{N}$) a proto není omezený, tj. vztah $x^2 = \mathcal{O}(x)$ pro $x \to +\infty$ neplatí.

Pomocí vztahu $\mathcal{O}$ můžeme ovšem porovnávat chování funkcí i v jiných bodech, než v $+\infty$.

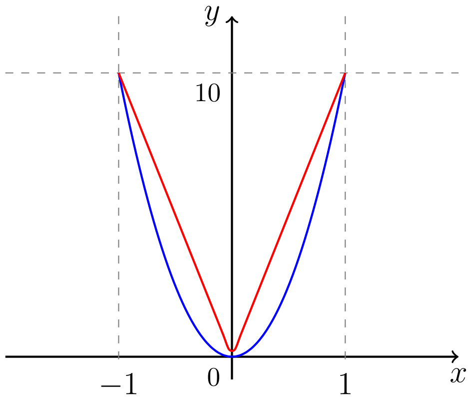
Příklad 3.17: Platí vztah $10x^2 = \mathcal{O}(x)$ pro $x \to 0$.

Řešení. Skutečně, obě funkce jsou definované na celém $\mathbb{R}$ a vezmeme-li libovolné $x \in U_0(1) = (-1, 1)$, pak platí

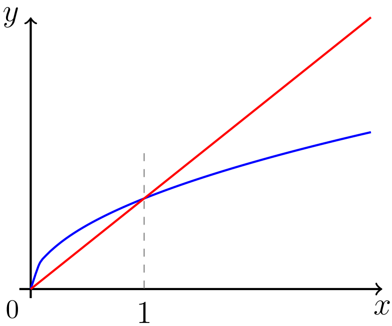
$$|10x^2| = |10x| \cdot |x| \leq 10 \cdot |x|,$$

protože pro uvažované x platí $|x| < 1$. Konstantu v Definici 3.12 lze tedy volit jako $c = 10$ (nebo jako libovolné jiné číslo větší než 10). Ilustrace této situace je uvedena na Obrázku 3.8.

Příklad 3.18: Platí vztah $2\sqrt{x} = \mathcal{O}(x)$ pro $x \to +\infty$.



Obrázek 3.8: Ilustrace platnosti vztahu $10x^2 = \mathcal{O}(x)$ pro $x \to 0$. Modrý graf reprezentuje $10x^2$. Červený graf pak $10 \cdot |x|$.



Obrázek 3.9: Ilustrace platnosti vztahu $2\sqrt{x} = \mathcal{O}(x)$ pro $x \to +\infty$. Modrý graf reprezentuje $2\sqrt{x}$, červený graf pak $2|x|$.

Řešení. Skutečně, obě funkce jsou definované alespoň na $(0, +\infty)$ – okolí bodu $+\infty$. Vezmeme-li nyní libovolné $x \in U_{+\infty}(1) = (1, +\infty)$, pak platí

$$|2\sqrt{x}| = \frac{2}{\sqrt{x}} \cdot x \leq 2 \cdot |x|.$$

Za konstantu v Definici 3.12 lze tedy volit $c = 2$. Pro ilustraci uvádíme Obrázek 3.9.

Poznámka 3.9 (Používejte výpočetní nástroje)**:** Grafy na Obrázcích 3.8 a 3.9 ilustrují grafické ověření nerovnosti požadované v Definici 3.12. Můžeme tam vidět volbu hledané konstanty c a okolí zkoumaného bodu a. Obrázek samozřejmě nenahradí důkaz. Velmi ale studentům doporučuji při samostatném počítání svoje nerovnosti/odhady takto graficky testovat třeba pomocí Mathematica. Odhalíte tím velké množství chyb.

Intuitivně tedy pomocí $\mathcal{O}$ vyjadřujeme „neostrou horní mez“ *až na multiplikativní konstantu* (viz první bod následujícího Tvrzení 3.2). Všimněte si, že k tomu, aby platilo $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ pro $x \to a$, tak funkce g nutně nemusí mít větší funkční hodnoty než f. Například uvažte pravdivý vztah $10x = \mathcal{O}(x)$ pro $x \to +\infty$. V tomto případě na okolí $U_{+\infty}(0)$ dokonce nikdy neplatí $10x \leq x$.

Učiňme ještě čtyři jednoduchá a užitečná pozorování. Jde opravdu o tvrzení plynoucí přímo z Definice 3.12.

Tvrzení 3.2 (Základní vlastnosti $\mathcal{O}$)**:** Pro vztah $\mathcal{O}$ platí následující čtyři tvrzení.

- Máme-li funkci f, hromadný bod $a \in D_f$ a libovolnou nenulovou konstantu K, pak platí

$$Kf(x) = \mathcal{O}(f(x)) \text{ a } f(x) = \mathcal{O}(Kf(x)) \text{ pro } x \to a.$$

- Pokud pro funkci f a bod a platí $f(x) = \mathcal{O}(1)$ pro $x \to a$, pak existuje okolí U_a takové, že funkce $f|_{(U_a \cap D_f) \smallsetminus \{a\}}$ je omezená.

- Vztah $\mathcal{O}$ je tranzitivní. Tj. pokud $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ a $g(x) = \mathcal{O}(h(x))$ v obou případech pro $x \to a$, pak $f(x) = \mathcal{O}(h(x))$ pro $x \to a$.

- Pokud $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ a $h(x) = \mathcal{O}(g(x))$ pro $x \to a$, pak $f(x) + h(x) = \mathcal{O}(g(x))$ a $f(x) \cdot h(x) = \mathcal{O}\big(g(x)^2\big)$ pro $x \to a$.

Důkaz. Postupně dokážeme všechny čtyři body.

- V Definici 3.12 stačí zvolit libovolné okolí U_a bodu a. Potom pro $c = |K| > 0$ a libovolné $x \in (U_a \cap D_f) \smallsetminus \{a\}$ platí

$$|Kf(x)| = |K| \cdot |f(x)| \leq c \cdot |f(x)|.$$

Dále pro $c = \frac{1}{|K|} > 0$ a libovolné $x \in (U_a \cap D_f) \smallsetminus \{a\}$ platí

$$|f(x)| = \frac{1}{|K|} \cdot |Kf(x)| \leq c \cdot |Kf(x)|.$$

- Za těchto předpokladů z Definice 3.12 plyne existence konstanty $c > 0$ a okolí bodu U_a takových, že pro všechna $x \in (U_a \cap D_f) \setminus \{a\}$ platí
$$|f(x)| \leq c \cdot 1 = c,$$
tj. funkce f zúženo na $(U_a \cap D_f) \setminus \{a\}$ je omezená.

- Z předpokladu $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ plyne existence konstanty $c_1 > 0$ a okolí U_a bodu a takového, že $(D_f \cap U_a) \setminus \{a\} = (D_g \cap U_a) \setminus \{a\}$ a pro každé $x \in D_f \cap U_a \setminus \{a\} = D_g \cap U_a \setminus \{a\}$ platí $|f(x)| \leq c_1|g(x)|$. Z předpokladu $g(x) = \mathcal{O}(h(x))$ plyne existence konstanty $c_2 > 0$ a okolí V_a bodu a takového, že $(D_g \cap V_a) \setminus \{a\} = (D_h \cap V_a) \setminus \{a\}$ a pro každé $x \in D_g \cap V_a \setminus \{a\} = D_h \cap V_a \setminus \{a\}$ platí $|g(x)| \leq c_2|h(x)|$. Položíme-li $W_a = U_a \cap V_a$, pak W_a je okolím bodu a a pak $D_f \cap W_a \setminus \{a\} = D_h \cap W_a \setminus \{a\}$ a pro $c := c_1c_2$ platí $|f(x)| \leq c_1|g(x)| \leq c_1c_2|h(x)| = c|h(x)|$ pro každé $x \in D_f \cap W_a$.

- Z předpokladu $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ plyne existence konstanty $c_1 > 0$ a okolí U_a bodu a takového, že $(D_f \cap U_a) \setminus \{a\} = (D_g \cap U_a) \setminus \{a\}$ a pro každé $x \in D_f \cap U_a \setminus \{a\} = D_g \cap U_a \setminus \{a\}$, platí $|f(x)| \leq c_1|g(x)|$. Z předpokladu $h(x) = \mathcal{O}(g(x))$ plyne existence konstanty $c_2 > 0$ a okolí V_a bodu a takového, že $(D_h \cap V_a) \setminus \{a\} = (D_g \cap V_a) \setminus \{a\}$ a pro každé $x \in D_h \cap V_a \setminus \{a\} = D_g \cap V_a \setminus \{a\}$ platí $|h(x)| \leq c_2|g(x)|$. Položíme-li $W_a = U_a \cap V_a$, pak W_a je okolím bodu a a pro $c = c_1 + c_2$ platí $|f(x) + h(x)| \leq |f(x)| + |h(x)| \leq (c_1 + c_2)|g(x)| = c|g(x)|$ pro každé $x \in W_a \cap D_f \setminus \{a\} = W_a \cap D_g \setminus \{a\} = W_a \cap D_h \setminus \{a\}$. Podobně pro $c = c_1c_2$ platí $|f(x)h(x)| = |f(x)||h(x)| \leq c_1c_2|g(x)^2|$ pro $x \in W_a \cap D_f \setminus \{a\} = W_a \cap D_g \setminus \{a\} = W_a \cap D_h \setminus \{a\}$. □

Tím je důkaz všech bodů dokončen.

Příklad 3.19: Platí $\frac{\sin x + \cos x}{x} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ pro $x \to +\infty$.

Řešení. Pro každé $x > 1$ s využitím trojúhelníkové nerovnosti a za uvedeného předpokladu platné nerovnosti $\sqrt{x} < x$ platí
$$\left|\frac{\sin x + \cos x}{x}\right| = \frac{|\sin x + \cos x|}{x} \leq \frac{|\sin x| + |\cos x|}{x} \leq$$
$$\leq \frac{1+1}{\sqrt{x}} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}.$$
Za konstantu v Definici 3.12 lze tedy volit $c = 2$.

Příklad 3.20: Postupně si rozmysleme následující případy. Po prostudování předchozích příkladů a tvrzení by s těmito body neměla mít čtenářka žádný problém.

- $\frac{1}{x} = \mathcal{O}(1)$ pro $x \to +\infty$,
- $x = \mathcal{O}(x^2)$ pro $x \to +\infty$,
- $\frac{1}{x} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ pro $x \to 0$,
- $10x = \mathcal{O}(x)$ pro $x \to +\infty$,
- $10^{10} \cdot x^2 = \mathcal{O}(x^2)$ pro $x \to +\infty$,
- $10x^3 + x^2 - 12 = \mathcal{O}(x^3)$ pro $x \to +\infty$,
- $x^2 = \mathcal{O}(x)$ pro $x \to 0$.

Striktně větší horní mez o

Nyní přejděme k druhému typu asymptotické horní meze, která je „ostřejší" než předchozí $\mathcal{O}$. Rozdíl mezi o a $\mathcal{O}$ je analogický rozdílu mezi ostrou nerovností $<$ a neostrou nerovností $\leq$.

Definice 3.13 (Striktně větší horní mez o)**:** Mějme dvě funkce f, g a bod $a \in \overline{\mathbb{R}}$ takový, že a je hromadným bodem množiny $D_f \cap D_g$ a existuje okolí V_a splňující[9] $(V_a \cap D_f) \setminus \{a\} = (V_a \cap D_g) \setminus \{a\}$.

Řekneme, že **funkce f je asymptoticky shora striktně omezená funkcí g pro x jdoucí k a**, symbolicky

$$f(x) = o(g(x)) \text{ pro } x \to a,$$

právě když *pro každé* kladné $c \in \mathbb{R}$ existuje okolí U_a bodu a tak, že pro všechna $x \in U_a \cap D_f \cap D_g$ různá od a platí

$$|f(x)| < c \cdot |g(x)|.$$

[9] Vágně řečeno, definiční obory obou funkcí vypadají na okolí a stejně.

Všimněte si jemných, ale zásadních rozdílů mezi Definicí 3.12 symbolu $\mathcal{O}$ a Definicí 3.13 symbolu o. Pouze jsme změnili kvantifikátor u konstanty c a změnili typ nerovnosti! Pokud $f(x) = o(g(x))$ pro $x \to a$, pak se také často používá slovní spojení „$f(x)$ je striktně menšího řádu než $g(x)$ pro $x \to a$“.

Podobně jako v případě čísel platí „pokud $a < b$, pak $a \leq b$“, platí i následující očividný přímočarý důsledek Definic 3.12 a 3.13.

Pozorování 3.2 (Vztah $\mathcal{O}$ a o)**:** Pokud pro funkce f a g a bod a platí $f(x) = o(g(x))$ pro $x \to a$, pak i $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ pro $x \to a$. Naopak ne.

Podobně jako v případě $\mathcal{O}$ můžeme získat alternativní formulaci definice v případě, že funkce g je nenulová, viz Tvrzení 3.1. Za několik stránek toto tvrzení budeme moci interpretovat pomocí limity funkce a použít tak nástroje na výpočet limit i pro ověřování těchto asymptotických vztahů mezi funkcemi.

Tvrzení 3.3 (Alternativní formulace vztahu o)**:** Mějme dvě funkce f, g a bod a splňující úvodní předpoklady uvedené v Definici 3.13 a dále předpokládejme, že hodnota $g(x)$ je nenulová na nějaké množině $V_a \cap D_g \setminus \{a\}$, kde V_a je okolí bodu a. Potom $f(x) = o(g(x))$ pro $x \to a$, právě když pro všechny konstanty $c > 0$ existuje okolí U_a bodu a tak, že platí nerovnost

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < c,$$

pro každé $x \in U_a \cap D_g \cap D_f$, $x \neq a$.

Důkaz. Pouze bychom zde opakovali důkaz Tvrzení 3.1 s jinými kvantifikátory. Promyslete! $\square$

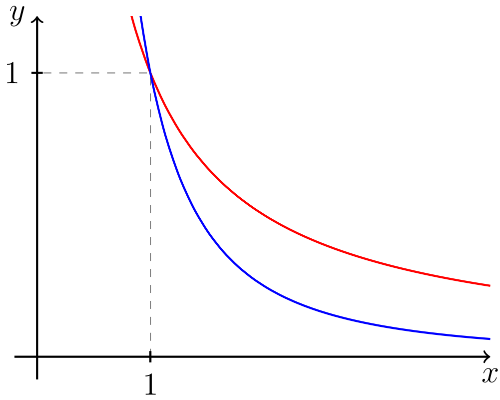
Příklad 3.21: Platí $\frac{1}{x^2} = o\left(\frac{1}{x}\right)$ pro $x \to +\infty$.

Řešení. Skutečně, vezmeme-li libovolné $c > 0$ a $x \in U_{+\infty}(1/c) = (1/c, +\infty)$, pak platí

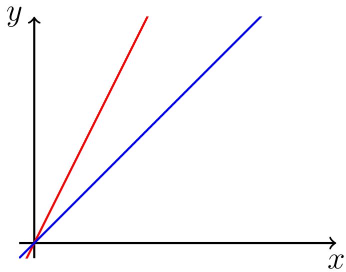
$$\left| \frac{1}{x^2} \right| = c \cdot \left| \frac{1}{x} \right| \cdot \left| \frac{1/c}{x} \right| < c \cdot \left| \frac{1}{x} \right| \cdot 1 = c \cdot \left| \frac{1}{x} \right|.$$

Grafická ilustrace této situace je na Obrázku 3.10.

Příklad 3.22: Neplatí $x = o(2x)$ pro $x \to +\infty$, i když $x = \mathcal{O}(2x)$ by v tomto bodě platilo.



Obrázek 3.10: Ilustrace vztahu $\frac{1}{x^2} = o\left(\frac{1}{x}\right)$ pro $x \to +\infty$. Červený graf reprezentuje $\frac{1}{x}$, modrý graf $\frac{1}{x^2}$.



Obrázek 3.11: Vztah $x = o(2x)$ pro $x \to +\infty$ neplatí. Červený graf reprezentuje $2x$, modrý graf x.

Řešení. Skutečně, vezmeme-li například $c = \frac{1}{4}$ a libovolné $x > 0$, pak

$$|x| = \frac{1}{4}|2x| \cdot 2 > \frac{1}{4}|2x|.$$

Opačná nerovnost tedy nemůže platit na žádném okolí $+\infty$. Ilustrace k tomuto příkladu je uvedena na Obrázku 3.11.

V následujícím tvrzení shrnujeme ty nejzákladnější vlastnosti o plynoucí takřka ihned přímo z Definice 3.13. Opět toto tvrzení porovnejte s Tvrzením 3.2.

Tvrzení 3.4 (Základní vlastnosti o)**:** Vztah o oplývá následujícími vlastnostmi.

- Vztah o je tranzitivní. Tj. pokud $f(x) = o(g(x))$ a $g(x) = o(h(x))$ v obou případech pro $x \to a$, pak $f(x) = o(h(x))$ pro $x \to a$.

- Pokud $f(x) = o(g(x))$ a $h(x) = o(g(x))$ pro $x \to a$, pak $f(x)+h(x) = o(g(x))$ a $f(x) \cdot h(x) = o\big(g(x)^2\big)$ pro $x \to a$.

Důkaz. Tento už opravdu zkuste provést sami. Jako vodítko lze použít důkaz Tvrzení 3.2. □

Příklad 3.23: Rozmyslete si následující tvrzení.

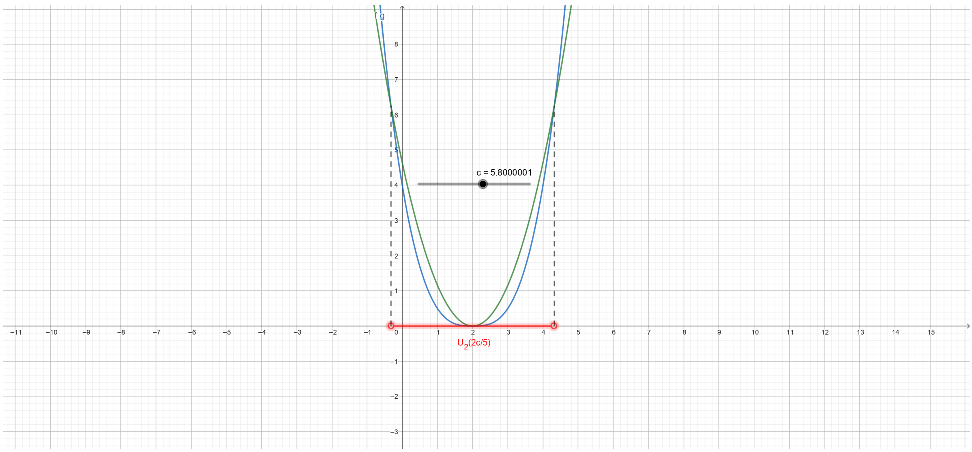
- $x^2 = o(x)$ pro $x \to 0$,
- $(x-1)^5 = o((x-1)^4)$ pro $x \to 1$,
- $\frac{2}{x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ pro $x \to 0$,
- $x^2 = o(x^3)$ pro $x \to +\infty$,
- $\frac{1}{x^2} = o\left(\frac{1}{x}\right)$ pro $x \to +\infty$.
- Jaká funkce splňuje $f(x) = o(1)$ pro $x \to +\infty$?

Otázka 3.14: Může pro nějakou funkci f a bod a platit $f(x) = o(f(x))$ pro $x \to a$?

Otázka 3.15: Udejte příklad dvou různých funkcí f a g pro které platí $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ pro $x \to 1$, ale neplatí $f(x) = o(g(x))$ pro $x \to 1$.

Interaktivní ilustrace

Na závěr této podkapitoly uvedeme ještě několik interaktivních ukázek. Na Obrázku 3.12 ilustrujeme grafický význam podmínky v definici o v případě porovnávání funkcí v bodě $a \in \mathbb{R}$ (Definice 3.13).



Obrázek 3.12: Tato ukázka se snaží ilustrovat význam podmínek v Definici 3.13. Uvažujeme dvě funkce $g(x) = (x-2)^3/2$ (modrý graf) a $f(x) = (x-2)^2/5$ (zelený graf reprezentuje $c|f(x)|$). Pomocí o porovnáváme chování těchto dvou funkcí v bodě $a = 2$. Platí $g(x) = o(f(x))$ pro $x \to 2$. Vizualizace umožňuje pro každé $c > 0$ znázornit okolí U_2 bodu 2 (zvýrazněno červenou barvou; zde nacházíme dokonce největší možné, což definice samotná nevyžaduje) takové, že pro všechna $x \in U_2 \setminus \{2\}$ platí nerovnost $|g(x)| < c|f(x)|$. (Otevřít v prohlížeči.)

4 Posloupnosti

Na posloupnosti narazíme jak v následujících partiích textu, tak i v mnoha různorodých aplikacích. Hrubě řečeno, pomocí pojmu posloupnosti můžeme formalizovat procesy probíhající v diskrétních krocích (ať už prostorových, nebo časových).

Představte si například posloupnost měření průměrné denní teploty v jistém místě nebo kurz bitcoinu vůči dogecoinu v daném okamžiku (tzv. časové řady). Numerické algoritmy typicky konstruují posloupnosti aproximací řešení daného problému. Členy těchto posloupností nemusí být nutně číselné (například matice nebo vektory). My se v našich úvahách ovšem omezíme pouze na číselné posloupnosti, na kterých je řada konceptů pěkně a jednoduše ilustrovatelná.

Konkrétnějším příkladem posloupností s očividným přesahem do IT mohou být posloupnosti pseudonáhodných čísel, které se používají k vytváření reprodukovatelných náhodně vypadajících posloupností (PRNG – *pseudorandom number generator*). Tyto posloupnosti jsou typicky rekurentně zadané a jejich první člen (případně několik prvních členů) představuje tzv. *seed*.

Mezi hlavní výsledky této kapitoly lze zařadit následující body.

- Zavedení pojmu posloupnosti, základní terminologie a značení.
- Prozkoumání základních vlastností posloupností (typy monotonie, omezenost, hromadné body posloupností).
- Připomenutí asymptotických vztahů $\mathcal{O}$ a o pro posloupnosti a zavedení dalších asymptotických vztahů ω, Ω a Θ.

4.1 Definice reálné posloupnosti

Pojďme nejprve formálně zavést pojem posloupnosti jakožto jistý typ zobrazení.

Definice 4.1 (Posloupnost / *sequence*)**:** Zobrazení množiny přirozených čísel $\mathbb{N}$ do množiny reálných čísel $\mathbb{R}$ nazýváme **reálná číselná posloupnost** (pokud nebude hrozit zmatení, budeme zkráceně mluvit o **posloupnosti**).

Dále budeme používat následující standardní značení. Je-li $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ posloupnost, pak funkční hodnotu a v bodě $n \in \mathbb{N}$, tj. reálné číslo $a(n)$, označujeme pomocí dolního indexu[1] symbolem a_n a nazýváme n**-tým členem posloupnosti** a. Skutečnost, že $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ je posloupnost, zapisujeme také zkráceně symbolem $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Otázka 4.1: Vyzýváme čtenářky a čtenáře, aby vlastními slovy zformulovali, jaký je rozdíl mezi symbolem a_n a $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Srovnejte s podobnou symbolikou u funkcí, tedy rozdílem mezi $f(x)$ a f v případě funkce $f\colon D_f \to \mathbb{R}$.

Zdůrazněme, že číselné posloupnosti uvažované v tomto textu jsou vždy nekonečné. Někdy zaváděný pojem „konečné posloupnosti“ je pro nás prostě jistá uspořádaná n-tice (s pevně daným n) a nemáme proto pro něj jakoukoliv potřebu.

V tomto textu nejčastěji narazíme na posloupnosti zadané explicitně vzorcem pro n-tý člen. Dalším způsobem zadání posloupností je pomocí rekurencí (tedy zadáním vztahu mezí n-tým členem a několika předchozími členy). Rekurentně zadanými posloupnostmi se budeme věnovat zejména v BI-MA2, ale na důležité příklady narazíme i zde (viz Newtonovu metodu v Podkapitole 10.1). Tyto způsoby ale nejsou jediné možné způsoby zadání posloupností.

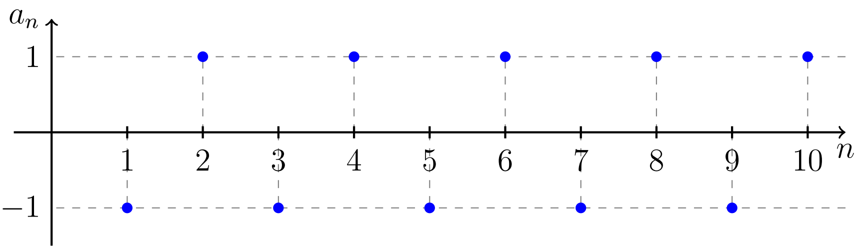
Poznámka 4.1 (Indexace)**:** V Definici 4.1 jsme se omezili na indexovou množinu $\mathbb{N}$. Obecně bychom mohli index posloupnosti n nechat probíhat libovolnou nekonečnou podmnožinou množiny $\mathbb{N}$. Takovou množinu ovšem vždy můžeme přeindexovat, nejde tedy o žádnou velkou újmu na obecnosti. Nejčastěji narazíme na praktickou potřebu indexovat prvky posloupností od nuly, pak přirozeně píšeme $(a_n)_{n=0}^{\infty}$.

Příklad 4.1: Uvažme posloupnost $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem $a_n := (-1)^n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Například tedy platí rovnosti $a_1 = -1$, $a_2 = 1$, či $a_{321} = -1$. Tuto posloupnost jsme mohli zadat i ekvivalentním způsobem:

$$a = \big((-1)^n\big)_{n=1}^{\infty}.$$

Oborem hodnot posloupnosti a je množina obsahující pouze *dva* prvky, $\{-1, 1\}$. Jinak řečeno, členy této posloupnosti nabývají pouze dvou hodnot, buď 1 nebo

[1] Závislost na diskrétních parametrech (např. celočíselných) často vyjadřujeme právě pomocí dolních indexů. Jako například u posloupností: a_n. Naopak závislost na spojitých parametrech pak většinou pomocí závorek, tj. například u reálných funkcí reálné proměnné píšeme $f(x)$.



Obrázek 4.1: Příklad posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

-1. Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má ale nekonečně mnoho členů. Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je graficky znázorněna na Obrázku 4.1.

Otázka 4.2: Uvažme posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ zadanou hodnotou prvního členu $a_1 = \alpha$ a rekurentním vztahem $a_{n+1} = 2a_n + 1$, $n \in \mathbb{N}$. Určete hodnotu α tak, aby $a_4 = -1$.

Otázka 4.3: Kolik členů má posloupnost $\left(\sin \frac{n\pi}{2}\right)_{n=1}^{\infty}$? Kolika různých hodnot nabývají její členy?

4.2 Vlastnosti posloupností

Posloupnosti, jakožto speciální případy funkcí, automaticky získávají celou řadu vlastností zavedených v předchozí kapitole. S posloupnostmi dále můžeme přirozeně provádět algebraické operace ve smyslu Definice 3.2, jen u dělení musíme být jako obvykle opatrní. Množinu všech reálných číselných posloupností značíme $\mathbb{R}^{\infty}$.

Podobně jako u funkcí (viz Definice 3.8 a 3.9), máme několik typů posloupností podle vlastností jejich sousedních členů[2]. V našem pojetí jsou posloupnosti speciálním případem funkcí a tak se následující definice může zdát redundantní. Pro úplnost ji zde ale uvádíme. Rozmyslete si, že není v rozporu s Definicemi 3.8 a 3.9 (tj. že každá ostře rostoucí posloupnost je i ostře rostoucí jakožto funkce atd.).

Definice 4.2 (Typy monotonie posloupností)**:** Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je **rostoucí** (resp. **klesající**) pokud $a_n \leq a_{n+1}$ (resp. $a_n \geq a_{n+1}$) pro každé $n \in \mathbb{N}$. Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je **ostře rostoucí** (resp. **ostře klesající**) pokud $a_n < a_{n+1}$ (resp. $a_n > a_{n+1}$) pro každé $n \in \mathbb{N}$. Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nazýváme **monotónní** jestliže je rostoucí nebo

[2]Pozor, u funkcí o „sousedních“ členech často nemá smysl mluvit.

klesající. Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nazýváme **ryze monotónní** jestliže je ostře rostoucí nebo ostře klesající.

Různí autoři používají dále termín „neklesající“ místo našeho „rostoucí“ (a podobně „nerostoucí“ v případě „klesající“). V tomto textu a v předmětech BI-MA1 i BI-MA2 se budeme důrazně držet názvosloví zavedeného v Definici 4.2.

Varování 4.1: Všimněte si, že různé typy monotonie v předchozí definici zavádíme čistě jako vlastnosti celé posloupnosti.

Dále se nám při diskuzi o posloupnostech může hodit pojem konstantní posloupnosti. Patrně je jasné co si pod ním představit, ale pro úplnost si ho formálně zavedeme.

Definice 4.3 (Konstantní posloupnost)**:** Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nazýváme **konstantní**, právě když existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$ splňující $a_n = c$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Příklad 4.2: Posloupnost $\big(\sin(5)\big)_{n=1}^{\infty}$ je konstantní, každý její člen je roven číslu $\sin(5)$. Naproti tomu posloupnost $(n)_{n=1}^{\infty}$ není konstantní, její první člen je roven číslu 1 a druhý číslu 2, třetí člen je roven číslu 3, atd.

Příklad 4.3: Rozmysleme si následující jednoduché tvrzení: posloupnost je konstantní, právě když je současně rostoucí i klesající.

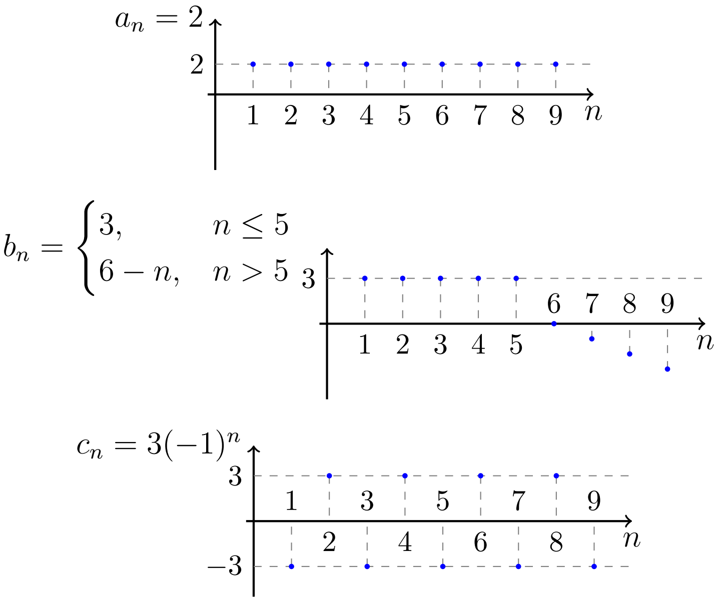
Řešení. Tvrzení má formu ekvivalence. K jeho důkazu proto dokážeme obě implikace.

Důkaz $\Rightarrow$: Předpokládejme, že máme konstantní posloupnost $a_n = c$, $n \in \mathbb{N}$, kde c je reálná konstanta. Potom jistě platí $a_{n+1} = c \geq c = a_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je proto dle Definice 4.2 rostoucí. Stejný argument ukazuje, že se jedná i o klesající posloupnost.

Důkaz $\Leftarrow$: Naopak nyní předpokládejme, že máme posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, která je rostoucí i klesající zároveň. Dle Definice 4.2 tedy platí nerovnosti $a_n \geq a_{n+1} \geq a_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. To je možné pouze v případě, že platí $a_n = a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Jinak řečeno, $a_n = a_1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je tedy konstantní. Číslo a_1 hraji roli konstanty c v definici konstantní posloupnosti.

Otázka 4.4: Rozmyslete si, které posloupnosti uvedené na Obrázku 4.2 jsou rostoucí, klesající, ostře rostoucí, ostře klesající, či monotónní.

Pokud máme pomocí definice rozhodnout jakého (a jestli vůbec) typu zadaná posloupnost je, musíme ověřit/vyvrátit podmínky uvedené v Definici 4.2. To samo o sobě může být komplikovaná úloha závisející na zadané posloupnosti. Ukažme si to na jednoduchých příkladech.



Obrázek 4.2: Tři posloupnosti uvedené v Otázce 4.4.

Příklad 4.4: Uvažme posloupnost $a_n = (n+1)^2 - n^2$, $n \in \mathbb{N}$. Rozhodněte o případném typu její monotonie.

Řešení. Nejprve je vhodné výraz lehce upravit,

$$a_n = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tato posloupnost je ostře rostoucí, protože

$$a_{n+1} = 2(n+1) + 1 = 2n + 1 + 2 > 2n + 1 = a_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

a tedy není klesající, ale je i rostoucí.

Příklad 4.5: Uvažme následující posloupnost: pro zadané $n \in \mathbb{N}$ nechť b_n označuje největší faktor v prvočíselném rozkladu čísla $n \geq 2$, resp. 1 pro $n = 1$. Rozhodněte o případném typu její monotonie.

Řešení. Rozmysleme si nejprve definici posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ prozkoumáním prvních několika členů:

$$
\begin{aligned}
1 = 1 \Rightarrow b_1 &= 1, \\
2 = 2 \Rightarrow b_2 &= 2, \\
3 = 3 \Rightarrow b_3 &= 3, \\
4 = 2 \cdot 2 \Rightarrow b_4 &= 2.
\end{aligned}
$$

Vidíme, že $b_1 < b_2$, ale $b_3 > b_4$. Proto nemůže platit ani jedna z podmínek v Definici 4.2. Uvedená posloupnost proto není (ostře) rostoucí ani (ostře) klesající.

Příklad 4.6: Uvažme posloupnost $c_n = n^2 - n$, $n \in \mathbb{N}$. Rozhodněte o případném typu její monotonie.

Řešení. Prvních několik členů má hodnotu

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 2, \quad c_3 = 6, \quad c_4 = 12.$$

„Zdá se“, že posloupnost bude ostře rostoucí. To ale *nemůžeme* tvrdit na základě porovnání jejích prvních čtyř členů! Srovnejte to se situací v předchozím příkladě, kde jsme růst/klesání vyvraceli. Nyní ho chceme prokázat, musíme proto ověřit platnost nerovnosti $a_n < a_{n+1}$ *pro všechna* $n \in \mathbb{N}$. Tato nerovnost je v našem konkrétním případě ekvivalentní nerovnosti

$$n^2 - n < (n+1)^2 - (n+1), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Po jednoduchých ekvivalentních úpravách získáváme nerovnost

$$0 < 2n, \quad n \in \mathbb{N},$$

která je očividně pravdivá (dvojnásobek libovolného přirozeného čísla je jistě kladný). Posloupnost $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ je proto ostře rostoucí.

Příklad 4.7: Uvažme posloupnost s členy $b_n = n^2 - 8n$, $n \in \mathbb{N}$. Rozhodněte o případném typu její monotonie.

Řešení. Pokud se nyní podíváme na několik prvních pár členů, pak dostaneme

$$b_1 = -7, \quad b_2 = -12, \quad b_3 = -15.$$

Pouze z těchto prvních členů by se mohlo zdát, že jde o ostře klesající posloupnost. Pro každé přirozené n je ale nerovnost

$$b_n > b_{n+1}$$

ekvivalentní nerovnosti

$$n < \frac{7}{2},$$

která jistě neplatí pro všechna n. Konkrétně platí pro $n = 1, 2, 3$, která jsme shodou okolností použili výše. Pro zbývající přirozená n už platí opačná ostrá nerovnost.

Tato posloupnost proto není monotonní. Ano, toto pozorování se dá odtušit ze samotného zadání a pak ho prokázat spočtením tří vhodných členů.

Otázka 4.5: Mějme rostoucí posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$. Která z následujících posloupností je nutně rostoucí?

a. $(a_n + 3b_n)_{n=1}^{\infty}$

b. $(1000a_n - b_n)_{n=1}^{\infty}$

c. $(a_n \cdot b_n)_{n=1}^{\infty}$

d. $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n=1}^{\infty}$

Protože každá posloupnost je současně i funkce, máme i pro posloupnosti koncept „omezenosti“, viz Definici 3.6. Pro úplnost tento pojem explicitně zavádíme i pro posloupnosti.

Definice 4.4 (Omezená posloupnost / *bounded sequence*)**:** Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nazýváme **omezenou**, právě když existuje konstanta $K > 0$ taková, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí nerovnost $|a_n| < K$. Posloupnost, která není omezená, nazýváme **neomezenou**.

Otázka 4.6: Která z posloupností na Obrázku 4.2 je omezená a která je neomezená?

4.3 Významné posloupnosti

Čtenáři i čtenářce jsou jistě dobře známy následující dva speciální příklady velmi jednoduchých posloupností.

Příklad 4.8 (Aritmetická posloupnost)**: Aritmetická posloupnost** je definována rekurentním vztahem $a_{n+1} = a_n + d$, kde parametr $d \in \mathbb{R}$ se nazývá **diference**.

Aby tento rekurentní vztah jednoznačně zadával posloupnost je nutné zafixovat první člen a_1. Je-li dán první člen a_1 pak očividně[3] platí

$$a_n = a_1 + (n-1)d\,, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Aritmetická posloupnost je ostře rostoucí pokud $d > 0$, ostře klesající pokud $d < 0$ a konstantní pokud $d = 0$. Pro všechny hodnoty uvažovaných parametrů je proto monotónní.

Pro součet jejích prvních $k \in \mathbb{N}$ členů platí

$$\sum_{n=1}^{k} a_n = k \cdot \frac{a_1 + a_k}{2}.$$

Tento vztah se pamatuje snadno, jde totiž o průměr hodnoty prvního a k-tého členu této posloupnosti vynásobený počtem členů.

Příklad 4.9 (Geometrická posloupnost)**: Geometrická posloupnost** je dána rekurentním vztahem

$$a_{n+1} = a_n \cdot q, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

kde parametr $q \in \mathbb{R}$ se nazývá **kvocient**. Je-li dán první člen a_1, pak je $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$. Snadno nahlédneme, že geometrická posloupnost je

- ostře rostoucí pokud $a_1 > 0$, $q > 1$ nebo $a_1 < 0$, $0 < q < 1$ a
- ostře klesající pokud $a_1 > 0$, $0 < q < 1$ nebo $a_1 < 0$, $q > 1$.
- V případě kdy $a_1 \neq 0$ a $q < 0$ ale není ani monotónní.

V „extrémních" případech pak

- konstantní, tedy rostoucí i klesající současně, pokud $a_1 = 0$ nebo $q = 1$ a
- klesající (resp. rostoucí) pokud $a_1 > 0$ (resp. $a_1 < 0$) a $q = 0$, v obou případech ne ostře.

[3] Lze snadno dokázat pomocí matematické indukce.

Připomeňme čtenářům známý vzorec pro součet jejích prvních $k \in \mathbb{N}$ členů,

$$\sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 \frac{1-q^k}{1-q}, \quad q \neq 1.$$

V případě $q = 1$ platí

$$\sum_{n=1}^{k} a_n = k \cdot a_1.$$

Dále existuje celá řada posloupností, o kterých čtenáři již pravděpodobně slyšeli. Za všechny uveďme alespoň dvě.

Příklad 4.10 (Fibonacciho posloupnost)**: Fibonacciho**[4] **posloupnost** je zadána rekurentně pomocí hodnoty prvních dvou členů $F_1 = 0$, $F_2 = 1$ a rekurentního vztahu

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \in \mathbb{N} \text{ a } n \geq 3.$$

Tj. několik dalších členů je rovno $F_3 = 1$, $F_4 = 2$, $F_5 = 3$, $F_6 = 5$, atd. I pro členy této posloupnosti existuje explicitní předpis, jehož odvození lze nalézt ve studijním textu k BI-LA1. Platí

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Další detailní informace o této posloupnosti lze nalézt třeba v On-line databázi celočíselných posloupností (OEIS) pod číslem A000045.

Příklad 4.11 (Collatzova posloupnost)**: Collatzova**[5] **posloupnost** je opět rekurentní posloupnost, která je zadána hodnotou prvního členu a_1 a rekurentním vztahem

$$a_n = \begin{cases} \frac{a_{n-1}}{2}, & a_{n-1} \text{ je sudé,} \\ 3a_{n-1} + 1, & a_{n-1} \text{ je liché.} \end{cases}$$

Pro $a_1 = 5$ například platí: $a_2 = 16$, $a_3 = 8$, $a_4 = 4$, $a_5 = 2$ a $a_6 = 1$. Toto chování je pro tuto posloupnost notorické, zkuste si jinou počáteční hodnotu a po

[4] Leonardo Bonacci (cca 1170 – 1250) byl italský matematik, který se významně zasadil o rozšíření hindsko-arabského pozičního zápisu čísel v Evropě.

[5] Lothar Collatz (1910 – 1990) byl německý matematik.

chvilce iterování byste se měli dostat k hodnotě 1. Přesně toto tvrzení je obsahem tzv. **Collatzovy hypotézy** (1937, zvědavý čtenář či čtenářka se může dozvědět více základních informací zde). Je ověřena pro obrovské množství (ale pořád jen konečný počet) počátečních hodnot, ale přes svou jednoduchost dlouhá desetiletí odolává snaze ji dokázat.

4.4 Hromadný bod posloupnosti

I pro posloupnosti má smysl zavést pojem hromadného bodu. Od *hromadného bodu množiny* se ale drobně liší. Tento pojem jistým způsobem vystihuje dlouhodobé chování členů posloupnosti a jak brzy uvidíme, úzce souvisí s pojmem limity posloupnosti.

Definice 4.5 (Hromadný bod posloupnosti / *cluster point of a sequence*)**:** Bod $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ nazýváme **hromadným bodem** posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, právě když v každém okolí bodu α leží nekonečně mnoho *členů* posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Příklad 4.12: Rozmysleme si následující jednoduché případy:

- Konstantní posloupnost $(c)_{n=1}^{\infty}$ má právě jeden hromadný bod c: v každém okolí U_c leží dokonce všechny členy této posloupnosti, těch je nekonečno mnoho, jeden pro každé $n \in \mathbb{N}$.
- Posloupnost $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$ má právě dva hromadné body a to -1 a 1.
- Posloupnost $(\sin(n))_{n=1}^{\infty}$ má nekonečně mnoho hromadných bodů, které dohromady tvoří[6] množinu $\langle -1, 1\rangle$.

Je potřeba důsledně rozlišovat dva zavedené pojmy hromadný bod posloupnosti a hromadný bod množiny. Tento rozdíl lze pěkně ilustrovat na konkrétních posloupnostech z předchozího příkladu.

- Posloupnost $(c)_{n=1}^{\infty}$ má právě jeden hromadný bod c. Množina $\{c\}$ nemá hromadný bod.
- Posloupnost $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$ má právě dva hromadné body 1 a -1. Množina $\{-1, 1\}$ nemá ani jeden hromadný bod.

[6] Důkaz tohoto tvrzení je nad rámec BI-MA1, uvádíme ho pro zajímavost.

Naopak ale posloupnost $(1/n)_{n=1}^{\infty}$ i množina $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$ mají právě jeden hromadný bod 0. Tato pozorování jen opět ukazují, že posloupnost je daleko více, než jen množina jejích členů.

V příští kapitole si ukážeme, jak hromadné body posloupností charakterizovat pomocí limit jejích podposloupností, viz Větu 5.6.

4.5 Vybrané posloupnosti

Chování posloupností lze dále zkoumat pomocí tzv. *vybraných posloupností*, či *podposloupností*. Jde o jeden ze způsobů, jak z dané posloupnosti vytvořit novou posloupnost. Přesná definice je následující.

Definice 4.6 (Vybraná posloupnost / *subsequence*)**:** Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je libovolná posloupnost a $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ je ostře rostoucí posloupnost přirozených čísel. Pak posloupnost $(a_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ nazýváme **posloupností vybranou z posloupnosti** $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Posloupnost $(a_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ nazýváme také **podposloupností posloupnosti** $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Poznámka 4.2: Ve výrazu „a_{k_n}“ v předchozí definici se vyskytuje dvojitý dolní index. V podstatě jde o zápis složeného zobrazení, tj. ve funkční notaci bychom psali $a(k(n))$ místo a_{k_n}. Přesně řečeno se jedná o k_n-tý člen posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Pomocí n nejprve určíme k_n a potom a_{k_n}. Je-li například $a_n = 2n$, $n \in \mathbb{N}$ a $k_n = 3n$, $n \in \mathbb{N}$, pak platí $a_{k_n} = 6n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Rozhodnout o tom, zda-li je jistá posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ vybraná z posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, znamená nalézt ostře rostoucí posloupnost přirozených čísel $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ tak, aby rovnost $b_n = a_{k_n}$ platila pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Příklad 4.13: Posloupnost $(1)_{n=1}^{\infty}$ je vybraná z $\big((-1)^n\big)_{n=1}^{\infty}$.

Řešení. Skutečně, stačí vzít sudé členy, tedy $k_n = 2n$ pro $n = 1, 2, \ldots$

Příklad 4.14: Posloupnost $(1)_{n=1}^{\infty}$ není vybraná z posloupnosti $(n)_{n=1}^{\infty}$.

Řešení. I přesto, že se člen s hodnotou 1 v posloupnosti $(n)_{n=1}^{\infty}$ vyskytuje, nelze z posloupnosti $(n)_{n=1}^{\infty}$ vybrat podposloupnost $(1)_{n=1}^{\infty}$. Museli bychom totiž volit $k_n = 1$ a to není ostře rostoucí posloupnost (vybírali bychom stále stejný člen).

Na první setkání může být předešlá Definice 4.6 pro studenty nejasná. Členy posloupnosti $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ pouze udávají indexy členů vybíraných z $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Požadavek aby $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ byla ostře rostoucí znamená, že při výběru členů se nesmím vracet

$n:$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$
$a_n:$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	$\cdots$
k_n:	2	5	6	9	$\cdots$						
a_{k_n}:	a_2	a_5	a_6	a_9	$\cdots$						

Obrázek 4.3: Vybírání podposloupnosti z posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

k předchozím členům ani nemohu vybrat stejný člen dvakrát. Pro názornost uvádíme Obrázek 4.3.

Příklad 4.15: Uvažme posloupnost $a_n = (-1)^n n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Prvních pár členů tedy je $-1, 2, -3, 4, \ldots$ Posloupnost $(2n)_{n=1}^{\infty}$ je vybraná z $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Posloupnost $(2)_{n=1}^{\infty}$ není vybraná z $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Řešení. Ano, stačí volit ostře rostoucí $k_n = 2n$ a pak $a_{k_n} = 2n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Sice platí, že když položíme $k_n = 2$, pak $a_{k_n} = 2$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, ale $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ není ostře rostoucí (je konstantní s hodnotou 2).

Otázka 4.7: Lze z posloupnosti $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$ vybrat *libovolnou* posloupnost s členy nabývajícími hodnot pouze 1 a -1?

4.6 Asymptotické horní meze o a $\mathcal{O}$

Jediným hromadným bodem definičního oboru posloupností, který mají všechny stejný, je $+\infty$ a proto chování posloupností pomocí asymptotických horních mezí $\mathcal{O}$ a o můžeme porovnávat pouze pro $n \to +\infty$. Tuto specifikaci bodu proto můžeme bez hrozby zmatení u posloupností vynechávat (tj. například „$a_n = \mathcal{O}(b_n)$“ znamená „$a_n = \mathcal{O}(b_n)$ pro $n \to +\infty$“).

Uvážíme-li tvar okolí $+\infty$ a definiční obor posloupností, pak v případě posloupností $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ můžeme požadavek v Definicích 3.12 a 3.13 přeformulovat následovně

$$
\begin{aligned}
a_n = \mathcal{O}(b_n) \quad &\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad (\exists c > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\big(n > N \Rightarrow |a_n| \le c|b_n|\big),\\
a_n = o(b_n) \quad &\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad (\forall c > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\big(n > N \Rightarrow |a_n| < c|b_n|\big).
\end{aligned}
$$

Pokud jsou členy b_n posloupnosti zmíněné výše nenulové (na okolí $+\infty$ průnik $\mathbb{N}$), může být výhodné na uvedené nerovnosti nahlížet jako na $\left|\frac{a_n}{b_n}\right| < c$ (případně s neostrou nerovností). Odtud je ihned vidět, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je omezená, právě když $a_n = \mathcal{O}(1)$.

4.7 Asymptotické vztahy ω, Ω a Θ

V Podkapitole 4.6 jsme se seznámili s horními asymptotickými mezemi o a $\mathcal{O}$. Vztah $a_n = \mathcal{O}(n)$ splní jak posloupnosti s členy $a_n = n$, tak i $a_n = \sqrt{n}$ nebo dokonce $a_n = 0$. Při porovnávání chování posloupností bychom přirozeně chtěli mít možnost *být přesnější*! Pro jednoduchost se v této podkapitole už omezíme pouze na posloupnosti, i když bychom mohli příslušné definice snadno modifikovat i pro funkce.

Dolní asymptotická mez Ω

Pomocí $\mathcal{O}$ porovnáváme chování jedné posloupnosti „zeshora" pomocí druhé posloupnosti. Přirozeně bychom chtěli i spodní odhad růstu či poklesu. K tomu přesně slouží vztah Ω zavedený v následující definici.

Definice 4.7 (Asymptotická dolní mez Ω)**:** Mějme dvě posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$. Řekneme, že **posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je asymptoticky zdola omezená posloupností $(b_n)_{n=1}^{\infty}$**, symbolicky „$a_n = \Omega(b_n)$ pro $n \to \infty$", právě když existuje kladná konstanta $c \in \mathbb{R}$ a přirozené $N \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \geq N$ platí

$$|a_n| \geq c \cdot |b_n|.$$

Symbol Ω je řecké velké písmenko *omega*. Podobně jako u $\mathcal{O}$ v případě posloupností upřesnění „$n \to \infty$" vynecháváme. Nikde jinde než v $+\infty$ posloupnosti asymptoticky porovnávat nelze (podobně tomu bude i v případě ω a Θ). Z Definice 4.7 ihned plynou následující pozorování.

Tvrzení 4.1 (Základní vlastnosti Ω)**:** Mějme dvě posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$. Potom platí následující tvrzení.

- $a_n = \Omega(b_n)$, právě když $b_n = \mathcal{O}(a_n)$.
- $a_n = \Omega(a_n)$.

- Vztah Ω je tranzitivní.

Důkaz. Postupně si promysleme důkaz jednotlivých tvrzení využívající přímočaře Definice 4.7 a 3.12 (resp. její formulaci pro posloupnosti).

- Vztah $a_n = \Omega(b_n)$ platí právě tehdy, když existuje kladná konstanta $c > 0$ a přirozené $N \in \mathbb{N}$ tak, že kdykoliv $n \geq N$ pak
$$|a_n| \geq c|b_n|.$$
Díky kladnosti konstanty c je tato nerovnost ovšem ekvivalentní nerovnosti
$$|b_n| \leq \frac{1}{c}|a_n|,$$
kde $d = \frac{1}{c}$ je kladná konstanta. Tudíž platí $b_n = \mathcal{O}(a_n)$. Opačnou implikaci dokážeme naprosto analogicky.

- Zcela jistě platí $|a_n| \leq 1 \cdot |a_n|$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

- Tento fakt jsme již dokázali v Tvrzení 3.2. □

Až budeme vybaveni pojmem limity, tak se k tomuto tématu ještě jednou vrátíme v Podkapitole 5.8. Pojďme se nyní zamyslet nad několika jednoduchými příklady. Dle prvního bodu Tvrzení 4.1 ale vlastně nejde o skutečně novou látku.

Příklad 4.16: Platí $n = \Omega\big(\sqrt{n}\big)$.

Řešení. Skutečně, pro $c = 1$ a každé přirozené n platí $n = \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \geq 1 \cdot \sqrt{n}$.

Příklad 4.17: Platí $\frac{n}{2} - 100 = \Omega(n)$.

Řešení. Toto tvrzení se může zdát neintuitivní, vždyť pro každé přirozené n přeci platí $\frac{n}{2} - 100 < n$ a Ω má být *spodní* mez. Je potřeba si ale uvědomit, že Ω je „necitlivá vůči konstantám“.

Ověřme definiční podmínku vztahu Ω. Nejprve se na naší cestě ke spodnímu odhadu, který vyžaduje definice Ω, zbavme absolutní hodnoty. Pro každé přirozené n větší než 200 jistě platí
$$\Big|\underbrace{\frac{n}{2} - 100}_{\geq 0}\Big| = \frac{n}{2} - 100.$$

Nyní nám na pravé straně vadí konstanta -100, které se ale zbavíme následujícím odhadem, platným pro všechna n větší než 400:

$$\frac{n}{2} - 100 = \frac{n}{4} + \underbrace{\frac{n}{4} - 100}_{\geq 0} \geq \frac{n}{4}.$$

Proto je dokazované tvrzení pravdivé, v Definici 4.7 stačí volit $c = \frac{1}{4}$ a $N = 400$.

Dolní striktní asymptotická mez ω

„Spodním“ analogem „Horního“ o je vztah ω zavedený v následující definici.

Definice 4.8 (Striktně menší dolní mez ω)**:** Mějme dvě posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$. Řekneme, že **posloupnost** $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ **je asymptoticky zdola striktně omezená posloupností** $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, symbolicky „$a_n = \omega(b_n)$ pro $n \to \infty$“, právě když pro každé kladné $c \in \mathbb{R}$ existuje $N \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \geq N$ platí

$$|a_n| > c \cdot |b_n|.$$

Symbol ω je malé řecké písmenko *omega*. Opět přímo z Definice 4.8 ihned plynou následující pozorování. Opět se ukazuje, že ω lze ekvivalentně vyjádřit pomocí o.

Tvrzení 4.2 (Základní vlastnosti ω)**:** Mějme dvě posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$. Poté platí následující tvrzení.

- $a_n = \omega(b_n)$, právě když $b_n = o(a_n)$.
- Pokud $a_n = \omega(b_n)$, pak $a_n = \Omega(b_n)$.
- ω je tranzitivní.

Důkaz. Důkaz prvního a třetího bodu se provede naprosto analogicky důkazu Tvrzení 4.1. Implikaci v druhém bodě si stačí rozmyslet porovnáním Definic 4.8 a 4.7. □

Pojďme se zamyslet nad několika příklady, ve kterých v tento okamžik už budeme pracovat hned s několika vztahy.

Příklad 4.18: Pomocí vztahů o, $\mathcal{O}$, ω a Ω porovnejte posloupnosti

$$a_n = n, \quad b_n = \sqrt{n}, \quad c_n = 2n, \quad n \in \mathbb{N},$$

kdykoliv to lze.

Řešení. Bavíme se zde o třech ostře rostoucích posloupnostech, proto má smysl je uspořádat podle míry jejich růstu.

„Nejpomalejší“ z nich, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, je $o(n)$, $\mathcal{O}(n)$, $o(2n)$, $\mathcal{O}(2n)$. Platností těchto tvrzení jsme se zabývali dříve v textu a teď je podrobněji už rozebírat nebudeme.

Dále pro posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ platí

$$n = \omega\big(\sqrt{n}\big), \quad n = \Omega\big(\sqrt{n}\big), \quad n = \mathcal{O}(2n). \tag{4.1}$$

Už ale *neplatí* $n = o(2n)$. Podívejme se podrobněji na platnost prvního vztahu z rovnice (4.1). Pro libovolné $c > 0$ zkoumáme platnost nerovnosti

$$n = |n| > c|\sqrt{n}| = c\sqrt{n},$$

která je ekvivalentní nerovnici

$$\sqrt{n} > c,$$

a ta platí pro všechna přirozená n větší než c^2. Podmínka v Definici 4.8 je tak splněna.

Konečně pro posloupnost $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ platí

$$2n = \Omega(n), \quad 2n = \omega\big(\sqrt{n}\big), \quad 2n = \Omega\big(\sqrt{n}\big).$$

Opět ovšem neplatí vztah $2n = \omega(n)$.

Alternativně bychom mohli v argumentaci využít ekvivalencí v Tvrzeních 4.1 a 4.2.

Asymptotická těsná mez Θ

Vztah Θ kombinuje dolní i horní odhad pomocí $\mathcal{O}$ a Ω. Jde o „oboustranný“ odhad. Přesná definice je následující.

Definice 4.9 (Asymptotická těsná mez Θ)**:** Mějme dvě posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$. Řekneme, že **posloupnost** $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ **je téhož řádu jako posloupnost** $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, symbolicky „$a_n = \Theta(b_n)$ pro $n \to \infty$“, právě když existují kladné konstanty $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ a $N \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \geq N$ platí

$$c_1|b_n| \leq |a_n| \leq c_2|b_n|.$$

Symbol Θ je velké řecké písmenko *theta*. Z definice ihned plynou následující pozorování:

Tvrzení 4.3 (Základní vlastnosti Θ)**:** Mějme dvě posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$. Potom platí následující tvrzení.

- $a_n = \Theta(b_n)$, právě když $b_n = \Theta(a_n)$.
- Vztah Θ kombinuje $\mathcal{O}$ a Ω v následujícím smyslu: $a_n = \Theta(b_n)$, právě když $a_n = \Omega(b_n)$ a $a_n = \mathcal{O}(b_n)$.
- Θ je tranzitivní.

Důkaz. První tvrzení plyne přímo z Definice 4.9. Při rozmýšlení druhého bodu je vhodné vzít do úvahy i Tvrzení 4.1. Tranzitivitu lze opět dokázat přímo z definice, nebo využít již dokázaného a tranzitivitu Ω a $\mathcal{O}$. □

Poznámka 4.3: Z předchozího tvrzení dále plyne, že vztah Θ je relací ekvivalence.

Příklad 4.19: Například platí (rozmyslete!):

- $n + \sin(n) = \Theta(n)$,
- $n + \sin(n) = \Theta(n + 10)$,
- $n + \sin(n) = \Theta(n - 10)$,
- $n + \sin(n) = \Theta(10n)$.

Už ale třeba není pravda, že

- $n + \sin(n) = \Theta(n^2)$.

Poznámky

Vidíme, že nově zavedené vztahy ω, Ω a Θ jsou v podstatě odvozené od o a $\mathcal{O}$, kterým jsme věnovali více času. Může pomoci se na porovnávání posloupností pomocí ω, Ω, Θ, $\mathcal{O}$ a o dívat jako na jistou analogii porovnávání čísel, viz Tabulku 4.2.

Tento způsob porovnávání chování funkcí bývá často připisován Edmundu Landauovi (německý matematik, 1877 – 1938). Díky své obecnosti nachází využití v matematice, fyzice, informatice, ...

Na závěr této kapitoly uveďme několik notačních poznámek, které jsou platné i pro další asymptotické symboly a i funkce.

asymptotický symbol	nerovnostní symbol
ω	$>$
Ω	$\geq$
Θ	$=$
$\mathcal{O}$	$\leq$
o	$<$

Tabulka 4.2: Na asymptotické symboly pro porovnání chování posloupností lze nahlížet jako na jistou analogii nerovnostních symbolů pro porovnávání reálných čísel.

- Někdy narazíte na zápis tvaru „$\mathcal{O}(a_n) = \mathcal{O}(b_n)$“. Tím má autor na mysli, že každá posloupnost $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ splňující $c_n = \mathcal{O}(a_n)$, splňuje i $c_n = \mathcal{O}(b_n)$.
- Například platí $\mathcal{O}(n) = \mathcal{O}(n^2)$, nebo $o(n) = \mathcal{O}(n)$. Tento způsob zápisu může být potenciálně matoucí, nejde zde o skutečnou rovnost, vždy je potřeba ho interpretovat zleva-doprava, jako inkluzi: každá funkce patřící do $\mathcal{O}(n)$ patří i do $\mathcal{O}(n^2)$.
- Občas se můžete setkat i se zápisem tvaru „$a_n = \mathcal{O}\left(n^{\mathcal{O}(b_n)}\right)$“. Tím se myslí, že ona posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ splňuje $a_n = \mathcal{O}(n^{c_n})$, kde $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ je nějaká posloupnost splňující $c_n = \mathcal{O}(b_n)$.

5 Limity funkcí a posloupností

V této kapitole se seznámíme s veledůležitým pojmem „limity“, který bude zásadní pro spoustu pozdějších témat nejen v tomto semestru. Během tohoto a příštího semestru se postupně setkáme například s

- derivací funkce,
- číselnými řadami,
- Riemannovým integrálem funkce,
- několika iterativními numerickými metodami.

Všechny tyto pojmy a témata koncept „limity“ zásadním způsobem používají. Dobré osvojení si látky této kapitoly je proto poměrně zásadní pro studium dalších partií nejen předmětů BI-MA1 a BI-MA2. Vedle těchto obecných pojmů koncept „limity“ využijeme například i při zkoumání asymptotických mezí posloupností.

V této kapitole se budeme zabývat

- definicí samotné limity posloupností a funkcí,
- jednoduchými ilustračními příklady limit a
- zcela základními vlastnostmi limit.

K sofistikovanějším výpočetním nástrojům limit se dostaneme v příští kapitole (Kapitola 6). Pojďme se nejprve zabývat nejjednodušší formou „limity“, kterou je *limita posloupnosti*.

5.1 Limita číselné posloupnosti

V této podkapitole zavedeme pojem limity posloupnosti. Hlavní myšlenkou je vyjádření intuitivního požadavku, aby se „členy posloupnosti a_n blížily libovolně blízko k jistému číslu α." Proč by nás takováto otázka měla zajímat? V praxi je často potřeba zjistit, jestli proces, který členy dané posloupnosti popisují, někam spěje (např. jestli posloupnost jistých aproximací konverguje k hledanému řešení jistého problému).

Poznamenejme, že limita není jediným nástrojem pro zkoumání chování členů posloupností pro velké indexy n. Již dříve jsme se setkali s asymptotickými mezemi o a $\mathcal{O}$ a hromadnými body posloupností.

Přistupme nyní bez dalších okolků k definici limity číselné posloupnosti.

Definice 5.1 (Limita posloupnosti / *limit of a sequence*)**:** Reálná posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má **limitu** $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, právě když pro *každé* okolí U_α bodu α *lze nalézt* $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ větší nebo rovno než N platí $a_n \in U_\alpha$. V symbolech

$$\big(\forall U_\alpha\big)\big(\exists N \in \mathbb{N}\big)\big(\forall n \in \mathbb{N}\big)\big(n \geq N \ \Rightarrow\ a_n \in U_\alpha\big). \tag{5.1}$$

Tuto skutečnost můžeme zapsat několika možnými ekvivalentními způsoby:

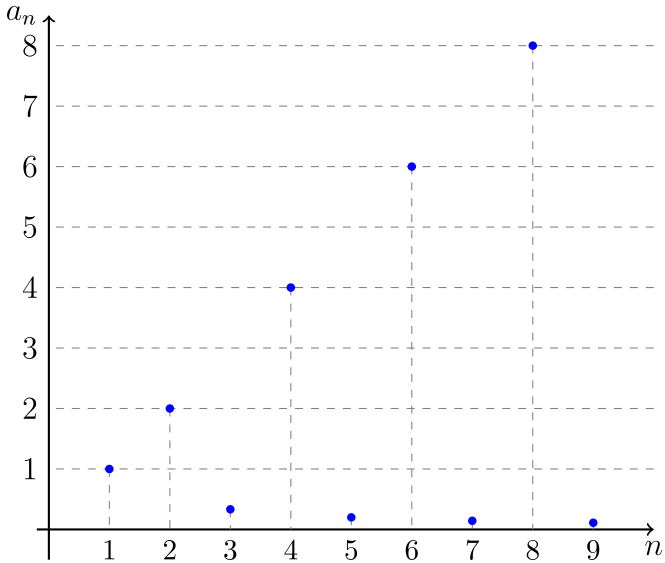
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \quad \text{nebo} \quad \lim a_n = \alpha \quad \text{nebo} \quad a_n \to \alpha.$$

Slovně můžeme Definici 5.1 přeformulovat i takto: $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ je limitou posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, právě když *v každém* okolí U_α bodu α leží *všechny* členy posloupnosti s dostatečně velkým indexem, tj. všechny až na konečný počet výjimek. Na druhou stranu, k tomu aby $\lim a_n = \alpha$ ale nestačí, aby v každém okolí bodu α leželo nekonečně mnoho členů posloupnosti. Uvažte například posloupnost

$$a_n = \begin{cases} n, & n \text{ je sudé},\\ \frac{1}{n}, & n \text{ je liché}. \end{cases} \tag{5.2}$$

V každém okolí bodu 0 leží nekonečně mnoho jejích členů, ale tato posloupnost nemůže mít 0 jako limitu, protože mimo toto okolí leží taktéž nekonečně mnoho jejích členů. Podobně tomu je s případem $+\infty$. Prvních několik členů této posloupnosti je znázorněno na Obrázku 5.1. Na druhou stranu ale platí, že 0 i $+\infty$ jsou hromadnými body této posloupnosti (rozmyslete!).

Zanedlouho uvidíme (Věta 5.2), že každá posloupnost má maximálně jednu limitu a proto značení zavedené na konci Definice 5.1 je korektní.



Obrázek 5.1: Grafické znázornění posloupnosti definované v rovnici (5.2).

Poznámka 5.1: Pokud bychom v definici limity zaměnili „$N \in \mathbb{N}$“ za „$N \in \mathbb{R}$“, pak se její smysl nezmění. Význam zůstane také zachován připustíme-li „$n > N$“ místo „$n \geq N$“. Index N totiž vyjadřuje pouze to, že inkluze $a_n \in U_\alpha$ platí pro všechna dostatečně velká n.

Jinak řečeno, nerovnosti $n \geq 4$, $n > 3$ a $n \geq 3.75$ pro přirozená n popisují stejné množiny přirozených čísel.

Pokud uvažujeme $\alpha \in \mathbb{R}$, můžeme definici přeformulovat bez použití pojmu okolí. Každé okolí U_α je v tomto případě tvaru $(\alpha - \varepsilon,\ \alpha + \varepsilon)$ pro nějaké kladné ε. Dále inkluze $a_n \in U_\alpha$ platí, právě když $|a_n - \alpha| < \varepsilon$. Dostáváme tedy ekvivalentní formulaci definice,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \big(\forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0\big)\big(\exists N \in \mathbb{N}\big)\big(\forall n \in \mathbb{N}\big)\big(n \geq N \ \Rightarrow\ |a_n - \alpha| < \varepsilon\big).$$

Podobnou úvahou pro případ $\alpha = +\infty$ obdržíme následující tvrzení

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \big(\forall c \in \mathbb{R}\big)\big(\exists N \in \mathbb{N}\big)\big(\forall n \in \mathbb{N}\big)\big(n \geq N \ \Rightarrow\ a_n > c\big).$$

Okolí bodu $+\infty$ totiž jsou intervaly tvaru $(c, +\infty)$. Rozmyslete si podmínku pro $\alpha = -\infty$.

Nyní si pochopení významu Definice 5.1 ozkoušíme na několika jednoduchých příkladech. Poté tento pojem zobecníme i na funkce a budeme zkoumat obecné vlastnosti limit posloupností i funkcí.

Použití definice na jednoduchých příkladech

Při počítání limit většinou (přímo) nepoužíváme Definici 5.1, ale výpočet zakládáme na znalosti jednoduchých (či elementárních) limit. Limity těchto posloupností samozřejmě musíme korektně odvodit. V této podkapitole si proto ukážeme použití Definice 5.1 na jednoduchých příkladech a tím snad i více osvětlíme pojem samotný.

Příklad 5.1: Limita konstantní posloupnosti $a_n = \alpha \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, je rovna α.

Řešení. Při argumentaci postupujeme přesně podle Definice 5.1, stejně tomu bude i v dalších podobných příkladech. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Zvolíme-li jakékoliv $N \in \mathbb{N}$, třeba $N := 42$, potom pro $n \geq N$ triviálně platí

$$|a_n - \alpha| = 0 < \varepsilon.$$

Příklad 5.2: Limita posloupnosti $a_n = n^2$ je rovna $+\infty$.

Řešení. Buď $c > 0$ libovolné. Zvolíme-li přirozené $N > \sqrt{c}$, pak pro každé $n \geq N$ platí $n \geq N > \sqrt{c}$ a tudíž $a_n = n^2 > c$.

Pro $c \leq 0$ je situace jednoduchá. Pro každé přirozené n pak platí $n^2 > c$.

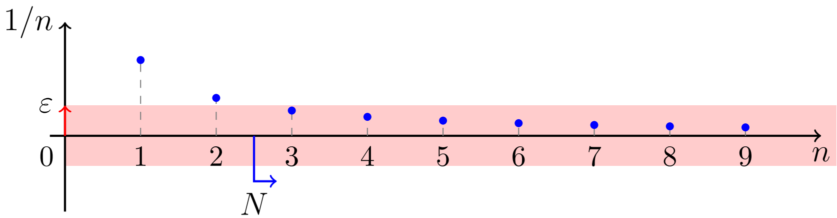
Příklad 5.3: Dokažte tvrzení $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Řešení. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Požadavek[1]

$$|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \overset{!}{<} \varepsilon$$

je ekvivalentní podmínce $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Stačí tedy k danému ε volit libovolné $N \in \mathbb{N}$ splňující $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Explicitně bychom mohli brát například $N := \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil + 1$, kde $\lceil x \rceil$ označuje horní celou část reálného čísla x, tj. nejmenší celé číslo, které je větší nebo rovno x.

[1] Vykřičníkem označujeme nerovnost, kterou se budeme snažit dokázat, která neplyne například z nějakého odhadu.



Obrázek 5.2: Grafické znázornění posloupnosti $a_n = 1/n$ a volby N pro jedno konkrétní ε v definici limity.

Potom pro $n \geq N$ platí $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$. Pro ilustraci viz Obrázek 5.2. Všimněte si, že čím menší okolí zvolíme (čím menší je ε) tím větší musíme N zvolit, aby všechny členy za ním padly do zadaného okolí.

Poznámka 5.2: Z předchozích tří příkladů by mělo být patrné, že platí

$$\lim_{n\to\infty} n^a = \begin{cases} +\infty & a > 0, \\ 1 & a = 0, \\ 0, & a < 0. \end{cases}$$

Toto tvrzení je poměrně snadné ověřit[2] na základě definice stejně jako v předchozích příkladech.

Otázka 5.1: Pomocí definice si rozmyslete (pro daná okolí 0, resp. $+\infty$ nalezněte příslušná N) následující tvrzení

- $\lim_{n\to\infty} n^{5/2} = +\infty$,
- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{7/3}} = 0$.

Otázka 5.2: Dokažte nebo vyvraťte následující tvrzení: limita každé ostře rostoucí posloupnosti je $+\infty$.

5.2 Limita funkce

U posloupností $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jsme zkoumali, jak se chovají jejich členy pro velká n. Pokud se jejich členy „blížily“ k jistému $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, pak jsme tuto hodnotu nazývali limitou

[2]Proveďte!

této posloupnosti. Význam slova „blížit“ přesně popisovala Definice 5.1, která říkala, že v „každém“ okolí bodu α leží všechny členy posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ až na konečný počet výjimek.

Nyní u funkcí se můžeme ptát, jak se zadaná funkce f chová, když se nezávisle proměnná $x \in D_f$ blíží k zadanému bodu $a \in \mathbb{R}$, případně $\pm\infty$ (tj. pokud x roste nad/pod všechny meze). V následující definici limity funkce si všimněte podobnosti s definicí limity posloupnosti (Definice 5.1).

Definice 5.2 (Limita funkce / *limit of a function*)**:** Mějme funkci $f\colon A \to \mathbb{R}$, hromadný bod $a \in \overline{\mathbb{R}}$ množiny A a bod $b \in \overline{\mathbb{R}}$. **Funkce f má v bodě a limitu rovnou** b, ***právě když*** pro každé okolí U_b bodu b existuje okolí U_a bodu a takové, že pokud $x \in U_a \cap A$ a $x \neq a$, pak $f(x) \in U_b$.

Formálně tento požadavek vyjadřuje formule

$$\big(\forall U_b\big)\big(\exists U_a\big)\big(\forall x \in (A \cap U_a) \smallsetminus \{a\}\big)\big(f(x) \in U_b\big).$$

Tuto skutečnost symbolicky zapisujeme následovně

$$\lim_{x \to a} f(x) = b, \quad \text{případně} \quad \lim_{a} f = b.$$

Učiňme nejprve několik důležitých komentářů k této definici. Pro přehlednost je formálně oddělíme jako samostatné Poznámky.

Poznámka 5.3: Je možné, že z dřívějšího studia znáte pojmy „vlastní“ a „nevlastní“ limita ve „vlastním“ / „nevlastním“ bodě. V BI-MA1 tyto pojmy nepoužíváme. Definice všech těchto pojmů je *obsažena* v naší Definici 5.2. Dále, dříve zavedený pojem limity posloupnosti (Definice 5.1) je přirozeně zahrnut v Definici 5.2. Definiční obor každé posloupnosti, tj. $\mathbb{N}$, má pouze jeden hromadný bod, konkrétně $+\infty$.

Poznámka 5.4: Hromadnost bodu a v Definici 5.2 zaručuje neprázdnost množiny $(A \cap U_a) \smallsetminus \{a\}$ pro libovolné okolí bodu a. Viz definici hromadného bodu množiny (Definice 2.9).

Poznámka 5.5: V případě, kdy a (bod, kde se limita počítá) i b (hodnota limity) jsou prvky $\mathbb{R}$ je podmínka

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \tag{5.3}$$

ekvivalentní požadavku, aby bod a byl hromadným bodem definičního oboru funkce f a

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists \delta > 0\big)\big(\forall x \in D_f\big)\big(0 < |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - b| < \varepsilon\big).$$

Analogické formule lze zformulovat pro různé kombinace případů $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$.

Pokud bychom například měli situaci $a \in \mathbb{R}$ a $b = +\infty$, pak by podmínka (5.3) byla ekvivalentní požadavku hromadnosti a ve vztahu k definičnímu oboru f a dále

$$\big(\forall c \in \mathbb{R}\big)\big(\exists \delta > 0\big)\big(\forall x \in D_f\big)\big(0 < |x-a| < \delta \ \Rightarrow\ f(x) > c\big).$$

V případě $a = -\infty$ a $b = +\infty$ by pak podmínka v definici limity šla vyjádřit ve tvaru

$$\big(\forall c \in \mathbb{R}\big)\big(\exists d \in \mathbb{R}\big)\big(\forall x \in D_f\big)\big(x < d \ \Rightarrow\ f(x) > c\big).$$

Poznámka 5.6 (Vztah limity funkce v bodě a a funkční hodnoty v a)**:** Hodnota limity funkce f v bodě a závisí pouze na chování funkce f na okolí bodu a *mimo* bod a. Vysvětleme tento fakt pomocí následujících pozorování:

- Limita funkce f v bodě a může být různá od funkční hodnoty $f(a)$, existuje-li. Příkladem budiž funkce $f(x) := \operatorname{sgn} x^2$ definovaná na celém $\mathbb{R}$. Ačkoliv pro funkční hodnotu platí $f(0) = 0$, pro limitu máme $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.
- Funkce f v bodě a ani nemusí být definovaná, přesto limita může existovat. Příkladem je funkce $f(x) := \operatorname{sgn} \frac{1}{x^2}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ačkoliv 0 nepatří do D_f platí $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.

Vztah mezi funkční hodnotou a limitou funkce v bodě a později využijeme v definici spojitosti funkce.

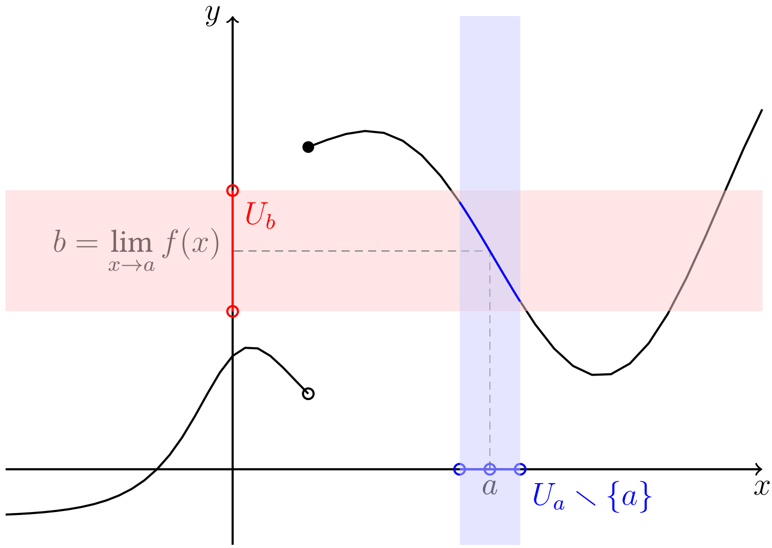
Poznámka 5.7: Zanedlouho uvidíme (Věta 5.2), že každá funkce má v daném bodě maximálně jednu limitu a proto značení zavedené na konci Definice 5.2 je korektní.

K snazšímu vizuálnímu představení si požadavků v Definici 5.2 uvádíme Obrázek 5.3.

Jednoduché příklady

Pojďme si s definicí pohrát na několika jednoduchých, ale pro další počítání důležitých, příkladech.

Příklad 5.4: Limita konstantní funkce $f(x) = c$, $x \in \mathbb{R}$, v libovolném bodě je rovna dané konstantě. Symbolicky $\lim\limits_{x \to a} c = c$ pro každé $a \in \overline{\mathbb{R}}$.



Obrázek 5.3: Ilustrace k definici limity funkce (Definice 5.2) pro případ $a, b \in \mathbb{R}$. Je vizuálně patrné, že ať zvolíme červené okolí bodu b libovolné velikosti, pak budeme schopní nalézt modré okolí bodu a s vlastností požadovanou ve zmíněné definici.

Řešení. Je-li $c \in \mathbb{R}$ zadaná konstanta a $f(x) = c$ pro každé $x \in D_f = \mathbb{R}$, pak pro libovolný bod $a \in \mathbb{R}$ platí $\lim_{x \to a} f(x) = c$. Skutečně, buď $U_b(\varepsilon)$ libovolné okolí bodu b s poloměrem $\varepsilon > 0$. V případě naší konstantní funkce můžeme zvolit libovolné okolí U_a bodu a. Pak totiž pro $x \in U_a \setminus \{a\}$ jistě platí $f(x) = b \in U_b(\varepsilon)$.

Příklad 5.5: Pro libovolné $a \in \overline{\mathbb{R}}$ platí

$$\lim_{x \to a} x = a.$$

Řešení. Skutečně, vezmeme-li libovolné okolí U_a bodu a pak pro $x \in U_a \setminus \{a\}$ zcela jistě platí, že $x \in U_a$.

Příklad 5.6: Platí

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

Řešení. Skutečně, buď $U_{+\infty}(c) = (c, +\infty)$ okolí bodu $+\infty$ a $c > 0$. Hledáme okolí $U_0(\delta)$ bodu 0 o poloměru $\delta > 0$ takové, že pokud $x \in U_0(\delta) \setminus \{0\}$ pak $\frac{1}{x^2} \in U_{+\infty}(c)$.

Požadujeme tedy aby

$$\frac{1}{x^2} > c \Leftrightarrow x^2 < \frac{1}{c} \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{c}}.$$

Stačí proto zvolit třeba $\delta := \frac{1}{\sqrt{c}}$.

Pokud bychom uvažovali $U_{+\infty}(d)$ s $d \leq 0$, pak zřejmě stačí za δ volit třeba 1. Nerovnost $\frac{1}{x^2} > d$ platí pro taková d vždy.

Příklad 5.7: Pro každé $a \in \overline{\mathbb{R}}$ platí $\lim\limits_{x \to a} |x| = |a|$. Připomeňme naši konvenční definici $|\pm\infty| = +\infty$.

Řešení. Případ $a = +\infty$ je prakticky totožný jako v Příkladu 5.5. Zabývejme se nyní případem $a = -\infty$. Mějme okolí $U_{+\infty}(c) = (c, +\infty)$, bez újmy na obecnosti s $c > 0$. Pak zvolíme-li $d := -c$, tak pro $x \in U_{-\infty}(d) = (-\infty, d) = (-\infty, -c) \subset (-\infty, 0)$ jistě platí $|x| = -x > c$ (protože $x < -c$).

Nyní rozebereme případ $a \in \mathbb{R}$. Mějme libovolné $U_{|a|}(\varepsilon)$ okolí bodu a. Vezmeme-li $\delta := \varepsilon/2$ a $x \in U_a(\delta)$ pak s využitím Tvrzení 2.1 platí

$$\big||x| - |a|\big| \leq |x - a| \leq \delta = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Příklad 5.8: Pro druhou odmocninu $\sqrt{x}$ a $a \in \langle 0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ platí $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$. Připomeňme naši konvenční definici $\sqrt{+\infty} = +\infty$.

Řešení. Případ $a = 0$: mějme $U_0(\varepsilon)$ libovolné okolí bodu 0. Je-li $x \in U_0(\delta) \cap D_{\sqrt{x}} = \langle 0, \delta)$ nenulové, pak podmínka $\sqrt{x} < \varepsilon$ je ekvivalentní podmínce $x < \varepsilon^2$. Stačí proto volit $\delta := \varepsilon^2$.

Případ $a = +\infty$: mějme $U_{+\infty}(c)$ libovolné okolí bodu $+\infty$. Případ $c \leq 0$ je triviální (rozmyslete!). Pokud $c > 0$ pak pro libovolné kladné x je podmínka $\sqrt{x} > c$ ekvivalentní podmínce $x > c^2$. Pro každé $x \in U_{+\infty}(c^2)$ tedy platí $\sqrt{x} \in U_{+\infty}(c)$.

Prozkoumejme nyní případ $a \in (0, +\infty)$. Mějme $\varepsilon > 0$ a hledejme k němu $\delta > 0$ tak, aby platila implikace

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \varepsilon.$$

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $\delta < a/2$, pak pro každé $x \in U_a(\delta)$ platí $x > a/2$ a díky monotonii odmocniny i $\sqrt{x} > \sqrt{a/2}$. Potom pro $x \in U_a(\delta)$ platí

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \frac{|x - a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} < \frac{\delta}{\sqrt{a/2} + \sqrt{a}} = c \cdot \delta,$$

kde $c = \frac{1}{\sqrt{a/2}+\sqrt{a}}$ je kladná konstanta. Vidíme, že zvolíme-li $\delta < a/2$ a současně $\delta < \varepsilon/c$, pak skutečně pro $x \in U_a(\delta)$ platí $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \varepsilon$.

V případě k-té odmocniny můžeme postupovat naprosto analogicky. Jen argumentace bude algebraicky náročnější, protože budeme muset použít známý algebraický vzorec

$$x^k - y^k = (x-y)\sum_{j=0}^{k-1} x^{k-1-j}y^j, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Doporučujeme studentům ale zkusit se poprat alespoň s případem třetí odmocniny.

Příklad 5.9: Nechť $k \in \mathbb{N}$. Pro každé $a \in \mathbb{R}$ platí

$$\lim_{x\to a} \sqrt[2k-1]{x} = \sqrt[2k-1]{a}, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[2k-1]{x} = \pm\infty.$$

Pro každé $a \in \langle 0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ platí

$$\lim_{x\to a} \sqrt[2k]{x} = \sqrt[2k]{a}.$$

5.3 Jednostranná limita funkce

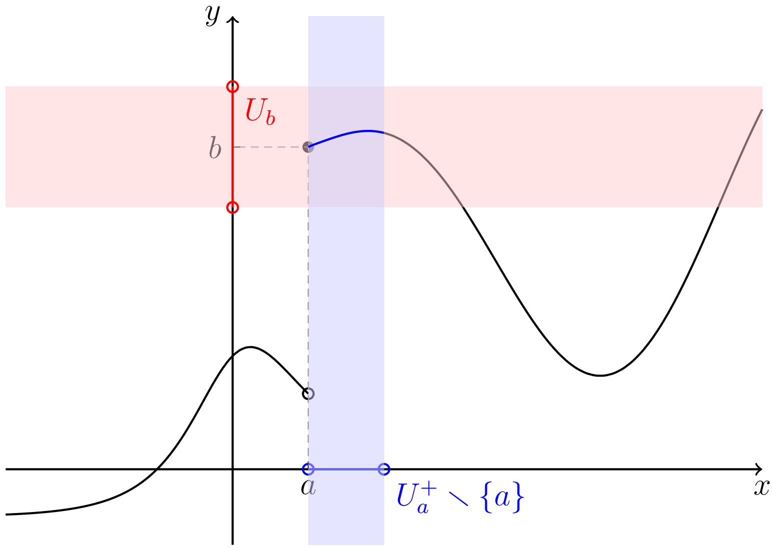
V Definici 5.2 jsme nerozlišovali mezi body z definičního oboru ležícími vlevo, či vpravo, od bodu a. Často je ale takové rozlišení potřeba a přesně z toho důvodu se zavádí následující pojem.

Definice 5.3 (Jednostranná limita funkce / *one-sided limit of a function*)**:** Buď $f\colon A \to \mathbb{R}$ funkce, $a \in \mathbb{R}$ a označme $M_+ := A \cap (a, +\infty)$ a $M_- := A \cap (-\infty, a)$. Potom **limitu funkce** f **v bodě** a **zprava** definujeme jako limitu zúžení funkce f na množinu M_+ a značíme ji

$$\lim_{x\to a+} f(x) := \lim_{x\to a} (f|_{M_+})(x).$$

Podobně **limitu funkce** f **v bodě** a **zleva** definujeme jako limitu zúžení funkce f na množinu M_- a značíme ji

$$\lim_{x\to a-} f(x) := \lim_{x\to a} (f|_{M_-})(x).$$



Obrázek 5.4: Ilustrace k definici jednostranné limity funkce (Definice 5.3) pro případ $a, b \in \mathbb{R}$ a limity zprava. Je vizuálně patrné, že ať zvolíme červené okolí bodu b libovolné velikosti, pak budeme schopní nalézt modré pravé okolí bodu a s vlastností požadovanou ve zmíněné definici.

V definici výše je implicitně obsažen požadavek, aby bod a byl hromadným bodem množiny M_+, resp. M_-. V opačném případě uvedené limity samozřejmě neexistují. Dále stojí za povšimnutí, že pro $a \in \mathbb{R}$ platí $U_a \cap (a, \infty) = U_a^+ \setminus \{a\}$.

Pro lepší představu odkazujeme čtenáře na Obrázek 5.4. Na závěr této podkapitoly uveďme několik příkladů výpočtů limit jednoduchých funkcí.

Příklad 5.10: Platí

$$\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{a} \quad \lim_{x \to 0-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Řešení. Ukažme nejprve první z limit. Buď $U_{+\infty}(c)$ libovolné okolí bodu $+\infty$ dané konstantou $c > 0$ (nekladné c můžeme ošetřit podobně jako v předchozím příkladu). Zvolíme-li $\delta = \frac{1}{c} > 0$, pak pro $x \in (0, \delta) = U_0^+(\delta) \setminus \{0\}$ platí

$$0 < x < \delta \;\Rightarrow\; \frac{1}{x} > \frac{1}{\delta} = c.$$

Podobně v druhém příkladě pro libovolné okolí $U_{-\infty}(c)$ bodu $-\infty$ zadané konstantou $c < 0$ stačí položit $\delta = \frac{1}{|c|} > 0$. Pak pro libovolné $x \in U_0^-(\delta) \setminus \{0\} = (-\delta, 0)$ platí

$$-\delta < x < 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{x} < -\frac{1}{\delta} = -|c| = c.$$

Vzpomeňte, že $c < 0$. Na tomto místě je dobré si připomenout graf hyperboly $y = \frac{1}{x}$.

Nyní se přirozeně nabízí otázka, jestli existuje nějaká souvislost mezi jednostrannou limitou a („oboustrannou“) limitou. Tento vztah zachycuje následující věta.

Věta 5.1 (O vztahu limit a jednostranných limit)**:** Mějme funkci $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ a nechť $a \in \mathbb{R}$ je hromadným bodem množiny $D_f \cap (a, +\infty)$ i $D_f \cap (-\infty, a)$. Potom limita $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existuje a je rovna $b \in \overline{\mathbb{R}}$, ***právě když*** existují obě jednostranné limity $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ a $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$ a obě jsou rovny b.

Důkaz. K důkazu si stačí rozmyslet obě implikace.

- Nechť existuje limita $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$. Je-li U_c libovolné okolí bodu c, pak existuje U_a okolí bodu a takové, že je-li $x \in (U_a \cap D_f) \setminus \{a\}$, pak $f(x) \in U_c$. Tudíž pro $x \in (U_a \cap D_f) \setminus \{a\}$ je $f(x) \in U_c$ nezávisle na tom, jestli $x > a$ nebo $x < a$. Jednostranné limity $\lim\limits_{x\to a\pm} f(x)$ proto obě existují a obě jsou rovny c.

- Naopak. Nechť obě jednostranné limity existují a obě jsou rovny c. Buď U_c libovolné okolí bodu c. Pak existuje levé okolí $U_a^-(\varepsilon_1)$ bodu a a pravé okolí $U_a^+(\varepsilon_2)$ bodu a tak, že pokud $x \in (U_a^-(\varepsilon_1) \cap D_f) \setminus \{a\}$ nebo $x \in (U_a^+(\varepsilon_2) \cap D_f) \setminus \{a\}$, pak $f(x) \in U_c$. Položíme-li $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, pak pro $x \in (U_a(\varepsilon) \cap D_f) \setminus \{a\}$ platí $f(x) \in U_c$. Oboustranná limita funkce f v bodě a tedy existuje je rovna c. □

Tím je důkaz dokončen.

Důsledek 5.1 (O vyvrácení existence limity)**:** Nechť f je funkce a bod $a \in \mathbb{R}$ s vlastnostmi uvedenými v předpokladech předchozí věty. Platí-li alespoň jedna z podmínek

- obě jednostranné limity funkce f v bodě a existují a jsou různé,

- alespoň jedna z jednostranných limit funkce f v bodě a neexistuje, potom limita funkce f v bodě a neexistuje.

Důkaz. Jednoduchým sporem s tvrzením Věty 5.1. □

Příklad 5.11: Limita
$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn} x$$
neexistuje. Přesvědčte se o tomto faktu studiem vhodných jednostranných limit.

Řešení. Pro jednostranné limity platí (rozmyslete!)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+} \operatorname{sgn} x &= 1,\\ \lim_{x\to 0-} \operatorname{sgn} x &= -1.\end{aligned}$$

Podle Důsledku 5.1 oboustranná limita nemůže existovat ($1 \neq -1$).

Příklad 5.12: Limita
$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$$
neexistuje.

Řešení. Opravdu, již jsme odvodili, že

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{a} \quad \lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$$

a proto uvedená limita neexistuje.

Situaci popsanou v předchozím příkladu můžeme zobecnit na následující pozorování.

Příklad 5.13: Mějme $a \in \mathbb{R}$ a $k \in \mathbb{N}$. Potom

$$\lim_{x\to a\pm} \frac{1}{(x-a)^k} = \begin{cases} \pm\infty, & k \text{ je liché},\\ +\infty, & k \text{ je sudé}.\end{cases}$$

5.4 Základní vlastnosti limit

V této podkapitole prozkoumáme základní vlastnosti limity funkce (a tedy i posloupnosti).

Začněme zcela základním postřehem. Funkce v daném bodě buď limitu nemá, nebo ji má a její hodnota je pak dána jednoznačně. Jinak řečeno, žádná funkce v daném bodě nemůže mít *dvě různé* limity. Pokud tedy dva lidé počítají jeden příklad a vyjde jim rozdílný výsledek, pak alespoň jeden z nich musel někde ve výpočtu udělat chybu.

Věta 5.2 (O jednoznačnosti limity)**:** Funkce f má v bodě a nejvýše jednu[3] limitu.

Důkaz. Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že máme funkci f, hromadný bod a jejího definičního oboru a tato funkce má v tomto bodě dvě *různé* limity $b \in \overline{\mathbb{R}}$ a $c \in \overline{\mathbb{R}}$. Protože body b a c jsou různé, nutně existují dvě jejich okolí, označme si je U_b a U_c, která jsou disjunktní, tj. $U_b \cap U_c = \emptyset$. Podle definice limity funkce existují ke každému z těchto okolí jistá okolí bodu a, označme si jejich průnik jako V_a, tato množina je stále okolím bodu a. Potom stále dle definice pro každé $x \in (V_a \cap D_f) \smallsetminus \{a\}$ je $f(x) \in U_b$ a současně $f(x) \in U_c$. To ale není možné, protože tyto množiny jsou disjunktní! $\square$

Následující pozorování plyne velmi přímočaře přímo z definice přeformulováním jedné jediné podmínky. Pro počítání a elementární úvahy může být velmi užitečné.

Pozorování 5.1 (Různé ekvivalentní formulace limity)**:** Buďte $f : A \to \mathbb{R}$ funkce, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ hromadný bod jejího definičního oboru a $b \in \mathbb{R}$. Potom platí následující dvě ekvivalence.

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, právě když $\lim\limits_{x\to a} |f(x) - b| = 0$.
2. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, právě když $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = 0$.

Důkaz. Druhý bod plyne z prvního. V prvním bodě stačí položit $b = 0$. Ekvivalence v prvním bodě vychází z definice limity funkce a jednoduchých ekvivalencí

$$f(x) \in U_b(\varepsilon) \;\Leftrightarrow\; |f(x) - b| < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; |f(x) - b| \in U_0(\varepsilon),$$

platných pro libovolné $\varepsilon > 0$. Pozor, všimněte si, že zde předpokládáme $b \in \mathbb{R}$, nepřipouštíme nekonečné b. $\square$

Dále je užitečné a přímočaré následující tvrzení ukazující chování limity vůči zúžení definičního oboru funkce.

[3] „Nejvýše jednu“ znamená buď žádnou, nebo právě jednu.

Věta 5.3 (O limitě zúžení)**:** Mějme funkci f a bod $a \in \overline{\mathbb{R}}$, který je hromadným bodem definičního oboru D_f funkce f. Dále uvažme množinu $M \subset D_f$ takovou, že bod a je stále jejím hromadným bodem.

Potom pokud limita $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \in \overline{\mathbb{R}}$, pak i pro funkci $g := f|_M$, zúžení funkce f na množinu M, platí $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$.

Důkaz. Pouhé přepsání definice a využití pozorování: pokud nějaká vlastnost $V(x)$ platí pro všechna $x \in A$, pak platí i pro všechna $x \in B \subset A$. □

Poznámka 5.8: Tato věta není přímo použitelná pro posloupnosti (jedna z nich by neměla definiční obor celé $\mathbb{N}$, což nepřipouštíme). Jistou analogií pro posloupnosti je věta o limitě vybrané posloupnosti, ke které se dostaneme zanedlouho.

Další věta nám ukazuje důležitou souvislost pojmů „limita posloupnosti“ a „limita funkce“. Díky této větě můžeme některé limity posloupností počítat pomocí znalosti limity funkcí. Výhoda tohoto postupu spočívá v tom, že na limity funkcí můžeme použít nástroje diferenciálního počtu (jako například l’Hospitalovo pravidlo), které pro posloupnosti nemáme k dispozici.

Věta 5.4 (Heine)**:** Limita $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ je rovna $b \in \overline{\mathbb{R}}$, *právě když* a je hromadným bodem D_f a pro každou posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ s limitou a, jejíž členy splňují $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset D_f \setminus \{a\}$, platí $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$.

Důkaz. Implikace $\Rightarrow$ již byla dokázána, jde v podstatě o Větu 5.3. Důkaz druhé implikace $\Leftarrow$ v tomto textu vynecháváme. □

Pomocí Heineho[4] věty, resp. věty o limitě zúžení, můžeme snadno počítat limity posloupností na základě znalosti limity funkce v $+\infty$. V předchozí části textu (Příklad 5.8) jsme například odvodili, že

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty.$$

Odtud ihned plyne, že i pro limitu posloupnosti $\left(\sqrt{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ platí

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty.$$

Proč? Máme k dispozici dokonce tři způsoby argumentace:

[4] Eduard Heine (1821–1881), německý matematik.

- Funkci $\sqrt{x}$ jsme zúžili na $\mathbb{N}$ (a získali tak onu posloupnost) a použili větu o limitě zúžení.

- V Heineho větě jsme použili posloupnost s členy $x_n = n$, $n \in \mathbb{N}$.

- V tomto případě bychom samozřejmě mohli i vyjít přímo z definice limity posloupnosti.

Heineho věta, resp. věta o limitě zúžení, má jeden velmi důležitý důsledek, pomocí kterého budeme moci naopak existenci limity funkce vyvracet.

Důsledek 5.2 (Vyvrácení existence limity funkce pomocí Heineho věty)**:** Nechť $a \in \overline{\mathbb{R}}$ je hromadným bodem definičního oboru funkce f. Dále nechť $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou dvě posloupnosti s členy z D_f, mající limitu a a splňující podmínky $x_n \neq a$ a $z_n \neq a$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Pokud limity $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ a $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)$ existují a jsou různé, nebo alespoň jedna z nich neexistuje, potom limita $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ neexistuje.

Důkaz. Sporem: kdyby limita $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existovala a měla hodnotu α, pak by podle Heineho věty (Věta 5.4) pro libovolné dvě posloupnosti $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ s uvedenými vlastnostmi existovaly i limity posloupností $\big(f(x_n)\big)_{n=1}^{\infty}$ a $\big(f(z_n)\big)_{n=1}^{\infty}$ a obě měly stejnou hodnotu α. □

Ukažme si použití Heineho věty a jejího důsledku na několika příkladech.

Příklad 5.14: Limita funkce $f(x) = \sin(x)$ v $+\infty$ neexistuje. Srovnejte tento příklad s Příkladem 5.18

Důkaz. Intuitivně by tvrzení mělo být nepřekvapivé, zamyslíme-li se nad netriviálním periodickým chováním funkce sin. Krásně této představy můžeme využít při volbě dvou „testovacích“ posloupností:

$$\begin{aligned} x_n &:= 2\pi n, \\ y_n &:= 2\pi n + \frac{\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Obě posloupnosti $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou tvořeny prvky definičního oboru funkce sin (tj. $\mathbb{R}$) a jsou různé od $+\infty$ a mají limitu $+\infty$. Pro obrazy jejích členů ale platí

$$\begin{aligned} f(x_n) &= \sin(2\pi n) = 0 \to 0, \\ f(y_n) &= \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \to 1. \end{aligned}$$

Posloupnosti obrazů mají *různé* limity a proto dle Důsledku 5.2 limita $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin(x)$ neexistuje. □

Poznámka 5.9: Příklady 5.14 a 5.18 je vhodné doplnit ještě dvěma ukázkami. Rozmyslete si, že limita funkce

$$\lim_{x\to+\infty} \sin(2\pi x)$$

neexistuje, ale limita posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} \sin(2\pi n)$$

existuje a je rovna 0 (jde o limitu konstantní posloupnosti s všemi členy rovnými 0).

Příklad 5.15: Limita

$$\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

neexistuje.

Řešení. Označme $f(x) := \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ a položme

$$x_n := \frac{1}{2\pi n} \quad \text{a} \quad z_n := \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}.$$

Tyto posloupnosti splňují

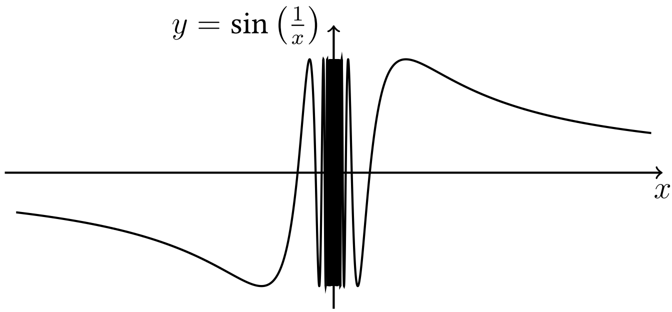
$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = 0 \quad \text{a} \quad \{x_n | n \in \mathbb{N}\} \cup \{z_n | n \in \mathbb{N}\} \subset D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Konečně

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} f(x_n) &= \lim_{n\to\infty} \sin(2\pi n) = 0, \\ \lim_{n\to\infty} f(z_n) &= \lim_{n\to\infty} \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1. \end{aligned}$$

Pro představu uvádíme Obrázek 5.5. Z obrázku je patrné, že limita posloupnosti obrazů závisí na způsobu, resp. konkrétních krocích, jakým se k bodu 0 blížíme[5].

[5] „Způsob blížení se k 0“ v tomto případě přesně vystihují posloupnosti $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(z_n)_{n=1}^{\infty}$.



Obrázek 5.5: Graf funkce $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Limita této funkce v bodě 0 neexistuje.

5.5 Vztah hromadných bodů množin a limit

Hromadné body množiny můžeme plně charakterizovat[6] také pomocí posloupností a jejich limit.

Věta 5.5 (O vztahu limity a hromadných bodů množiny)**:** Mějme množinu $M \subset \mathbb{R}$. Bod $b \in \overline{\mathbb{R}}$ je hromadným bodem množiny M, *právě když* existuje posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, jejíž členy všechny leží v M, jsou různé od b a pro její limitu platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$.

Důkaz pro případ $b \in \mathbb{R}$. K důkazu ekvivalence stačí dokázat obě implikace.

- $\Rightarrow$: Pro každé $n \in \mathbb{N}$ zvolme nějaké $a_n \in M$ patřící do $U_b(1/n)$ a různé od b – to lze, b je hromadným bodem množiny M. Je-li $U_b(\varepsilon)$ nějaké okolí bodu b, tak pro $n \geq N = \lceil 1/\varepsilon \rceil$ platí $a_n \in U_b(1/n) \subset U_b(\varepsilon)$. Tudíž $a_n \to b$.

- $\Leftarrow$: Mějme posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ uvedených vlastností. Uvážíme-li libovolné U_b, pak jistě existuje (dokonce je jich nekonečně mnoho) nějaké $a_n \in M$ patřící do tohoto okolí různé od b. Bod b je tedy hromadným bodem množiny M. □

Tím je důkaz dokončen.

Důkaz pro případ $b = +\infty$ a $b = -\infty$. Stačí vhodně modifikovat předchozí případ. Tento důkaz přenecháváme čtenáři. □

Vztah mezi hromadnými body posloupností a vybranými posloupnostmi popisuje následující věta.

[6] V následující Větě je ekvivalence!

Věta 5.6 (O vztahu podposloupností a hromadných bodů posloupnosti)**:** Bod $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ je hromadným bodem posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, *právě když* existuje vybraná posloupnost $(a_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ mající limitu $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$.

Důkaz. Opět ukážeme obě implikace.

- $\Leftarrow$: V každém okolí U_α leží nekonečně mnoho členů posloupnosti $(a_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ a tím pádem i posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.
- Provedeme důkaz $\Rightarrow$ pouze pro $\alpha \in \mathbb{R}$: Uvažme okolí $U_\alpha(1)$, existuje k_1 takové, že $a_{k_1} \in U_\alpha(1)$. Je-li $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, pak pro okolí $U_\alpha(1/n)$ existuje $k_n > k_{n-1}$ splňující $a_{k_n} \in U_\alpha(1/n)$. Takto zkonstruovaná posloupnost $(a_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ je vybraná z $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a konverguje k α. Skutečně, je-li $U_\alpha(\varepsilon)$ libovolné okolí bodu α, pak pro všechna $n > N := \lceil 1/\varepsilon \rceil$ je $\frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$ a proto $a_{k_n} \in U_\alpha(1/n) \subset U_\alpha(1/N) \subset U_\alpha(\varepsilon)$. $\square$

Tím je důkaz dokončen.

5.6 Limity vybraných posloupností

Přímo z definice limity posloupnosti ihned nahlédneme následující pozorování, které pro jeho důležitost ale formulujeme jako větu.

Věta 5.7 (O limitě vybrané posloupnosti)**:** Nechť posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má limitu $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$. Pak každá podposloupnost vybraná z $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má také limitu α.

Příklad 5.16: Platí $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{4n! + n^2} = 0$. Posloupnost $\left(\frac{1}{4n!+n^2}\right)_{n=1}^{\infty}$ je totiž vybraná posloupnost z $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ a již víme, že $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Důsledek 5.3: Lze-li z posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ vybrat dvě podposloupnosti s *různými* limitami, pak limita původní posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ neexistuje.

Pomocí podposloupností tak můžeme prozkoumávat limitní chování komplikovanějších posloupností. Tento důsledek v kombinaci s Větou 5.6 implikuje následující pozorování:

Pozorování 5.2: Má-li posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ alespoň dva různé hromadné body, pak nemá limitu.

Příklad 5.17: Limita posloupnosti $\big((-1)^n\big)_{n=1}^{\infty}$ neexistuje.

Řešení. Vybereme podposloupnosti se sudými a lichými indexy. Tj. položíme $k_n := 2n$ a $\ell_n := 2n-1$ pro $n = 1, 2, \ldots$ Potom obě odpovídající vybrané podposloupnosti jsou konstantní s různými limitami:

$$a_{k_n} = 1 \to 1, \quad a_{\ell_n} = -1 \to -1.$$

Také vidíme, že tato posloupnost má dva hromadné body.

Příklad 5.18: V tomto příkladu ukážeme, že limita posloupnosti $(\sin n)_{n=1}^{\infty}$ neexistuje. Srovnejte tento příklad s Příkladem 5.14.

Řešení. K tomu dospějeme sporem. Předpokládejme, že limita této posloupnosti existuje a označme ji $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, tedy

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \sin n\,.$$

Protože nerovnost $-1 \leq \sin n \leq 1$ platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$, je jistě $\alpha \in \langle -1, 1\rangle$ (speciálně, není to některé z nekonečen).

Protože je posloupnost $(\sin 2n)_{n=1}^{\infty}$ vybraná z posloupnosti $(\sin n)_{n=1}^{\infty}$, má dle věty o limitě vybrané posloupnosti také za limitu α. Ze známých trigonometrických vzorců nyní plyne následující vztah

$$\cos 2n = \cos^2 n - \sin^2 n = (1 - \sin^2 n) - \sin^2 n = 1 - 2\sin^2 n$$

a proto posloupnost $(\cos 2n)_{n=1}^{\infty}$ má za limitu $1-2\alpha^2$. Odtud ovšem plyne, s využitím součtových vzorců pro funkci sin, že

$$\begin{aligned}\sin 2 &= \sin(2n + 2 - 2n) = \sin(2n+2)\cos 2n - \cos(2n+2)\sin 2n \to \\ &\to \alpha(1-2\alpha^2) - (1-2\alpha^2)\alpha = 0,\end{aligned}$$

protože $(\sin(2n+2))_{n=1}^{\infty}$, resp. $(\cos(2n+2))_{n=1}^{\infty}$, jsou vybrané z $(\sin 2n)_{n=1}^{\infty}$, resp. $(\cos 2n)_{n=1}^{\infty}$. Celkem jsme dospěli k rovnosti $\sin 2 = 0$, což je spor.

5.7 Asymptotická ekvivalence $\sim$

Tento vztah definujeme pro funkce, definice níže ale přirozeně zahrnuje i případ posloupností, ke kterým se dostaneme v následující kapitole.

Definice 5.4 (Asymptotická ekvivalence $\sim$)**:** Mějme dvě funkce f, g a bod $a \in \overline{\mathbb{R}}$ takový, že a je hromadným bodem množiny $D_f \cap D_g$ a existuje okolí V_a splňující[7] $(V_a \cap D_f) \setminus \{a\} = (V_a \cap D_g) \setminus \{a\}$.

Řekneme, že **funkce** f **je asymptoticky ekvivalentní funkci** g **pro** x **jdoucí k** a, symbolicky „$f(x) \sim g(x)$ pro $x \to a$“, právě když existuje okolí U_a bodu a a funkce u definovaná na U_a pro jejíž limitu v bodě a platí $\lim\limits_{x \to a} u(x) = 1$ tak, že pro všechna $x \in U_a \cap D_f \cap D_g$ různá od a platí

$$f(x) = u(x)g(x).$$

Tento asymptotický vztah $\sim$ je v jistém smyslu nejpřesnější. Za jistých dodatečných předpokladů lze vztah $f(x) \sim g(x)$ pro $x \to a$ vyjádřit pomocí limity podílu $f(x)/g(x)$ pro $x \to a$, tímto často používaným pozorováním se zabývá Věta 5.8 níže. Zamysleme se nad základními vlastnostmi tohoto pojmu.

Tvrzení 5.1: Platí následující tvrzení:

- Vztah $\sim$ je symetrický, tranzitivní a reflexivní, jde skutečně o ekvivalenci.
- Mějme dvě funkce f a g a bod a. Pokud $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existuje a je rovna α a f je asymptoticky ekvivalentní g pro $x \to a$, pak existuje i $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ a je také rovna α.

Příklad 5.19: Mějme dva polynomy P a Q. Potom P je asymptoticky ekvivalentní Q pro $x \to +\infty$ (tj. $P(x) \sim Q(x)$ pro $x \to +\infty$), právě když polynomy P a Q mají stejný stupeň a stejný koeficient u nejvyšší mocniny.

5.8 Limity a asymptotické vztahy ($\sim$, o, $\mathcal{O}$, Ω, Θ a ω)

Následující věta je velmi užitečná. Umožňuje nám rozhodovat o platnosti vztahů o a $\mathcal{O}$ bez nutnosti hledání konstant z definice o a $\mathcal{O}$. Její použití si ukážeme hned jakmile budeme mít v ruce mocnější nástroje na výpočet limit, například v podkapitole o podílovém kritériu.

Věta 5.8 (O vztahu o, $\mathcal{O}$, $\sim$ a limit)**:** Mějme dvě funkce $f\colon A \to \mathbb{R}$, $g\colon B \to \mathbb{R}$ a bod $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Dále předpokládejme, že

[7] Vágně řečeno, definiční obory obou funkcí vypadají na okolí a stejně.

- Bod a je hromadným bodem množiny A i B.
- Existuje okolí U_a bodu a takové, že $(U_a \cap A) \setminus \{a\} = (U_a \cap B) \setminus \{a\}$.
- Pro všechna x z množiny $U_a \cap B$ různá od a platí nerovnost $g(x) \neq 0$.

Potom platí následující tři implikace:

- Pokud limita $\lim\limits_{x \to a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \in \mathbb{R}$, pak $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ pro $x \to a$.
- Platí $\lim\limits_{x \to a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = 0$, právě když $f(x) = o(g(x))$ pro $x \to a$.
- Platí $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, právě když $f(x) \sim g(x)$ pro $x \to a$.

Důkaz. Stručně bychom se mohli odkázat na Tvrzení 3.2 a 3.4. Rozeberme důkaz ale podrobněji.

V prvním případě si stačí uvědomit, že existence konečné limity implikuje omezenost funkce na okolí: je-li $\lim_{x \to a} |f(x)/g(x)| = b \in \mathbb{R}$, pak dle definice limity pro okolí $U_b(1)$ existuje okolí U_a takové, že pro každé $x \in U_a \setminus \{a\}$ je $|f(x)/g(x)| \in U_b(1)$ a tedy $|f(x)| < (b+1)|g(x)|$.

V druhém případě je situace jednoduší, roli c v definici o přesně hraje ε z definice limity.

V třetím případě je potřeba dokázat dvě implikace. Implikace zprava do leva plyne přímo z definice $\sim$. Implikace zleva doprava vyplývá ze vztahu

$$f(x) = \frac{f(x)}{g(x)} g(x),$$

platného na okolí bodu a, s možnou výjimkou bodu a. □

V podkapitole 4.7 jsme pro posloupnosti zavedli asymptotické vztahy Ω, ω a Θ. Pomocí limit můžeme zformulovat následující kritérium:

Tvrzení 5.2 (O vztahu limit a Ω, ω a Θ)**:** Mějme dvě posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$. Dále předpokládejme, že všechny členy posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou nenulové. Potom platí následující tvrzení.

1. Pokud $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{b_n}\right| > 0$, potom $a_n = \Omega(b_n)$.

2. Pokud $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{b_n}\right| = +\infty$, potom $a_n = \omega(b_n)$.

3. Pokud $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{b_n}\right| \in (0, +\infty)$, potom $a_n = \Theta(b_n)$.

Důkaz. Stačí si procvičit definici s pojmy limita a příslušnými asymptotickými vztahy.

1. Předpokládejme tedy, že
$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{b_n}\right| = \alpha > 0,$$
kde připouštíme i možnost $\alpha = +\infty$. Z definice limity posloupnosti použité pro $\varepsilon = \alpha/4$, resp. $\varepsilon = 42$ v případě $\alpha = +\infty$, existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé přirozené $n > N$ platí
$$\left|\frac{a_n}{b_n}\right| \in U_\alpha(\varepsilon),$$
tj. pro libovolné $n > N$ je
$$\left|\frac{a_n}{b_n}\right| > c, \quad \text{tudíž i} \quad |a_n| \geq c|b_n|,$$
kde $c = \frac{3}{4}\alpha$, resp. $c = 42$ v případě $\alpha = +\infty$. Tím jsme ověřili vztah $a_n = \Omega(b_n)$.

2. Nyní postupujme podobně jako v předchozím bodě. Z uvedeného předpokladu plyne: pro každé $c > 0$ existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé přirozené $n > N$ platí
$$\left|\frac{a_n}{b_n}\right| > c,$$
čili
$$|a_n| > c|b_n|.$$
Tím jsme ověřili vztah $a_n = \omega(b_n)$.

3. Předpokládejme, že
$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{b_n}\right| = \alpha \in (0, +\infty).$$
Existují tedy dvě reálné konstanty $c_1, c_2 > 0$ a $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n > N$ je
$$c_1 \leq \left|\frac{a_n}{b_n}\right| \leq c_2,$$
tedy
$$c_1|b_n| \leq |a_n| \leq c_2|b_n|.$$
Tudíž $a_n = \Theta(b_n)$. □

Vztah mezi $\sim$ a Θ odhaluje následující tvrzení.

Tvrzení 5.3 (O vztahu $\sim$ a Θ)**:** Pokud $a_n \sim b_n$ pro $n \to \infty$, pak i $a_n = \Theta(b_n)$ pro $n \to \infty$.

Pro ilustraci uvádíme několik příkladů.

Příklad 5.20: Platí $2^n = \Omega(n^2)$.

Řešení. Skutečně, protože
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}/(n+1)^2}{2^n/n^2} = 2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2} = 2 \cdot \frac{1}{(1+0)^2} = 2 > 1,$$
pak podle podílového kritéria platí
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n^2} = +\infty > 0.$$
V tomto případě vidíme, že platí i $2^n = \omega(n^2)$.

5.9 Konvergence posloupností

Z pohledu existence limity rozlišujeme následující dva důležité typy posloupností.

Definice 5.5 (Konvergentní posloupnost / *convergent sequence*)**:** Buď $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ posloupnost. Pokud pro její limitu platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$, pak se nazývá **konvergentní**. V ostatních případech ji nazýváme **divergentní**.

O konvergentní posloupnosti někdy také ze zjevných důvodů hovorově říkáme, že „má konečnou limitu“. Na základě výsledků příkladů z předchozí podkapitoly 5.1 můžeme tvrdit následující: posloupnost $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní, libovolná konstantní posloupnost je konvergentní, posloupnost $(n)_{n=1}^{\infty}$ je divergentní.

Shrňme si nejpodstatnější výsledek předchozího textu týkající se limit posloupností. Nejelementárnějším způsobem výpočtu limity posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je úspěšné provedení následujících dvou kroků.

1. Uhodněme kandidáta na limitu, označme si ho $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$,
2. Pomocí definice dokažme, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$.

V další části tohoto textu si ukážeme sofistikovanější nástroje pro výpočet limit. Velmi často je nám hodnota limity (pokud vůbec existuje) neznámá. Typicky je její případná hodnota právě to, co hledáme. Vyvstává proto přirozená otázka: lze rozhodnout o konvergenci posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ pouze na základě znalosti jejích členů, bez toho abychom museli operovat s hodnotou limity, kterou neznáme? Na tuto otázku zanedlouho kladně odpovíme.

Připomeňme si axiom úplnosti reálných čísel probíraný v podkapitole 2.2. Nyní již navíc můžeme podmínku, kladenou na délky intervalů, formulovat pomocí pojmu limity.

Poznámka 5.10 (Přeformulování axiomu úplnosti)**:** Každý smršťující se systém vnořených uzavřených intervalů má neprázdný průnik. Přesněji, pokud pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\langle a_n, b_n\rangle \supset \langle a_{n+1}, b_{n+1}\rangle$$

a navíc

$$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0,$$

pak existuje reálné x ležící v každém z intervalů $\langle a_n, b_n\rangle$, $n \in \mathbb{N}$.

Přistupme nyní k důležité větě nesoucí jméno po Bernardovi Bolzanovi (matematik s italskými předky narozený a studující v Praze, 1781 – 1848) a Karlovi Weierstrassovi (německý matematik, otec moderní matematické analýzy, 1815 – 1897). Její tvrzení není vůbec očividné a jak uvidíme v důkazu, plyne z axiomu úplnosti množiny reálných čísel.

Věta 5.9 (Bolzano–Weierstrass)**:** Každá omezená číselná posloupnost má hromadný bod α ležící v $\mathbb{R}$.

Důkaz. Buď $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ omezená posloupnost. Jistě existuje interval $\langle b_1, c_1\rangle$ takový, že obsahuje všechny členy posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Rozdělíme-li interval $\langle b_1, c_1\rangle$ na poloviční intervaly $\langle b_1, \frac{b_1+c_1}{2}\rangle$ a $\langle \frac{b_1+c_1}{2}, c_1\rangle$, pak aspoň jeden z těchto intervalů obsahuje nekonečně mnoho členů posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, označme ho $\langle b_2, c_2\rangle$.

Tímto způsobem induktivně sestrojíme systém vnořených intervalů $\langle b_n, c_n\rangle$ z nichž každý obsahuje nekonečně mnoho členů $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a pro jejichž délky platí

$$\lim_{n\to\infty}(c_n - b_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{c_1 - b_1}{2^{n-1}} = 0.$$

Podle axiomu úplnosti existuje reálné x patřící do každého z intervalů $\langle b_n, c_n\rangle$. Protože délky intervalů $\langle b_n, c_n\rangle$ konvergují k nule, lze pro libovolné okolí U_x bodu x nalézt n dostatečně velké na to, aby celý interval $\langle b_n, c_n\rangle$ patřil do U_x (zcela jistě do něj patří například všechny intervaly $\langle b_n, c_n\rangle$, jejichž délky jsou menší než čtvrtina délky U_x). Proto lze v U_x nalézt nekonečně mnoho členů posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a x je tedy hromadným bodem $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. □

Poznámka 5.11: Jinak řečeno, předchozí Věta 5.9 tvrdí, že z každé omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost. Skutečně, vzpomeňte si na Větu 5.6.

Následující větu, která je důsledkem právě dokázané Bolzanovy–Weierstrassovy věty, budeme velmi často využívat. Dává nám totiž *postačující podmínku* pro konvergenci posloupnosti. Pokud ověříme tuto podmínku (v tomto případě monotonii a omezenost posloupnosti) pak je *zaručena* existence její konečné limity.

Věta 5.10 (O limitě monotónní posloupnosti)**:** Každá reálná monotónní posloupnost má limitu. Tato limita je konečná, právě když je daná posloupnost omezená.

Důkaz. V případě, že je zkoumaná posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ neomezená, je z definice limity zřejmé, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$ (znaménko $+$ pro neomezenost shora, $-$ pro zdola).

Předpokládejme, že $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí a (shora) omezená. Potom podle Bolzanovy–Weierstrassovy věty má posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ hromadný bod, označme ho x. Buď U_x libovolné okolí bodu x. Potom existuje jisté a_N patřící do U_x. Do tohoto okolí ale musí patřit všechna a_n s $n > N$, protože pro ně nutně platí $a_N \leq a_n \leq x$. Kdyby totiž a_n přerostlo x, nemohl by x být hromadným bodem $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. □

Ukažme si použití hned několika nových konceptů na následujícím příkladě.

Příklad 5.21 (Limita posloupnosti harmonických čísel)**:** Zkoumejme limitu posloupnosti

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)_{n=1}^{\infty}. \tag{5.4}$$

Této posloupnosti se pro její důležitost budeme věnovat ještě dále v semestru. Nyní si ukážeme jak je to s její limitou. Na první pohled se může zdát překvapivé, že limita této posloupnosti je $+\infty$.

Tato posloupnost je očividně ostře rostoucí (následující člen vznikne z předchozího přičtením kladného čísla). Podle věty o limitě monotónní posloupnosti tudíž existuje její limita. Vyberme posloupnost $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$b_n = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k}.$$

Platí

$$b_{j+1} - b_j = \frac{1}{2^j+1} + \frac{1}{2^j+2} + \cdots + \frac{1}{2^j+2^j} \geq 2^j \frac{1}{2^{j+1}} = \frac{1}{2}.$$

Odtud

$$b_n = b_1 + \sum_{j=1}^{n-1} (b_{j+1} - b_j) \geq b_1 + \frac{n-1}{2} = 1 + \frac{n}{2}.$$

Posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, a tedy i $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, není omezená shora. Proto

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty.$$

Poznámka 5.12: Tento výsledek zdaleka není zřejmý. Kdybyste s členy posloupnosti z předchozího příkladu experimentovali na počítači, tedy počítali v konečné přesnosti (typicky pomocí 64 bitových čísel s pohyblivou desetinnou čárkou), tak byste pravděpodobněji dospěli k závěru, že tato posloupnost konverguje. Rozmyslete proč! K této posloupnosti se později vrátíme a ukážeme si, že do nekonečna jde stejně rychle jako logaritmus.

Další věta nám dává *nutnou* a *postačující* podmínku pro konvergenci posloupnosti. Tedy podmínku ekvivalentní s definicí konvergence. Podstatnou výhodou této podmínky je, že vyžaduje pouze znalost členů zkoumané posloupnosti, nepotřebujeme se odvolávat na případnou hodnotu limity (srovnejte s Definicí 5.1).

Věta 5.11 (Bolzano–Cauchy)**:** Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní, právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n, m > N$ je $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Důkaz. Nejprve dokažme implikaci $\Rightarrow$: nechť má $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ limitu $\alpha \in \mathbb{R}$. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Potom lze nalézt $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n > N$ je $|a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$. Takže pro libovolné $n, m > N$ platí

$$|a_n - a_m| = |a_n - \alpha + \alpha - a_m| \leq |a_n - \alpha| + |\alpha - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Při odhadu jsme využili znalosti trojúhelníkové nerovnosti.

Nyní se podívejme na implikaci $\Leftarrow$: nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ splňuje podmínku

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{R})(\forall n, m \in \mathbb{N})\big(n, m > N \ \Rightarrow\ |a_n - a_m| < \varepsilon\big).$$

Zvolme za $\varepsilon = 1$, pak existuje index $N \in \mathbb{N}$ tak, že

$$|a_m - a_N| < 1 \quad \text{pro každé } m > N.$$

Jinak řečeno, pro $m > N$ patří a_m do intervalu $(a_N - 1, a_N + 1) = U_{a_N}(1)$. Mimo tento interval může ležet pouze konečný počet prvků posloupnosti. Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je proto omezená. Podle Bolzanovy–Weierstrassovy věty existuje $x \in \mathbb{R}$, hromadný bod posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Buď $U_x(\varepsilon/2)$ okolí bodu x. Pro $\varepsilon/2$ existuje N tak, že pokud $m, n > N$ pak platí $|a_n - a_m| < \varepsilon/2$. Díky hromadnosti bodu x ale existuje $m > N$ tak, že $a_m \in U_x(\varepsilon/2)$. Tudíž pro $n > N$ je

$$|a_n - x| = |a_n - a_m + a_m - x| \leq |a_n - a_m| + |a_m - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Tím je důkaz dokončen. □

Příklad 5.22: Vraťme se ještě jednou k posloupnosti harmonických čísel (5.4). Ukažme, že její limita je nekonečno alternativně pomocí Bolzanova–Cauchyova kritéria. Nejprve si opět povšimneme, že zkoumaná posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, je rostoucí a tedy má limitu (podle věty o limitě monotónní posloupnosti). Dokažme, že tato limita nemůže být konečná (tj. nemůže patřit do $\mathbb{R}$) a proto musí být nutně rovna $+\infty$. K tomu použijeme Bolzano–Cauchyova kritéria, chceme ukázat jeho negaci. Tedy

$$\big(\exists \varepsilon > 0\big)\big(\forall N \in \mathbb{N}\big)\big(\exists n, m \in \mathbb{N}\big)\big(n, m > N \text{ a } |a_n - a_m| \geq \varepsilon\big),$$

kde $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je zkoumaná posloupnost. Zvolme $\varepsilon = \frac{1}{2}$ a buď $N \in \mathbb{N}$ libovolné. Položme $n = 4N$ a $m = 2N$, potom $n > m > N$ a

$$|a_n - a_m| = \sum_{k=2N+1}^{4N} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{4N} \cdot 2N = \frac{1}{2}.$$

V odhadu jsme použili jednoduchého pozorování: součet $\ell \in \mathbb{N}$ kladných čísel je větší nebo roven nejmenšímu z nich krát ℓ.

6 Výpočet limit posloupností a funkcí

V předchozí kapitole jsme zavedli pojem limity a ukázali jeho základní vlastnosti. Také jsme vypočetli celou řadu limit jednoduchých funkcí a posloupností. V této kapitole si ukážeme, jak tyto základní výsledky využívat při výpočtu komplikovanějších limit.

Poznámka 6.1 (Zjednodušující poznámka)**:** Naše definice limity funkce (Definice 5.2) je záměrně obecná a využívá pojmu hromadného bodu (Definice 2.9). U funkcí, na které typicky narazíme, budeme počítat limity v bodech a, na jejichž (jednostranných) okolích, s případnou výjimkou bodu a, jsou funkce definovány. Například, máme-li

$$f(x) = \ln(x) \quad \text{a} \quad g(x) = \frac{\sin(x-2)}{x-2},$$

pak nás může zajímat limita f v bodě 0 zprava (f je definována na $(0,1) = U_0^+(1) \smallsetminus \{0\}$) nebo limita g v bodě 2 (g je definována na $(1,3) \smallsetminus \{2\} = U_2(1) \smallsetminus \{2\}$). Samozřejmě by nás u obou funkcí mohla zajímat třeba i limita v bodě 10, jehož celé okolí o poloměru třeba 1 patří do příslušných definičních oborů.

Je dobré si rozmyslet, jaké důsledky tato situace má. Je-li funkce f definována na okolí bodu $a \in \mathbb{R}$, s možnou výjimkou bodu a (tj. $U_a(\varepsilon) \subset D_f$ nebo $U_a(\varepsilon) \smallsetminus \{a\} \subset D_f$, pro nějaké $\varepsilon > 0$), pak je bod a automaticky hromadným bodem množiny D_f. Máme-li dvě takovéto funkce, tak i jejich součet a součin má takovouto vlastnost.

6.1 Věta o limitě součtu/součinu/podílu

Velmi často se setkáváme se součtem, součinem, či podílem funkcí a posloupností. U takovýchto funkcí a posloupností se přímo nabízí použití strategie „rozděl a panuj“, tedy pokusit se ze znalosti jednoduchých limit „sestavit“ hledanou limitu. Tento přístup ovšem nemusí být úplně jednoduchý a většinou vyžaduje jistou přípravu. Zformulujme nejprve ústřední větu této podkapitoly, kde k „sestavování“ používáme algebraické operace sčítání, násobení a dělení.

Věta 6.1 (Věta o limitě součtu/součinu/podílu)**:** Nechť f a g jsou funkce a a je hromadným bodem $D_f \cap D_g$. Nechť dále existují limity $\lim_a f$ a $\lim_a g$. Potom rovnosti

$$\lim_a (f+g) = \lim_a f + \lim_a g,$$
$$\lim_a f \cdot g = \lim_a f \cdot \lim_a g,$$
$$\lim_a \frac{f}{g} = \frac{\lim_a f}{\lim_a g},$$

platí v případě, že jsou algebraické operace na pravé straně definovány.

Tato věta je také známa jako **Věta o aritmetice limit**.

Poznámka 6.2: V případě posloupností a jejich limit v nekonečnu tato věta samozřejmě platí také, předpoklady o hromadných bodech budou automaticky splněny. Analogická věta platí i pro jednostranné limity.

Důkaz této věty není komplikovaný, je spíše pracný. Zejména vzhledem k nutnosti rozebrat všechny možné situace. Zde v textu si ukážeme alespoň dva případy.

Důkaz pro konečné limity a součet. Ukážeme pouze případ součtu konečných limit, $\lim_a f = c \in \mathbb{R}$, $\lim_a g = d \in \mathbb{R}$. Pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje okolí U_a tak, že

$$\forall x \in (U_a \cap D_f \cap D_g) \smallsetminus \{a\} : \quad |f(x) - c| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ a } |g(x) - d| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Je-li tedy $x \in (U_a \cap D_f \cap D_g) \smallsetminus \{a\}$, pak pomocí trojúhelníkové nerovnosti platí

$$|f(x)+g(x)-c-d| = \big|\big(f(x)-c\big)+\big(g(x)-d\big)\big| \leq |f(x)-c|+|g(x)-d| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Tudíž $\lim_a (f+g) = c + d$. □

Důkaz pro součin a jednu nekonečnou limitu. Předpokládejme, že $\lim_a f = b \in \mathbb{R}$, $b > 0$, a $\lim_a g = +\infty$. Označme $C := D_f \cap D_g$.

Chceme dokázat rovnost $\lim_a (f \cdot g) = +\infty$. Mějme $c \in \mathbb{R}$. Potřebujeme odhadnout $f(x) \cdot g(x)$ zespoda hodnotou c. Dle předpokladů ovšem postupně platí

- pro $b/2 > 0$ existuje U_a takové, že pro $x \in (C \cap U_a) \setminus \{a\}$ je $f(x) \in U_b(b/2)$, tj. $f(x) > b/2$,
- pro $c/(b/2) \in \mathbb{R}$ existuje V_a takové, že pro $x \in (C \cap V_a) \setminus \{a\}$ je $g(x) \in U_{+\infty}\big(c/(b/2)\big)$, tj. $g(x) > c/(b/2)$. □

Položíme-li $W_a := U_a \cap V_a$, pak pro $x \in (C \cap W_a) \setminus \{a\}$ máme

$$f(x) \cdot g(x) > \frac{b}{2} \cdot \frac{c}{\frac{b}{2}} = c,$$

tj, $f(x) \cdot g(x) \in U_{+\infty}(c)$.

Nyní se můžeme vrátit k definici algebraických operací na $\overline{\mathbb{R}}$, vzpomeňte na Definici 2.3. Některé operace mezi prvky $\overline{\mathbb{R}}$ jsme nedefinovali, což bylo právě motivováno touto Větou 6.1. Pro nedefinované operace by takovouto větu nešlo zformulovat. Ukažme si na konkrétních případech.

Příklad 6.1 (Nemožnost smysluplné definice $+\infty + (-\infty)$)**:** Nedefinovaný (neurčitý) výraz $+\infty + (-\infty)$ může vzniknout v různých situacích, které vyústí v různé limity. Ukažme si to na posloupnostech $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$:

- Je-li $a_n = n$ a $b_n = -n$, pak $\lim_n a_n + \lim b_n$ je skutečně tvaru $+\infty + (-\infty)$. Pro limitu součtu ale jednoduše platí $\lim_n (a_n + b_n) = \lim_n 0 = 0$.
- Je-li $a_n = n$ a $b_n = -n + 1$, pak $\lim a_n + \lim b_n$ je skutečně tvaru $+\infty + (-\infty)$. Pro limitu součtu ale jednoduše platí $\lim (a_n + b_n) = \lim 1 = 1$.
- Je-li $a_n = 2n$ a $b_n = -n$, pak $\lim_n a_n + \lim b_n$ je skutečně tvaru $+\infty + (-\infty)$. Pro limitu součtu ale jednoduše platí $\lim (a_n + b_n) = \lim n = +\infty$.
- Je-li $a_n = n$ a $b_n = -2n$, pak $\lim a_n + \lim b_n$ je skutečně tvaru $+\infty + (-\infty)$. Pro limitu součtu ale jednoduše platí $\lim (a_n + b_n) = \lim (-n) = -\infty$.

- Je-li $a_n = n$ a $b_n = -n + (-1)^n$, pak $\lim_n a_n + \lim_n b_n$ je skutečně tvaru $+\infty + (-\infty)$. Pro limitu součtu ale dostáváme $\lim(a_n + b_n) = \lim(-1)^n$ a ta neexistuje (Příklad 5.17).

Otázka 6.1: Vymyslete příklady posloupností $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ takových, aby $\lim_n a_n = 0$ a $\lim_n b_n = +\infty$, tj. součin limit v tomto případě je nedefinovaný (neurčitý) výraz $0 \cdot (+\infty)$ a přesto aby platilo

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = 0$,
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = 1$,
3. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = +\infty$.

Počítat limitu polynomů je díky předcházející větě velmi jednoduché.

Příklad 6.2: Buď $P(x)$ libovolný polynom a $a \in \mathbb{R}$. Potom

$$\lim_{x\to a} P(x) = P(a).$$

Již jsme ukázali, že $\lim\limits_{x\to a} x = a$ a víme $\lim\limits_{x\to a} c = c$. Použijeme-li mnohonásobně větu o limitě součtu a součinu funkcí (Věta 6.1), ihned dostaneme tvrzení uvedené na začátku našeho příkladu. Například tedy platí

$$\lim_{x\to 2} \left(x^2 - 3x + 1\right) = 2^2 - 3 \cdot 2 + 1 = -1.$$

O něco složitější je počítat limitu racionálních lomených funkcí. Zde už může nastat více možných situací. Veškeré nástroje už ale máme připravené a následující příklad jen demonstruje jejich aplikaci.

Příklad 6.3: Vypočtěte limitu funkce

$$f(x) = \frac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^3 - 3x^2 + 2x}$$

v bodech $a = -1$, $b = 1$, $c = 2$ a $d = -\infty$.

Řešení. Nejprve si všimněme, že jmenovatel lze rozložit na kořenové činitele

$$x^3 - 3x^2 + 2x = x(x-1)(x-2),$$

tudíž $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2\}$. Pro výpočet limity v bodě $a = -1$ můžeme proto použít větu o limitě podílu,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \frac{\lim_{x\to a} x^4 + 2x^2 - 3}{\lim_{x\to a} x^3 - 3x^2 + 2x} = \frac{0}{-6} = 0.$$

Dále, před výpočtem limity v bodě d upravme výraz pro $f(x)$ následovně

$$f(x) = \frac{x^4\left(1 + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^4}\right)}{x^3\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right)} = x \cdot \frac{1 + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^4}}{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}.$$

Použijeme-li nyní větu o limitě součtu a podílu, dostáváme

$$\lim_{x\to d} f(x) = -\infty \cdot \frac{1}{1} = -\infty.$$

Pro výpočet limit v bodech b a c je vhodné upravit na součin kořenových činitelů i čitatel,

$$f(x) = \frac{(x^2+3)(x^2-1)}{x(x-1)(x-2)} = \frac{(x^2+3)(x-1)(x+1)}{x(x-1)(x-2)} = \frac{(x^2+3)(x+1)}{x(x-2)}, x \in D_f.$$

Tudíž, opět pomocí předešlých vět,

$$\lim_{x\to b} = \frac{8}{-1} = -8, \quad \lim_{x\to c} f(x) \text{ neexistuje}.$$

Neexistence poslední limity plyne z nerovnosti jednostranných limit,

$$\lim_{x\to c+} f(x) = \frac{21}{2} \cdot (+\infty) = +\infty, \quad \lim_{x\to c-} f(x) = \frac{21}{2} \cdot (-\infty) = -\infty$$

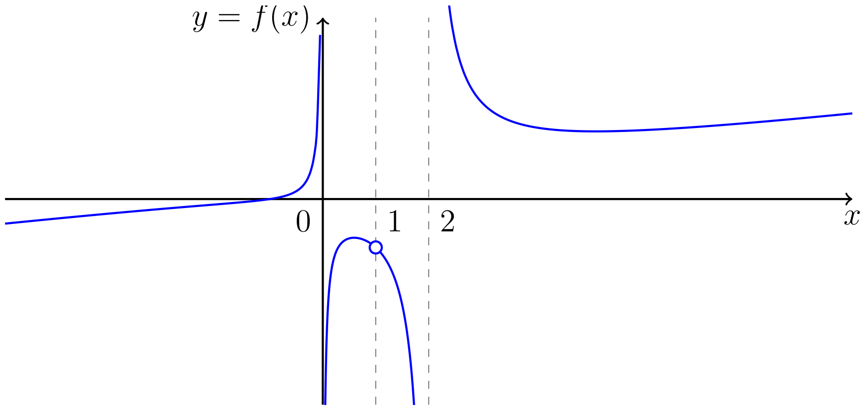
Je dobré porovnat naše výsledky s grafem uvažované funkce, viz Obrázek 6.1.

Příklad 6.4: Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1}.$$

Řešení. V bodě $x = 2$ je jmenovatel roven 3, což je nenulové číslo. Podle věty o limitě podílu proto ihned dostáváme

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1} = \frac{4}{3}.$$



Obrázek 6.1: Graf racionální funkce z Příkladu 6.3.

Příklad 6.5: Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1}.$$

Řešení. Nyní je limita typu $\frac{0}{0}$. Z polynomů v čitateli a jmenovateli proto můžeme vytknout kořenový činitel $x - 1$,

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x+1} \cdot \frac{1}{x-1}.$$

Protože ale pro jednostranné limity platí

$$\lim_{x\to 1_\pm} \frac{x+2}{x+1} \cdot \frac{1}{x-1} = \frac{3}{2} \cdot (\pm\infty) = \pm\infty,$$

původní limita podle Důsledku 5.1 neexistuje.

Příklad 6.6: Vypočtěte limity

1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 - 4n + 5}{n - n^3}$,
2. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 - 4n + 5}{n - n^3}$,
3. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 - 4n + 5}{n - n^2}$.

Řešení. Je potřeba použít Větu 6.1, ale před tím je třeba výrazy za limitou vhodně upravit. V prvním příkladě platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3-4n+5}{n-n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{4}{n^2}+\frac{5}{n^3}}{\frac{1}{n^2}-1} = \frac{2-0+0}{0-1} = -2.$$

Všimněte si, že předchozí větu jsme použili hned několikrát (podíl limit, výpočet limity čitatele a jmenovatele pomocí součtu/rozdílu limit). Ve druhém příkladě podobně máme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-4n+5}{n-n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{4}{n}+\frac{5}{n^2}}{\frac{1}{n}-n} = \frac{2-0+0}{0-\infty} = 0.$$

A konečně ve třetím

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3-4n+5}{n-n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-\frac{4}{n}+\frac{5}{n^2}}{\frac{1}{n}-1} = \frac{+\infty-0+0}{0-1} = -\infty.$$

Samozřejmě způsobů jak provést úpravu těchto typů zlomků, tak aby bylo možné použít větu na podíl/součin/součet limit, je více možných.

6.2 Nerovnosti a limity

Často je výhodné, nebo dokonce nutné, k odvození limity jedné funkce použít její srovnání s jinou, jednodušší, funkcí se známou limitou. V této kapitole si ukážeme dvě variace na toto téma. Začněme nejprve velmi přímočarým důsledkem definice limity.

Věta 6.2 (O vytlačení do nekonečna)**:** Mějme dvě funkce f, g a bod $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Nechť existuje okolí U_a bodu a splňující

1. $D_f \cap U_a = D_g \cap U_a$, označme tuto množinu M,
2. a je hromadným bodem množiny M,
3. pro všechna $x \in M \setminus \{a\}$ platí nerovnost $f(x) \leq g(x)$.

Potom platí následující dvě tvrzení:

- Pokud $\lim_a f = +\infty$, potom i $\lim_a g = +\infty$.
- Pokud $\lim_a g = -\infty$, potom i $\lim_a f = -\infty$.

Důkaz případu $+\infty$. Vezměme okolí $U_{+\infty} = (c, +\infty)$. Protože $\lim_a f = +\infty$, máme pro toto c k dispozici jisté okolí U_a takové, že pro všechna $x \in (U_a \cap M) \setminus \{a\}$ platí $f(x) > c$. Vezmeme-li proto nyní libovolné $x \in (U_a \cap M) \setminus \{a\}$, pak platí i $c < f(x) \leq g(x)$ a $g(x) \in (c, +\infty)$. Tudíž $\lim_a g = +\infty$. □

Příklad 6.7: Uvažme například posloupnost

$$a_n = \big(2 + (-1)^n\big)n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Na výpočet limity této posloupnosti nelze použít větu o limitě součinu, protože člen v závorce nemá limitu. Vzhledem ke kladnosti a omezenosti této závorky ale očekáváme, že limitou posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ bude $+\infty$. Každý člen této posloupnosti můžeme odhadnout zespoda takto:

$$a_n = \big(2 + (-1)^n\big)n \geq (2 - 1)n = n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

O posloupnosti $(n)_{n=1}^{\infty}$ víme, že její limitou je $+\infty$. Odtud pak podle předcházející věty ihned plyne $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Nyní se dostáváme k velmi důležité větě, kterou často použijeme. Její myšlenka spočívá v tom, že dokážeme-li „dobře odhadnout" chování dané funkce pomocí funkcí se známými shodnými limitami ve stejném bodě, pak známe i limitu zkoumané funkce v daném bodě.

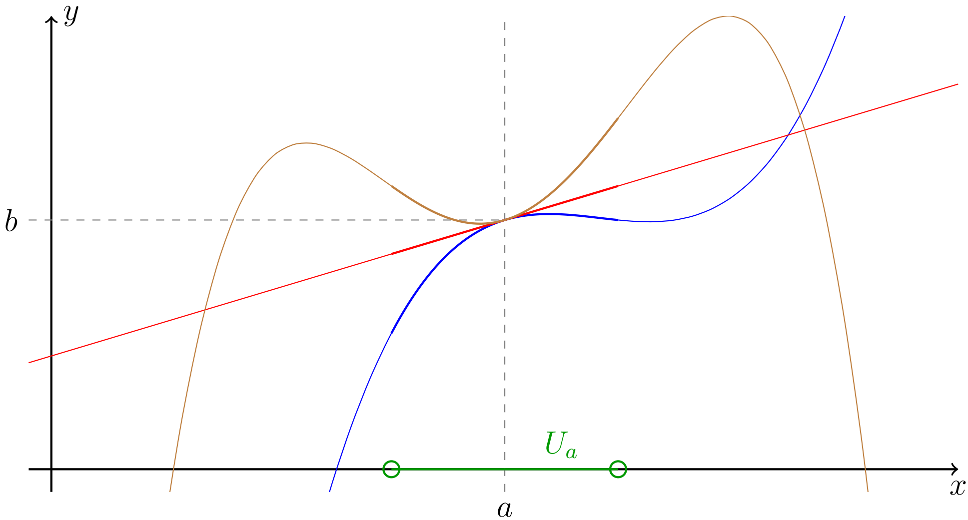
Věta 6.3 (O limitě sevřené funkce)**:** Mějme tři funkce f, g a h a bod $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Nechť existuje okolí U_a bodu a splňující

1. $D_f \cap U_a = D_g \cap U_a = D_h \cap U_a$, označme tuto množinu M,
2. a je hromadným bodem množiny M,
3. pro všechna $x \in M \setminus \{a\}$ platí nerovnosti $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.

Nechť dále existují limity funkcí f a h v bodě a mající společnou hodnotu $b \in \overline{\mathbb{R}}$, tj.

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = b.$$

Potom existuje i limita g v bodě a a je také rovna b, tj. $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$.



Obrázek 6.2: Ilustrace k větě o limitě sevřené funkce, případ konečné limity (Věta 6.3; barvy grafů odpovídají ve větě f (modrá), g (červená) a h (hnědá)).

Důkaz. Mějme okolí V_b bodu b. Dle předpokladů existuje V_a okolí bodu a takové, že $V_a \subset U_a$ a pro každé $x \in (M \cap V_a) \smallsetminus \{a\}$ patří $f(x)$ i $h(x)$ do V_b. Protože ale pro tato x platí $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, je nutně i $g(x)$ prvkem V_b. □

Tato věta také často bývá označována jako „věta o dvou policajtech", v angličtině ji lze také nalézt pod heslem *squeeze theorem*. Grafická ilustrace k větě o limitě sevřené funkce je uvedena na Obrázku 6.2.

Pro úplnost zde explicitně zmiňme i důležitý důsledek plynoucí z předchozí věty pro posloupnosti. Připomeňme si, že všechny naše posloupnosti jsou definovány na množině $\mathbb{N}$. Proto lze pro tento konkrétní případ dostat pouhým přeformulováním předchozí věty následující tvrzení.

Důsledek 6.1 (O limitě sevřené posloupnosti)**:** Mějme tři posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ a nechť platí

1. existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq N$ platí nerovnosti $a_n \leq b_n \leq c_n$,

2. existují limity posloupností $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ a jsou rovné $b \in \overline{\mathbb{R}}$, tj. $\lim a_n = \lim c_n = b$.

Potom existuje i limita posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ a je také rovna b.

Příklad 6.8: Vypočtěte limitu $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{n}$.

Řešení. Funkce sin má obor hodnot $H_{\sin} = \langle -1, 1\rangle$. Tedy platí nerovnost

$$-1 \leq \sin x \leq 1, \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{R}.$$

Tudíž pro každé přirozené n platí

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Protože ale $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-1}{n} = 0$, je podle věty o limitě sevřené posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0.$$

Příklad 6.9: Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Řešení. Zřejmě nelze použít větu o součinu limit, limita $\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ totiž neexistuje. Ovšem nerovnost

$$f(x) := -|x| \leq g(x) := x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq |x| =: h(x)$$

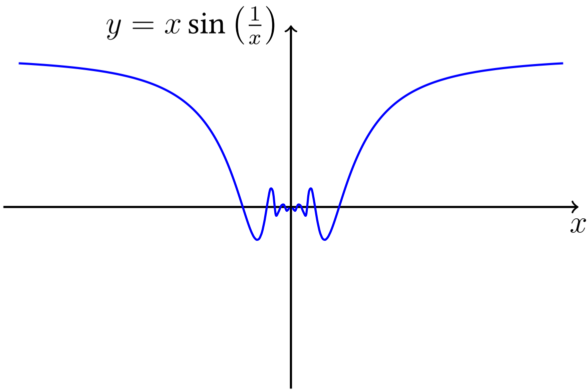
platí pro libovolné $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Zvolíme-li např. $U_a = (-1, 1)$ okolí bodu $a = 0$, pak

- nerovnost $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ platí pro každé $x \in (-1, 1) \setminus \{0\}$,
- existují $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0$.

Podle věty o limitě sevřené funkce pak $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$.

Příklad 6.10: Ověřte správnost následujících tvrzení

$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0, \quad \lim_{x\to 0} \cos x = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$



Obrázek 6.3: Ilustrace k Příkladu 6.9, graf funkce $x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Řešení. V tento okamžik máme k dispozici pouze geometrickou definici goniometrických funkcí, viz Obrázek 6.4. Pro $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ platí

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{x}{2} < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x.$$

Skutečně, porovnejte obsahy trojúhelníku OAB, výseče OAB a trojúhelníku OAC na Obrázku 6.4. Funkce sin je lichá a tudíž

$$-|x| \le \sin x \le |x|, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Potom $\lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0$. A z rovnosti $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ pak i $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$. (Rozmyslete znaménko!) Funkce sin i tg jsou liché a proto z nerovnosti

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{x}{2} < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

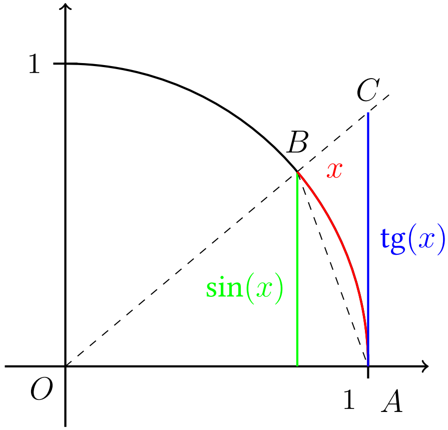
plyne nerovnost

$$1 < \left|\frac{x}{\sin x}\right| < \left|\frac{1}{\cos x}\right|, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}.$$

Odtud pomocí Věty 6.3 dostáváme poslední hledanou limitu

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

Funkce $\frac{\sin x}{x}$ je totiž kladná na jistém okolí nuly.



Obrázek 6.4: Jednotková kružnice a výpočet funkcí sinus a tangens.

6.3 Věta o limitě složené funkce

Mnoho funkcí, na které narazíme, jsou složené funkce. Následující důležitá věta nám umožňuje počítat jejich limity, aniž bychom se museli obracet na definici limity.

Věta 6.4 (O limitě složené funkce)**:** Nechť f a g jsou funkce, a, b, c jsou prvky $\overline{\mathbb{R}}$ a platí čtyři podmínky

1. $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$,
2. $\lim\limits_{x\to b} f(x) = c$,
3. bod a je hromadným bodem množiny $D_{f\circ g}$.
4. buď $(\exists U_a)(\forall x \in D_g \cap U_a \setminus \{a\})(g(x) \neq b)$ nebo $(b \in D_f$ a $f(b) = c)$.

Potom pro limitu složené funkce $f \circ g$ platí $\lim\limits_{x\to a}(f \circ g)(x) = c$.

Důkaz. Mějme libovolné okolí U_c bodu c. Potom dle předpokladů postupně platí:

- existuje V_b okolí bodu b takové, že pro každé $x \in (V_b \cap D_f) \setminus \{b\}$ platí $f(x) \in U_c$,
- existuje W_a okolí bodu a takové, že pro každé $x \in (W_a \cap D_g) \setminus \{a\}$ platí $g(x) \in V_b$. □

Vezměme nyní libovolné $x \in (W_a \cap D_{f\circ g}) \smallsetminus \{a\}$ (dle předpokladu je toto neprázdná množina). Takovéto x oplývá následujícími vlastnostmi: $x \in W_a$, $x \in D_g$, $g(x) \in D_f$ a $x \neq a$. Konečně zbývá využít podmínek v bodě čtyři.

- První možnost: bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $W_a \subset U_a$ a tedy $g(x) \neq b$ a tudíž $f(g(x)) \in U_c$.
- Druhá možnost: pokud $g(x) \neq b$, pak $f(g(x)) \in U_c$, ale v tomto případě i pokud $g(x) = b$, pak $f(g(x)) = f(b) = c \in U_c$.

Tím je důkaz dokončen.

Poznámka 6.3: Podmínka v bodě čtyři je důležitá. Demonstrujme to na následujícím lehce extrémním případě,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 2, & x = 0, \end{cases}$$
$$g(x) = 0.$$

Pro tyto funkce platí $D_{f\circ g} = \mathbb{R}$ a

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{x\to 0} f(x) = 1.$$

Podmínky v bodě jedna a dva i tři jsou tedy splněny, ale ani jedna podmínka v bodě čtyři neplatí. Dále, složená funkce $f \circ g$ existuje a platí $(f \circ g)(x) = 2$. Její limita v bodě 0 je zřejmě 2, což není 1.

Hrubě řečeno lze říci, že pokud se vnitřní funkce na okolí bodu a nechová „pěkně“, nesplňuje bod čtyři předchozí věty, pak věta o limitě složené funkce nemusí platit.

Příklad 6.11: Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 1} \sqrt[4]{x^2 + x + 1}.$$

Řešení. Označme

$$f(x) = \sqrt[4]{x} \quad \text{a} \quad g(x) = x^2 + x + 1 = (x + 1/2)^2 + 3/4 > 0.$$

Z předchozího výkladu víme, že

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1}(x^2 + x + 1) = 3 \quad \text{a} \quad \lim_{x\to 3} \sqrt[4]{x} = \sqrt[4]{3}.$$

Dále $D_{f\circ g} = \mathbb{R}$ a 1 je hromadným bodem této množiny. Konečně 3 patří do definičního oboru D_f a $f(3) = \sqrt[4]{3}$. Dle předchozí věty proto

$$\lim_{x\to 1} \sqrt[4]{x^2 + x + 1} = \sqrt[4]{3}.$$

6.4 Výpočet limit dalších význačných posloupností

V této podkapitole odvodíme několik základních limit posloupností, které se často hodí znát při výpočtech. V předešlé části textu jsme totiž odvodili několik vět, které však v podstatě nelze použít, neznáme-li limity aspoň některých jednoduchých posloupností.

Připomeňme, že hned po zavedení pojmu limity posloupnosti jsme si prakticky odvodili limitu

$$\lim_{n\to\infty} n^a = \begin{cases} +\infty, & a > 0, \\ 1, & a = 0, \\ 0, & a < 0. \end{cases}$$

Přistupme nyní k dalším příkladům.

Příklad 6.12: Platí

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Řešení. Položme $h_n := \sqrt[n]{n} - 1$. Z jedné strany platí $h_n \geq 0$ pro každé $n = 1, 2, 3, \ldots$ Z binomické věty dostaneme pro $n \geq 2$

$$n = (1 + h_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h_n^k > 1 + \binom{n}{2} h_n^2,$$

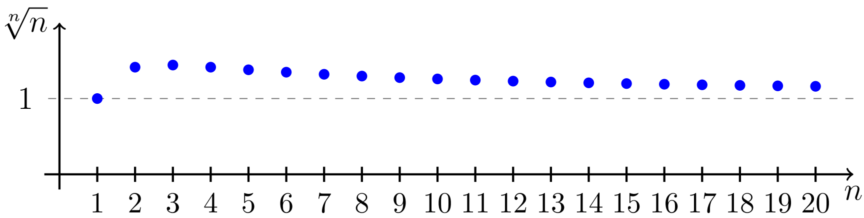
a tedy pro $n \geq 2$ platí

$$n - 1 > \frac{n(n-1)}{2} h_n^2.$$

Pro $n \geq 2$ je výraz $\frac{n(n-1)}{2}$ kladný a můžeme jím proto poslední nerovnost vydělit a díky nezápornosti h_n poté i odmocnit. Po těchto úpravách dostáváme

$$0 \leq h_n \leq \sqrt{\frac{2}{n}}.$$

Odtud ihned pomocí věty o sevřené posloupnosti dostáváme $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$. Graf této posloupnosti je pro názornost uveden na Obrázku 6.5.



Obrázek 6.5: Grafické znázornění členů posloupnosti $\left(\sqrt[n]{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ a její konvergence k 1. Jenom na základě tohoto obrázku nelze rozhodnout o tom, že tato posloupnost konverguje k 1.

Příklad 6.13: Pro každé $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, je

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Řešení. Případ $a \geq 1$: Pro každé celé $n > a$ platí

$$1 \leq \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{n}.$$

V předchozím příkladě jsme však ukázali rovnost $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Tudíž podle věty o sevřené posloupnosti $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Případ $0 < a < 1$: Z předchozí bodu plyne $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{a}} = 1$, tudíž

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = 1.$$

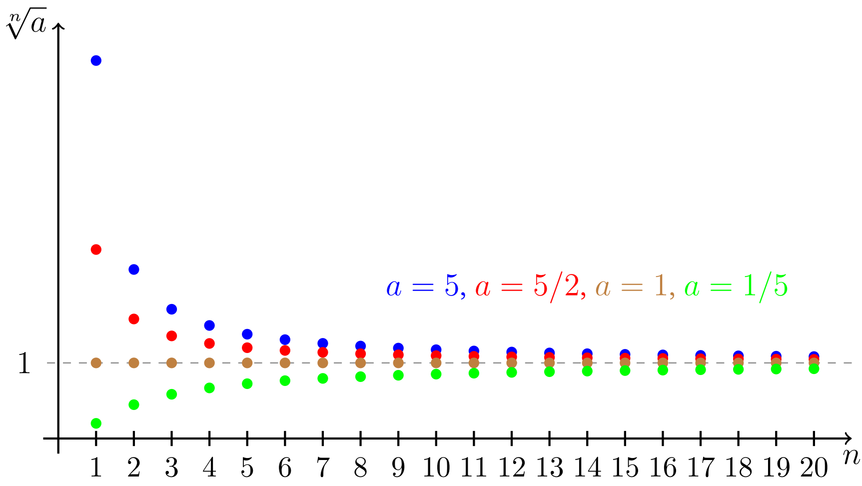
Pro ilustraci uvádíme Obrázek 6.6.

Příklad 6.14: Platí

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty.$$

Řešení. Při výpočtu této limity využijeme následující trik. Členy v součinu dvou faktoriálů promícháme v „zrcadlovém" pořadí:

$$\begin{aligned}
(n!)^2 &= (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n) \\
&= \big(1 \cdot n\big) \cdot \big(2 \cdot (n-1)\big) \cdot \big(3 \cdot (n-2)\big) \cdots \big(n \cdot 1\big) = \\
&= \prod_{k=1}^{n} k\,(n+1-k)
\end{aligned}$$



Obrázek 6.6: Grafické znázornění členů posloupnosti $\left(\sqrt[n]{a}\right)_{n=1}^{\infty}$ pro různé hodnoty a a její konvergence k 1.

Z grafu paraboly $f(x) = x(n+1-x)$ je zřejmé (viz Obrázek 6.7), že

$$f(k) \geq f(1) = f(n) = n, \quad k \in \{1, 2, \ldots, n\},$$

a proto $(n!)^2 \geq n^n$. Konečně, $2n$-tá odmocnina dává

$$\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt{n} \longrightarrow +\infty.$$

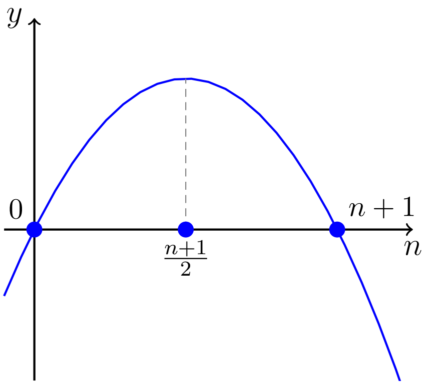
Příklad 6.15: Nechť $a \in \mathbb{R}$. Pak pro limitu reálné posloupnosti $(a^n)_{n=1}^{\infty}$ platí:

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0, & |a| < 1, \\ 1, & a = 1, \\ +\infty, & a > 1, \\ \text{neexistuje}, & a \leq -1. \end{cases}$$

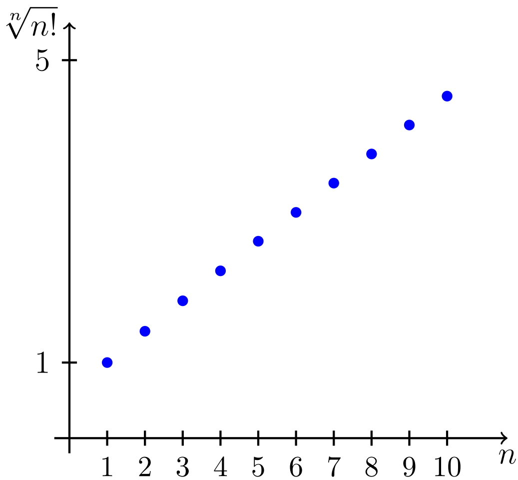
Řešení. Jednoduché případy: Pokud $a = 0$ nebo $a = 1$, pak se jedná o konstantní posloupnost jejíž limita je rovna příslušné konstantě. Pro $a = -1$ jsme již ukázali, že limita $\left((-1)^n\right)_{n=1}^{\infty}$ neexistuje.

Nechť $0 < |a| < 1$. Platí

$$\left|a^{n+1}\right| = \left|a^n\right| \cdot |a| < \left|a^n\right|.$$



Obrázek 6.7: Ilustrace k příkladu výpočtu limity posloupnosti $\sqrt[n]{n!}$.



Obrázek 6.8: Grafické znázornění členů posloupnosti $\left(\sqrt[n]{n!}\right)_{n=1}^{\infty}$.

Posloupnost $\left(\left|a^n\right|\right)_{n=1}^{\infty}$ je tedy ostře klesající a omezená, $0 < \left|a^n\right| < |a|$. Z věty o limitě monotónní posloupnosti plyne existence konečné limity, označme ji $L = \lim_{n\to\infty} \left|a^n\right|$. Posloupnost $\left(\left|a^{n+1}\right|\right)_{n=1}^{\infty}$ je vybraná z $\left(\left|a^n\right|\right)_{n=1}^{\infty}$ a proto mají stejnou limitu. Konečně

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|a^{n+1}\right| = \lim_{n\to\infty} |a| \cdot \left|a^n\right| = |a| \cdot \lim_{n\to\infty} \left|a^n\right| = |a| \cdot L.$$

Díky předpokladům nakladeným na a odtud nutně plyne rovnost $L = 0$.

Případ $a > 1$: Podobně jako v předchozím případě ukážeme, že $\left(a^n\right)_{n=1}^{\infty}$ je ostře rostoucí posloupnost zdola omezená např. číslem 1. Existuje proto limita $L = \lim_{n\to\infty} a^n$. Protože posloupnost roste, musí nutně být $L > a$. Navíc platí

$$L = \lim_{n\to\infty} a^{n+1} = a \cdot \lim_{n\to\infty} a^n = a \cdot L.$$

Protože ale $L > a > 1$ může tato nerovnost platit pouze v případě $L = +\infty$.

Případ $a < -1$: Pro vybranou posloupnost $\left(a^{2n}\right)_{n=1}^{\infty} = \left(\left(a^2\right)^n\right)_{n=1}^{\infty}$ nyní podle předchozího bodu platí $\lim_{n\to\infty} a^{2n} = +\infty$, protože $a^2 > 1$. Limitu vybrané posloupnosti $\left(a^{2n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$ snadno spočteme

$$\lim_{n\to\infty} a^{2n+1} = a \cdot \lim_{n\to\infty} a^{2n} = a \cdot (+\infty) = -\infty.$$

Našli jsme dvě vybrané posloupnosti s různými limitami. Původní limita, tj. $\lim_{n\to\infty} a^n$, tedy neexistuje.

Shrňme si doposud odvozené limity v Tabulce 6.2.

6.5 Podílové kritérium pro posloupnosti

Následující kritérium je nedocenitelné při počítání některých „očividných“ limit posloupností. Podívejme se například na limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n}. \tag{6.1}$$

Zamysleme se nad tvarem členů této posloupnosti. Jedná se o podíl polynomu (v čitateli) a exponenciály o základu větším než 1 (ve jmenovateli). Pokud si člověk představí

posloupnost	limita
$(n^a)_{n=1}^{\infty}$	$\begin{cases} +\infty, & a > 0, \\ 1, & a = 0, \\ 0, & a < 0. \end{cases}$
$\left(\sqrt[n]{n}\right)_{n=1}^{\infty}$	1
$\left(\sqrt[n]{a}\right)_{n=1}^{\infty}$,	1 pro $a > 0$
$\left(\sqrt[n]{n!}\right)_{n=1}^{\infty}$	$+\infty$
$(a^n)_{n=1}^{\infty}$	$\begin{cases} 0, & \lvert a\rvert < 1, \\ 1, & a = 1, \\ +\infty, & a > 1, \\ \text{neexistuje}, & a \leq -1. \end{cases}$

Tabulka 6.2: Známé posloupnosti probírané v této sekci a jejich limity.

grafy těchto posloupností, ihned získá dojem, že „exponenciála ve jmenovateli roste podstatně rychleji“ [1] než polynom v čitateli. Tušíme tedy, že pro velká n bude tento podíl velmi malý. Intuitivně limita (6.1) existuje a je rovna nule.

Bohužel, úvaha v předchozím odstavci má hliněné nohy, je to pouze naše domněnka. Podobné pozorování bychom přeci také *z grafu* učinili, kdybychom studovali limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{10^{10^{10}} \cdot n},$$

jmenovatel této posloupnosti také přece roste podstatně rychleji než její čitatel. Přesto je tato limita rovna $10^{-10^{10}}$, což není nula. Takovýto argument je tedy sám o sobě nepoužitelný.

Když se nad těmito komentáři zamyslíte, tak uvidíte, že problém je vlastně v tom, co to přesně znamená „roste podstatně rychleji“. Co tímto slovním spojením vlastně chceme popsat? Přirozeně bychom mohli říci, že máme-li dvě posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$

[1] Exponenciála *o základu větším* než 1.

a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ obě mající za limitu $+\infty$ pak o $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ řekneme, že „roste podstatně rychleji" než $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ právě když

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0.$$

Zde ale ihned vidíme problém. Toto je požadavek ekvivalentní tomu co máme spočítat! Nemůžeme přece říci, že limita podílů je nula, protože limita podílů je nula!

Diskuze v předchozím odstavci dále rozvíjí motivaci v úvodu podkapitoly 3.4. Také zde krásně vidíme, jak jsme přirozenými úvahami dospěli přesně k jednomu z tvrzení Věty 5.8.

Vraťme se k limitě v rovnici (6.1). Mohli bychom se pokusit dokázat pomocí definice, že tato limita je rovna nule (zkuste!). Na tomto místě zvolíme ale jiný postup, který se nám bude hodit i v dalších příkladech. Platí totiž následující věta.

Věta 6.5 (Podílové kritérium)**:** Buď $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ posloupnost kladných čísel a nechť existuje limita

$$q := \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}. \tag{6.2}$$

Potom platí následující dvě implikace:

a. pokud $q < 1$, pak limita posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je rovna nule, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,

b. pokud $q > 1$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Důkaz. Proveďme důkaz bodu a. Protože $q < 1$ určitě existuje r splňující $q < r < 1$. Díky tomu pak i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < r.$$

Z definice limity posloupnosti pak existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že nerovnost

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < r$$

platí pro všechna $n > N$. Díky nezápornosti členů posloupnosti pak platí i nerovnost $a_{n+1} < r a_n$ pro libovolné $n > N$. To ovšem znamená, že pro $n > N$ je

$$0 \leq a_n \leq r^{n-N-1} a_{N+1}.$$

Protože $0 < r < 1$ je limita pravé strany nerovnosti rovna nule (viz příklad v předchozí podkapitole). Dle věty o limitě sevřené posloupnosti (věta 6.3) pak ihned dostáváme kýžený výsledek $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Bod b. se dokáže naprosto analogicky. □

Aplikujme podílové kritérium na příklad uvedený na začátku této podkapitoly. Teprve *až* tuto limitu vypočteme, budeme moc tvrdit, že „2^n roste do nekonečna podstatně rychleji, než n^2“. Přesněji, že 2^n je asymptotickou striktní horní mezí n^2 pro $n \to \infty$. Teprve po tomto výpočtu bude tato vlastnost těchto dvou funkcí *odvozena*.

Příklad 6.16: Vypočtěme limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n}.$$

Řešení. Pro limitu podílů platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \frac{1}{2} < 1.$$

Podle podílového kritéria proto původní posloupnost konverguje k nule. Podle Věty 5.8 proto platí

$$n^2 = o(2^n), \text{ pro } n \to +\infty.$$

Poznámka 6.4: První bod Věty 6.5 lze relativně snadno formulovat i pro některé posloupnosti nemající pouze kladné členy. Skutečně, pokud pomocí podílového kritéra zjistíme, že posloupnost s nezápornými členy $(|a_n|)_{n=1}^{\infty}$ konverguje k nule, pak k nule konverguje i posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Stačí vzít do úvahy nerovnosti $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$ a větu o limitě sevřené posloupnosti. Alternativně se lze odvolat na Pozorování 5.1.

Poznámka 6.5: Pokud limita podílů vyjde rovna 1, pak podílové kritérium nelze použít. Například pro posloupnost $(n)_{n=1}^{\infty}$ platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$$

a $\lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$. Avšak pro limitu $(1/n)_{n=1}^{\infty}$ platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1,$$

ale $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Poznámka 6.6: Podílové kritérium jsme ve Větě 6.5 formulovali v tzv. limitním tvaru. Z důkazu je zřejmé, že platí i silnější nelimitní verze: Jestliže pro posloupnost kladných čísel $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ existují $N \in \mathbb{N}$ a $q \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1, \quad \text{resp.} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq q > 1$$

pro každé $n > N$, potom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, resp. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Poznámka 6.7: Existuje i mnoho dalších tvrzení a kritérií pomáhajících při výpočtech limit. V tomto textu se omezujeme na pár užitečných tvrzení, která přímo použijeme v našem dalším bádání. Pokud studujete z alternativních zdrojů, tak se stačí omezit na zde probíraná tvrzení.

Poznámka 6.8: V BI-MA1 se snažíme naučit studenty umět ověřit a správně vysvětlit svá tvrzení. Proto argument „roste rychleji než“ při počítání příkladů je neakceptovatelný. V těchto příkladech je to typicky argumentace kruhem, jak bylo výše zmíněno. Ano, je to dobrá intuice, ale je potřeba umět si ji obhájit, například právě podílovým kritériem (to nemusí být vždy jediná možnost).

Příklad 6.17: Dokažte, že platí vztah

$$3^n = o(n!) \text{ pro } n \to \infty.$$

Řešení. To je nyní snadné, nemusíme bojovat s definicí o. Skutečně, hodnoty $3^n/n!$ jsou kladné pro každé přirozené n a platí

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} = 0 < 1.$$

Podle podílového kritéria proto platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n!} = 0$$

a podle Věty 5.8 pak skutečně $3^n = o(n!)$ pro $n \to \infty$.

Příklad 6.18: Vypočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^3}.$$

Řešení. Tento příklad lze řešit dvěma způsoby. Nejprve se pokusme použít podílové kritérium. Uvedená posloupnost je tvořena kladnými členy a platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^3} \cdot \frac{n^3}{n!} = \lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3} = +\infty \cdot \frac{1}{(1+0)^3} = +\infty > 1.$$

Tudíž hodnota limity v zadání je $+\infty$.

Alternativně lze použít jednoduchou úpravu, není nutné se odvolávat na podílové kritérium. Pro libovolné přirozené $n \geq 3$ platí

$$\begin{aligned} \frac{n!}{n^3} &= \frac{n(n-1)(n-2)}{n^3} \cdot (n-3)! \\ &= \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) \cdot (n-3)! \to 1 \cdot 1 \cdot (+\infty) = +\infty. \end{aligned}$$

7 Spojitost funkce

7.1 Definice a kritéria spojitosti

Jak již bylo řečeno (vzpomeňte na Poznámku 5.6), hodnota limity funkce v bodě $a \in \mathbb{R}$ nezávisí na funkční hodnotě funkce f v tomto bodě (funkce v daném bodě ani nemusí být definována a přesto v něm může mít limitu). Zavádíme proto pojem „spojité funkce", který se vztahem mezi limitou a funkční hodnotou funkce f v bodě zabývá.

Definice 7.1 (Spojitost funkce v bodě / *continuity at a point*)**:** Nechť f je reálná funkce reálné proměnné a nechť bod $a \in D_f$. Řekneme, že funkce f je **spojitá v bodě** a, právě když pro její limitu v bodě a platí

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Dále zavádíme dva další pojmy:

- Funkce f je **spojitá v bodě** a **zprava**, právě když pro jednostrannou limitu $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = f(a)$.
- Funkce f je **spojitá v bodě** a **zleva**, právě když $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = f(a)$.

Spojitost funkce je velmi důležitá pro praktické aplikace[1]. Intuitivně lze požadavek spojitosti funkce f v bodě a chápat takto: „$f(x)$ je blízko $f(a)$, pokud x je blízko a". Přesně to totiž korektně říká Definice 7.1.

[1]Na druhou stranu, i nespojité funkce hrají v přírodě důležitou roli, například v popisu fázových přechodů.

Pozorování 7.1: Jako první pozorování uveďme, že pokud $a \notin D_f$, pak takováto funkce nemůže být z definice spojitá i kdyby $\lim_{x \to a} f(x)$ existovala. V definici spojitosti se totiž *předpokládá*, že funkce je definována v bodě a. Jinak bychom vůbec nemohli mluvit o funkční hodnotě $f(a)$. Různými způsoby „selhání" spojitosti se budeme zabývat v podkapitole 7.5.

Protože v Definici 7.1 uvažujeme $a \in D_f \subset \mathbb{R}$ a tím pádem i $f(a) \in \mathbb{R}$, dostáváme přeformulováním definice limity (viz Poznámku 5.5) následující $\varepsilon - \delta$ vyjádření spojitosti pro funkce definované na okolí bodu a:

Poznámka 7.1: Funkce f mající v definičním oboru okolí bodu a je spojitá v bodě $a \in D_f$, právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ splňující $|x - a| < \delta$ platí $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Jako první příklad spojité funkce zmiňme příklad libovolného polynomu.

Příklad 7.1: V předchozí podkapitole jsme ukázali (viz Příklad 6.2), že pro libovolné reálná a a libovolný polynom $P(x)$ platí

$$\lim_{x \to a} P(x) = P(a).$$

Každý polynom je proto spojitou funkcí v každém bodě $a \in \mathbb{R}$.

Všimněte si, že díky znalosti vlastností pojmu limity (konkrétně věty o limitě součtu a součinu) a pouze znalosti spojitosti funkce $f(x) = x$ a konstantní funkce jsme odvodili spojitost libovolného polynomu. Vůbec jsme nepotřebovali explicitně použít definici spojitosti/limity.

Dále se podívejme na komplikovanější příklad, který pěkně ilustruje všechny možné druhy spojitosti (zleva/zprava).

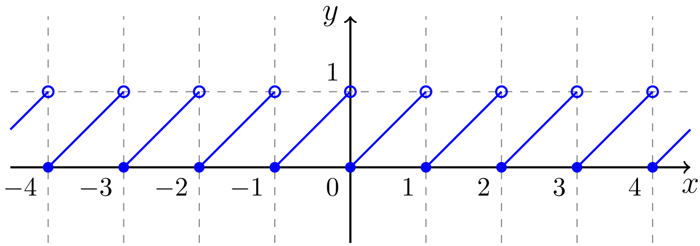
Příklad 7.2: Zkoumejte spojitost funkce $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$.

Řešení. Přirozeným definičním oborem funkce f je $D_f = \mathbb{R}$. Funkce f je spojitá v každém bodě $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. V bodech $a \in \mathbb{Z}$ je spojitá zprava, ale ne zleva.

$$\lim_{x \to a+} f(x) = f(a) \quad \text{a} \quad \lim_{x \to a-} f(x) = f(a) + 1.$$

Graf této funkce je uveden na Obrázku 7.1.

Doposud jsme pojem spojitosti měli zaveden pouze v jednom jediném bodě, tedy šlo o „lokální vlastnost funkce". Nyní ho rozšíříme na celý interval.



Obrázek 7.1: Graf funkce $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ z Příkladu 7.2.

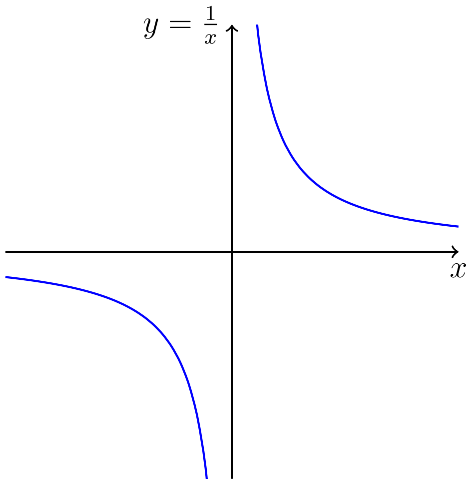
Definice 7.2 (Spojitá funkce (na intervalu) / *continuous function*)**:** Funkce f je **spojitá na intervalu** J, právě když $f|_J$ (f zúženo na J) je spojitá v každém bodě intervalu J. Funkci f nazýváme **spojitou**, právě když je f spojitá v každém bodě svého definičního oboru. Množinu všech spojitých funkcí definovaných na intervalu J značíme $\mathcal{C}(J)$.

Poznámka 7.2: Speciálně tedy platí

- *spojitá na intervalu* (a, b), právě když f je spojitá v každém bodě $x \in (a, b)$.
- *spojitá na intervalu* $\langle a, b)$, právě když f je spojitá v každém bodě $x \in (a, b)$ a v bodě a je spojitá zprava.
- *spojitá na intervalu* $(a, b\rangle$, právě když f je spojitá v každém bodě $x \in (a, b)$ a v bodě b je spojitá zleva.
- *spojitá na intervalu* $\langle a, b\rangle$, právě když f je spojitá v každém bodě $x \in (a, b)$, v bodě a je spojitá zprava a v bodě b je spojitá zleva.

Příklad 7.3: Funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ je ...

- ... spojitá v každém bodě množiny $\mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) = D_f$.
- ... spojitá na intervalu $(-\infty, 0)$.
- ... spojitá na intervalu $(0, +\infty)$.
- ... spojitá.
- ... není spojitá v bodě $a = 0$.



Obrázek 7.2: Graf funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ z Příkladu 7.3.

- ... není spojitá na intervalu $(-1, 1)$.

Prozkoumejte graf této funkce na Obrázku 7.2.

Kritéria spojitosti

V dalším textu i dalších kapitolách se budeme už často věnovat funkcím, které jsou definované na intervalech. Tj. speciálně, pokud se budeme bavit o „spojitosti v bodě", tak typicky naše funkce budou definovány na celém (oboustranném) okolí takovéhoto bodu.

Následující tvrzení umožňují snadno rozhodnout o spojitosti funkcí v jistých bodech. Jsou bezprostředním důsledkem vlastností limity funkce, které jsme probírali v minulé kapitole.

Věta 7.1 (O vztahu různých typů spojitostí)**:** Funkce f definovaná na okolí bodu $a \in D_f$ je spojitá v bodě $a \in D_f$, právě když je spojitá v bodě a zleva i zprava.

Důkaz. Viz Větu 5.1. □

Příklad 7.4: Vzpomeňte si na funkci sgn definovanou v rovnici (12.1). Pro každé nenulové a platí, že sgn je konstantní na jistém okolí bodu a a proto

$$\lim_{x \to a} \operatorname{sgn}(x) = \lim_{x \to a\pm} \operatorname{sgn}(x) = \operatorname{sgn}(a).$$

Vrátíme-li se zpět k Příklad 5.11, pak víme, že

$$\lim_{x\to 0+} \operatorname{sgn}(x) = 1 \quad \text{a} \quad \lim_{x\to 0-} \operatorname{sgn}(x) = -1.$$

Funkce sgn je proto spojitá v každém bodě $a \neq 0$ a je nespojitá v bodě 0. V bodě 0 není spojitá ani zleva ani zprava, protože $\operatorname{sgn}(0) = 0 \neq \pm 1$. Graf funkce sgn naleznete v Obrázku 7.7.

Funkce často zadáváme jako součty, součiny, podíly a složení dalších funkcí. Následující věty umožňují v některých případech rozhodnout o spojitosti takovýchto funkcí v jistých bodech.

Věta 7.2 (O spojitosti součtu, součinu a podílu funkcí)**:** Součet a součin dvou funkcí f a g definovaných na okolí bodu a a spojitých v bodě a je funkce spojitá v bodě a. Pokud navíc $g(a) \neq 0$, pak podíl $\frac{f}{g}$ je funkce spojitá v bodě a.

Důkaz. Viz Větu 6.1. □

Věta 7.3 (O spojitosti složené funkce)**:** Buďte g funkce definovaná na okolí bodu a a spojitá v bodě a a f funkce definovaná na okolí bodu $g(a)$ a spojitá v bodě $g(a)$. Potom složená funkce $f \circ g$ je spojitá v bodě a.

Důkaz. Viz Větu 6.4. Povšimněte si, že druhá možnost ve čtvrtém předpokladu Věty 6.4 je pro spojité funkce automaticky splněna. □

Příklad 7.5: Funkce

$$f(x) = \frac{x^4 - x^3}{x^2 - 4}$$

je spojitá v každém bodě svého definičního oboru $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

Řešení. Skutečně, polynomy v čitateli a jmenovateli jsou spojité funkce v každém bodě $\mathbb{R}$ (vzpomeňte si na příklad 7.1). Jediné body, v kterých je polynom v jmenovateli nulový jsou -2 a 2. Podle Věty 7.2 je pak tedy funkce f spojitá v každém bodě množiny $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

Poznamenejme, že v bodech -2 a 2 tato funkce není spojitá, tyto body ani nepatří do definičního oboru!

Další příklady použití vět z této podkapitoly si ukážeme hned jak odvodíme spojitost i dalších elementárních funkcí (podkapitola 7.4). Pouze s polynomy příliš zajímavých příkladů vymyslet nelze. Nejprve je ale vhodné ještě prozkoumat obecné vlastnosti a důsledky spojitosti.

7.2 Metoda půlení intervalu a řešení rovnice $f(x) = 0$

Spojitost funkce na uzavřeném intervalu má závažné důsledky pro řešení rovnic. Následující věta dává postačující podmínku pro existenci řešení rovnice $f(x) = 0$ a dokonce i nabízí algoritmus jak toto řešení nalézt. Mimo to ji ještě dále s výhodou využijeme.

Povšimněte si, že není žádným omezením mít na pravé straně rovnice číslo 0. Pokud bychom měli řešit rovnici $h(x) = g(x)$ pro neznámou x, vždy můžeme tento problém přeformulovat do tvaru $f(x) := g(x) - h(x) = 0$.

Věta 7.4 (Metoda půlení intervalu / *bisection method*)**:** Nechť funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť $f(a) \cdot f(b) < 0$. Potom existuje bod $c \in (a, b)$ takový, že $f(c) = 0$.

Poznámka 7.3: Podmínka $f(a) \cdot f(b) < 0$ v předchozí větě kompaktně popisuje dvě vzájemně se vylučující se možnosti:

- $f(a) < 0$ a $f(b) > 0$, nebo
- $f(a) > 0$ a $f(b) < 0$.

Důkaz. Položme $a_1 := a$ a $b_1 := b$. Protože znaménka $f(a_1)$ a $f(b_1)$ jsou *různá*, nastane právě jedna ze tří možností

1. $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) = 0$,
2. znaménka $f(a_1)$ a $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)$ jsou různá,
3. znaménka $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)$ a $f(b_1)$ jsou různá.

Dále postupujeme podle toho, která z těchto možností nastala:

1. Hledaným bodem c je $\frac{a_1+b_1}{2}$ a věta je dokázána.
2. Položme $a_2 := a_1$ a $b_2 := \frac{a_1+b_1}{2}$.
3. Položme $a_2 := \frac{a_1+b_1}{2}$ a $b_2 = b_1$.

Pokud nenastala první možnost, proveďme stejnou úvahu s a_2 a b_2 místo a_1 a b_1. Tímto způsobem postupně konstruujeme další a_3, b_3, atd. Pokud v některém z kroků nastane první možnost (tj. existuje n tak, že $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) = 0$), pak je věta dokázána.

V opačném případě jsme zkonstruovali dvě posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ splňující

$$a_n, b_n \in \langle a, b\rangle, \quad a \leq a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n \leq b, \quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}},$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$. Obě posloupnosti jsou monotónní a omezené, tudíž existují jejich konečné limity, $a_n \to \alpha$ a $b_n \to \beta$ při $n \to \infty$. Navíc

$$\beta - \alpha = \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{2^{n-1}} = 0.$$

Obě posloupnosti tedy mají stejnou limitu, označme ji $c := \alpha = \beta \in \langle a, b\rangle$. Ze spojitosti funkce f v bodě c a Heineho věty nyní plyne

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(c).$$

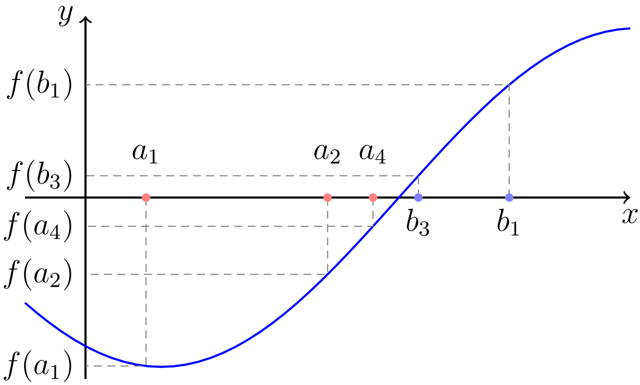
Ale protože všechny $f(a_n)$ mají různé znaménko od $f(b_n)$, můžou poslední rovnosti nastat pouze v případě, že $f(c) = 0$. Tím je důkaz věty dokončen. □

Důkaz předcházející věty je **konstruktivní**. Tvrzení věty, existenci čísla c, jsme dokázali jeho konstrukcí. Algoritmus použitý v důkazu se nazývá *metoda půlení intervalu* a lze ho prakticky použít k hledání řešení rovnice $f(x) = 0$. Jeho výhodou je, že máme pod kontrolou chybu výpočtu, hledané řešení c vždy leží v intervalu (a_n, b_n). Pokud délka tohoto intervalu je již kratší než požadovaná přesnost, můžeme algoritmus zastavit a třeba o průměru $\frac{a_n+b_n}{2}$ prohlásit, že se jedná o hledané řešení (v dané přesnosti). Nevýhodou metody půlení intervalu je její ne příliš vysoká rychlost (typicky je potřeba udělat více iterací než se dostaneme k požadované přesnosti). Později během semestru si ukážeme Newtonovu metodu, která často konverguje výrazně rychleji.

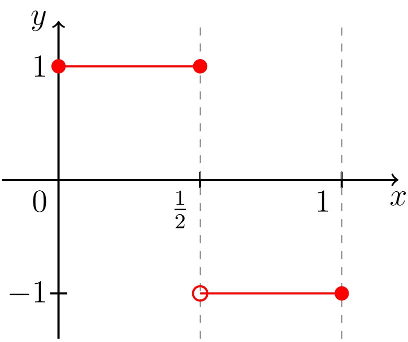
Poznámka 7.4: Předpoklad spojitosti v předešlé Větě 7.4 je podstatný. Jako příklad uvažme funkci

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left\langle 0, \frac{1}{2}\right\rangle, \\ -1, & x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right\rangle \end{cases}$$

na intervalu $\langle a, b\rangle = \langle 0, 1\rangle$. Sice $f(0) \cdot f(1) = -1 < 0$, ale neexistuje bod $x \in (0, 1)$ splňující $f(x) = 0$. Viz Obrázek 7.4.



Obrázek 7.3: Demonstrace k metodě půlení intervalu, Větě 7.4.



Obrázek 7.4: Předpoklad spojitosti pro tvrzení Věty 7.4 je podstatný.

Příklad 7.6 (Numerický výpočet hodnoty odmocniny ze dvou)**:** Na tomto místě uveďme velmi jednoduchou ukázku použití metody půlení intervalu. Záměrně naivní Python implementace této metody (viz důkaz Věty 7.4) by mohla vypadat následovně:

```
def bisection(f, a, b, eps):
  # Kontrola intervalu, případné prohození krajních bodů
  if f(a) * f(b) >= 0:
    raise BaseException("Nevhodný interval!")
  if a > b:
    a, b = b, a
  # Počítadlo iterací, nultá aproximace
```

```
n = 0
x = (a + b) / 2
# Výpočetní cyklus
while b - a >= 2*eps:
  if f(x) == 0:
    return x, n
  elif f(a) * f(x) < 0:
    b = x
  else:
    a = x
  x  = (a + b) / 2
  n += 1
# Vrátíme poslední aproximaci a počet iterací
return x, n
```

Funkce `bisection` očekává spojitou funkci `f`, jejíž nulový bod se snažíme nalézt v intervalu s krajními body `a` a `b`. Dále musíme zadat požadovanou přesnost výpočtu `eps`. Metoda pak vrací aproximaci `x`, která se od skutečné hodnoty nulového bodu liší nejvýše o `eps`, a počet provedených iterací `n`.

Použití této metody pro výpočet aproximací odmocniny ze dvou je nyní přímočaré. Vezmeme funkci $f(x) = x^2 - 2$, tedy `f = lambda x: (x ** 2) - 2`, a například $a = 0$ a $b = 3$. Výsledky tohoto experimentu s různou přesností výpočtu jsou uvedeny v Tabulce 7.2. V tomto případě je samozřejmě přesnost výsledku navíc limitována použitým datovým typem (zde 64 bitový *float*, viz podkapitolu 2.6). Samotná metoda ale není v principu nijak omezená. Pokud bychom chtěli větší přesnost, stačí použít jiný datový typ.

7.3 Vlastnosti spojitých funkcí

Věta 7.4 má nejen praktické důsledky pro hledání nulových bodů funkcí, má ale i důležité důsledky pro spojité funkce. Přesněji, můžeme pomocí ní dokázat řadu vlastností spojitých funkcí.

Důsledek 7.1 (O nenulové spojité funkci)**:** Buď f spojitá funkce na intervalu $J \subset D_f$ a nechť platí $f(x) \neq 0$ pro všechna $x \in J$. Potom pro všechna $x \in J$ platí buď $f(x) > 0$ nebo $f(x) < 0$.

k	Aproximace $\sqrt{2}$	Počet iterací n
1	$1{,}406\,250\,000\,000\,000\,0$	4
2	$1{,}412\,109\,375\,000\,000\,0$	8
3	$1{,}414\,306\,640\,625\,000\,0$	11
4	$1{,}414\,215\,087\,890\,625\,0$	14
5	$1{,}414\,209\,365\,844\,726\,6$	18
6	$1{,}414\,212\,942\,123\,413\,0$	21
7	$1{,}414\,213\,567\,972\,183\,2$	24
8	$1{,}414\,213\,562\,384\,247\,8$	28
9	$1{,}414\,213\,561\,685\,755\,8$	31
10	$1{,}414\,213\,562\,296\,936\,3$	34
11	$1{,}414\,213\,562\,367\,876\,9$	38
12	$1{,}414\,213\,562\,372\,651\,7$	41
13	$1{,}414\,213\,562\,373\,078\,0$	44
14	$1{,}414\,213\,562\,373\,094\,0$	48

Tabulka 7.2: Aproximace hodnoty $\sqrt{2}$ získané pomocí metody půlení intervalu (viz důkaz Věty 7.4) aplikované na funkci $f(x) = x^2 - 2$ a body $a = 0$ a $b = 3$ s absolutní přesností 10^{-k}. Výpočet byl zastaven po n iteracích. Prvních „správných" 17 cifer $\sqrt{2}$ je $1{,}414\,213\,562\,373\,095\,0$. Viz Příklad 7.6.

Důkaz. Pokud by existovalo a a b z intervalu J takové, že $f(a)$ a $f(b)$ mají různá znaménka, pak by podle Věty 7.4 existovalo c ležící někde mezi a a b a splňující $f(c) = 0$, což je spor s předpokladem nenulovosti f na J. □

Další vlastností spojitých funkcí je, že zobrazují intervaly na intervaly. To pro nespojité funkce nemusí být pravda.

Otázka 7.1: Vymyslete příklad nekonstantní funkce f a intervalu J tak, aby obraz $f(J)$ nebyl interval.

Věta 7.5 (O obrazu intervalu při spojitém zobrazení)**:** Buď f funkce spojitá na intervalu J. Potom obraz $f(J)$ intervalu J při zobrazení f je buď interval, nebo jednoprvková množina.

Důkaz. $f(J)$ je jednoprvková množina právě tehdy, když funkce f je konstantní.

Ve zbytku důkazu předpokládejme, že f není konstantní.

Ukažme, že $f(J)$ je interval. K tomu je třeba ukázat, že pro libovolné dva prvky $\alpha, \beta \in f(J)$, $\alpha \neq \beta$, leží všechna γ mezi α a β také v $f(J)$.

Jistě existují $a, b \in J$, $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$ a bez újmy na obecnosti $a < b$. Položme $g(x) := f(x) - \gamma$. Funkce g je spojitá na $\langle a, b\rangle$, $g(a) = \alpha - \gamma$ a $g(b) = \beta - \gamma$ jsou nenulová s rozdílným znaménkem. Podle Věty 7.4 existuje $c \in (a, b)$ takové, že $g(c) = 0$, tj. $f(c) = \gamma$. □

Spojitým obrazem intervalu pro nekonstantní funkci f je tedy interval. Zachovává spojitost i uzavřenost, resp. otevřenost, intervalu? Není těžké si rozmyslet, že obrazem otevřeného intervalu nemusí být opět otevřený interval[2]. Spojitým obrazem uzavřeného intervalu už ale vždy bude uzavřený interval. Platí totiž následující věta.

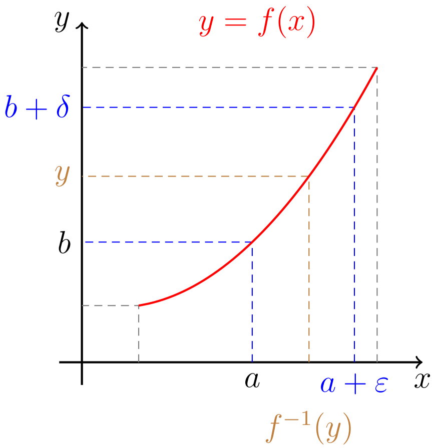
Věta 7.6 (O obrazu uzavřeného intervalu při spojitém zobrazení)**:** Buď f funkce spojitá na uzavřeném intervalu J. Potom obraz $f(J)$ intervalu J je buď jednoprvková množina, nebo uzavřený interval.

Důkaz. Podle Věty 7.5 již víme, že $f(J)$ je buď jednoprvková množina (pokud je funkce konstantní) a nebo interval (pokud je funkce nekonstantní). Ukažme nyní uzavřenost $f(J)$ pro nekonstantní f.

Označme $J = \langle a, b\rangle$. Postupujme sporem, bez újmy na obecnosti tedy předpokládejme, že obraz intervalu J při zobrazení f je třeba tvaru $(c, d\rangle$ kde $c \in \mathbb{R}$ nebo $c = -\infty$ a $d \in \mathbb{R}$. Tj. je to interval s alespoň jedním „otevřeným“ koncovým bodem. Existuje posloupnost (y_n) konvergující k c jejíž členy leží v $f(J)$. Skutečně, v případě $c \in \mathbb{R}$ můžeme volit $y_n = c + \frac{1}{n}$ od dostatečně velkého n a v případě $c = -\infty$ lze volit $y_n = -n$ opět pro dostatečně velké n. Protože $y_n \in f(J)$, existují $x_n \in J$ splňující $y_n = f(x_n)$. Posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ patří do $\langle a, b\rangle$ a je proto omezená. Podle Bolzano–Weierstrassovy věty 5.9 lze z této posloupnosti vybrat konvergentní podposloupnost $(x_{k_n})_{n=1}^{\infty}$. Existuje tedy $x \in J = \langle a, b\rangle$ splňující $\lim x_{k_n} = x$. Ze spojitosti funkce f dostáváme $c = \lim f(x_{k_n}) = f\big(\lim x_{k_n}\big) = f(x)$. Proto $c \in f(J) = (c, d\rangle$, což je spor. □

Na závěr této sekce s důsledky spojitosti ještě zformulujeme větu umožňující za jistých předpokladů odvodit spojitost inverzní funkce ke spojité funkci.

[2]Uvažte například funkci $f(x) = \sin x$ a otevřený interval $J = (0, 2\pi)$. Obrazem tohoto otevřeného intervalu je uzavřený interval $\langle -1, 1\rangle$.



Obrázek 7.5: K důkazu věty o vlastnostech inverzní funkce (Věta 7.7).

Věta 7.7 (O spojitosti inverzní funkce)**:** Buď $f\colon I \to \mathbb{R}$ ryze monotónní a spojitá funkce na intervalu I. Potom její inverzní funkce f^{-1} je také ryze monotónní a spojitá na intervalu $J := f(I)$.

Důkaz. Za uvedených předpokladů funkce f^{-1} existuje a je ryze monotónní. J je skutečně interval, jak tvrdí Věta 7.5. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že funkce f je ostře rostoucí. Ukažme, že f^{-1} je spojitá zprava v každém bodě $b \in J$, který není pravým koncovým bodem. Ozn. $a := f^{-1}(b)$, tj. $f(a) = b$.

Buď $\varepsilon > 0$. Potom pro $\delta := f(a+\varepsilon) - b$ a $y \in (b, b+\delta)$ platí

$$\begin{aligned} b <& y < b+\delta = f(a+\varepsilon) \\ a = f^{-1}(b) <& f^{-1}(y) < a+\varepsilon. \end{aligned}$$

Pro lepší orientaci je dobré nakreslit si obrázek, viz Obrázek 7.5. Tedy $f^{-1}(y) \in U_a(\varepsilon)$, $a = f^{-1}(b)$. Podobně pro spojitost zleva. □

V souvislosti s předchozí větou se hodí uvést i následující užitečné pozorování, které často využíváme později při vyšetřování průběhu funkce.

Věta 7.8 (Monotonie na krajích)**:** Uvažme funkci definovanou na intervalu $\langle a, b)$, která je spojitá v bodě a zprava a je (ostře) rostoucí (resp. klesající) na intervalu (a, b). Pak má stejný typ monotonie i na intervalu $\langle a, b)$.

Důkaz. Důkaz pro určitost uvedeme pro případ rostoucí funkce, ostatní typy monotonie se ošetří stejně.

Postupujme sporem. Máme tedy funkci, která je zprava spojitá v a, je rostoucí na intervalu (a, b), ale *není* rostoucí na intervalu $\langle a, b)$. To znamená, že existuje $c \in (a, b)$ takové, že $f(a) > f(c)$. Potom ale pro každé $x \in (a, c)$ platí $f(x) \leq f(c) < f(a)$. Odtud plyne (definice limity), že limita funkce f v bodě a zprava je nejvýše rovna $f(c)$, ale současně díky spojitost zprava je rovna $f(a)$, ovšem $f(c) < f(a)$. Tato situace nemůže nastat, získáváme spor. □

7.4 Spojitost elementárních funkcí

V této podkapitole rozebereme spojitost některých elementárních funkcí. Připomeňme, že v dřívějším textu jsme již odvodili spojitost libovolného polynomu (Příklad 7.1). Pojďme se postupně zamyslet nad ostatními elementárními funkcemi (viz dodatek 12).

Spojitost trigonometrických funkcí

Podívejme se nyní na spojitost některých trigonometrických funkcí (viz podkapitolu 12.4).

Příklad 7.7: Funkce sin a cos jsou spojité v každém bodě $a \in \mathbb{R}$.

Řešení. Připomeňme známé, v minulé podkapitole v Příkladu 6.10 vypočtené, limity

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{x \to 0} \cos x = 1.$$

Podle součtového vzorce pro funkci sin platí

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin\big((x-a)+a\big) \\ &= \sin(x-a)\cos(a) + \cos(x-a)\sin(a) \end{aligned}$$

Tudíž podle věty o limitě složené funkce (Věta 6.4) a součinu/součtu limit (Věta 6.1) platí

$$\lim_{x \to a} \sin x = 0 \cdot \cos(a) + 1 \cdot \sin a = \sin a.$$

Což ukazuje spojitost funkce sin. Spojitost funkce cos se ukáže analogicky.

Z posledního příkladu a z věty o spojitosti podílu dvou funkcí (Věta 6.1) ihned plyne, že funkce tg a cotg jsou spojité v každém bodě svého definičního oboru.

Protože teď už víme, že funkce sin, cos, tg a cotg jsou spojité na svých definičních oborech, a vhodně zúžené jsou i ryze monotónní, ihned pomocí Věty 7.7 dostáváme spojitost inverzních funkcí

$$
\begin{aligned}
\arcsin &= \left(\sin \Big|_{\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle} \right)^{-1}, \\
\arccos &= \left(\cos \Big|_{\langle 0, \pi \rangle} \right)^{-1}, \\
\operatorname{arctg} &= \left(\operatorname{tg} \Big|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} \right)^{-1}, \\
\operatorname{arccotg} &= \left(\operatorname{cotg} \Big|_{(0, \pi)} \right)^{-1}.
\end{aligned}
$$

Exponenciální funkce a logaritmus

Jak jsme už varovali v podkapitole 12.5, jednu vlastnost exponenciální funkce o základu e (exponenciály) budeme muset v tento okamžik postulovat, než tuto funkci v příštím semestru korektně zavedeme.

Navíc k „algebraickým“ vlastnostem e^x přidáváme „limitní“ vlastnost. Pro úplnost formálně vlastnosti exponenciální funkce shrneme v následující definici:

Definice 7.3 (Exponenciální funkce / *exponential function*)**:** Pod **exponenciální funkcí** máme na mysli funkci oplývající následujícími vlastnostmi:

- e^x je ostře rostoucí funkce s definičním oborem $\mathbb{R}$ a oborem hodnot $(0, +\infty)$.
- Pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí
$$\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^y \quad \text{a} \quad (\mathrm{e}^x)^y = \mathrm{e}^{xy}.$$
- Platí rovnost $\mathrm{e}^0 = 1$.
- Platí rovnost
$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1. \tag{7.1}$$

V další kapitole tohoto textu vysvětlíme význam požadavku (7.1), v podstatě zde předepisujeme požadavek na derivaci funkce e^x.

Příklad 7.8: Funkce e^x je spojitá v každém bodě $a \in \mathbb{R}$.

Řešení. Argumentace v tomto případě sleduje podobné kroky jako u trigonometrických funkcí:

- Spojitost v 0: Nejprve ukážeme rovnost $\lim\limits_{x \to 0} \mathrm{e}^x = 1$. Pro libovolné $\varepsilon > 0$ ze vztahu
$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$$
plyne existence $\delta > 0$, bez újmy na obecnosti $\delta < \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$, takového, že pro $x \in U_0(\delta) \smallsetminus \{0\}$ platí $|(\mathrm{e}^x - 1)/x - 1| < \varepsilon$ a pro tato x pak i
$$|\mathrm{e}^x - 1| = \left| \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} \right| \cdot |x| < (1 + \varepsilon) \cdot \delta < (1 + \varepsilon) \cdot \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} = \varepsilon.$$
Tedy $\lim\limits_{x \to 0} \mathrm{e}^x = 1 = \mathrm{e}^0$.

- Spojitost v $a \in \mathbb{R}$: Nyní stačí použít základní vlastnosti exponenciály, větu o limitě součinu a větu o limitě složené funkce. Pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ platí
$$\lim_{x \to a} \mathrm{e}^x = \lim_{x \to a} \mathrm{e}^{a+x-a} = \mathrm{e}^a \lim_{x \to a} \mathrm{e}^{x-a} = \mathrm{e}^a \cdot 1 = \mathrm{e}^a.$$

Pozorování 7.2: U exponenciály (tj. e^x) se ještě na chvíli zastavme a zformulujme několik s ní souvisejících pozorování.

- Exponenciální funkci o základu $a \in \mathbb{R}^+ \smallsetminus \{1\}$ jsme definovali předpisem $a^x := \mathrm{e}^{x \ln(a)}$, $x \in \mathbb{R}$. Proto nám věta o limitě složené funkce a spojitost exponenciály dává
$$\lim_{x \to b} a^x = \lim_{x \to b} \mathrm{e}^{x \ln(a)} = \mathrm{e}^{b \ln(a)} = a^b$$
a i funkce a^x je proto spojitá v každém bodě $b \in \mathbb{R}$.

- Pro limity funkce e^x v nekonečnech platí (stejně pro základ $a > 1$, opačně pro $a < 1$)
$$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty \quad \text{a} \quad \lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0.$$
K tomu je potřeba si připomenout následující fakta, stručně:

– Dle axiomatické definice e^x platí $\mathrm{e}^1 > \mathrm{e}^0 = 1$ a $\mathrm{e}^n = \mathrm{e} \cdots \mathrm{e}$ (n krát).
– Limity geometrických posloupností počítat umíme, konkrétně

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^n = +\infty \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-n} = 0.$$

– Využijeme-li navíc monotonii e^x, dostaneme dokazované tvrzení.

Příklad 7.9: Funkce ln je spojitá v každém bodě $a \in \mathbb{R}^+$.

Řešení. Již víme, že exponenciála je spojitá funkce v každém bodě svého definičního oboru. Navíc víme, že je ostře rostoucí (tedy i ryze monotónní).

Z věty O spojitosti inverzní funkce ihned plyne spojitost logaritmu ln v libovolném bodě jejího definičního oboru.

Díky spojitosti funkce ln tedy platí rovnost

$$\lim_{x\to a} \ln x = \ln a,$$

pro každé $a \in (0, +\infty)$. Navíc z vlastností exponenciály zmíněných v Pozorování 7.2 plynou vztahy

$$\lim_{x\to 0+} \ln x = -\infty \quad \text{a} \quad \lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty.$$

Analogicky lze ověřit spojitost logaritmu o základu $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, alternativně lze využít jeho vyjádření pomocí ln.

Odmocniny a absolutní hodnota

Z dřívějšího výkladu okamžitě plyne spojitost odmocnin (Příklad 5.9) a absolutní hodnoty (Příklad 5.7). Pro úplnost zde tento výsledek explicitně uveďme.

Konkrétně z Příkladu 5.9 víme, že platí vztahy

$$\lim_{x\to a} \sqrt[k]{x} = \sqrt[k]{a} \quad \text{a} \quad \lim_{x\to 0+} \sqrt[k]{x} = 0,$$

pro $a > 0$ a $k = 2, 3, \ldots$ To znamená, že $\sqrt[k]{x}$ je spojitá funkce na intervalu $\langle 0, +\infty)$.

Obdobně, Příklad 5.7 zaručuje platnost vztahu

$$\lim_{x\to a} |x| = |a|$$

pro $a \in \mathbb{R}$. Což ihned implikuje spojitost $|x|$ na $\mathbb{R}$.

7.5 Typy nespojitostí

Zamysleme se nyní jakým způsobem může spojitost funkce v bodě „selhat“. Rozlišujeme několik „úrovní“ nespojitosti.

Odstranitelná nespojitost

Mějme funkci f, která je definována na okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ vyjma bod a (tj. $a \notin D_f$), ale platí $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c \in \mathbb{R}$.

Potom se takovéto nespojitosti můžeme zbavit dodefinováním této funkce v bodě a hodnotou c, tj. nová funkce

$$g(x) := \begin{cases} f(x), & x \in D_f, \\ c, & x = a, \end{cases}$$

s definičním oborem $D_g = D_f \cup \{a\}$ je již spojitá v bodě a a funkce f je zúžením funkce g na množinu D_f, tj. $f = g|_{D_f}$. Tato funkce g je tzv. **spojité rozšíření (nebo dodefinování) funkce** f v bodě a. Někdy se také v tomto případě mluví jako o **odstranitelné nespojitosti** funkce f v bodě a.

Příklad 7.10: Typickým příkladem funkce s odstranitelnou nespojitostí je funkce

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}, \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Tato funkce není spojitá v bodě 0.

Z předchozího výkladu (Příklad 6.10) již víme, že

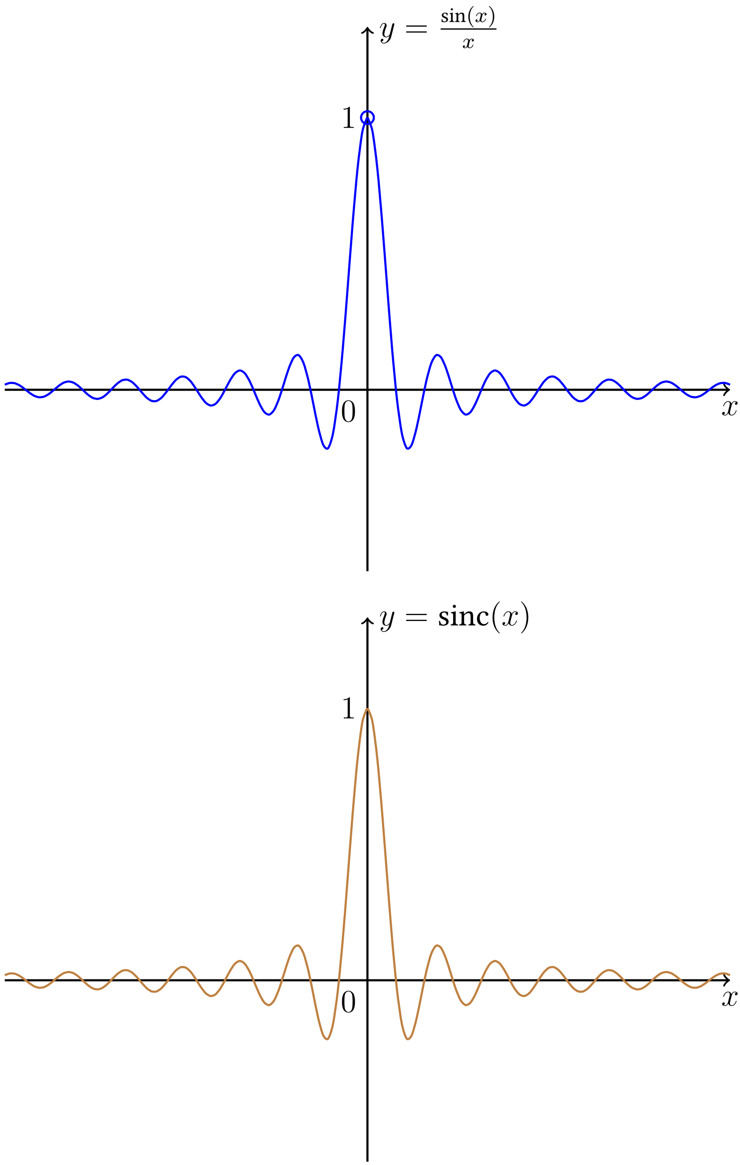
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Proto funkce

$$\operatorname{sinc}(x) := \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases} \tag{7.2}$$

je již spojitá na celém $D_{\text{sinc}} = \mathbb{R}$. Ilustrace této situace je čtenáři k dispozici na Obrázku 7.6.

Poznámka 7.5: Funkce sinc je důležitá nejen z matematického pohledu, ale nachází uplatnění i v různých inženýrských aplikacích, například ve zpracování signálu (filtry, wavelety, …).



Obrázek 7.6: Funkce sinc (viz rovnici (7.2)) jakožto spojité dodefinování funkce $\frac{\sin x}{x}$ v bodě 0 hodnotou 1

Konečný skok

Opět mějme funkci definovanou na okolí bodu a, s možnou výjimkou bodu a samotného. Nyní ovšem předpokládejme, že existují jednostranné limity v bodě a, ale

$$c_+ := \lim_{x \to a+} f(x) \neq c_- := \lim_{x \to a-} f(x).$$

Takovouto funkci již nelze spojitě dodefinovat, případně předefinovat, v bodě a. Zadáním funkční hodnoty v bodě a bychom maximálně mohli získat funkci spojitou v bodě a zprava, nebo zleva.

Na Obrázku 7.7 uvádíme příklad dvou funkcí s takovouto vlastností.

Nekonečno a neexistence limity

Dále může spojitost selhat následujícími třemi zásadními způsoby.

- Mějme opět funkci f definovanou na okolí bodu a s možnou výjimkou bodu a samotného. Funkce f má limitu (alespoň zleva nebo zprava) v bodě a rovnou $+\infty$ nebo $-\infty$. Například funkce $\frac{1}{x}$ v nule má „nekonečný skok" a funkce $\frac{1}{x^2}$ má v nule limitu $+\infty$. Ani jednu z nich nelze spojitě dodefinovat a to ani zleva, ani zprava.

- Mějme opět funkci f definovanou na okolí bodu a s možnou výjimkou bodu a samotného. Funkce f nemá limitu (alespoň zleva nebo zprava) v bodě a. Například $\sin(\frac{1}{x})$ v nule.

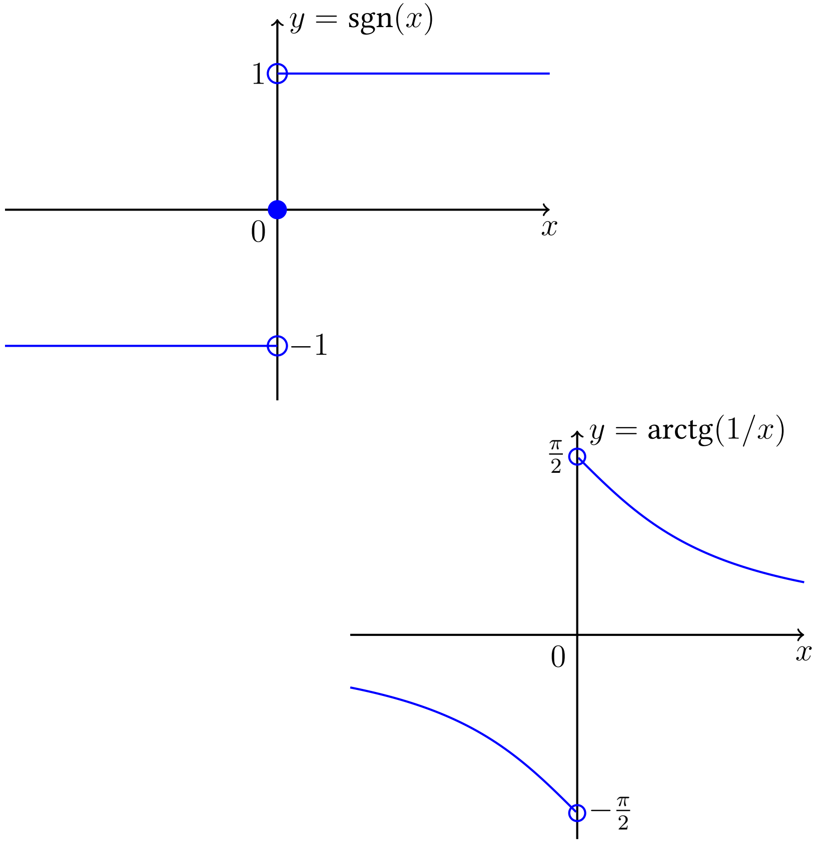
7.6 Další důležité limity a shrnutí

Na závěr této kapitoly pomocí vybudovaného aparátu odvodíme ještě dalších několik důležitých limitních vztahů, které budeme později využívat. Pro jejich důležitost je zformulujeme jako lemmata (pomocná tvrzení).

Vzhledem k inverznímu vztahu mezi exponenciálou a logaritmem jsme jistě schopni z limity (7.1) odvodit i podobné tvrzení pro logaritmus.

Lemma 7.1 (O limitě $\ln(1+x)/x$ v 0)**:** Limita funkce $\frac{\ln(1+x)}{x}$ v bodě nula je rovna jedné, tj.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$



Obrázek 7.7: Funkce sgn a $\mathrm{arctg}(1/x)$ mající neodstranitelnou nespojitost v bodě 0 s konečnými jednostrannými limitami v bodě 0 (konečný skok).

Důkaz. Nejprve zkoumaný výraz vhodně upravme,

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\ln(1+x)}{1+x-1} = \frac{1}{\frac{e^{\ln(1+x)}-1}{\ln(1+x)}}.$$

Ze spojitosti logaritmu víme, že $\lim_{x\to 0} \ln(x+1) = 0$. Věta o limitě složené funkce (Věta 6.4) a rovnice (7.1) ihned dávají kýžený výsledek. □

V předchozích částech jsme se již zabývali limitami součtů, součinů a podílů funkcí (a posloupností) a dále limitami složených funkcí. V následující podkapitole se podrobněji podíváme na výpočet limit tvaru $f(x)^{g(x)}$. Nyní začneme speciálním případem, kdy základ $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ jde k 1 a exponent $g(x) = x$ do $+\infty$, případně $-\infty$. Po prvním zamyšlení by člověka napadlo, že limita takovéto funkce bude rovna 1. Následující lemma nás ovšem vyvádí z omylu.

Lemma 7.2 (O limitě $(1 + 1/x)^x$ v nekonečnu)**:** Limita funkce $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ je rovna e v $+\infty$ i $-\infty$, tj.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e} \quad \text{a} \quad \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}.$$

Důkaz. Opět zkoumaný výraz nejprve upravme (definice a^x),

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}.$$

Díky spojitosti exponenciály stačí zkoumat limitu jejího argumentu. Pro ten však platí

$$x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}.$$

O funkci $\frac{1}{x}$ víme, že má limitu v $+\infty$ i v $-\infty$ rovnou 0. Z předchozího Lemmatu 7.1 a věty o limitě složené funkce (Věta č. 6.4) pak dostáváme

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1 \quad \text{a} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1.$$

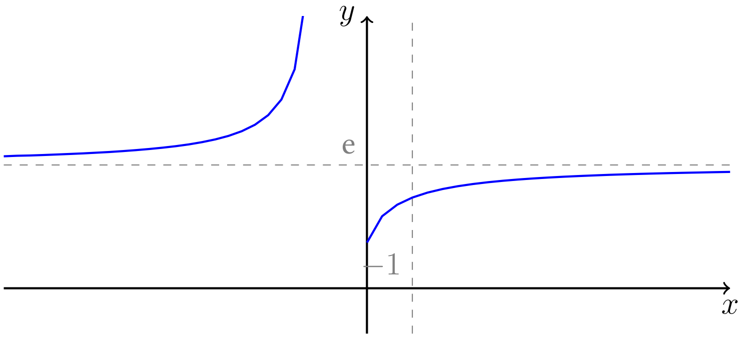
Tudíž

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e} \quad \text{a} \quad \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}.$$

Tím je důkaz obou tvrzení dokončen. □

Poznámka 7.6: Tento výsledek je často při prvním setkání překvapivý. Naivní intuice studentů je typicky takováto: základ jde k 1 a 1^∞ (ať jedničku násobím kolikrát chci) je jednička. Předchozí Lemma odhaluje tuto intuici jako chybnou.

V čem je problém? Když například uvažujeme libovolné kladné x, tak $1 + \frac{1}{x}$ je *vždy ostře větší* než 1 a se zvětšujícím se x se zmenšuje a blíží shora k 1. Naopak ale když pak toto číslo umocňujeme na (stále větší a větší) kladné x, tak se od 1 vzdalujeme (pokud $z > 1$ pak $z^2 > z$). Základ se tedy snaží dostat k jedné, ale umocňování ho od jedné vzdaluje. *Výsledek pak záleží na tom, která z těchto tendencí je silnější.* Podrobně se tomuto jevu budeme věnovat v následující podkapitole 7.7.



Obrázek 7.8: Ilustrace k Lemmatu 7.2, graf funkce $f(x) = (1 + 1/x)^x$.

Pro posloupnosti pak na základě předchozího lemmatu dostáváme následující důsledek.

Důsledek 7.2 (O limitě $(1 + 1/n)^n$)**:** Pro libovolnou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ splňující $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$ platí

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = \mathrm{e}.$$

Speciálně platí

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} = \mathrm{e}.$$

Důkaz. V důsledku Lemmatu 7.2 a Heineho věty 5.4 dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{|a_n|}\right)^{|a_n|} = \mathrm{e} \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{-|a_n|}\right)^{-|a_n|} = \mathrm{e}.$$

Vezměme nyní libovolné $\varepsilon > 0$. Z platnosti předchozích limit plyne existence $m_0 \in \mathbb{N}$ a $k_0 \in \mathbb{N}$ takových, že pro každé $n > m_0$ platí

$$\left| \left(1 + \frac{1}{|a_n|}\right)^{|a_n|} - \mathrm{e} \right| < \varepsilon$$

a pro každé $n > k_0$ platí

$$\left| \left(1 + \frac{1}{-|a_n|}\right)^{-|a_n|} - \mathrm{e} \right| < \varepsilon.$$

Položme $n_0 = \max(m_0, k_0)$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $a_n = |a_n|$ nebo $a_n = -|a_n|$. Tudíž pro každé $n > n_0$ dostáváme

$$\left| \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} - \mathrm{e} \right| < \varepsilon,$$

čímž je tvrzení dokázáno přímo z definice. □

Dalším zajímavým důsledkem je následující vyjádření exponenciální funkce.

Důsledek 7.3 (O limitě $(1 + \alpha/x)^x$ v nekonečnu)**:** Pro libovolné $\alpha \in \mathbb{R}$ lze pomocí limity vyjádřit exponenciálu následovně

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = \mathrm{e}^\alpha \quad \text{a} \quad \lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = \mathrm{e}^\alpha.$$

Důkaz. Pro $\alpha = 0$ je tvrzení triviální (limita konstantní funkce s hodnotou 1). Pro $\alpha \neq 0$ tento fakt snadno nahlédneme pomocí následující úpravy

$$\left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = e^{\alpha \cdot \frac{\ln(1+\alpha/x)}{\alpha/x}}$$

Pro x jdoucí do $+\infty$ nebo $-\infty$ již víme, že výraz na pravé straně této rovnosti konverguje k $e^{\alpha \cdot 1} = e^\alpha$. □

Na závěr této podkapitoly vypočtěme pár příkladů.

Příklad 7.11: Vypočtěte limitu funkce

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{\sin x}.$$

Řešení. Výraz nejprve upravíme,

$$\frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{\sin x} = \frac{e^{\sin 2x} - 1}{\sin 2x} \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{2x}{\sin x} - \frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x}.$$

Použijeme-li nyní větu o limitě složené funkce a známé limity, pak

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{\sin x} = 1 \cdot 1 \cdot 2 - 1 = 1.$$

Příklad 7.12: Vypočtěte limitu funkce

$$\lim_{x\to 1} (2-x)^{\frac{1}{x-1}}.$$

Řešení. Opět výraz nejprve upravme pomocí exponenciální funkce

$$(2-x)^{\frac{1}{x-1}} = \mathrm{e}^{\frac{\ln(2-x)}{x-1}} = \mathrm{e}^{-\frac{\ln(1+(1-x))}{1-x}}.$$

Funkce v argumentu exponenciály má za limitu -1 (ano, stačí použít větu o limitě složené funkce s vnější funkcí $\frac{\ln(1+x)}{x}$ a vnitřní funkcí $1-x$). Použijeme-li nyní větu o limitě složené funkce a známé limity, pak

$$\lim_{x\to 1} (2-x)^{\frac{1}{x-1}} = \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

7.7 Limity funkcí tvaru $f(x)^{g(x)}$ se speciálním přihlédnutím k limitám typu 0^0 a 1^∞

Věta o limitě součtu, součinu a podílu nám dávala nástroj na výpočet limit součtu, součinu a podílu funkcí za předpokladu, že součet, součin či podíl byl definován v $\overline{\mathbb{R}}$. Pokud limita byla například typu $+\infty - (+\infty)$, nebo $0 \cdot +\infty$, tak jsme s danou funkcí ještě museli dále zacvičit.

Nyní se podíváme jak je to s výpočty limit funkcí ve tvaru $f(x)^{g(x)}$. Hlavním výsledkem této podkapitoly bude Věta 7.9. Tato věta na první pohled může vypadat komplikovaně, protože ošetřuje několik možných situací, které mohou nastat a navíc některé vynechává (viz příklady níže v této podkapitole). I z toho důvodu je toto pěkný příklad věty, kde je důležité pochopit důkaz, protože v konkrétním příkladě je jednoduší uvedený důkaz provést, než si tuto větu pamatovat. Celé tvrzení stojí na tom, že výraz $f(x)^{g(x)}$ přepíšeme pomocí exponenciální funkce na výraz $e^{g(x)\ln f(x)}$ a poté řešíme už limitu součinu $g(x)\ln f(x)$. Pojďme nejprve zformulovat hlavní větu.

Věta 7.9 (O limitě funkcí tvaru $f(x)^{g(x)}$)**:** Uvažme funkce f a g definované na okolí bodu $a \in \overline{\mathbb{R}}$ s možnou výjimkou bodu a samotného a nechť funkce f je kladná na nějakém okolí bodu a. Předpokládejme dále, že existují limity

$$\alpha := \lim_{x\to a} f(x) \quad \text{a} \quad \beta := \lim_{x\to a} g(x).$$

Potom platí následující tři tvrzení:

1. Pokud $0 < \alpha < +\infty$ a $|\beta| < +\infty$, potom $\lim\limits_{x \to a} f(x)^{g(x)} = \alpha^{\beta}$.

2. Pokud $\alpha = 0$ a $\beta > 0$ (připouštíme i $\beta = +\infty$), potom $\lim\limits_{x \to a} f(x)^{g(x)} = 0$.

3. Pokud $\alpha = +\infty$ a $\beta \neq 0$, potom $\lim\limits_{x \to a} f(x)^{g(x)}$ existuje a je rovna 0 pokud $\beta < 0$ a $+\infty$ pokud $\beta > 0$.

Důkaz. Důkaz stojí na využití vlastností exponenciální a logaritmické funkce a spojitosti exponenciální funkce. Navíc není nijak komplikovaný, takto bychom danou limitu jednoduše i počítali.

Nejprve si povšimněme, že za uvedených předpokladů je funkce

$$h(x) = f(x)^{g(x)}$$

definovaná na okolí bodu a, s možnou výjimkou bodu a samotného, a má tedy smysl počítat její limitu v bodě a. Nyní provedeme úpravu

$$h(x) = \mathrm{e}^{g(x) \ln f(x)}$$

a budeme zkoumat limitu argumentu exponenciály v bodě a, tj. limitu

$$\lim_{x \to a} g(x) \cdot \ln f(x).$$

Postupně nyní projdeme uvedené předpoklady:

1. V tomto případě podle věty o limitě součinu platí $\lim\limits_{x \to a} g(x) \cdot \ln f(x) = \beta \cdot \ln \alpha$ (tento výraz je definovaný a patří do $\mathbb{R}$) a proto díky spojitosti exponenciální funkce máme $\lim\limits_{x \to a} f(x)^{g(x)} = \mathrm{e}^{\beta \cdot \ln \alpha} = \alpha^{\beta}$.

2. Za těchto předpokladů platí $\lim\limits_{x \to a} g(x) \cdot \ln f(x) = \beta \cdot (-\infty) = -\infty$ a proto $\lim\limits_{x \to a} f(x)^{g(x)} = 0$.

3. Nyní platí $\lim\limits_{x \to a} g(x) \cdot \ln f(x) = \beta \cdot (+\infty)$, což je $+\infty$ (resp. $-\infty$) pro kladné (resp. záporné) β. Z limit exponenciální funkce v $+\infty$ (resp. $-\infty$) pak plyne dokazované tvrzení. □

Tím jsou všechna tvrzení věty dokázána.

Ukažme si použití věty, resp. myšlenky jejího důkazu, na konkrétních příkladech.

Příklad 7.13 (Limita typu 1^∞)**:** Pokud je limita

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}$$

typu 1^∞ (tj. $\lim_a f = 1$ a $\lim_a g$ je $+\infty$ nebo $-\infty$), pak případný výsledek závisí na samotných f a g. Například (ve výpočtech využíváme znalosti známých limit odvozených v předchozí podkapitole 7.6):

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2} &= \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x\cdot\frac{\ln(1+1/x)}{1/x}} = +\infty,\\
\lim_{x\to 0}\left(1+x^3\right)^{1/x^2} &= \lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{x\cdot\frac{\ln(1+x^3)}{x^3}} = \mathrm{e}^{0\cdot 1} = 1,\\
\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{x} &= \mathrm{e}^{\alpha},\\
\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-x^2} &= \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x\cdot\frac{\ln(1+1/x)}{1/x}} = 0.
\end{aligned}$$

Všechny tyto limity jsou typu 1^∞. Jako výsledek můžeme dostat libovolný prvek množiny $\langle 0,+\infty)\cup\{+\infty\}$.

Příklad 7.14 (Limita typu 0^0)**:** Pokud je limita

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}$$

typu 0^0 (tj. $\lim_a f = 0$ a $\lim_a g = 0$), pak případný výsledek závisí na konkrétním chování funkcí f a g. Například pro libovolné reálné α máme

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(\mathrm{e}^{-x}\right)^{-\alpha/x} &= \mathrm{e}^{\alpha},\\
\lim_{x\to+\infty}\left(\mathrm{e}^{-x^2}\right)^{1/x} &= \lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x} = 0,\\
\lim_{x\to+\infty}\left(\mathrm{e}^{-x^2}\right)^{-1/x} &= \lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{x} = +\infty.
\end{aligned}$$

Z těchto příkladů vidíme, že i když je limita typu 0^0, tak výsledek může být libovolný prvek $\langle 0,+\infty)\cup\{+\infty\}$.

Na tomto místě se hodí zmínit i limitu

$$\lim_{x \to 0+} x^x = \lim_{x \to 0+} \mathrm{e}^{x \ln x} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

K jejímu výpočtu ale potřebujeme znát limitu $\lim_{x \to 0+} x \ln(x) = 0$, kterou odvodíme zanedlouho v Příkladu 9.8.

7.8 Shrnutí známých limit funkcí a posloupností

Tabulky 7.4 a 7.6 shrnují „známé" limitní vztahy, které jsme odvodili v této a předchozí kapitole. Tyto výsledky lze v příkladech v písemkách považovat za známé (pokud ovšem zadání/otázka nemíří přímo na jejich odvození).

Důležité limity	Hodnota	Parametry
$\lim\limits_{n\to\infty} c$	c	$c \in \mathbb{R}$
$\lim\limits_{n\to\infty} n^a$	$\begin{cases} +\infty & a > 0, \\ 1 & a = 0, \\ 0, & a < 0. \end{cases}$	$a \in \mathbb{R}$
$\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$	$+\infty$	
$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$	1	
$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{c}$	1	$c \in (0, +\infty)$
$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$	$+\infty$	
$\lim\limits_{n\to\infty} a^n$	$\begin{cases} 0, & \lvert a\rvert < 1, \\ 1, & a = 1, \\ +\infty, & a > 1, \\ \text{neexistuje}, & a \leq -1. \end{cases}$	$a \in \mathbb{R}$
$\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$	e	

Tabulka 7.4: Důležité limity posloupností odvozené v kapitolách 5 a 7.

Důležité limity	Hodnota	Parametry
$\lim\limits_{x\to a} c$	c	$c \in \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$
$\lim\limits_{x\to a} x$	a	$a \in \overline{\mathbb{R}}$
$\lim\limits_{x\to a\pm} \dfrac{1}{(x-a)^k}$	$\begin{cases} \pm\infty, & k \text{ liché}, \\ +\infty, & k \text{ sudé}. \end{cases}$	$a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$
$\lim\limits_{x\to a} \lvert x\rvert$	$\lvert a\rvert$	$a \in \overline{\mathbb{R}}$, kde $\lvert+\infty\rvert = \lvert-\infty\rvert = +\infty$
$\lim\limits_{x\to 0\pm} \operatorname{sgn}(x)$	± 1	
$\lim\limits_{x\to a} \sqrt[k]{x}$	$\sqrt[k]{a}$	liché $k \in \mathbb{N}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$
$\lim\limits_{x\to a} \sqrt[k]{x}$	$\sqrt[k]{a}$	sudé $k \in \mathbb{N}$, $a \in \langle 0, +\infty) \cup \{+\infty\}$
$\lim\limits_{x\to a} P(x)$	$P(a)$	$a \in \mathbb{R}$, P polynom
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$	1	
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$	1	
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$	1	
$\lim\limits_{x\to a} \sin(x)$	$\sin(a)$	$a \in \mathbb{R}$
$\lim\limits_{x\to a} \cos(x)$	$\cos(a)$	$a \in \mathbb{R}$
$\lim\limits_{x\to a} \mathrm{e}^x$	e^a	$a \in \mathbb{R}$
$\lim\limits_{x\to +\infty} \mathrm{e}^x$	$+\infty$	
$\lim\limits_{x\to -\infty} \mathrm{e}^x$	0	
$\lim\limits_{x\to a} \ln(x)$	$\ln(a)$	$a \in (0, +\infty)$

8 Derivace

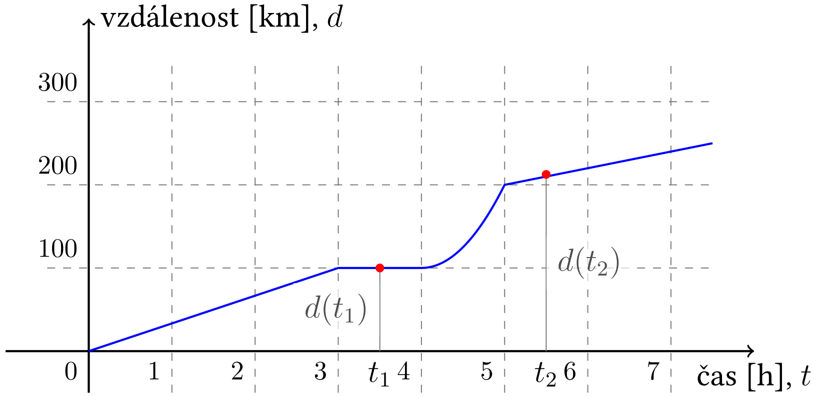
8.1 Rychlost a hledání tečny

Začněme nejprve s jednoduchým motivačním příkladem s fyzikálním nádechem. Jaký je vztah mezi polohou a rychlostí tělesa? Uvažme případ tělesa pohybujícího se podle Obrázku 8.1.

Graf na Obrázku 8.1 zachycuje vzdálenost d uraženou tělesem (např. vozidlem) v závislosti na čase. Poloha d tělesa je tedy *funkcí* času t. Průměrná rychlost tělesa mezi okamžiky $t_1 < t_2$ je dána podílem

$$\frac{d(t_2) - d(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Čím jsou t_1 a t_2 navzájem blíže, tím lépe průměrná rychlost odpovídá okamžité



Obrázek 8.1: Graf uražené vzdálenosti v závislosti na čase.

rychlosti vozidla. V čase t_1 se tedy těleso pohybuje okamžitou rychlostí

$$\lim_{t_2 \to t_1} \frac{d(t_2) - d(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Nad tímto problémem se můžeme zamýšlet i geometricky. Díváme-li se na graf uražené vzdálenosti, pak „sklon“ tohoto grafu v daném bodě udává okamžitou rychlost. Podrobněji tento pohled rozebereme na Obrázku 8.2, hlavní otázkou je, jak určit „sklon“ grafu v daném bodě. Zde vstoupí do hry pojem tečny ke grafu funkce. Na obrázku 8.2 uvádíme grafickou reprezentaci konstrukce tečny limitním procesem pomocí sečen. Vidíme, že výše uvedený podíl lze interpretovat jako tangens úhlu svíraného tečnou grafu funkce a osou x (směrnice).

8.2 Derivace funkce

V souladu s tím, co bylo uvedeno na začátku této kapitoly, nyní definujeme:

Definice 8.1 (Derivace funkce v bodě)**:** Nechť f je funkce definovaná na okolí bodu $a \in \mathbb{R}$. Pokud existuje limita

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{8.1}$$

nazveme její hodnotu **derivací funkce** f **v bodě** a a označíme $f'(a)$. Pokud je tato limita konečná (tj. $f'(a) \in \mathbb{R}$) řekneme, že funkce f je **diferencovatelná v bodě** a.

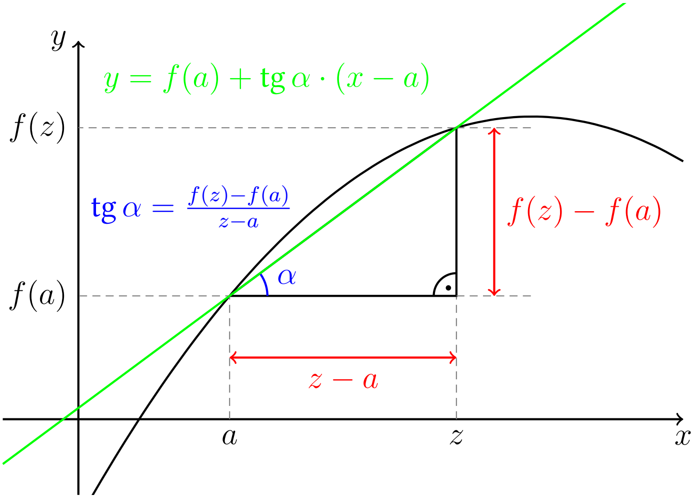
Derivaci funkce f se můžeme pokoušet počítat ve všech bodech D_f. Získáváme tak novou funkci, derivaci funkce[1]:

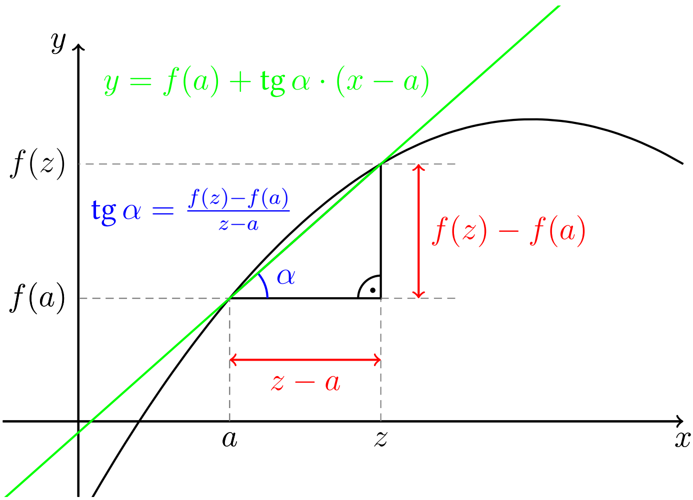
Definice 8.2 (Derivace)**:** Buď f funkce s definičním oborem D_f. Nechť M označuje množinu všech $a \in D_f$ takových, že f má konečnou derivaci v bodě a, tj. $f'(a) \in \mathbb{R}$. **Derivací funkce** f nazýváme funkci s definičním oborem M, která každému $x \in M$ přiřadí $f'(x)$. Tuto funkci značíme symbolem f'.

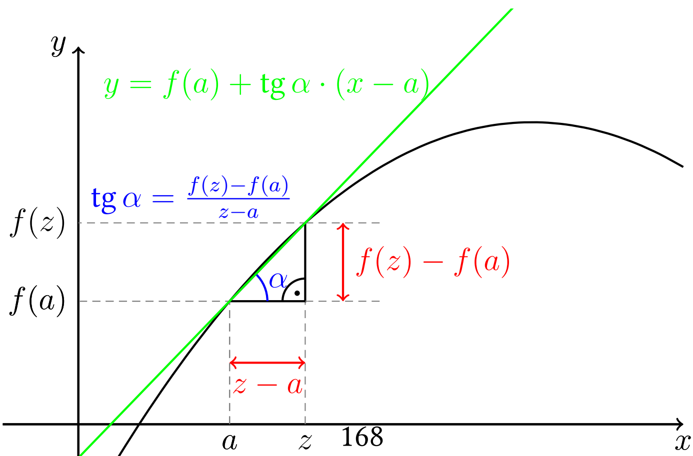
Poznámka 8.1: Derivace funkce f v bodě a se z různých historických důvodů značí i následujícími ekvivalentními způsoby

$$f'(a), \quad \dot{f}(a), \quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a).$$

[1]Všimněte si rozdílu mezi definicemi 8.1 a 8.2, tedy mezi významem $f\prime$ a $f\prime(a)$.


y
$y = f(a) + \operatorname{tg}\alpha \cdot (x-a)$
$f(z)$
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(z)-f(a)}{z-a}$
$f(z) - f(a)$
α
$f(a)$
$z-a$
a
z
x


y
$y = f(a) + \operatorname{tg}\alpha \cdot (x-a)$
$f(z)$
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(z)-f(a)}{z-a}$
$f(z) - f(a)$
α
$f(a)$
$z-a$
a
z
x


y
$y = f(a) + \operatorname{tg}\alpha \cdot (x-a)$
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(z)-f(a)}{z-a}$
$f(z)$
$f(z) - f(a)$
α
$f(a)$
$z-a$
a
z
x

V tomto textu se budeme důrazně držet značení derivace pomocí čárky v horním indexu.

Všimněte si, že limitu v definici derivace (8.1) lze ekvivalentně přepsat do tvaru

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Tento tvar je často výhodný pro výpočty. Bod a se vyskytuje pouze v předpisu funkce jejíž limitu počítáme.

Díky derivaci nyní můžeme zkonstruovat tečnu udáním její rovnice. Rozlišujeme dva kvalitativně rozdílné případy.

Definice 8.3 (Tečna)**:** Mějme funkci f a bod $a \in D_f$ a nechť existuje $f'(a)$. **Tečnou funkce f v bodě** a nazýváme

- přímku s rovnicí $x = a$ je-li funkce f spojitá v bodě a a $f'(a) = +\infty$ nebo $f'(a) = -\infty$.
- přímku s rovnicí $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ je-li $f'(a) \in \mathbb{R}$ (tj. je-li f diferencovatelná v bodě a).

V prvním případě svírá tečna grafu funkce f v bodě a úhel $\frac{\pi}{2}$ s osou x, v druhém případě svírá s osou x úhel α splňující $\operatorname{tg}\alpha = f'(a)$.

Na Obrázku 8.3 je modře znázorněn graf funkce $f(x) = \sqrt[3]{x-1}+1$, $D_f = \mathbb{R}$. Pro její derivaci v bodě 2 platí

$$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+h}-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1+h-1}{h\cdot\left((1+h)^{\frac{2}{3}}+(1+h)^{\frac{1}{3}}+1\right)} = \frac{1}{3}.$$

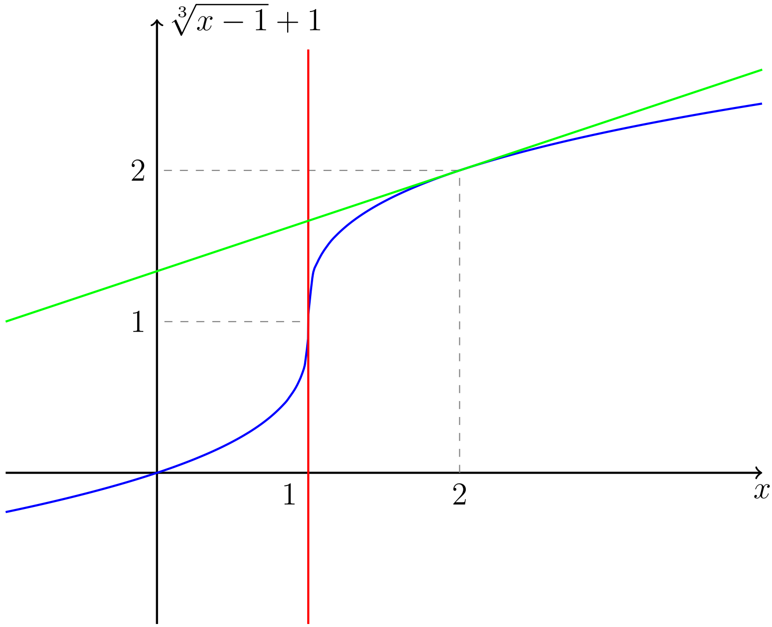
Tečnou grafu funkce f v bodě 2 je proto přímka

$$y = f(2) + f'(2)(x-2) = 2 + \frac{1}{3}(x-2),$$

na Obrázku 8.3 vynesena zeleně. Pro derivaci v bodě 1 platí

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h}-0}{h} = \lim_{h\to 0} h^{-\frac{2}{3}} = +\infty.$$

Protože funkce f je v bodě 1 spojitá, je tečnou v bodě 1 (červená) přímka $x = 1$.



Obrázek 8.3: Dva typy tečny grafu funkce.

Poznámka 8.2: Zdůrazněme, že požadavek spojitosti v prvním bodu Definice 8.3 je podstatný. Například funkce $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ má v bodě 0 nekonečnou derivaci,

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sgn}(x) - \operatorname{sgn}(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|} = +\infty,$$

v nule není spojitá a o tečně v tomto bodě z geometrického pohledu příliš nemá smysl mluvit (viz Obrázek 7.7).

Výpočet derivace jednoduchých funkcí

Nyní vypočtěme derivace některých funkcí přímo pomocí definice derivace (Definice 8.1). Uvažme nejprve funkci ze všech funkcí nejjednodušší.

Příklad 8.1: Derivace konstantní funkce definované na celém $\mathbb{R}$ je rovna 0 v každém bodě.

Řešení. Je-li $f(x) = c \in \mathbb{R}$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, pak

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{c - c}{x - a} = \lim_{x\to a} 0 = 0$$

pro každé $a \in \mathbb{R}$.

Tento výsledek by nás neměl nijak překvapovat. Grafem konstantní funkce je přímka rovnoběžná s osou x. Tečna tohoto grafu v libovolném bodě je pak opět tato přímka, jež je rovnoběžná s osou x a svírá proto s osou x úhel 0, $\operatorname{tg} 0 = 0$.

Přistupme nyní k odvození vztahů pro derivace dalších elementárních funkcí.

Příklad 8.2: Derivace funkce e^x je opět funkce e^x. Tedy $\left(\mathrm{e}^x\right)' = \mathrm{e}^x$.

Řešení. V minulé kapitole jsme postulovali[2] vztah (Definice 7.3)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1.$$

Pro libovolné $a \in \mathbb{R}$ podle věty o limitě složené funkce a o limitě součinu funkcí platí

$$\lim_{x\to a} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^a}{x - a} = \lim_{x\to a} \mathrm{e}^a \cdot \frac{\mathrm{e}^{x-a} - 1}{x - a} = \mathrm{e}^a \cdot 1 = \mathrm{e}^a.$$

Pro derivaci funkce $f(x) = \mathrm{e}^x$ v bodě $a \in \mathbb{R}$ tedy skutečně platí $f'(a) = f(a)$.

Příklad 8.3: Derivace funkce $\ln(x)$ je funkce $\frac{1}{x}$, kde $x > 0$.

Řešení. Tedy pro každé $a > 0$ máme dokázat rovnost $\ln'(a) = \frac{1}{a}$. V minulé kapitole jsme odvodili vztah (Lemma 7.1)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1.$$

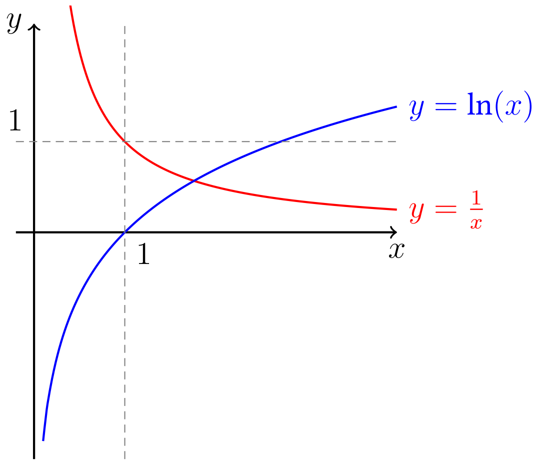
Podobně jako v předchozím příkladu nyní pro kladné a platí

$$\lim_{x\to a} \frac{\ln(x) - \ln(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{\ln \frac{x}{a}}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{a} - 1\right)}{a\left(\frac{x}{a} - 1\right)} = \frac{1}{a} \cdot 1 = \frac{1}{a}.$$

Pro derivaci funkce $f(x) = \ln x$ v bodě $a > 0$ platí $f'(a) = \frac{1}{a}$.

Pro grafickou představu o funkci a její derivaci uvádíme Obrázek 8.4. V závislosti na bodu na ose x si všimněte vztahu mezi sklonem modré křivky (logaritmus $\ln(x)$) a hodnotou červené křivky ($1/x$)!

[2] Sloveso postulovat má význam slovesa požadovat, či stanovit.



Obrázek 8.4: Grafy funkcí $f(x) = \ln(x)$ a $g(x) = \frac{1}{x}$ pro $x > 0$.

Poznámka 8.3: Všimněte si, že funkce $\ln x$ je definovaná na množině $(0, +\infty)$ a v každém bodě x jejího definičního oboru je její derivace rovna $\frac{1}{x}$. Funkce $\frac{1}{x}$ je ale definována pro všechna nenulová x.

Označíme-li $f(x) = \ln|x|$, s definičním oborem $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, pak v každém bodě D_f platí $f'(x) = \frac{1}{x}$. Pro kladná x jsme to již ověřili. Pro záporná x není těžké nahlédnout, že stále platí

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{\ln|x+h| - \ln|x|}{h} &= -\lim_{h\to 0} \frac{\ln(-x-h) - \ln(-x)}{-h} = \\ &= -\lim_{t\to 0} \frac{\ln(-x+t) - \ln(-x)}{t} = -\frac{1}{-x} = \frac{1}{x}.\end{aligned}$$

Příklad 8.4: Pro kladné přirozené $n \in \mathbb{N}$ je derivací funkce x^n funkce nx^{n-1}.

Řešení. Nejprve vhodně upravme zkoumaný výraz,

$$\begin{aligned}\frac{x^n - a^n}{x-a} &= \frac{1}{x-a} \cdot (x-a)\big(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1}\big) \\ &= \underbrace{x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1}}_{n \text{ členů}}.\end{aligned}$$

Proto

$$\lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x-a} = \lim_{x\to a} x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1} = na^{n-1}.$$

Příklad 8.5: Speciálně pak například platí

$$\left(x^2\right)' = 2x, \quad \text{nebo} \quad \left(x^{22}\right)' = 22x^{21}.$$

Příklad 8.6: Derivace funkce $\sin x$ je funkce $\cos x$ a derivace funkce $\cos x$ je funkce $-\sin x$.

Řešení. Pomocí součtového vzorce pro sin dostáváme

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{\sin(x)-\sin(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a}\frac{\sin(x-a+a)-\sin(a)}{x-a} = \\ &= \lim_{x\to a}\frac{\sin(x-a)\cos(a)+\cos(x-a)\sin(a)-\sin(a)}{x-a} = \\ &= \cos(a)\lim_{x\to a}\frac{\sin(x-a)}{x-a} + \sin(a)\lim_{x\to a}\frac{\cos(x-a)-1}{x-a} = \\ &= \cos(a)\cdot 1 + \sin(a)\cdot 0 = \cos(a).\end{aligned}$$

Využili jsme znalosti již spočtených limit a věty o limitě složené funkce. Navíc

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos^2 h - 1}{h}\cdot\frac{1}{\cos h + 1} = \\ &= -\lim_{h\to 0}\frac{\sin^2 h}{h^2}\cdot\frac{h}{\cos h + 1} = -1\cdot\frac{0}{1+1} = 0.\end{aligned}$$

Podobným způsobem můžeme odvodit (proveďte!)

$$\lim_{x\to a}\frac{\cos(x)-\cos(a)}{x-a} = -\sin(a),$$

pro každé $a \in \mathbb{R}$.

8.3 Vztah diferencovatelnosti a spojitosti

Již jsme zavedli dvě lokální vlastnosti funkcí. Máme-li zadánu funkci f a bod a v jejím definičním oboru, můžeme zkoumat spojitost funkce f v bodě a a diferencovatelnost funkce f v bodě a, resp. existenci derivace funkce f v bodě a. Jak spolu všechny tyto pojmy souvisí? Průzkum začněme následující větou.

Věta 8.1 (O vztahu diferencovatelnosti a spojitosti)**:** Je-li f funkce diferencovatelná v bodě a, pak je spojitá v bodě a. Tj. platí implikace

$$f'(a) \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Důkaz. Elementární úpravou a použitím věty o limitě součtu a součinu

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) + f(a) \right) =$$
$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \to a} (x - a) + f(a) = f'(a) \cdot 0 + f(a) = f(a).$$

Tedy $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Poznamenejme, že „diferencovatelnost“ znamená $f'(a) \in \mathbb{R}$ a výraz na konci výpočtu proto má za uvedených předpokladů smysl. □

Předchozí věta je pouze implikace jedním směrem. Obrácené tvrzení neplatí. Přesněji, ze spojitosti funkce f v bodě a neplyne její diferencovatelnost v bodě a. Jako příklad lze uvážit funkci $f(x) = |x|$ a bod $a = 0$. Skutečně, protože

$$\lim_{h \to 0+} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0+} \operatorname{sgn}(h) = +1,$$
$$\lim_{h \to 0-} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0-} \operatorname{sgn}(h) = -1$$

oboustranná limita (tedy derivace funkce f v bodě 0, $f'(0)$)

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h}$$

neexistuje. Funkce f je však v bodě 0 spojitá, jak snadno nahlédneme vypočtením její limity v bodě 0. Geometricky by mělo být zřejmé, v čem je problém. Představte si graf absolutní hodnoty a podívejte se co se děje v bodě 0, nachází se zde ostrý „zlom“, kde pojem tečny nemá dobrý smysl.

Poznámka 8.4: Dokonce existují funkce *spojité* na celém $\mathbb{R}$ *nemající derivaci* ani v jednom bodě. Předběhneme-li do témat předmětu BI-MA2, pak příkladem takovéto spojité funkce nemající derivaci ani v jednom bodě je funkce

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{10^n \cdot x\}}{10^n},$$

kde $\{x\}$ značí vzdálenost reálného čísla x od nejbližšího celého čísla. Protože $0 \leq \{x\} < 1$ konverguje řada absolutně pro každé x. Definičním oborem funkce f je proto celá reálná osa $D_f = \mathbb{R}$. Ukázat spojitost a vyvrátit diferencovatelnost je však už složitější. Tato poznámka je hodně na okraj BI-MA1.

Pokud má funkce v daném bodě nekonečnou derivaci, nemusí v něm být spojitá. Požadavek *diferencovatelnosti* ve Větě 8.1 je podstatný. Například o funkci $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ víme, že není spojitá v bodě $a = 0$, protože obě jednostranné limity v tomto bodě jsou navzájem různé. V bodě $a = 0$ ale *má tato funkce derivaci* a její hodnota je

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sgn} x - \operatorname{sgn} 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|} = +\infty.$$

Otázka 8.1: Má funkce f definovaná po částech předpisy $f(0) = 0$ a $f(x) = -1/x$ pro $x \neq 0$ derivaci v bodě 0? Jaká je její případná hodnota? Jak by to bylo s funkcí $g(x) = 1/x$?

8.4 Derivace součtu, součinu a podílu

Přistupme nyní k problému výpočtu derivace za předpokladu znalosti derivací funkcí, z kterých je derivovaná funkce „složena“. Nejprve opět prozkoumáme algebraické operace sčítání, násobení a dělení. V další podkapitole se podíváme na skutečné složení. Opět se jedná o aplikaci vět o limitách funkcí probraných v předchozí části textu.

Věta 8.2 (Derivace součtu, součinu a podílu)**:** Nechť funkce f a g jsou diferencovatelné v bodě a. Potom platí

- $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,
- $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$,
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$, pokud $g(a) \neq 0$.

Pravidlo pro derivaci součinu se někdy též nazývá **Leibnizovo pravidlo** (Gottfried Wilhelm von Leibniz, německý matematik a filozof, 1646 – 1716). Platí tedy například

$$(\sin(x)\cos(x))' = \cos(x)\cos(x) - \sin(x)\sin(x) = \cos(2x),$$
$$(x\sin(x))' = 1\cdot\sin(x) + x\cdot\cos(x).$$

Důkaz pro součet a součin. Ukažme si, jak dokázat pravidla pro derivaci součtu a součinu funkcí. Předpokládejme, že funkce f a g jsou diferencovatelné v bodě a. Potom

$$\begin{aligned}
(f+g)'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)+g(x)-f(a)-g(a)}{x-a} = \\
&= \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right) = f'(a)+g'(a),\\
(f\cdot g)'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a} = \\
&= \lim_{x\to a}\frac{f(x)(g(x)-g(a))+g(a)(f(x)-f(a))}{x-a} = \\
&= f(a)\cdot g'(a)+g(a)\cdot f'(a).
\end{aligned}$$

Zde jsme použili Větu 7.2 o limitě součtu a součinu (výrazy jsou díky diferencovatelnosti definovány) a navíc jsme použili spojitost f a g, která, jak víme z Věty 8.1, plyne z diferencovatelnosti. $\square$

Důkaz vzorečku pro podíl se provede stejným způsobem. Ukažme si nyní použití věty č. 8.2 na několika důležitých příkladech.

Příklad 8.7: Pro derivace funkcí tg a cotg platí

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}'(x) &= \frac{1}{\cos^2(x)}, \quad x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\},\\
\operatorname{cotg}'(x) &= -\frac{1}{\sin^2(x)}, \quad x\in\mathbb{R}\setminus\left\{k\pi\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}.
\end{aligned}$$

Pomocí pravidla pro derivaci podílu z Věty 8.2 dostáváme vztahy

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}'(x) &= \left(\frac{\sin}{\cos}\right)'(x) = \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)},\\
\operatorname{cotg}'(x) &= \left(\frac{\cos}{\sin}\right)'(x) = \frac{-\sin^2(x)-\cos^2(x)}{\sin^2(x)} = -\frac{1}{\sin^2(x)},
\end{aligned}$$

platné na příslušných definičních oborech.

Pozorování 8.1: Multiplikativní konstantu lze při derivování vytknout. Přesněji, pro funkci f diferencovatelnou v bodě a a konstantu c platí

$$(c \cdot f)'(a) = c \cdot f'(a).$$

Skutečně, pro konstantní funkci $g(x) = c$ z bodu o derivaci součinu ve Větě 8.2 plyne

$$(c \cdot f)'(a) = (g \cdot f)'(a) = g'(a)f(a) + g(a)f'(a) = 0 \cdot f(a) + c \cdot f'(a) = c \cdot f'(a),$$

protože derivace konstantní funkce je rovna nule.

Poznámka 8.5: Z Věty 8.2 (bod o derivaci součtu) a Pozorování 8.1 vlastně plyne, že pro dvě funkce f a g diferencovatelné v bodě a a konstantu c platí

$$(f + c \cdot g)'(a) = f'(a) + c \cdot g'(a).$$

Z tohoto úhlu pohledu lze o derivaci mluvit jako o lineárním zobrazení ve smyslu BI-LA2.

Příklad 8.8 (Parabolické zrcadlo)**:** V tomto příkladu si ukážeme, jak funguje parabolické zrcadlo/anténa, či v opačném smyslu parabolický světlomet.

Pro jednoduchost si představme parabolu $y = \alpha x^2$, $\alpha > 0$ a paprsek rovnoběžný s osou y přicházející z kladného směru osy y. Tento paprsek dopadá na parabolu v bodě o x-ové souřadnici $\beta > 0$ (parametr úlohy), odrazí se, a nás zajímá souřadnice jeho průsečíku s osou y. Chceme ukázat, že tento průsečík ve skutečnosti *nezávisí* na hodnotě β. Tj. všechny takovéto paprsky přicházející ze směru rovnoběžného s osou symetrie paraboly se soustředí v jejím ohnisku. Tato situace je graficky znázorněna na Obrázku 8.5.

Položme $f(x) = \alpha x^2$. Derivací této funkce je $f'(x) = 2\alpha x$. Tečna této funkce v bodě β má rovnici

$$y = 2\alpha\beta(x - \beta) + \alpha\beta^2, \quad \text{resp.} \quad 2\alpha\beta x - y - \alpha\beta^2 = 0$$

a má proto normálový vektor $\mathbf{u} = (-2\alpha\beta, 1)$ (míří doleva nahoru) a směrový vektor $\mathbf{v} = (1, 2\alpha\beta)$ (míří doprava nahoru), viz Obrázek 8.5.

Z vektorů $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ snadno nakombinujeme směrový vektor dopadajícího paprsku

$$\mathbf{s}_1 = 1 \cdot \mathbf{u} + 2\alpha\beta \cdot \mathbf{v} = (0, 1 + 4\alpha^2\beta^2).$$

Tento vektor $\mathbf{s}_1$ má tak vzhledem k bázi $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ souřadnice $(1, 2\alpha\beta)$.

Paprsek se od paraboly odrazí podle známého zákona o úhlu dopadu a odrazu vzhledem *k tečně v bodě dopadu*. Ekvivalentně řečeno, směrový vektor přímky reprezentující paprsek před a po odrazu získáme zrcadlením vůči přímce se směrovým vektorem $\mathbf{u}$ procházející bodem dopadu. K tomu stačí využít vyjádření směrového vektoru v bázi $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, kde uvedené zrcadlení zachová první souřadnici a změní znaménko druhé souřadnice. Tj. odražený paprsek má směrový vektor

$$\mathbf{s}_2 = 1 \cdot \mathbf{u} - 2\alpha\beta \cdot \mathbf{v} = (-4\alpha\beta, 1 - 4\alpha^2\beta^2).$$

Vzhledem k tomu, že odražený paprsek také prochází bodem paraboly $(\beta, \alpha\beta^2)$, je jemu odpovídající přímka dána rovnicí

$$(1 - 4\alpha^2\beta^2)x + 4\alpha\beta y = (1 - 4\alpha^2\beta^2)\beta + 4\alpha^2\beta^3 = \beta.$$

Souřadnice průsečíku této přímky a osou y určíme konečně tak, že dosadíme za x nulu a dopočteme souřadnici y, tedy

$$4\alpha\beta y = \beta \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{4\alpha}.$$

Vskutku vidíme, že ať už paprsek dopadal s jakoukoliv hodnotou β, tak tato souřadnice na β nezávisí. Všechny paprsky se protnou v ohnisku, tedy bodu o souřadnicích $(0, 1/4\alpha)$.

8.5 Derivace složené funkce

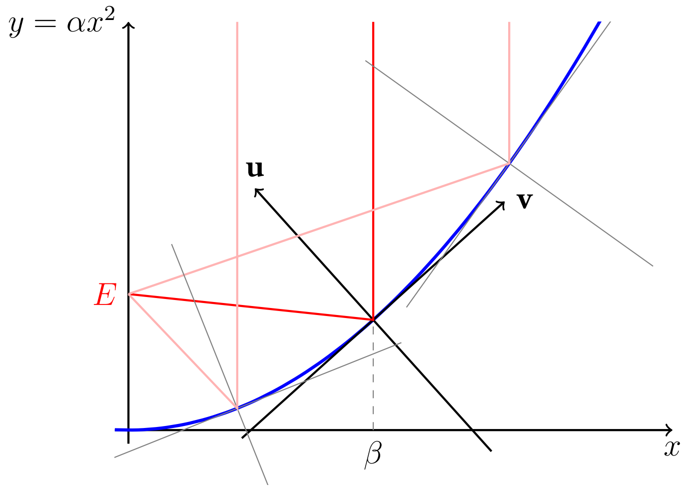
Nyní tedy umíme derivovat součty, součiny a podíly funkcí, jejichž derivace již známe. Je možné derivovat i složené funkce, s kterými často přicházíme do styku? Odpověď na tuto otázku je kladná.

Věta 8.3 (Derivace složené funkce)**:** Nechť g je funkce diferencovatelná v bodě a, f je diferencovatelná v bodě $g(a)$. Potom funkce $f \circ g$ je diferencovatelná v bodě a a platí

$$(f \circ g)'(a) = f'\big(g(a)\big) \cdot g'(a).$$

Důkaz. Důkaz je založen na úpravě

$$\frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a} = \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)} \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a},$$



Obrázek 8.5: Parabolické zrcadlo: všechny paprsky přicházející rovnoběžně s osou y ze shora se od paraboly $y = \alpha x^2$ odráží do ohniska $E = (0, 1/4\alpha)$. Viz Příklad 8.8.

platné pro každé $x \neq a$ pro které navíc $g(x) \neq g(a)$ a větě o limitě složené funkce. Funkce f je diferencovatelná v bodě $g(a)$ a proto je jistě i definována na okolí tohoto bodu, dejme tomu $U_{g(a)}$. Definujme funkci

$$h(x) := \begin{cases} \frac{f(x)-f(g(a))}{x-g(a)}, & x \in U_{g(a)} \setminus \{g(a)\}, \\ f'(g(a)), & x = g(a). \end{cases}$$

Tato funkce je definována na $U_{g(a)}$, podle předpokladů pro ni platí

$$\lim_{x \to g(a)} h(x) = f'(g(a))$$

a je proto spojitá v bodě $g(a)$. Díky spojitosti funkce g v bodě a nyní platí rovnost

$$\frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a} = h(g(x)) \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a},$$

pro všechna $x \neq a$ z nějakého okolí bodu a (speciálně i ve tvaru $0 = 0$ pro ta, pro která případně platí $g(x) = g(a)$). Podle věty o limitě složené funkce je limita funkce $h(g(x))$ v bodě a rovna $f'(g(a))$. Skutečně, g v bodě a má za limitu $g(a)$, h v bodě $g(a)$ má za limitu $f'(g(a))$ a třetí předpoklad této věty je splněn díky spojitosti

h v bodě $g(a)$. Konečně podle věty o limitě součinu (Věta 6.1) z poslední rovnice dostaneme

$$\lim_{x\to a}\frac{f(g(x))-f(g(a))}{x-a}=\lim_{x\to a}h(g(x))\cdot\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=f'(g(a))\cdot g'(a).$$

Tím je důkaz dokončen. □

Příklad 8.9: Platí tedy například:

$$\left(e^{x^2}\right)'=e^{x^2}\cdot 2x,\qquad \big(\sin\big(\cos(x)\big)\big)'=\cos\big(\cos(x)\big)\cdot\big(-\sin(x)\big).$$

Skutečně, v prvním příkladě je vnější funkcí $f(x)=e^x$ a vnitřní funkcí $g(x)=x^2$. Pak totiž

$$(f\circ g)(x)=f\big(g(x)\big)=e^{g(x)}=e^{x^2}.$$

A podle věty o derivaci složené funkce

$$(f\circ g)'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)=e^{x^2}\cdot 2x.$$

Podobně lze postupovat i v druhém příkladě.

Příklad 8.10: Derivace funkce $h(x)=x^\alpha$, $x>0$ a $\alpha\in\mathbb{R}$, je opět $h'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$.

Řešení. Víme, že pro kladné $x>0$ platí $x^\alpha=e^{\alpha\ln x}$. Označme $f(x)=e^x$ vnější funkci a $g(x)=\alpha\ln(x)$ vnitřní funkcí, tedy $x^\alpha=f(g(x))$. Potom podle věty o derivaci složené funkce máme

$$(f\circ g)'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)=e^{\alpha\ln x}\cdot\frac{\alpha}{x}=x^\alpha\cdot\frac{\alpha}{x}=\alpha x^{\alpha-1},\qquad x>0.$$

Příklad 8.11: Lichá odmocnina, tedy funkce $f(x)=\sqrt[2k+1]{x}$ pro $k\in\mathbb{N}$, je definována na celém $\mathbb{R}$ a pro její derivaci platí $f'(x)=\frac{1}{2k+1}\frac{1}{\sqrt[2k+1]{x^{2k}}}$ pro všechna nenulová x. V bodě 0 má tato funkce derivaci rovnou $+\infty$.

Řešení. Využijeme výsledku předchozího Příkladu 8.10. Pro kladná x platí $f(x)=x^{\frac{1}{2k+1}}$ a proto už víme, že

$$f'(x)=\frac{1}{2k+1}x^{\frac{1}{2k+1}-1}=\frac{1}{2k+1}x^{\frac{-2k}{2k+1}}=\frac{1}{2k+1}\frac{1}{\sqrt[2k+1]{x^{2k}}}.$$

Pro záporná x platí $f(x) = -\sqrt[2k+1]{-x}$. Při derivování proto lze nyní použít již odvozený výsledek a Větu o derivaci složené funkce (Věta 8.3). Dostáváme v tomto případě

$$f'(x) = (-1) \cdot \frac{1}{2k+1} \frac{1}{\sqrt[2k+1]{(-x)^{2k}}} \cdot (-1) = \frac{1}{2k+1} \frac{1}{\sqrt[2k+1]{x^{2k}}},$$

čili stejný výraz jako v případě kladných x.

Konečně v bodě 0 pro derivaci této funkce platí (využíváme známou limitu $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{2k}} = +\infty$, pro $k \in \mathbb{N}$)

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[2k+1]{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \sqrt[2k+1]{\frac{1}{x^{2k}}} = \sqrt[2k+1]{+\infty} = +\infty.$$

Příklad 8.12: Derivace funkce $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, kde $a > 0$ je $f'(x) = a^x \ln a$.

Řešení. Platí $h(x) = e^{x \ln a}$. Označme vnější funkci $f(x) = e^x$ a vnitřní funkci $g(x) = x \ln a$. Potom podle věty o derivaci složené funkce platí

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \ln a.$$

8.6 Derivace inverzní funkce

V poslední části této podkapitoly budeme hledat vzorečky pro derivace zbývajících elementárních funkcí (viz dodatek 12). K nim patří i jejich inverzní funkce. Nyní proto musíme podrobněji prozkoumat vlastnosti inverzních funkcí a ukázat, jak hledat jejich derivace.

Znění následující věty může na první čtení znít komplikovaně. Graf funkce a její inverzní funkce jsou osově symetrické vůči ose prvního kvadrantu. Zkuste si rozmyslet, co se stane se směrnicí tečny grafu funkce, pokud ji osově překlopíme vzhledem k ose prvního kvadrantu? To vlastně říká následující věta.

Věta 8.4 (Derivace inverzní funkce)**:** Buďte f spojitá a ryze monotónní funkce na intervalu $I = (a, b)$ a bod $c \in I$. Má-li inverzní funkce f^{-1} konečnou nenulovou derivaci v bodě $f(c)$, potom má f derivaci v bodě c a platí

$$f'(c) = \frac{1}{(f^{-1})'(f(c))}. \tag{8.2}$$

Důkaz. Označme $d = f(c)$. Všimněme si, že pro $x \in I$, $x \neq c$ platí

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \left(\frac{f^{-1}\big(f(x)\big) - f^{-1}(d)}{f(x) - d}\right)^{-1} = \Big(g\big(f(x)\big)\Big)^{-1},$$

kde

$$g(x) = \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(d)}{x - d}, \quad \text{pro } x \in f(I),\ x \neq d.$$

Podle předpokladu je ale

$$\lim_{x \to d} g(x) = \big(f^{-1}\big)'(d)$$

konečná nenulová, $\lim\limits_{x \to c} f(x) = d$ a $f(x) \neq d$ pro $x \neq c$. Podle Věty 6.4 o limitě složené funkce pak tedy

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \frac{1}{\big(f^{-1}\big)'(d)}.$$

Což jsme chtěli dokázat. □

Poznámka 8.6: Vzorec pro derivaci inverzní funkce uvedený v předchozí větě může být problematické si zapamatovat. Ukažme si jednoduchý formální trik jak si ho případně odvodit. Funkce f a její inverze formálně splňuje rovnici

$$f^{-1}\big(f(x)\big) = x.$$

Zderivujeme-li obě strany této rovnosti podle x a využijeme-li větu o derivaci složené funkce, dostaneme

$$(f^{-1})'\big(f(x)\big) \cdot f'(x) = 1$$

odkud ihned „plyne“ (8.2).

Upozorněme čtenáře, že tato poznámka není důkazem věty o derivaci inverzní funkce. Vůbec jsme například neověřili existenci hledané derivace!

Příklad 8.13: Již víme, že derivace ln je funkce $\frac{1}{x}$. Funkce ln je ale inverzní funkce k funkci e^x. Zkusme si na tomto příkladě ukázat použití předcházející věty.

Řešení. Chceme derivovat $f(x) = \ln(x)$ na intervalu $I = (0, +\infty)$. Tato funkce je spojitá, ryze monotónní a její inverzní funkcí je $f^{-1}(x) = \mathrm{e}^x$. Je-li $x \in I$, pak pro derivaci f^{-1} v bodě $f(x)$ platí

$$\big(f^{-1}\big)'\big(f(x)\big) = \mathrm{e}^{\ln(x)} = x \in I.$$

Podle předcházející věty o derivaci inverzní funkce tedy je

$$\ln'(x) = f'(x) = \frac{1}{\big(f^{-1}\big)'(f(x))} = \frac{1}{x},$$

což jsme očekávali.

Nyní konečně odvodíme derivace elementárních funkcí, které nám ještě chybí.

Příklad 8.14: Pro derivaci funkce arcsin platí

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1,1).$$

Řešení. Funkce $f = \arcsin$ je inverzní funkcí k funkci sin zúžené na interval $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$. Tj. $f^{-1} = \sin\big|_{\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle}$. Pro každé $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ již víme, že platí

$$\big(f^{-1}\big)'(x) = \cos x \neq 0.$$

Podle věty o derivaci inverzní funkce máme pro každé $x \in (-1,1)$ rovnost

$$\arcsin'(x) = f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(f(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}.$$

Pro $x \in (-1,1)$ je ale

$$\cos\big(\arcsin(x)\big) = \sqrt{1 - \sin^2\big(\arcsin(x)\big)} = \sqrt{1-x^2} \neq 0,$$

a tudíž

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1,1).$$

Příklad 8.15: Pro derivaci funkce arctg platí

$$\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Chceme derivovat $f = \operatorname{arctg}$ na $I = \mathbb{R}$, kde je spojitá a ryze monotónní. Její inverzní funkce je $f^{-1} = \operatorname{tg}\big|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}$. Pro každé $x \in I$ platí

$$\big(f^{-1}\big)'\big(f(x)\big) = \operatorname{tg}'\big(\operatorname{arctg}(x)\big) = \frac{1}{\cos^2\big(\operatorname{arctg}(x)\big)} \neq 0,$$

protože $\operatorname{arctg}(x) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Navíc je

$$\cos^2\left(\operatorname{arctg} x\right) = \frac{\cos^2\left(\operatorname{arctg} x\right)}{\sin^2\left(\operatorname{arctg} x\right) + \cos^2\left(\operatorname{arctg} x\right)} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arctg} x\right)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Odtud

$$\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Velmi podobným způsobem bychom odvodili derivace zbývajících funkcí arccos a arccotg. Jejich derivace budou uvedeny níže v přehledné Tabulce 8.2.

8.7 Derivace elementárních funkcí: přehled a příklady

Shrňme si přehledně doposud odvozené vztahy pro derivace. Uvádíme tabulku 8.2 zatím známých derivací.

Příklad 8.16: Nalezněte derivaci funkce

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) + \operatorname{arctg} x, \quad x \neq 0.$$

Řešení. Přímým výpočtem získáváme

$$f'(x) \stackrel{1}{=} \left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)' + \operatorname{arctg}'(x) \stackrel{2}{=} \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{1+x^2} \stackrel{3}{=} 0$$

V označených rovnostech jsme postupně použili

1. derivace součtu,
2. znalost derivace funkcí $\operatorname{arctg}(x)$, x^{-1} a derivace složené funkce,
3. algebraické úpravy.

Příklad 8.17: Nalezněte derivaci funkce

$$f(x) = x^x, \quad x > 0.$$

$f(x)$	$f'(x)$	podmínky
c, x^0	0	c konstanta nezávislá na x
x^n	nx^{n-1}	$x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$
x^n	nx^{n-1}	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, n = -1, -2, \dots$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$x > 0$ a $\alpha \in \mathbb{R}$
e^x	e^x	$x \in \mathbb{R}$
a^x	$a^x \ln a$	$x \in \mathbb{R}, a > 0$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$x \in \mathbb{R}$
$\mathrm{tg}(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
$\mathrm{cotg}(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$	$x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
$\mathrm{arctg}(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
$\mathrm{arccotg}(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$

Tabulka 8.2: Tabulka derivací elementárních funkcí.

Řešení. Zde nejde ani o funkci a^x, ani x^a. Mění se jak základ, tak exponent.

V tomto případě proto postupujeme následovně

$$f'(x) \overset{1}{=} \left(\mathrm{e}^{x \ln x}\right)' \overset{2}{=} \mathrm{e}^{x \ln x} \cdot \left(x \ln x\right)' \overset{3}{=} \mathrm{e}^{x \ln x} \cdot \left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) \overset{4}{=} x^x\bigl(1 + \ln x\bigr).$$

Postupně jsme použili:

1. úprava výrazu před samotnou derivací,
2. derivace složené funkce, znalost derivace funkce e^x,
3. derivace součinu a znalost derivace $\ln x$, resp. x,
4. algebraické úpravy.

Úprava použitá v předchozím příkladě, tedy přepis na exponenciálu se často používá právě u takovýchto druhů funkcí. Jako další příklad ještě uveďme

$$\Big((2+\sin x)^{\cos x}\Big)' = \Big(e^{\cos(x)\ln(2+\sin x)}\Big)' =$$
$$= e^{\cos(x)\ln(2+\sin x)} \cdot \left(-\sin(x)\ln(2+\sin x) + \frac{\cos^2(x)}{2+\sin x}\right).$$

8.8 Jednostranné derivace a derivace vyšších řádů

Ještě uvedeme malou poznámku k **jednostranné derivaci** a k derivacím vyšších řádů.

Lze definovat derivaci funkce f v bodě a zprava i zleva jako limity

$$f'_+(a) = \lim_{x\to a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad \text{a} \quad f'_-(a) = \lim_{x\to a-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Příklad 8.18: Uvažme funkci $f(x) = |x|$. Pro $x \neq 0$ a $a = 0$ platí

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{|x|}{x} = \operatorname{sgn} x.$$

Tudíž

$$f'_+(0) = 1 \quad \text{a} \quad f'_-(0) = -1,$$

ale $f'(0)$ neexistuje.

Derivací funkce f dostáváme novou funkci f', jejíž definiční obor ovšem může být menší než původní D_f. Nyní můžeme znovu derivovat f', tj. sestrojit f''. Rekurzivně tedy definujeme **derivace vyšších řádů** (dokud existují)

$$f^{(0)}(x) = f(x), \quad f^{(n)}(x) = \big(f^{(n-1)}\big)'(x), \quad n \geq 1.$$

Příklad 8.19: Například pro $f(x) = x^3 - 2x + 4$ máme

$$f'(x) = 3x^2 - 2, \quad f''(x) = 6x, \quad f'''(x) = 6, \quad f^{(n)}(x) = 0 \; n \geq 4.$$

Poznámka 8.7 (Mathematica)**:** K výpočtu derivace lze využít příkazu `D[f, x]`, zde f je derivovaná funkce (výraz) a x proměnná, podle které se derivuje. Derivaci vyššího, konkrétně n-tého, řádu lze zapsat například takto `D[f, {x, n}]`.

V BI-MA1 si ve většině praktických příkladů vystačíme s první a druhou derivací (viz kapitolu o vyšetřování průběhu funkce). Příští semestr v BI-MA2 budeme při studiu Taylorových polynomů a řad potřebovat derivace ideálně libovolného řádu.

9 Analýza průběhu funkce

9.1 Maximum, minimum, supremum a infimum

Než se v následující podkapitole pustíme do vyšetřování extrémů funkce, je vhodné připomenout pojem maxima a minima množiny.

Definice 9.1 (Maximum a minimum množiny)**:** Buď $M \subset \mathbb{R}$. Reálné číslo $\alpha \in M$ nazýváme

- **maximem množiny** M, právě když pro všechna $x \in M$ platí $x \leq \alpha$,
- **minimem množiny** M, právě když pro všechna $x \in M$ platí $\alpha \leq x$.

Maximum, resp. minimum, množiny M značíme $\max M$, resp. $\min M$.

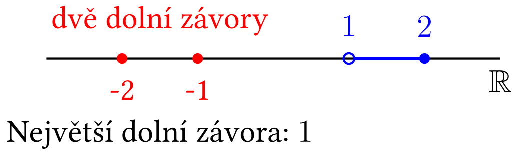
Každá konečná neprázdná množina má minimum i maximum, např. pro množinu $M = \{1, 2, 3\}$ platí $\max M = 3$ a $\min M = 1$.

Některé množiny $M \subset \mathbb{R}$ nemají minimum ani maximum. Například otevřený interval $M = (0, 1)$. Čísla 0 a 1 nejsou minimem ani maximem, neboť $0, 1 \notin M$. Prázdná množina nemá maximum ani minimum.

Abychom tyto problémy odstranili, zavádíme pojem infima a suprema množiny. Tyto pojmy zobecňují pojmy minima a maxima. Čtenáři nabízíme grafickou ilustraci definice infima množiny na Obrázku 9.1.

Definice 9.2 (Infimum množiny)**:** Buď M neprázdná zdola omezená podmnožina množiny reálných čísel. Číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ nazveme **infimem množiny** M, značíme $\inf M$, právě když

1. pro každé $x \in M$ platí $\alpha \leq x$ (α je **dolní závora** M),
2. pokud $\beta \in \mathbb{R}$ také splňuje předchozí bod, pak $\beta \leq \alpha$ (α je největší dolní závora M).



Obrázek 9.1: Ilustrace ke konstrukci infima množiny (Definice 9.2), zde $M = (1, 2\rangle$. Množina dolních závor je $(-\infty, 1\rangle$, čili největší dolní závorou je 1. Množina M nemá minimum.

Pokud množina M není zdola omezená, pak klademe $\inf M := -\infty$. Pro prázdnou množinu klademe $\inf \emptyset := +\infty$.

Stručně můžeme říci, že infimum množiny M je největší dolní závorou množiny M. Pokud má množina M i minimum, pak je tato hodnota jistě největší dolní závorou množiny M a tedy je současně i infimem (tj. infimum je skutečně zobecnění pojmu minima).

Zcela analogicky definujeme i pojem suprema množiny.

Definice 9.3 (Supremum množiny)**:** Buď M neprázdná shora omezená podmnožina množiny reálných čísel. Číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ nazveme **supremem množiny** M, značíme $\sup M$, právě když

1. pro každé $x \in M$ platí $x \leq \alpha$ (α je **horní závora** M),
2. pokud $\beta \in \mathbb{R}$ také splňuje předchozí bod, pak $\alpha \leq \beta$ (α je nejmenší horní závora M).

Pokud množina M není shora omezená, pak klademe $\sup M := +\infty$. Pro prázdnou množinu klademe $\sup \emptyset := -\infty$.

Na rozdíl od minim a maxim už každá podmnožina množiny reálných čísel supremum i infimum má. Platí totiž následující věta.

Věta 9.1 (O existenci suprema a infima)**:** Buď A podmnožina množiny reálných čísel. Potom existuje její infimum ($\inf A$) i supremum ($\sup A$).

Důkaz. Předveďme důkaz pro supremum. Infimum se ošetří analogicky. Případy prázdné množiny A a shora neomezené množiny A jsou snadné přímo z definice (v prvním případě je supremem $-\infty$, v druhém případě $+\infty$).

Mějme tedy shora omezenou neprázdnou množinu A. Nechť a_1 je nějaký bod, který není horní závorou množiny A a b_1 nějaká horní závora množiny A (tj. existuje $x \in A$ takové, že $a_1 < x$ a $y \leq b_1$ pro každé $y \in A$). Uvažme bod $c = \frac{a_1+b_1}{2}$, pokud je tento bod stále horní závorou množiny A, pak položme $a_2 = a_1$ a $b_2 = c$, v opačném případě položme $a_2 = c$ a $b_2 = b_1$.

Nyní tento „půlící“ proces opakujme. Tím získáme posloupnost intervalů $\langle a_n, b_n \rangle$, $n \in \mathbb{N}$, pro jejichž délky platí

$$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} = 0.$$

Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ je b_n horní závorou množiny A a a_n není horní závorou množiny A.

Podle axiomu úplnosti proto existuje $\alpha \in \mathbb{R}$, které patří do každého z intervalů $\langle a_n, b_n \rangle$. Tvrdíme, že toto α je supremem množiny A. K tomu musíme ověřit dvě věci:

- α je horní závorou množiny A: kdyby α horní závorou nebylo, pak by existovalo $x \in A$ ostře větší než α. Protože ale $\lim_n b_n = \alpha$, pak by i nekonečně mnoho b_n muselo být ostře menší než x, což je ve sporu s tím, že všechna b_n jsou horní závory množiny A.

- α je nejmenší horní závorou množiny A: kdyby existovala menší horní závora množiny A, označme si ji $\beta < \alpha$, pak protože $\lim_n a_n = \alpha$ tak by nekonečně mnoho a_n muselo být ostře větší než β a také by byly horními závorami množiny A. To ale není možné, žádné z a_n není horní závorou množiny A. $\square$

Tím je důkaz dokončen.

Příklad 9.1: Pro interval $J = (-2, 1\rangle$ platí

$$\max J = 1, \quad \sup J = 1, \quad \min J \text{ neexistuje}, \quad \inf J = -2.$$

V dalším textu nás budou zajímat hodnoty funkce nabývané na různých množinách. Zavádíme proto následující značení. Pro $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ a množinu $M \subset D_f$ klademe

$$\begin{aligned} \inf_M f &= \inf_{x\in M} f(x) := \inf\{f(x) \mid x \in M\}, \\ \sup_M f &= \sup_{x\in M} f(x) := \sup\{f(x) \mid x \in M\}. \end{aligned} \tag{9.1}$$

Pro $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ a množinu $M \subset D_f$ dále klademe

$$\begin{aligned} \max_M f &= \max_{x\in M} f(x) := \max\{f(x) \mid x \in M\}, \\ \min_M f &= \min_{x\in M} f(x) := \min\{f(x) \mid x \in M\}, \end{aligned} \tag{9.2}$$

za předpokladu, že uvedená maxima a minima existují. Připomeňme, že postačující podmínkou pro jejich existenci je například situace spojitosté f a uzavřeného intervalu M.

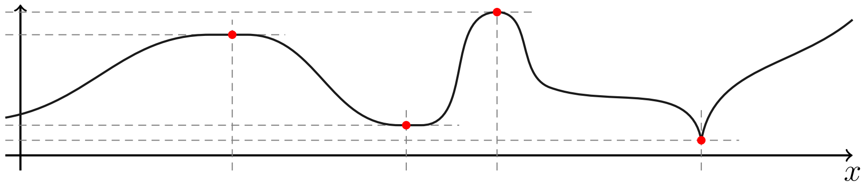
9.2 Lokální extrémy funkce

Řada praktických problémů může být formulována jako optimalizační (minimalizační či maximalizační) úloha. Ve své nejjednodušší podobě zní následovně: různé „případy" jsou očíslovány parametrem x a hledáme takové řešení, které minimalizuje/maximalizuje jistou funkci $f(x)$ (např. zisk). Uveďme několik jednoduchých příkladů (několik jednoduchých konkrétních ukázek uvádíme v podkapitole 9.11).

- Jak distribuovat objednané zboží mezi zákazníky co nejefektivněji, tj. s co *nejmenšími* náklady na dopravu?
- Jak sestavit jídelníček splňující zadané dietologické podmínky a *minimalizovat* při tom náklady?
- Jak efektivně distribuovat pohonné hmoty a materiál na frontu a současně *maximalizovat* protivníkovy ztráty?

Na optimalizační úlohy často narazíte ve strojovém učení. V řadě metod z této oblasti (např. trénování neuronové sítě) pod termínem „učení" nenajdeme nic jiného než hledání maxima/minima jisté komplikované funkce.

Zde v BI-MA1 se při hledání maxim a minim omezíme na reálné funkce reálné proměnné. Samozřejmě v realitě je často zapotřebí uvažovat ne jen jednu proměnnou x, ale dvě a nebo více. Řešením těchto otázek se zabývá teorie funkce více proměnných, resp. teorie optimalizace. Řada zde zaváděných konceptů se ovšem dále používá i v případě funkcí více proměnných a pro čtenáře je snazší se s nimi v tomto snadno představitelném světě funkcí jedné proměnné seznámit. Funkcím více proměnných a jejich extrémům se budeme věnovat v BI-MA2



Obrázek 9.2: K definici různých typů extrémů.

Započněme výklad této problematiky přesným zavedením pojmů lokálního minima a maxima funkce.

Definice 9.4 (Lokální extrém funkce)**:** Řekneme, že funkce f má v bodě $a \in D_f$

1. **lokální maximum**,
2. **lokální minimum**,
3. **ostré lokální maximum**,
4. **ostré lokální minimum**,

právě když existuje okolí (v případném krajním bodě definičního oboru jednostranné) $U_a \subset D_f$ bodu a tak, že (popořadě)

1. pro všechna $x \in U_a$ platí $f(x) \leq f(a)$,
2. pro všechna $x \in U_a$ platí $f(x) \geq f(a)$,
3. pro všechna $x \in U_a \setminus \{a\}$ platí $f(x) < f(a)$,
4. pro všechna $x \in U_a \setminus \{a\}$ platí $f(x) > f(a)$.

Lokální maximum a lokální minimum společně nazýváme **lokální extrém**. Následující věta dává nutnou podmínku pro existenci lokálního extrému. Pro lepší představu a orientaci mezi těmito typy extrémů uvádíme Obrázek 9.2.

Nyní se můžeme snažit odpovědět na otázku, jak extrémy funkcí hledat. První výsledek je negativního charakteru, říká nám kde zcela jistě extrémy funkce nenastávají. Můžeme se pak soustředit na prozkoumávání bodů, kde extrémy být mohou.

Věta 9.2 (Nutná podmínka existence lokálního extrému)**:** Nechť funkce f má v bodě a lokální extrém. Potom buď $f'(a) = 0$, nebo derivace v bodě a neexistuje.

Důkaz. Kdyby např. $f'(a) = \lim_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$, potom lze nalézt $\varepsilon > 0$ tak, že pro všechna $x \in (a - \varepsilon,\ a + \varepsilon) \setminus \{a\}$ platí

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0.$$

Potom ale platí $f(x) > f(a)$ pro $x \in (a,\ a + \varepsilon)$ a $f(x) < f(a)$ pro $x \in (a - \varepsilon, a)$. Funkce f tedy v bodě a nemá lokální extrém (spor). Podobně lze postupovat v případě $f'(a) < 0$. □

Varování 9.1: Tato věta udává *pouze nutnou podmínku* pro existenci lokálního extrému.

Zdůrazněme tento fakt pomocí následujícího příkladu.

Příklad 9.2 (Bod nulové derivace bez extrému)**:** Funkce $f(x) := x^3$ má v bodě 0 nulovou derivaci, $f'(0) = 0$, avšak nenabývá v něm lokálního extrému (opět viz definici: pro kladné reálné x platí $x^3 > 0$ a pro záporné reálné x platí $x^3 < 0$). Je dokonce rostoucí na celém $\mathbb{R}$. Jinak řečeno, k tomu aby funkce v bodě a měla extrém *nestačí* aby $f'(a) = 0$. Tento omyl je *častým zdrojem chyb.*

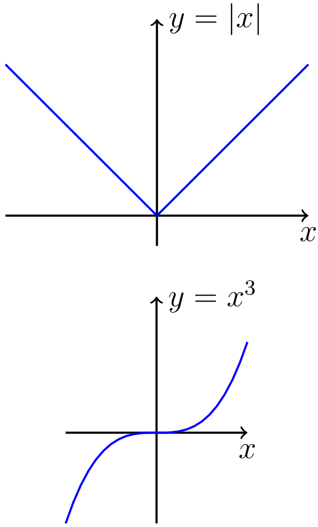
Extrém skutečně snadno může nastat i v bodě, kde derivace neexistuje. Uvažte následující jednoduchý příklad.

Příklad 9.3 (Extrém v bodě s neexistující derivací)**:** Uvažme funkci $f(x) := |x|$. Funkce f má jistě ostré lokální minimum v bodě 0 (to vidíme přímo z definice ostrého lokálního minima: pro všechna nenulová reálná x platí $|x| > 0$ a $0 = 0$), ale její derivace v bodě 0 neexistuje (vypočteno v předchozí části textu).

Grafy funkcí z předchozích dvou příkladů jsou uvedeny na Obrázku 9.3.

9.3 Globální extrémy funkce

Často nás bude zajímat největší, resp. nejmenší, hodnota, kterou může zadaná funkce na zadaném intervalu nabývat. Proto zavádíme následující pojem.



Obrázek 9.3: Graf absolutní hodnoty (v bodě 0, kde neexistuje derivace, nabývá minima) a funkce x^3 (v bodě 0 sice má nulovou derivaci, ale v tomto bodě nenabývá extrému).

Definice 9.5 (Globální extrém funkce)**:** Mějme funkci f a množinu $M \subset D_f$. **Globálním maximem** (resp. **minimem**) **funkce** f **na množině** M nazýváme hodnotu $\max_M f$ (resp. $\min_M f$), existují-li. Pokud vynecháme specifikaci množiny M, pak máme na mysli případ $M = D_f$.

V této definici zdůrazňujeme funkční hodnotu, maximální/minimální hodnota může být nabyta ve více bodech. Například funkce $f(x) = \cos(x)$ nabývá na intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ svou maximální hodnotu 1 ve dvou bodech, v 0 a 2π.

Příklad 9.4: Rozmyslete si následující jednoduchá tvrzení o funkci $f(x) = 2x$:

- Funkce f nemá globální maximum ani minimum (nemá globální extrém).
- Na množině $M = \langle -1, \infty)$ má f globální minimum v bodě -1 s hodnotou -2 a nemá globální maximum.
- Na množině $M = (-1, 2\rangle$ nemá f globální minimum a má globální maximum v bodě 2 s hodnotou 4.

Obecně ani nevíme, jestli daná funkce vůbec lokální či globální extrém má. Jedná-li se ale o funkci spojitou na uzavřeném intervalu, pak je existence globálních extrémů na tomto intervalu zaručena následující větou.

Věta 9.3 (O globálním extrému spojité funkce na uzavřeném intervalu)**:** Funkce f spojitá a definovaná právě na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ nabývá globálního maxima a minima na tomto intervalu, přesněji existují $\alpha, \beta \in \langle a, b\rangle$ splňující $f(\alpha) = \max_{\langle a,b\rangle} f$ a $f(\beta) = \min_{\langle a,b\rangle} f$. Tento extrém může být nabyt pouze v krajních bodech a, b a v bodech, kde je derivace rovna 0 nebo neexistuje.

Důkaz. Již víme, že je-li f spojitá, pak obrazem uzavřeného intervalu $J = \langle a, b\rangle$ je opět uzavřený interval $f(J)$ (nebo jednoprvková množina, v tom případě je situace triviální). Vzpomeňte na Větu 7.6. Krajní body tohoto intervalu $f(J)$ pak jsou příslušným maximem, resp. minimem, dané funkce na intervalu J. □

Tuto větu lze s výhodou použít, hledáme-li pouze největší a nejmenší hodnotu spojité funkce f na uzavřeném intervalu J a nezajímají nás další detaily o průběhu funkce f. Stačí pouze porovnat funkční hodnoty v bodech podezřelých z extrému, tedy bodech kde je derivace funkce f nulová nebo neexistuje, nebo v krajních bodech intervalu na kterém extrémy funkce zkoumáme.

Příklad 9.5: Jako příklad uvažme funkci

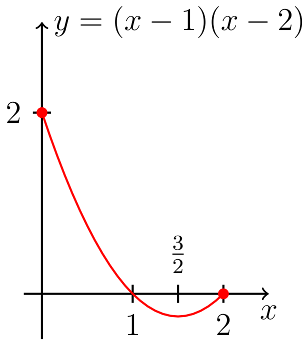
$$f(x) = (x - 1)(x - 2)$$

na intervalu $\langle 0, 2\rangle$. Derivace je nulová v bodě $\frac{3}{2}$, porovnáním funkčních hodnot

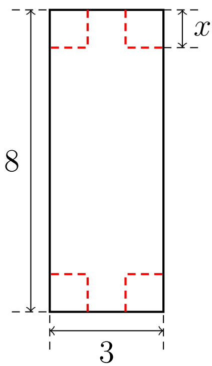
$$f(0) = 2, \quad f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{4}, \quad f(2) = 0$$

uzavíráme že globální maximum je v bodě 0 s hodnotou 2 a globální minimum je v bodě $\frac{3}{2}$ s hodnotou $-\frac{1}{4}$. Graf uvažované funkce je na Obrázku 9.4. Povšimněte si ale, že jsme extrémní hodnoty nalezli bez jakékoliv grafické představy (kterou často nemáme k dispozici), využili jsme pouze spojitost dané funkce a uzavřenost zadaného intervalu!

Příklad 9.6: Z papíru tvaru obdélníka se stranami 8 cm a 3 cm vyrobíme krabičku tak, že vystřihneme ze všech čtyř rohů stejné čtverce. Krabička bude mít výšku rovnou straně tohoto čtverce. Viz Obrázek 9.5. Nalezněte délku strany čtverce, při níž bude objem krabičky největší.



Obrázek 9.4: Ukázka globálních extrémů spojité funkce na uzavřeném intervalu.



Obrázek 9.5: Konstrukce krabičky z papíru tvaru obdélníka v Příkladu 9.6.

Řešení. Označme stranu vystřihnutých čtverců symbolem x. Pro objem krabičky $O(x)$ platí

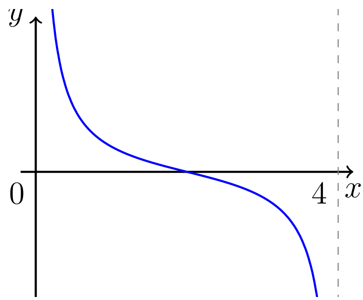
$$O(x) = x(8-2x)(3-2x) = 4x^3 - 22x^2 + 24x,$$

kde $x \in \langle 0, \frac{3}{2} \rangle$. Derivace $O(x)$ je nula pouze v bodech 3 a $\frac{2}{3}$, ovšem pouze $\frac{2}{3} \in \langle 0, \frac{3}{2} \rangle$. V tomto bodě nastává i maximum $O(\frac{2}{3}) = \frac{200}{27}$ cm^3, protože $O(0) = O(\frac{3}{2}) = 0$.

Na závěr této podkapitoly ještě poznamenejme, že uzavřenost intervalu v předchozí Větě 9.3 je podstatná. Jako příklad uvažme funkci

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-4}$$

spojitou na otevřeném intervalu $J = (0, 4)$. Tato funkce nemá na J ani maximum



Obrázek 9.6: Funkce spojitá na otevřeném intervalu nemusí mít minimum ani maximum.

ani minimum. Skutečně, platí totiž

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = +\infty - \frac{1}{4} = +\infty,$$
$$\lim_{x\to 4-} f(x) = \frac{1}{4} + (-\infty) = -\infty.$$

Díky její spojitosti pak platí $f(J) = \mathbb{R}$, čili $\sup_J f = +\infty$ a $\inf_J = -\infty$. Graf této funkce je uveden na Obrázku 9.6.

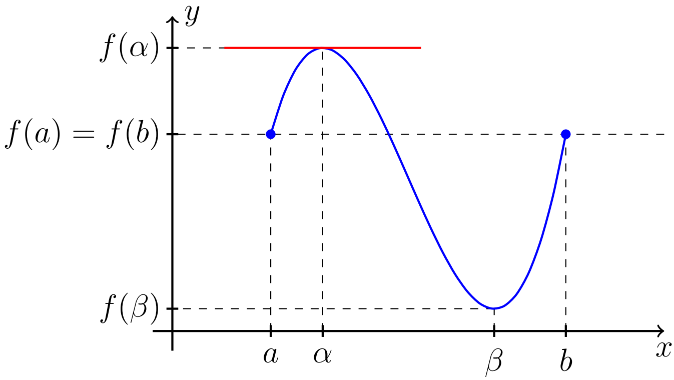
9.4 Věta o přírůstku funkce

Intuitivně (z geometrické interpretace derivace jako tečny) tušíme, že pokud je derivace funkce kladná na intervalu I, pak je funkce rostoucí na intervalu I. Pomocí Lagrangeovy věty, kterou zanedlouho zformulujeme, bude snadné správnost této intuice ověřit.

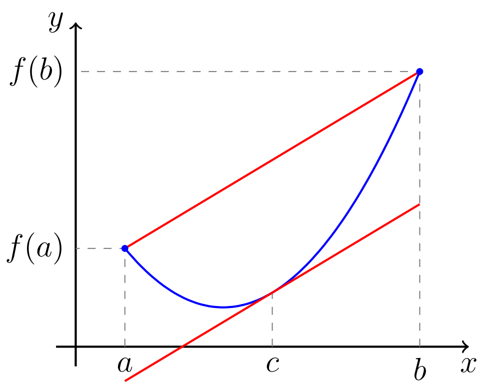
Pozorování: pro „pěknou“ funkci, mající v krajních bodech jistého intervalu stejné funkční hodnoty, existuje uvnitř tohoto intervalu bod, kde má její graf tečnu rovnoběžnou s osou x. Viz Obrázek 9.7.

Věta 9.4 (Rolleova)**:** Nechť funkce f splňuje podmínky

1. f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$,
2. f má derivaci v každém bodě intervalu (a, b),
3. $f(a) = f(b)$.



Obrázek 9.7: Demonstrace k Rolleově větě (Věta 9.4).



Obrázek 9.8: Demonstrace k Lagrangeově větě (Věta 9.5).

Potom existuje $c \in (a, b)$ tak, že $f'(c) = 0$.

Důkaz. Pokud je funkce f konstantní na intervalu $\langle a, b\rangle$, pak lze za c volit libovolné číslo z intervalu (a, b).

V případě, že f není konstantní na intervalu $\langle a, b\rangle$, je $f(\langle a, b\rangle) = \langle A, B\rangle$ uzavřený interval (to, jak víme, plyne ze spojitosti f, viz Větu 7.6). Existují tedy $\alpha, \beta \in \langle a, b\rangle$ tak, že $A = f(\alpha) < f(\beta) = B$.

Protože $f(a) = f(b)$, leží alespoň jeden z bodů α, β uvnitř (a, b). Označme tento bod c. Funkce f má v bodě c lokální extrém, derivace v tomto bodě existuje, a proto podle Věty 9.2 platí $f'(c) = 0$. $\square$

Přírůstek funkce f na intervalu $\langle a,b\rangle$ je roven hodnotě $f(b)-f(a)$ (tj. změna funkční hodnoty mezi a a b). Lze ho nějak odhadnout, či kontrolovat, pomocí derivace funkce f? Odpověď na tuto otázku je obsahem následující věty[1].

Věta 9.5 (Lagrangeova, O přírůstku funkce)**:** Nechť funkce f splňuje podmínky

1. f je spojitá na intervalu $\langle a,b\rangle$,
2. f má derivaci v každém bodě intervalu (a,b).

Potom existuje bod $c \in (a,b)$ tak, že $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, nebo ekvivalentně $f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$.

Důkaz. Položme $g(x) := f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. Tato funkce je spojitá na $\langle a,b\rangle$, má derivaci v každém bodě intervalu (a,b) a navíc $g(a)=g(b)=f(a)$. Proto podle Rolleovy věty existuje $c \in (a,b)$ tak, že

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \qquad \square$$

Přírůstek funkce f na intervalu $\langle a,b\rangle$ tak máme vyjádřen pomocí délky daného intervalu a hodnoty derivace funkce f. Tvrzení Lagrangeovy věty je existenční, o c pouze víme, že leží někde v intervalu (a,b).

Lagrangeova věta nám umožňuje z vlastností první derivace odvozovat vlastnosti funkce samotné. Například: pokud bychom věděli, že derivace $f'(x)$ je kladná na (a,b), pak i $f'(c) > 0$ ať už je c jaké chce a tudíž $f(b) > f(a)$, protože $f(b)-f(a) = f'(c)(b-a) > 0$! Toto (a analogická) pozorování budou mít důležité důsledky pro monotonii a konvexitu/konkavitu funkce. Systematicky se jimi budeme zabývat ve zbytku této kapitoly. Nejprve ale ještě učiňme odbočku k počítání limit, konkrétně k l'Hospitalově pravidlu, které je důsledkem Rolleovy věty.

[1] Uveďme ještě jeden způsob jak se dívat na následující větu. Pokud jsme se v daném časovém intervalu pohybovali průměrnou rychlostí v, pak musí existovat časový okamžik v němž naše okamžitá rychlost byla rovna v.

9.5 L'Hospitalovo pravidlo

K výpočtu limit funkcí vedoucích k neurčitým výrazům $\frac{0}{0}$ a $\frac{\infty}{\infty}$ se často hodí l'Hospitalovo pravidlo. Na tomto místě ho uvádíme z toho důvodu, že jde o důsledek Rolleovy věty (Věta 9.4).

Pro tuto větu je vžité označení „pravidlo". Jde ale o matematickou větu jako každou jinou. Někdy se uvádí i jako „l'Hôpitalovo pravidlo". Guillaume François Antoine, Marquis de l'Hôpital byl francouzský matematik žijící v sedmnáctém století.

Věta 9.6 (l'Hospitalovo pravidlo)**:** Nechť pro funkce f a g a bod $a \in \overline{\mathbb{R}}$ platí

1. $\lim\limits_a f = \lim\limits_a g = 0$ nebo $\lim\limits_a |g| = +\infty$
2. existuje okolí U_a bodu a splňující $U_a \setminus \{a\} \subset D_{f/g} \cap D_{f'/g'}$,
3. existuje limita podílu derivací $\lim\limits_a \dfrac{f'}{g'}$.

Potom existuje $\lim\limits_a \dfrac{f}{g}$ a platí $\lim\limits_a \dfrac{f}{g} = \lim\limits_a \dfrac{f'}{g'}$.

V plném rozsahu důkaz provádět nebudeme. Podíváme se alespoň na případ neurčitého výrazu $\frac{0}{0}$.

Důkaz případu $\frac{0}{0}$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $f(a) = g(a) = 0$, tj. f a g jsou spojité v a.

Označme $b = \lim_a \frac{f'}{g'}$ a uvažme libovolné U_b okolí bodu b. K němu existuje $V_a \subset U_a$ okolí bodu a takové, že je-li $x \in V_a \setminus \{a\}$, pak $f'(x)/g'(x) \in U_b$.

Pro libovolné $x \in V_a$, $x > a$, definujme funkci $h(t) := f(t) - \frac{f(x)}{g(x)} g(t)$ (N.B.: $g(x) \neq 0$). Potom h je spojitá na $\langle a, x \rangle$, pro její derivaci na (a, x) platí $h'(t) = f'(t) - \frac{f(x)}{g(x)} g'(t)$ a navíc $h(a) = h(x) = 0$.

Podle Rolleovy věty existuje bod $c \in (a, x)$ takový, že $h'(c) = 0$, tj. $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \in U_b$.

Celkem jsme ukázali, že $\lim\limits_{x \to a+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. Důkaz pro limitu zleva se provede analogicky. □

Pojďme si nyní ukázat použití této věty na typických příkladech a poté rozebrat její záludnosti.

Příklad 9.7: Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(x)}{\sin(x)}.$$

Řešení. Pomocí l'Hospitalova pravidla

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(x)}{\sin(x)} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\cos(x)} = 1.$$

Použití l'Hospitalovala pravidla je korektní. Jednalo se o limitu typu $\frac{0}{0}$, limita podílů derivací existuje, oba podíly jsou definovány na okolí bodu 0 vyjma bod 0 samotný (podíl derivací dokonce definovaný i v 0).

Příklad 9.8: Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0_+} x\ln(x).$$

Řešení. Nejprve musíme výraz upravit do tvaru kdy lze aplikovat l'Hospitalovo pravidlo.

$$\lim_{x\to 0_+} x\ln(x) = \lim_{x\to 0_+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 0_+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0_+} (-x) = 0.$$

Opět poznamenejme, že l'Hospitalovo pravidlo je použito korektně. Po vhodné úpravě se jedná o limitu typu $\frac{\infty}{\infty}$, limita podílu derivací existuje a oba podíly jsou definovány na pravém okolí bodu 0 vyjma bod 0 samotný (např. $(0,1)$).

K tomuto příkladu ještě poznamenejme, že pokud bychom výraz upravili takto,

$$x\ln x = \frac{x}{\frac{1}{\ln x}},$$

tak bychom sice získali limitu typu $\frac{0}{0}$, ale limitu podílu derivací bychom vypočítat nedokázali. Dostali bychom se tedy do slepé uličky.

Příklad 9.9: Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^2}.$$

Řešení. Nyní je třeba l'Hospitalovo pravidlo použít dvakrát,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}\overset{\text{l'H.}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}\overset{\text{l'H.}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty.$$

L'Hospitalovo pravidlo je použito korektně. Jedná se vždy o limitu typu $\frac{\infty}{\infty}$, podíly jsou definovány na okolí bodu $+\infty$ a poslední z limit existuje, tudíž existují i všechny předchozí.

Poznámka 9.1: Upozorněme na častý omyl vyskytující se u příkladů podobných předchozímu. Často se objevuje argument „limita je rovna $+\infty$ protože exponenciála roste rychleji než polynom". To je sice dobrá intuice, ale není dostatečně přesná. Jak rychleji musí růst čitatel vůči jmenovateli, aby limita byla $+\infty$? Na to intuice vůbec nestačí. Například v limitě

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+\sqrt{x}}{x+1}$$

také čitatel roste rychleji než jmenovatel, ale hodnota této limity je 2 a ne nekonečno.

Na předchozí příklad je nutné se dívat právě naopak. Pomocí l'Hospitalova pravidla jsme vypočetli limitu

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}=+\infty.$$

Protože tato limita vyšla $+\infty$, *můžeme tvrdit*, že exponenciála e^x roste rychleji než x^2. Všimněte si, že původní intuitivní úvaha jde přesně opačným směrem.

Příklad 9.10 (Důležitost předpokladů)**:** Při použití l'Hospitalova pravidla je nutné zkontrolovat předpoklady. Slepým použitím formule můžeme dostat špatný výsledek:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+\sin(x)}{x+\sin(x)}\overset{1}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\cos(x)}{1+\cos(x)}\overset{2}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{-\sin(x)}{-\sin(x)}=1.$$

Chyba v tomto výpočtu je dvojnásobná:

1. Není splněn 2. ani 3. předpoklad l'Hospitalova pravidla.
2. Limita nalevo od $\overset{2}{=}$ vůbec neexistuje. Nemá tedy smysl pokračovat ve výpočtu.

Limitu lze snadno spočíst bez l'Hospitalova pravidla,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+\sin(x)}{x+\sin(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{\sin(x)}{x}}{1+\frac{\sin(x)}{x}}=2.$$

Příklad 9.11 (Bludný kruh)**:** V následujícím případě sice všechny předpoklady platí, ale ani opakované použití l'Hospitalova pravidla nevede k cíli

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Po druhém použití dostaneme stejný výraz s kterým jsme začínali. Tuto limitu můžeme snadno spočítat bez použití l'Hospitalova pravidla,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 + e^{-2x}}{1 - e^{-2x}} = 1.$$

9.6 Důsledky pro monotonii funkce

Pomocí Lagrangeovy věty o přírůstku funkce (Věta 9.5) můžeme přesně zformulovat vztah mezi monotonií a první derivací funkce. Nejprve si zaveďme vhodné značení.

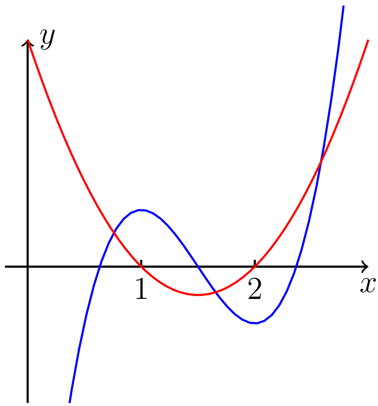
Definice 9.6 (Vnitřek intervalu)**:** Nechť J je interval s krajními body a a b. Potom **vnitřkem intervalu** J nazveme otevřený interval (a, b). Značíme ho $J^\circ = (a, b)$.

Věta 9.7 (O vztahu první derivace a monotonie funkce)**:** Nechť f je spojitá funkce na intervalu J a nechť pro každé $x \in J^\circ$ existuje derivace $f'(x)$. Potom platí následujících pět tvrzení o různých typech monotonie funkce,

1. $\big(\forall x \in J^\circ\big)\big(f'(x) \geq 0\big) \Rightarrow f$ je rostoucí na J,
2. $\big(\forall x \in J^\circ\big)\big(f'(x) \leq 0\big) \Rightarrow f$ je klesající na J,
3. $\big(\forall x \in J^\circ\big)\big(f'(x) > 0\big) \Rightarrow f$ je ostře rostoucí na J,
4. $\big(\forall x \in J^\circ\big)\big(f'(x) < 0\big) \Rightarrow f$ je ostře klesající na J,
5. $\big(\forall x \in J^\circ\big)\big(f'(x) = 0\big) \Rightarrow f$ je konstantní na J.

Důkaz 1. tvrzení, ostatní naprosto analogicky. Buďte $x_1, x_2 \in J$ taková, že $x_1 < x_2$. Podle Lagrangeovy věty o přírůstku funkce aplikované na interval $\langle x_1, x_2\rangle$ existuje $c \in (x_1, x_2)$ tak, že

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$



Obrázek 9.9: Funkce f z rovnice (9.3) (modrá) a její derivace z rovnice (9.4) (červená). Znaménko derivace rozhoduje o monotonii funkce.

Protože $c \in J^\circ$, je $f'(c) \geq 0$. Tudíž

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2).$$

Což jsme měli dokázat. □

Hlavním výsledkem předchozí věty tedy je následující pozorování: je-li funkce f diferencovatelná, pak o tom, zda roste či klesá, rozhoduje znaménko její derivace. Pro lepší představu uvažme funkci

$$f(x) := 2x^3 - 9x^2 + 12x - \frac{9}{2} \tag{9.3}$$

pro jejíž derivaci platí

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2). \tag{9.4}$$

Porovnejte graf této funkce a její derivace na Obrázku 9.9.

Otázka 9.1: Mějme funkci f definovanou na intervalu $(-1,1)$, která je ostře rostoucí na intervalu $(-1,0)$ i $(0,1)$. Je f ostře rostoucí i na intervalu $(-1,1)$?

Otázka 9.2: Mějme funkci f definovanou na intervalu $(-1,1)$, která je ostře rostoucí na intervalu $(-1,0\rangle$ i $\langle 0,1)$. Je f ostře rostoucí i na intervalu $(-1,1)$?

Otázka 9.3: Mějme funkci f definovanou na intervalu $(-1,1)$, která je ostře rostoucí na intervalu $(-1,0)$ i $(0,1)$ a je spojitá v bodě 0. Je f ostře rostoucí i na intervalu $(-1,1)$?

9.7 Důsledky pro konvexnost/konkávnost

Zjistili jsme, že první derivace funkce f souvisí s monotonií funkce f. Nyní ukážeme, že druhá derivace funkce f dále souvisí s tvarem grafu funkce f. Nejprve zaveďme potřebné pojmy.

Konvexita a konkavita funkce

Definice 9.7 (Konvexnost a konkávnost funkce v bodě)**:** Nechť funkce f je diferencovatelná v bodě $a \in D_f$. Pokud existuje okolí U_a bodu a takové, že pro všechna $x \in U_a \smallsetminus \{a\}$ leží body $(x, f(x))$ nad (resp. pod) tečnou funkce f v bodě a, tj.

$$f(x) > f(a) + f'(a)(x - a), \text{ (resp. } f(x) < f(a) + f'(a)(x - a)\text{)},$$

pak f nazveme **ryze konvexní** (resp. **konkávní**) **v bodě** a.

Pokud pro body $(x, f(x))$ výše připustíme možnost ležet na tečně (tj. připustíme neostré nerovnosti), pak f nazveme **konvexní** (resp. **konkávní**) **v bodě** a.

Vybaveni pojmem konvexity/konkavity v bodě zavádíme i konvexitu/konkavitu na intervalu. Podobně jsme postupovali i v případě spojitosti (viz Definici 7.1 a Definici 7.2).

Definice 9.8 (Konvexnost a konkávnost funkce)**:** Funkci f nazveme **(ryze) konvexní** (resp. **konkávní**) **na intervalu** J, právě když je na tomto intervalu spojitá a je (ryze) konvexní (resp. konkávní) v každém bodě intervalu J°.

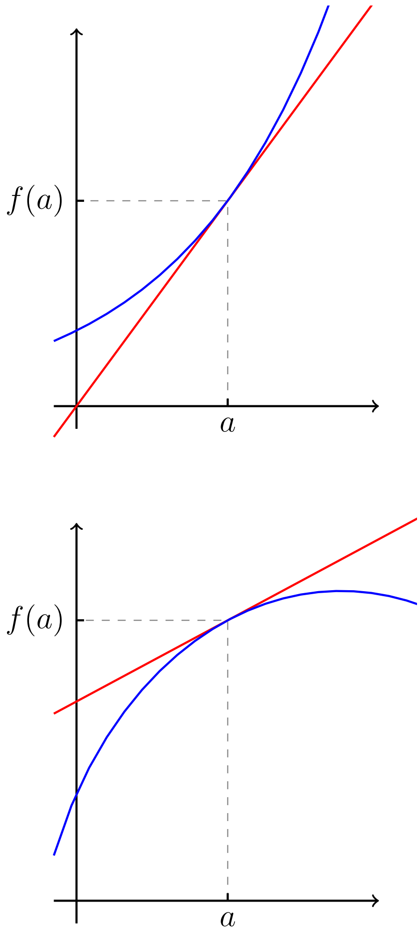
Očividně, f je konkávní na intervalu J, právě když $-f$ je konvexní na intervalu J. Stačí se tedy soustředit například na konvexní funkce.

K osvětlení terminologie uveďme etymologický význam obou pojmů. *Convexum* má v latině význam údolí a *concavum* význam výdutě. Ukázka konvexní a konkávní funkce je dále uvedena na Obrázku 9.10.

Kritérium konvexnosti a konkávnosti

V předchozí podkapitole jsme se zabývali vztahem *první* derivace a různými typy monotonie funkce. Nyní si ukážeme jak konvexita a konkavita souvisí s *druhou* derivací funkce.

Věta 9.8 (Kritérium pro konvexnost)**:** Buď f funkce spojitá na intervalu J, která má druhou derivaci v každém bodě intervalu J°. Potom platí dvě následující tvrzení:



Obrázek 9.10: Konvexní a konkávní funkce.

- $f''(x) \geq 0$ pro každé $x \in J^\circ$, právě když f je konvexní na intervalu J.
- Je-li $f''(x) > 0$ v každém bodě $x \in J^\circ$, pak je f ryze konvexní na J.

Stejná tvrzení platí pro konkávnost pokud otočíme znaménka nerovností (tj. v prvním tvrzení bude derivace nekladná v druhém záporná).

Poznámka 9.2: Funkce $f(x) = x^4$ je ryze konvexní na $\mathbb{R}$, ale $f''(0) = 0$. Implikaci v druhém bodě předchozí věty proto nelze obrátit.

Důkaz. Nejprve proveďme důkaz implikací $\Rightarrow$ v obou bodech (konkrétně pro $\geq$, nerovnost $>$ stejně).

Z předpokladu $f''(x) \geq 0$, $x \in J^\circ$ plyne, že f' je rostoucí na J°. Mějme $a \in J^\circ$ a $x \in J^\circ$ takové, že $x > a$. Potom dle Lagrangeovy věty existuje $c \in (a, x)$ takové, že

$$f(x) = f(a) + f'(c)(x-a) \geq f(a) + f'(a)(x-a).$$

Skutečně: $a < c$ a proto $f'(a) \leq f'(c)$ a $x - a > 0$.

Máme-li teď $x \in J^\circ$ takové, že $x < a$, pak existuje $c \in (x, a)$ takové, že

$$f(x) = f(a) + f'(c)(x-a).$$

Skutečně: $c < a$ a proto $f'(c) \leq f'(a)$ a $f'(c)(x-a) \geq f'(a)(x-a)$, neboť nyní $x - a < 0$.

Nyní proveďme důkaz implikace $\Leftarrow$ v prvním bodě. Postupujme sporem. Předpokládejme, že f je konvexní na J a současně existuje bod $a \in J^\circ$ splňující

$$f''(a) = \lim_{x \to a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a} < 0.$$

Existuje tedy $U_a(\delta) \subset J$ takové, že

$$\frac{f'(x) - f'(a)}{x - a} < 0 \quad \text{kdykoliv } x \in U_a(\delta) \smallsetminus \{a\}.$$

Celkem tedy $f'(a) > f'(x)$ kdykoliv $x \in (a, a+\delta)$. Z Lagrangeovy věty aplikované na interval $\langle a, x \rangle$ a funkci f plyne existence c takového, že

$$f(x) = f(a) + f'(c)(x-a) < f(a) + f'(a)(x-a)$$

pro libovolné $x \in (a, a+\delta)$, což je ve sporu s konvexitou f v bodě a. $\square$

Poznámka k zobecnění konvexity a konkavity

Pojem konvexity a konkavity lze zavést i obecněji bez potřeby využívat pojem tečny a tedy diferencovatelnosti. Například v pojetí předchozího textu funkce $|x|$ není konvexní (na $\mathbb{R}$), v nule nemá derivaci. Tento problém odstraňuje následující definice, na které v různých zdrojích také můžete narazit.

Definice 9.9: Funkci f definovanou na intervalu J nazveme **konvexní na intervalu** (resp. **konkávní na intervalu**) J, právě když pro každé $x_1, x_2, x_3 \in J$ splňující $x_1 < x_2 < x_3$, leží bod $(x_2, f(x_2))$ buďto pod (resp. nad) přímkou spojující body $(x_1, f(x_1))$ a $(x_3, f(x_3))$, nebo na ní.

Definice 9.10: Funkci f definovanou na intervalu J nazveme **ryze konvexní na intervalu** (resp. **ryze konkávní na intervalu**) J, právě když pro každé $x_1, x_2, x_3 \in J$ splňující $x_1 < x_2 < x_3$, leží bod $(x_2, f(x_2))$ pod (resp. nad) přímkou spojující body $(x_1, f(x_1))$ a $(x_3, f(x_3))$.

9.8 Kritéria pro hledání lokálních extrémů

Vedle definice (Definice 9.4) můžeme k hledání extrémů využít i dvě kritéria, která si nyní ukážeme. První z nich přirozeně využívá znalost monotonie, kterou jak už víme můžeme získat ze znalosti první derivace.

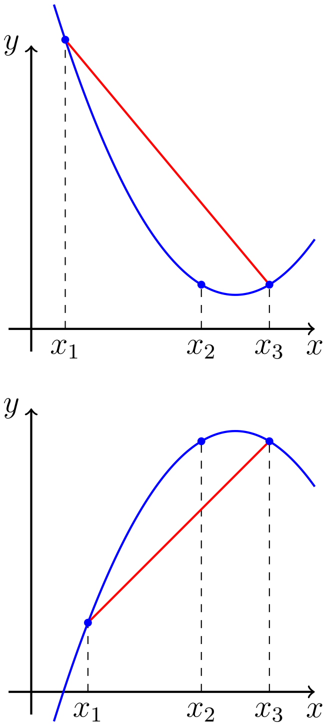
Věta 9.9 (O lokálních extrémech a monotonii)**:** Mějme funkci f a bod $a \in D_f$ takové, že f je spojitá v bodě a. Potom pokud

- f je (ostře) rostoucí na nějakém levém okolí bodu a a (ostře) klesající na nějakém pravém okolí bodu a, potom má f v bodě a (ostré) lokální maximum.
- f je (ostře) klesající na nějakém levém okolí bodu a a (ostře) rostoucí na nějakém pravém okolí bodu a, potom má f v bodě a (ostré) lokální minimum.

Důkaz. Přímočaré ověření definice lokálního extrému (Definice 9.4). □

Důsledek 9.1 (O lokálních extrémech a první derivaci)**:** Mějme funkci f diferencovatelnou na okolí bodu $a \in D_f$. Pokud derivace funkce f v bodě a mění znaménko, potom má v bodě a ostrý lokální extrém.

Důkaz. Stačí si vybavit větu spojující derivaci a monotonii (Věta 9.7) a využít předchozí Větu 9.9. □



Obrázek 9.11: Ilustrace k Definici 9.9.

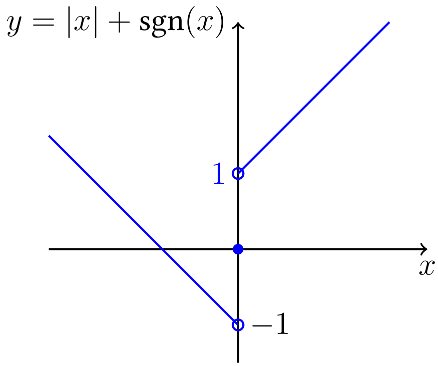
Příklad 9.12: Požadavek spojitosti v předchozí větě je podstatný. Například funkce $f(x) = |x| + \operatorname{sgn}(x)$ je ostře rostoucí na $(0, +\infty)$ a ostře klesající na $(-\infty, 0)$, ale v bodě 0 nemá (ostré) lokální minimum. Viz Obrázek 9.12.

Příklad 9.13: Na funkci $f(x) = |x|$ je už předchozí věta (Věta 9.1) aplikovatelná:

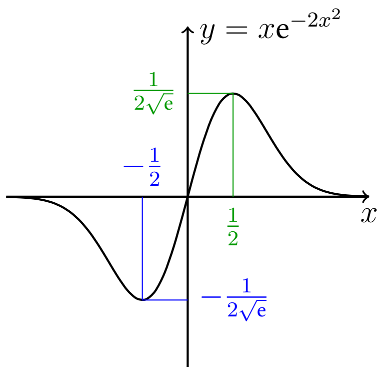
- f je spojitá (jistě i v bodě 0),
- pro $x > 0$ je $f'(x) = 1$ a je proto ostře rostoucí na $(0, +\infty)$,
- pro $x < 0$ je $f'(x) = -1$ a je proto ostře klesající na $(-\infty, 0)$.

Funkce f má v bodě 0 ostré lokální minimum (což ale víme i jednodušeji přímo z definice).

Příklad 9.14: Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x) = x\mathrm{e}^{-2x^2}$.



Obrázek 9.12: Funkce $f(x) = |x| + \mathrm{sgn}(x)$ má vpravo od nuly derivaci 1 (kladnou) a vlevo od nuly derivaci -1 (zápornou). V bodě 0 ovšem nemá lokální extrém.



Obrázek 9.13: Graf funkce z Příkladu 9.14.

Řešení. Pro derivaci této spojité funkce platí

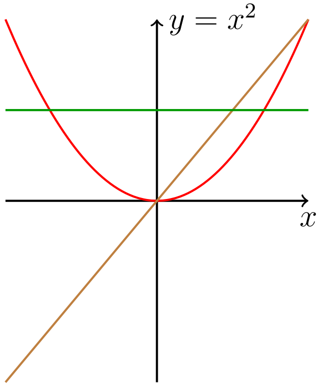
$$f'(x) = (1 - 4x^2)\mathrm{e}^{-2x^2}.$$

Proto je $f'(x) > 0$ pro $|x| < 1/2$ a $f'(x) < 0$ pro $|x| > 1/2$. Funkce f je proto ostře klesající na intervalech $(-\infty, -1/2\rangle$ a $\langle 1/2, +\infty)$ a ostře rostoucí na $\langle -1/2, 1/2\rangle$.

Má proto ostré lokální maximum v bodě $1/2$ a ostré lokální minimum v bodě $-1/2$. Pro ilustraci viz Obrázek 9.13

Dále lze k odhalení extrémů použít i konvexitu/konkavitu, resp. druhou derivaci.

Věta 9.10 (O lokálních extrémech a konvexitě/konkavitě)**:** Nechť pro funkci f a bod $c \in D_f$ platí $f'(c) = 0$.



Obrázek 9.14: Ilustrace k Příkladu 9.15, tedy graf funkce $f(x) = x^2$ (červená) a její první (hnědá) a druhé (zelená) derivace.

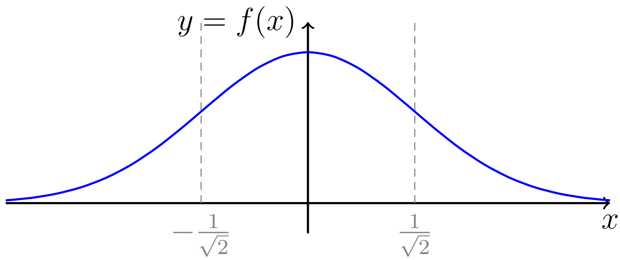
- Pokud je f (ryze) konvexní v bodě c, pak má funkce f v bodě c (ostré) lokální minimum.
- Pokud je f (ryze) konkávní v bodě c, pak má funkce f v bodě c (ostré) lokální maximum.

Důkaz. Stačí si uvědomit, že tečna v bodě c je za uvedených předpokladů dána přímkou $y = f(c)$ a využít definici konvexity/konkavity funkce f v bodě c. □

Poznámka 9.3: Tato věta se často používá pokud víme, že f má kladnou (nebo zápornou) druhou derivaci na okolí bodu c.

Příklad 9.15: K zorientování se mezi různými znaménky derivací a souvislostí s monotonií, resp. konvexitou/konkavitou, může pomoci jednoduchý příklad známé funkce.

Funkce $f(x) = x^2$ má první derivaci $f'(x) = 2x$, která je kladná pro $x > 0$ a záporná pro $x < 0$ a nulová pro $x = 0$. Druhá derivace $f''(x) = 2$ je vždy kladná. Funkce f je ostře rostoucí na $\langle 0, +\infty)$ a ostře klesající na $(-\infty, 0\rangle$. V bodě 0 má ostré lokální minimum. Je konvexní na celém $\mathbb{R}$.



Obrázek 9.15: Inflexní body.

9.9 Inflexní body a asymptoty

Body, kde se mění konvexita na konkavitu, případně naopak, jsou důležité pro tvar grafu funkce. Zavádí se pro ně proto zvláštní označení.

Definice 9.11 (Inflexní bod)**:** Nechť f je spojitá v bodě c. Bod c nazýváme **inflexním bodem** funkce f, právě když existuje $\delta > 0$ takové, že f je ryze konvexní na intervalu $(c-\delta, c)$ a ryze konkávní na intervalu $(c, c+\delta)$, nebo naopak.

Příklad 9.16: Nalezněte inflexní body funkce $f(x) = e^{-x^2}$.

Řešení. Je potřeba vypočíst druhou derivaci zadané funkce,

$$f'(x) = -2xe^{-x^2},$$
$$f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = 2(2x^2-1)e^{-x^2}.$$

Vidíme, že znaménko druhé derivace je kladné pro $|x| > \frac{1}{\sqrt{2}}$ a záporné pro $|x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$. Funkce f je proto konvexní na $\big(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\big)$ a $\big(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\big)$ a konkávní na $\big(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\big)$. Inflexními body tedy jsou body $\frac{1}{\sqrt{2}}$ a $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. Funkce je znázorněna na Obrázku 9.15.

Konečně, poslední vlastností grafu, kterou budeme zkoumat, je existence asymptot. Rozlišujeme dva kvalitativně rozdílné případy zavedené v následující definici.

Definice 9.12 (Asymptoty funkce)**:** Řekneme, že funkce f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ **asymptotu** $x = a$, právě když limita $\lim_{x\to a+} f(x)$ nebo $\lim_{x\to a-} f(x)$ je rovna $+\infty$ nebo $-\infty$. Řekneme, že přímka $y = kx + q$ je **asymptotou** funkce f v $+\infty$, resp. v $-\infty$, když

$$\lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - kx - q\big) = 0 \text{ resp. } \lim_{x\to-\infty} \big(f(x) - kx - q\big) = 0.$$

Poznámka 9.4: Má-li být přímka $y = kx + q$ asymptotou funkce f v $+\infty$, pak nutně $0 = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)-(kx+q)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} - k$ a proto

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}. \tag{9.5}$$

Podobně

$$q = \lim_{x\to+\infty} f(x) - kx, \tag{9.6}$$

kde k jsme spočetli v předchozím bodu. Podobnou poznámku můžeme učinit i pro $-\infty$.

Příklad 9.17: Nalezněte asymptoty funkce $f(x) = \dfrac{x^2+2}{|x-1|} + 1$.

Řešení. Proberme postupně možné body, kde může mít zadaná funkce asymptotu.

Bod $x = 1$ nepatří do D_f a $\lim\limits_{x\to 1_\pm} f(x) = +\infty$. Tudíž přímka $x = 1$ je asymptotou f v bodě 1.

Hledejme asymptotu v $+\infty$,

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2}{x^2-x} + \frac{1}{x} = 1, \\ q &= \lim_{x\to+\infty} f(x) - kx = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2}{x-1} + 1 - 1 \cdot x = \lim_{x\to+\infty} \frac{2+x}{x-1} + 1 = 2. \end{aligned}$$

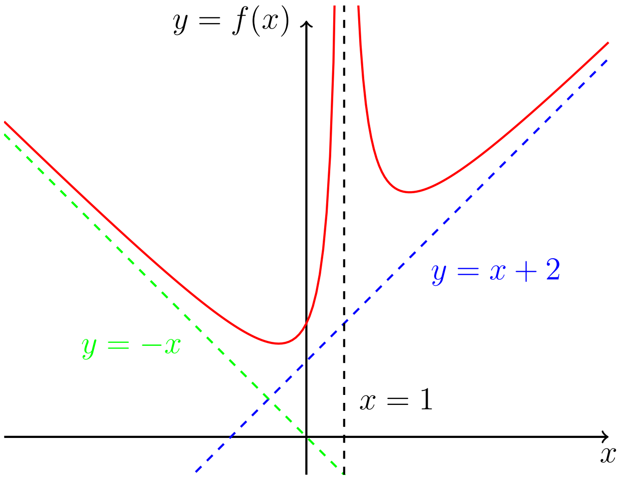
Podobně, pro asymptotu v $-\infty$ máme

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2}{-x^2+x} + \frac{1}{x} = -1, \\ q &= \lim_{x\to-\infty} f(x) - kx = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2}{-x+1} + 1 - (-1) \cdot x = 0. \end{aligned}$$

Nalezené asymptoty jsou uvedeny na Obrázku 9.16.

Varování 9.2: Nepleťte si asymptoty a tečny! V obou případech jde o přímky, ale s poměrně odlišnými vlastnostmi.

Otázka 9.4: Může se asymptota v $+\infty$ vícenásobně protínat s grafem dané funkce?



Obrázek 9.16: Asymptoty funkce.

9.10 Shrnutí: vyšetřování průběhu funkce

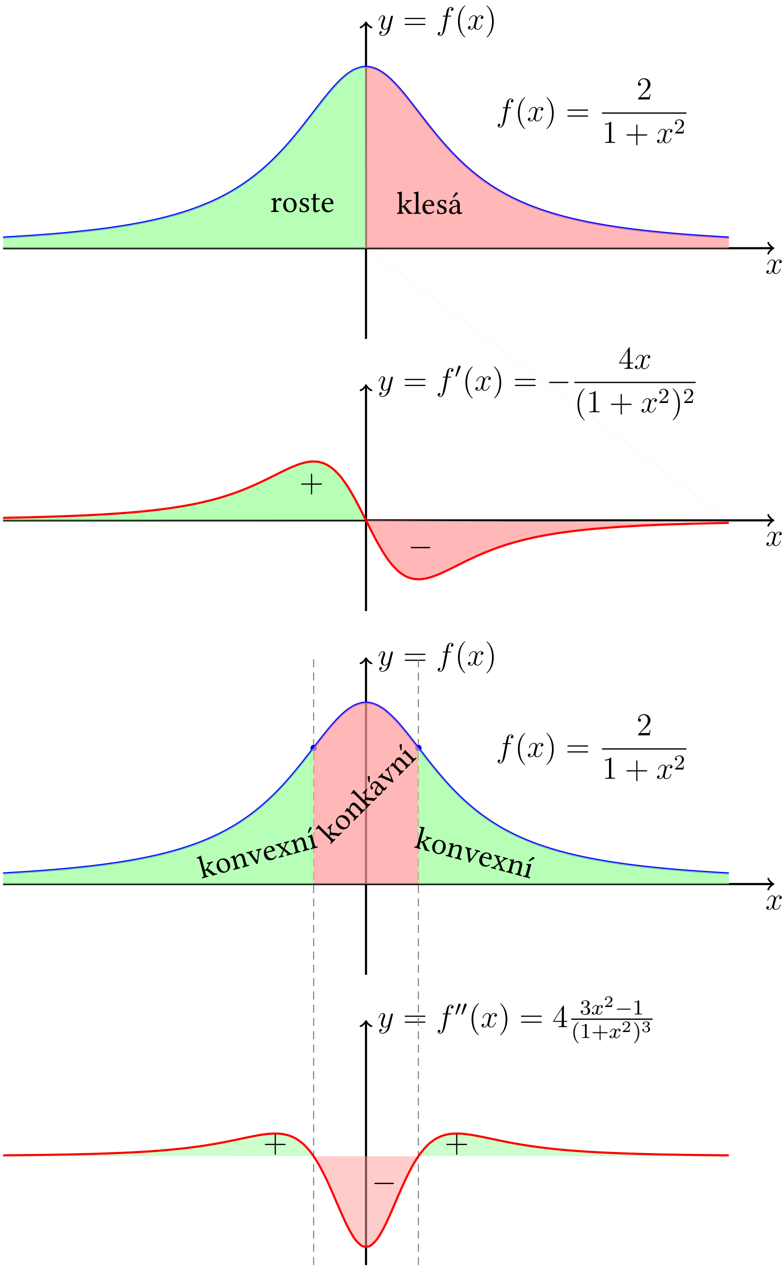
Shrňme si vztah mezi funkcí a její první a druhou derivací na několika názorných ukázkách, viz Obrázek 9.17.

Poznámka 9.5: Na závěr této podkapitoly poznamenejme co máme na mysli pod *vyšetřováním průběhu funkce*. Při vyšetřování průběhu funkce f zkoumáme:

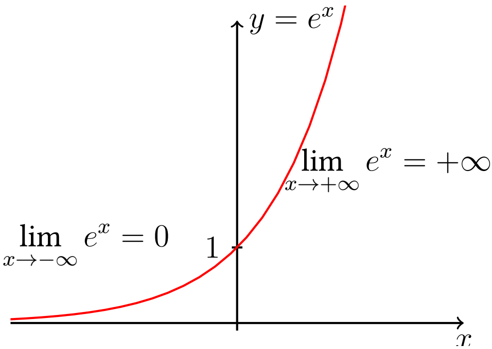
1. definiční obor funkce f, průsečíky grafu s osami, symetrie (sudost, lichost, periodicita),
2. spojitost, body nespojitosti, existenci asymptot, limity v krajních bodech definičního oboru (do této kategorie případně zahrnujeme i $+\infty$ a $-\infty$),
3. existenci derivace f', monotonii funkce, lokální a globální extrémy,
4. existenci druhé derivace f'', konvexnost a konkávnost,
5. na základě těchto výsledků načrtneme graf funkce f.

9.11 Příklady

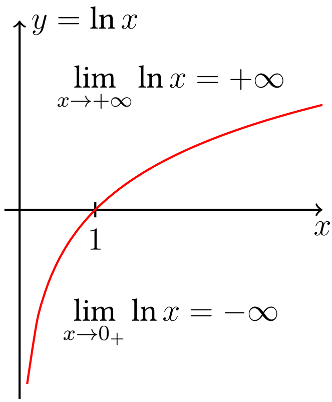
Nejprve si ukážeme vyšetřování průběhu na velmi jednoduchých příkladech.



Obrázek 9.17: Vztah první derivace a monotonie funkce, druhé derivace a konvexnosti resp. konkávnosti.



Obrázek 9.18: Graf funkce e^x.



Obrázek 9.19: Grafu funkce $\ln x$.

Příklad 9.18: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = e^x$.

Řešení. Protože $f'(x) = f''(x) > 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$ je funkce $f(x)$ rostoucí a konvexní na celém $\mathbb{R}$. Asymptota funkce existuje pouze v $-\infty$ a její přímkou je $y = 0$. Graf této známé funkce uvádíme na obrázku 9.18.

Příklad 9.19: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \ln x$.

Řešení. Nyní $D_f = (0, +\infty)$ a $f'(x) = \frac{1}{x} > 0$ a $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ pro každé $x > 0$. Tudíž f je rostoucí a konkávní, jedinou asymptotou je přímka $x = 0$. Graf této známé funkce uvádíme na obrázku 9.19.

Příklad 9.20: Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \sqrt[3]{3x^2 - x^3}.$$

Řešení. Odmocnina je lichá, tedy $D_f = \mathbb{R}$. Průsečík s osou y je $f(0) = 0$. Průsečíky s osou x jsou řešením rovnice

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2(3-x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 0 \text{ a } x_2 = 3.$$

Odtud ihned plyne, že funkce nemůže být sudá, lichá ani periodická (ve všech těchto případech by muselo být průsečíkem i $x = -3$).

Funkce je spojitá na celém $\mathbb{R}$. Zkoumejme existenci asymptot v $\pm\infty$,

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{\frac{3}{x} - 1} = -1, \\ q &= \lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - kx\big) = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{3x^2 - x^3} + x = 1. \end{aligned}$$

Přímka $y = -x + 1$ je tedy asymptotou v $+\infty$ i $-\infty$.

Pro derivaci funkce f platí

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x - x^2}{(3x^2 - x^3)^{2/3}}, & x \neq 0, 3, \\ -\infty, & x = 3, \\ \text{neexistuje}, & x = 0. \end{cases}$$

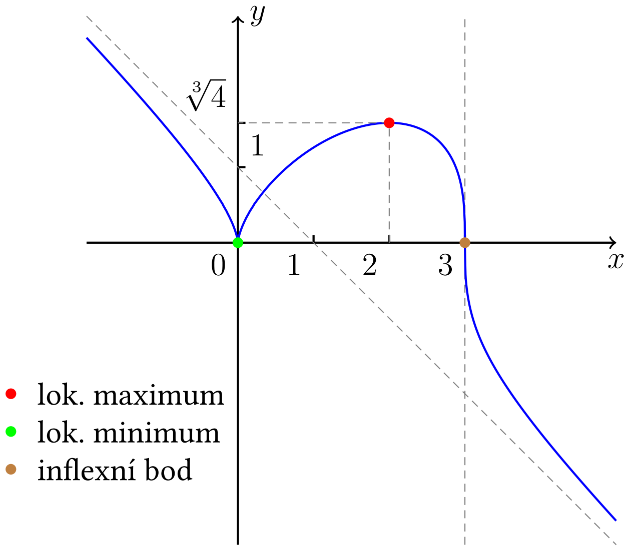
Nulovým bodem derivace je 2. Kandidáty na lokální extrém jsou tudíž body 0 (derivace neexistuje) a 2 (derivace je 0). Z první derivace podle znaménka určíme typ monotonie.

interval	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, 3)$	$(3, +\infty)$
znaménko f'	$-$	$+$	$-$	$-$
monotonie f	klesá	roste	klesá	klesá

Spojitost funkce na celém $\mathbb{R}$ implikuje lokální minimum v bodě 0 ($f(0) = 0$) a maximum v bodě 2 ($f(2) = \sqrt[3]{4}$). Navíc ze spojitosti na $\mathbb{R}$ a z limit $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \mp\infty$ plyne $H_f = \mathbb{R}$.

Pro druhou derivaci v bodech $x \neq 0, 3$ dostáváme

$$f''(x) = \frac{2x^{-4/3}}{(x-3)^{5/3}}.$$



Obrázek 9.20: Průběh funkce $f(x) = \sqrt[3]{3x^2 - x^3}$.

Znaménko závisí pouze na znaménku jmenovatele (čitatel je kladný),

interval	$(-\infty, 0)$	$(0, 3)$	$(3, +\infty)$
znaménko f''	$-$	$-$	$+$
	konkávní	konkávní	konvexní

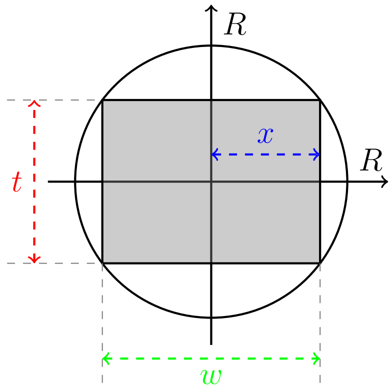
Nyní můžeme načrtnout graf funkce f, viz Obrázek 9.20.

Příklad 9.21: Tuhost T trámu s obdélníkovým průřezem je úměrná součinu jeho šířky (horizontální rozměr) w a třetí mocnině tloušťky (vertikální rozměr) t. Při jakých rozměrech lze dosáhnout největší tuhosti trámu, máme-li k dispozici strom o kruhovém průřezu s poloměrem R?

Řešení. Parametrizujme trám pomocí parametru x podle Obrázku 9.21. Tedy $w = 2x$ a $t = 2\sqrt{R^2 - x^2}$. Uvažujeme $2x = w \in \langle 0,\ 2R \rangle$, resp. $x \in \langle 0, R \rangle$.

Tudíž,

$$T(x) = c \cdot w \cdot t^3 = 2^4 \cdot c \cdot x\left(R^2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}}.$$



Obrázek 9.21: Parametrizace problému s trámem.

Hledáme extrém této funkce, derivací je

$$T'(x) = 2^4 \cdot c \cdot \left(\left(R^2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}} - 3x^2 \cdot \sqrt{R^2 - x^2} \right) = 2^4 \cdot c \cdot \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \left(R^2 - 4x^2\right).$$

Nulovým bode derivace je bod $x_* = \frac{R}{2}$. Funkci T vyšetřujeme pouze na intervalu J. Vidíme, že na intervalu $\left(0, \frac{R}{2}\right)$ funkce T roste a na intervalu $\left(\frac{R}{2}, R\right)$ klesá. V bodě x_* tudíž nastává lokální maximum. Pro extremální rozměry trámu platí

$$w_* = 2x_* = R \quad \text{a} \quad t_* = 2\sqrt{R^2 - x_*^2} = \sqrt{3}R.$$

Příklad 9.22 (Newtonův trojzubec)**:** Vyšetřete průběh funkce (včetně konvexnosti/konkávnosti)

$$f(x) = \frac{1}{x} + x^2.$$

Načrtněte graf této funkce.

Řešení. Definičním oborem je očividně množina $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. f je spojitá v každém bodě množiny D_f. Vypočtěme derivaci,

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + 2x = \frac{2x^3 - 1}{x^2}.$$

Znaménko derivace je, vzhledem ke kladnosti jmenovatele, kontrolováno výrazem $2x^3 - 1$. Dostáváme

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\Leftrightarrow x > 2^{-1/3}, \\ f'(x) < 0 &\Leftrightarrow x < 2^{-1/3} \text{ a } x \neq 0, \\ f'(x) = 0 &\Leftrightarrow x = 2^{-1/3}. \end{aligned}$$

Funkce f je rostoucí na intervalu $(2^{-1/3}, +\infty)$ a klesající na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, 2^{-1/3})$. V bodě $a = 2^{-1/3}$ má tedy funkce f lokální minimum (na pravém okolí bodu a je rostoucí, na levém okolí bodu a je klesající a je spojitá v bodě a). Podívejme se na limity v nekonečnech a v bodě 0,

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} + x^2 = +\infty, \qquad \lim_{x \to 0\pm} \frac{1}{x} + x^2 = \pm\infty.$$

Funkce f není spojitě dodefinovatelná v bodě 0. Přímka s rovnicí $x = 0$ je asymptotou funkce f v bodě 0. Asymptoty v nekonečnech neexistují,

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^2} + x = \pm\infty.$$

Vyšetřeme konvexitu a konkavitu. Pro druhou derivaci platí

$$f''(x) = \frac{6x^2 \cdot x^2 - (2x^3 - 1) \cdot 2x}{x^4} = 2\frac{x^3 + 1}{x^3}.$$

Odtud vidíme, že

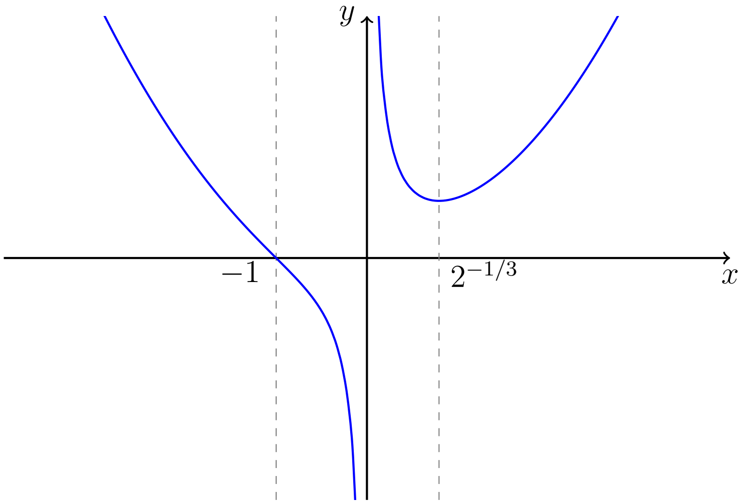
$$\begin{aligned} f''(x) > 0 &\Leftrightarrow x < -1 \text{ nebo } 0 < x, \\ f''(x) < 0 &\Leftrightarrow -1 < x < 0, \\ f''(x) = 0 &\Leftrightarrow x = -1. \end{aligned}$$

Funkce f je proto konvexní na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(0, +\infty)$, konkávní na intervalu $(-1, 0)$. V bodě $x = -1$ má inflexní bod.

Na základě těchto informací nyní můžeme nakreslit graf (viz Obrázek 9.22).

Příklad 9.23 (O průměru)**:** Mějme $n \in \mathbb{N}$ reálných hodnot $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, které se mohou i opakovat. Označme

$$\bar{x} := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k$$



Obrázek 9.22: Newtonův trojzubec.

průměr těchto hodnot. Ukažte, že průměr $\bar{x}$ minimalizuje funkci

$$E(t) := \sum_{k=1}^{n} (t - x_k)^2, \quad t \in \mathbb{R},$$

tedy součet kvadrátů odchylek t od všech $x_1, \ldots, x_n$.

Řešení. Uvedené tvrzení si lze rozmyslet dvěma způsoby. První využívá pouze znalostí vlastností paraboly. Stačí si totiž povšimnout, že funkční hodnotu $E(t)$ lze po roznásobení závorek a změně pořadí sčítání přepsat do tvaru

$$E(t) = nt^2 - 2t \sum_{k=1}^{n} x_k + \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$

Jedná se tedy o kvadratickou funkci v proměnné t. Protože $n > 0$, tedy koeficient u kvadratického členu je kladný, má tato funkce právě jedno ostré globální minimum v bodě t_* (stačí použít vzorec pro horizontální souřadnici vrcholu paraboly)

$$t_* = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k,$$

který je právě zmíněným průměrem.

Druhý způsob argumentace rovnou využívá diferenciálního počtu. Pro derivaci funkce E v bodě t zřejmě platí (derivace součtu a složené funkce)

$$E'(t) = 2\sum_{k=1}^{n}(t - x_k) = 2nt - 2\sum_{k=1}^{n} x_k$$

a je proto nulová právě v bodě

$$t_* = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k,$$

neboli průměru $\bar{x}$. Jde skutečně o ostré minimum, neboť

$$E''(t) = 2n > 0.$$

Žádný jiný extrém tato funkce nemá.

Následující příklad tento úhel pohledu rozvíjí i pro medián.

Příklad 9.24 (O mediánu)**:** Mějme $n \in \mathbb{N}$ reálných hodnot $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, které se mohou i opakovat. Označme jako x_* jejich **medián**. Ukažte, že medián x_* minimalizuje funkci

$$E(t) := \sum_{k=1}^{n} |t - x_k|, \quad t \in \mathbb{R},$$

tedy součet absolutních odchylek t od všech $x_1, \ldots, x_n$.

Řešení. Na rozdíl od Příkladu 9.23 se v tomto případě už nemůžeme opřít o jednoduchou geometrii (znalost tvaru paraboly). Diferenciální počet nás ovšem zachrání. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že máme zadané hodnoty setříděné podle velikosti, tj. platí $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$.

Nejprve si povšimněme, že E je spojitá funkce (součet spojitých funkcí). V bodech $t = x_k$, $k \in \hat{n}$, nemá derivaci (stejný problém jako $|\cdot|$ v nule). Pro t různé od všech x_k, $k \in \hat{n}$, platí

$$E(t) = \sum_{\substack{k=1 \\ x_k > t}}^{n}(-t + x_k) + \sum_{\substack{k=1 \\ x_k < t}}^{n}(t - x_k).$$

V první sumě zde sčítáme pouze přes ta k, pro které $x_k > t$. V druh0 sumě pak naopak pouze přes ta k, pro která $x_k < t$. Proto pro derivaci funkce E v bodě t, různém od všech x_k, $k \in \hat{n}$, dostáváme

$$E'(t) = \sum_{\substack{k=1 \\ x_k > t}}^{n} (-1) + \sum_{\substack{k=1 \\ x_k < t}}^{n} 1. \tag{9.7}$$

Speciálně platí $E'(t) = -n$ pro $t < x_1$ a $E'(t) = n$ pro $t > x_n$. Dále z předpisu pro derivaci vidíme, že derivace je mimo x_k konstantní a překročení hodnoty x_k (zleva doprava) má za následek změnu derivace o dvojnásobek počtu $\ell \in \hat{n}$, pro které $x_k = x_\ell$.

Nyní mohou nastat dvě kvalitativně rozdílné situace.

1. Počet hodnot, n, je sudý a současně jsou hodnoty $a := x_{\frac{n}{2}}$ a $b := x_{\frac{n}{2}+1}$ vzájemně různé. V tomto případě z rovnice (9.7) ihned vidíme, že kdykoliv je t mez těmito hodnotami a a b, pak $E'(t) = 0$. Funkce E je konstantní na intervalu $\langle a, b \rangle$ a v každém bodě tohoto intervalu má neostré lokální (globální) minimum. V tomto případě se většinou medián uvedených hodnot bere jako průměr $x_* = \frac{a+b}{2}$. Ale vidíme, že to je jen jedna z možných hodnot minimalizujících E.

2. Nechť nenastává předchozí situace. Tj. n je liché, nebo je sice sudé, ale $x_{\frac{n}{2}} = x_{\frac{n}{2}+1}$. V takovém případě se nám nepodaří přesně vynulovat $E'(t)$ a ta při přechodu přes $x_{\frac{n}{2}}$ v případě sudého n a $x_{\frac{n+1}{2}}$ v případě lichého n mění znaménko. V uvedených bodech tak má funkce lokální (globální) ostré lokální minimum. Příslušná hodnota je právě mediánem x_* uvedených hodnot.

Tím je příklad dokončen.

10 Aplikace

10.1 Newtonova metoda

K numerickému řešení rovnic typu $f(x) = 0$ existuje mnoho metod. My zatím známe jen metodu půlení intervalu (viz Větu 7.4). V této kapitole si ukážeme Newtonovu metodu (Sir Isaac Newton anglický fyzik a matematik, 1642 – 1727). Newtonův přístup podrobně prozkoumáme na následujícím příkladu.

Příklad 10.1: Vypočtěte třetí odmocninu z kladného reálného čísla c.

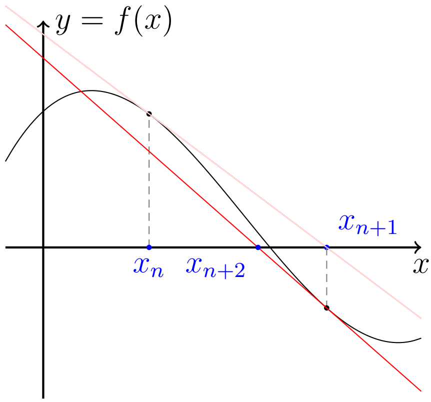
Zamyslete se, jak tento problém vyřešit, máme-li k dispozici kalkulátor umožňující pouze sčítat, odčítat, násobit a dělit čísla. Tedy operace, které může provádět stroj i člověk (s pomocí papíru). Tato otázka může vyvstat v praxi: máme-li zjistit jak velký má být poloměr kulového tankeru o daném objemu V, dostáváme $r = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}V}$. Pro krychli dostaneme délku hrany rovnou $a = \sqrt[3]{V}$. Vedle toho třetí odmocnina je jistě sama o sobě zajímavá funkce, jejíž funkční hodnotu je občas potřeba umět vyhodnotit.

Buď $c > 0$. Označme hledanou třetí odmocninu symbolem x, tj. $x = \sqrt[3]{c}$ (toto je ale jen symbolický zápis, jakou hodnotu x pro zadané c má?). Ekvivalentně to znamená řešit rovnici $x^3 = c$ s neznámou c. Označíme-li $f(x) := x^3 - c$, je námi hledané číslo x *řešením rovnice*

$$f(x) = 0.$$

Tuto úlohu bychom se mohli pokusit řešit nám již známou metodou půlení intervalu (jaké dva počáteční body byste zvolili?). Nyní si však ukážeme další způsob, tzv. Newtonovu metodu.

Myšlenka Newtonovy metody spočívá v konstrukci posloupnosti $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ aproximující řešení rovnice $f(x) = 0$. Konstrukce posloupnosti je následující:



Obrázek 10.1: Dvě iterace Newtonovy metody.

1. Je dáno x_n.
2. Sestroj tečnu funkce f v bodě x_n: $y = f(x_n) + f'(x_n) \cdot (x - x_n)$.
3. Průsečík této tečny s osou x nechť je další člen posloupnosti, tj. $x_{n+1} := x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.
4. Opakuj s x_{n+1} místo x_n.

Graficky je tento proces znázorněn na obrázku 10.1.

Z předchozího obrázku se může zdát, že vše je jasné. Ihned se však nabízí následující otázky:

- Jak zvolit první člen posloupnosti? Závisí výsledek metody na této volbě?
- Má rovnice $f(x) = 0$ vůbec řešení?
- Konverguje takto zkonstruovaná posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$?
- Co když $f'(x_n) = 0$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$?

Odpovědí na tyto otázky se v obecném případě nebudeme zabývat. Vraťme se k našemu konkrétnímu případu s třetí odmocninou, kde uvidíme jak na některé z nich odpovědět.

Shrňme si dosavadní výsledky. Je dáno $c > 0$ a funkce $f(x) = x^3 - c$. Newtonova metoda nám dává rekurentní vztah

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - c}{3x_n^2} = \frac{2}{3}x_n + \frac{c}{3x_n^2}.$$

V našem případě si lze snadno všimnout, že:

- Funkce f je prostá, $f\big((0, +\infty)\big) = (-c, +\infty)$ a tudíž *existuje právě jedno* kladné řešení rovnice $f(x) = 0$. (Tj. vyšetřili jsme průběh funkce f a zjistili jsme, že rovnice má právě jedno řešení.)

- Konverguje-li posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ke konečné kladné limitě a, tedy platí $a = \lim_{n\to\infty} x_n$ a současně $a = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}x_n + \frac{c}{3x_n^2}\right) = \frac{2}{3}a + \frac{c}{3a^2}$. Tudíž a je hledané řešení, $a^3 = c$, nebo-li $f(a) = 0$.

Nyní si tedy zbývá rozmyslet, jestli naše posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ skutečně konverguje.

Věta 10.1: Buď $c > 0$ a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ posloupnost kladných reálných čísel splňující rekurentní vztah

$$x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{c}{3x_n^2}, \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

Potom tato posloupnost konverguje ke konečné kladné limitě.

Důkaz. Položme $g(x) := \frac{2}{3}x + \frac{c}{3x^2}$ pro $x > 0$. Vyšetřením průběhu zjistíme, že $g(x) \geq \sqrt[3]{c}$, kde rovnost nastává právě tehdy, když $x = \sqrt[3]{c}$. Tudíž:

- Pokud $x_1 = \sqrt[3]{c}$, potom $x_n = \sqrt[3]{c}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

- Pokud $x_1 > \sqrt[3]{c}$, potom $x_n > \sqrt[3]{c}$ pro libovolné $n \in \mathbb{N}$. Navíc posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je klesající: $x_{n+1} - x_n = \frac{c - x_n^3}{3x_n^2} < 0$, a zdola omezená číslem $\sqrt[3]{c}$. Tudíž je konvergentní s konečnou limitou.

- Pokud $0 < x_1 < \sqrt[3]{c}$, pak $x_2 > \sqrt[3]{c}$ a můžeme použít předchozí bod. □

Nyní víme, že posloupnost konverguje nezávisle na volbě první aproximace. To je dobré, ale k praktickému použití nedostatečné. Kdy máme iteraci zastavit? Je potřeba odhadnout chybu mezi členy posloupnosti a skutečnou (*neznámou*) hodnotou hledané třetí odmocniny.

Důsledek 10.1 (Odhad chyby)**:** Buď $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ posloupnost popsaná v předešlé větě. Potom platí

$$0 \leq x_{n+1} - \sqrt[3]{c} \leq 2(x_n - x_{n+1}), \quad \text{pro } n = 2, 3 \ldots.$$

Důkaz. Z předešlé věty víme, že pro $n = 2, 3, \ldots$ jistě platí $\sqrt[3]{c} \leq x_{n+1} \leq x_n$. Potom pro tato n platí i

$$0 \leq x_{n+1} - \sqrt[3]{c} = -2x_{n+1} + 3x_{n+1} - \sqrt[3]{c} = -2x_{n+1} + 2x_n + \underbrace{\frac{c}{x_n^2} - \sqrt[3]{c}}_{\leq 0} \leq 2(x_n - x_{n+1}).$$

□

Poznámka 10.1: Toto je pro praktické účely *velmi* důležitý výsledek. Pomocí dvou naposledy vypočtených členů posloupnosti můžeme odhadnout chybu mezi posledním členem a skutečnou hodnotou $\sqrt[3]{c}$ (tu neznáme!) a tím *dodržet požadovanou přesnost.*

Shrňme si vlastnosti Newtonovy metody aplikované na problém hledání třetí odmocniny. Posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ zadaná rekurentně vztahem

$$x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{c}{3x_n^2}, \quad n \in \mathbb{N},$$

konverguje pro libovolně zvolené $x_1 > 0$ k číslu $\sqrt[3]{c}$. Chybu mezi x_n a skutečnou hodnotou $\sqrt[3]{c}$ lze odhadnout pomocí posledních dvou vypočtených členů:

$$0 < x_{n+1} - \sqrt[3]{c} < 2(x_n - x_{n+1}), \quad n = 2, 3, \ldots.$$

Tato informace nám umožňuje výpočet zastavit po dosažení požadované přesnosti.

Jako ukázku použití metody uvádíme Tabulku 10.2 s výpočtem třetí odmocniny z čísla 7. Jako první iteraci volíme číslo 7 samotné. To není optimální volba.

Na výpočtu v Tabulce 10.2 lze pozorovat, že od 6. iterace se počet správných cifer přibližně zdvojnásobuje. Tento efekt nazýváme **kvadratickou konvergencí** a přesně ho pro naši posloupnost formulujeme níže.

Věta 10.2: Je-li $c > 1$ a $x_1 > \sqrt[3]{c}$, pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$x_{n+1} - \sqrt[3]{c} \leq \left(x_n - \sqrt[3]{c}\right)^2.$$

Důkaz. Vynecháváme. □

Je-li tedy chyba n-tého členu například 10^{-5}, pak chyba dalšího členu je již pouze 10^{-10}!

Člen posloupnosti	Hodnota
x_1	7,0
x_2	4,714285714285714285714285714285714429
x_3	3,247846429664611482793300975119156 94
x_4	2,386431304900375939356688957580011 12
x_5	2,000666416795918176357774580392267 67
x_6	1,916722395612086993699326262678646 00
x_7	1,912938676720493702886648330496511 71
x_8	1,912931182801746647022804241458421 54
x_9	1,912931182772389101199567386596418 93
x_{10}	1,912931182772389101199116839548760 30
$\sqrt[3]{7}$	1,912931182772389101199116839548760 28

Tabulka 10.2: Výpočet třetí odmocniny ze sedmi pomocí Newtonovy metody. Poslední řádek obsahuje přesnou hodnotu zaokrouhlenou na 36 desetinných míst.

Newtonova metoda: záludnosti

Rekurentní posloupnost pocházející z Newtonovy metody se pro „špatně“ zvolenou počáteční podmínku může chovat neočekávaně. Například může oscilovat (tj. posloupnost vůbec nebude mít limitu), nebo může divergovat do nekonečna.

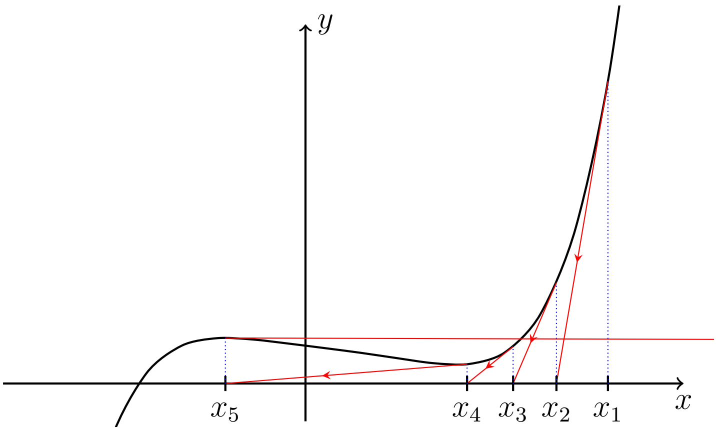
Příklad 10.2: Zkoumejte chování Newtonovy metody aplikované na $p(x) = x^5 - x^4 - x + 2$ s počátečním bodem $x_1 = 2$. Rekurentní vzorec Newtonovy metody v tomto případě zní

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^5 - x_n^4 - x_n + 2}{5x_n^4 - 4x_n^3 - 1}.$$

Na obrázku uvádíme prvních několik členů této rekurentní posloupnosti

10.2 Kubická interpolace

Jak v tomto textu vlastně vykreslujeme grafy funkcí? Většinou nejjednodušším způsobem: tzv. lineární interpolací.



Obrázek 10.2: Patologické chování posloupnosti aproximací generovaných Newtonovou metodou. Problém zřejmě spočívá ve špatné volbě počáteční aproximace.

Postup je jednoduchý: pro vykreslení grafu funkce $f(x) := 1 - x^2$ na intervalu $\langle -1, 1\rangle$ postupně

1. zvolme n vzorkovacích bodů $x_i = -1 + \frac{2}{n-1} \cdot (i-1)$, $i = 1, 2, \ldots, n$,
2. vypočtěme vzorky $f(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$,
3. spojme sousední body $(x_i,\ f(x_i))$ a $(x_{i+1},\ f(x_{i+1}))$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, přímkou.

Pro dobrý výsledek je nutné volit vzorkovací mřížku dostatečně hustou. Ukázka tohoto procesu v závislosti na různém počtu bodů je uvedena na Obrázku 10.3.

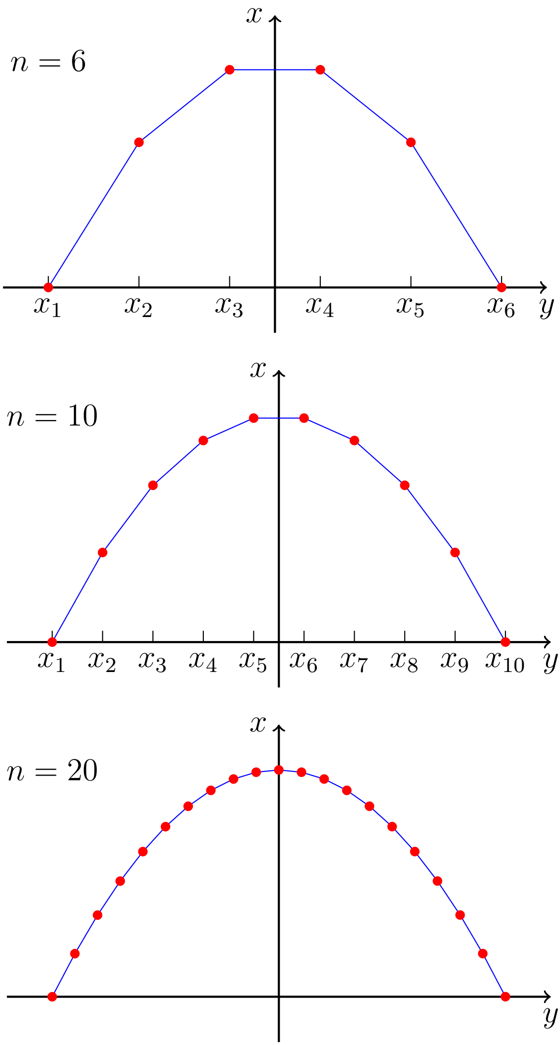
Formálně lze úlohu **interpolace** popsat pro naše účely následovně. Mějme množinu $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, bodů v rovině $\{(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2 \mid i \in \hat{n}\}$ takových, že $x_i < x_{i+1}$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Úkolem je nalézt spojité funkce f_j, $j = 1, 2, \ldots, n-1$, splňující

$$\begin{aligned} f_1(x_1) &= y_1, & f_{n-1}(x_n) &= y_n, \\ f_j(x_j) &= f_{j+1}(x_j) = y_j, & \text{pro } j &= 2, 3, \ldots, n-1. \end{aligned}$$

Sestrojíme-li pak funkci f s $D_f = \langle x_1, x_n\rangle$ předpisem

$$f(x) := f_j(x) \text{ pokud } x \in \langle x_j, x_{j+1}\rangle,$$

pak je tato funkce spojitá a její graf prochází všemi body (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$.



Obrázek 10.3: Ukázka lineární interpolace rovnoměrně rozprostřených vzorků funkce $f(x) = 1 - x^2$ na intervalu $\langle -1, 1\rangle$.

Samozřejmě *existuje celá řada způsobů*, jak tuto úlohu vyřešit. Typicky musíme specifikovat jaké funkce f uvažujeme a doplnit další požadavky.

10.3 Popis složitosti algoritmů

Mnoho problémů lze řešit různými způsoby, různými algoritmy. Tyto algoritmy bychom rádi porovnávali z různých pohledů. K tomu se velmi hodí použít asymptotické vztahy zavedené v předchozí části textu. Nejprve si ale ujasněme koncepční rámec, v kterém se pohybujeme

- **Výpočetní problém** P: úkol zpracovat/transformovat vstupní data I na výstupní data O s požadovanými vlastnostmi.
- **Algoritmus** A: výpočetní postup řešení problému P, čili posloupnost výpočetních kroků, která z vstupních dat vyprodukuje výstupní data požadovaných vlastností.
- **Instance problému**: problém s konkrétními daty potřebnými pro jeho řešení.

Definujeme-li „velikost“ vstupních dat I, pak můžeme zkoumat chování daného algoritmu A z různých úhlů pohledu:

- Průměrný/minimální/maximální/řádový (asymptotický) počet „elementárních operací“, nutných k získání výstupu v závislosti na velikosti vstupu.
- Průměrná/minimální/maximální/řádová (asymptotická) „paměťová náročnost“, nutná k získání výstupu v závislosti na velikosti vstupu.

10.4 Problém třídění

Jak složité je setřídit (uspořádat) zadanou n-tici objektů? Abychom na tuto otázku mohli odpovědět, tak si musíme ujasnit co přesně myslíme pod pojmem *uspořádat*, tj. pod symbolem $\leq$ a jak měřit složitost.

- *Vstup*: množina $\{x_1, \ldots, x_n\}$ a úplné uspořádání (viz podkapitolu 11.6) $\leq$ mezi jejími prvky. Velikostí vstupu rozumíme jednoduše počet prvků vstupu.

- *Výstup*: uspořádaná n-tice $(x_{k_1}, \ldots, x_{k_n})$, kde $(k_1, \ldots, k_n)$ je permutace množiny $\{1, \ldots, n\}$ a $x_{k_1} \leq \cdots \leq x_{k_n}$.
- *Elementární operace*: porovnání dvou prvků pomocí $\leq$

Bublinkový algoritmus (Bubble sort)

Pro připomenutí uvádíme kompletní algoritmus, zřejmě čtenáři známý z předmětu BI-PA1.

```
procedure bubbleSort(A : array of length n)
  for k in n-1 to 1 do
    sorted = true
    for i in 1 to k do
      if A[i] > A[i+1] then
        swap( A[i], A[i+1] )
        sorted = false
      end if
    end for
    if sorted then return A
  end for
  return A
end procedure
```

Celkový počet porovnání může být nejhůře (pokud je na vstupu seznam v přesně opačném pořadí)

$$(n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Pokud je na vstupu již setříděný seznam, pak algoritmus provede $(n-1)$ porovnání (nejlepší varianta). Označíme-li počet porovnání při konkrétním vstupu o velikosti n jako T_n, můžeme tedy shrnout, že pro složitost Bubble sort platí

$$T_n = \mathcal{O}(n^2).$$

Quick sort

Tento algoritmus pochází z roku 1961, viz [2]. Nechť je opět dán vstup $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

1. Vyber náhodně prvek ze seznamu (nazývaný *pivot*).
2. Prvky ze seznamu menší než pivot, dej do jednoho podseznamu a prvky větší do druhého podseznamu.
3. Dva kratší seznamy uspořádej podle velikosti.
4. Spoj uspořádaný první seznam, za něj dej pivota a připoj uspořádaný druhý seznam.

Algoritmus probíhá rekurentně. Uspořádání dvouprvkového seznamu je jednoduché. Označme nyní T_n *průměrný počet porovnání* pro uspořádání seznamu délky n pomocí algoritmu *Quick sort*. V příštím semestru ukážeme, že platí

$$\langle T_n \rangle = \mathcal{O}\big(n \ln(n)\big).$$

Při nešťastné volbě pivotů může být počet porovnání blízko n^2.

Vedle zde uvedených dvou algoritmů existuje celá řada dalších třídících algoritmů. Například Merge sort, který i řeší před chvílí zmíněný nedostatek. Tento algoritmus je připisován Johnovi von Neumannovi (1945).

10.5 Umocňování

Vedle problému třídění lze uvést další jednoduchou ilustraci na problému umocňování.

- *Vstup*: reálné číslo α a přirozené číslo $N \in \mathbb{N}$.
- *Výstup*: Hodnota α^N.
- *Elementární operace*: aritmetická operace (sčítání, odčítání, násobení, dělení).

Naivní implementace dle definice $\alpha^N = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{N\times}$ vyžaduje přesně $N-1$ operací násobení. Řádově jde tedy o $\mathcal{O}(N)$ (resp. $\Omega(N)$ a $\Theta(N)$) algoritmus.

Všechny tyto poznámky platí třeba i pro násobení matic, nebo čísel v konečných tělesech, chápeme-li elementární operaci jako násobení příslušných objektů.

Square-and-multiply

Typicky ale máme k dispozici binární reprezentaci čísla $N = (N_k N_{k-1} \dots N_1 N_0)_2$, kde $N_0, \dots, N_{k-1} \in \{0, 1\}$ a $N_k = 1$, tj.

$$N = \sum_{j=0}^{k} N_j 2^j.$$

Za tohoto předpokladu pak platí

$$\alpha^N = \alpha^{\sum_{j=0}^{k} N_j 2^j} = \prod_{j=0}^{k} \alpha^{N_j 2^j}.$$

Pro výpočet α^N je pak tedy potřeba získat opakovaným umocňováním α^{2^k} – to je $k - 1$ operací násobení – a násobit mezivýsledek pokud $N_j \neq 0$ – to je také nejhůře k operací násobení.

Pro square-and-multiply algoritmus tak dostáváme operační složitost řádově $2k = \mathcal{O}(\log_2 N) = \mathcal{O}(\ln N)$. Skutečně, stačí si uvědomit implikaci

$$N \geq 2^k \Rightarrow \log_2 N \geq k.$$

11 Dodatek: Definice a vlastnosti zobrazení

Tento dodatek slouží jako shrnutí terminologie týkající se zobrazení. Drtivá většina zde zmíněných pojmů by čtenáři měla být již známa z dřívějšího studia, například z předmětu BI-DML nebo i ze středoškolské matematiky. Prezentace látky v tomto dodatku je proto velmi stručná, navíc vynecháváme některé partie, které pro náš text nejsou podstatné. Hlavním smyslem této kapitoly je usnadnění dohledávání si významu konkrétního pojmu, pokud si čtenář či čtenářka při studiu hlavního textu třeba nejsou jisti.

11.1 Zobrazení

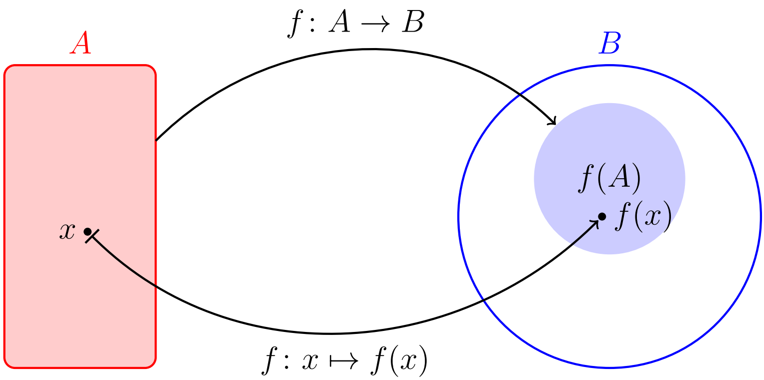
Následující tři pojmy jste studovali v předmětu BI-DML. Pro účely tohoto studijního textu používáme následující formulace definic (BI-DML, Definice), (BI-DML, Definice) a (BI-DML, Definice).

Definice 11.1 (Kartézský součin / *cartesian product*)**:** Mějme dvě množiny A a B. Množinu všech uspořádaných dvojic (a, b), kde $a \in A$ a $b \in B$ nazýváme **kartézským součinem** množin A a B a značíme ji $A \times B$.

Definice 11.2 (Relace / *relation*)**:** Mějme dvě množiny A a B. Podmnožinu R kartézského součinu A a B, tj. $R \subset A \times B$, nazýváme **relací** mezi množinami A a B.

Definice 11.3 (Zobrazení / *mapping*)**:** Mějme dvě neprázdné množiny A a B. Relaci $f \subset A \times B$ splňující podmínku

$$\text{pro každé } x \in A \text{ existuje právě jedno } y \in B \text{ tak, že } (x, y) \in f,$$



Obrázek 11.1: Zobrazení množiny A do množiny B. Oborem hodnot zobrazení f je množina $f(A)$, tj. obraz definičního oboru A při zobrazení f.

nazýváme (totálním) **zobrazením množiny** A do množiny B a tento fakt zapisujeme symbolicky jako $f\colon A \to B$. Pokud $(x, y) \in f$, pak píšeme $y = f(x)$ a o x mluvíme jako o **vzoru prvku** y a o y jako o **obrazu prvku** x při zobrazení f. O množině A dále mluvíme jako o definičním oboru zobrazení f a značíme ji D_f. Množinu $H_f := \{y \in B \mid (\exists x \in D_f)(f(x) = y)\}$ nazýváme oborem hodnot zobrazení f.

Diagram ilustrující tento pojem lze nalézt prezentovaný v Obrázku 11.1.

Varování 11.1: Obor hodnot zobrazení $f\colon A \to B$ *není nutně* celá množina B. Například pro zobrazení $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ působící dle předpisu $f(x) = 1$, $x \in D_f = \mathbb{R}$, platí $H_f = \{1\}$, což jistě není celá množina $\mathbb{R}$.

I koncept rovnosti dvou zobrazení můžeme převzít z BI-DML, konkrétně z (BI-DML, Definice).

Definice 11.4 (Rovnost zobrazení)**:** Máme-li dvě zobrazení $f\colon A \to C$ a $g\colon B \to C$ pak říkáme, že se **rovnají** a píšeme $f = g$, právě když $A = B$ a pro každé $x \in A = D_f = D_g$ platí $f(x) = g(x)$.

Poznámka 11.1: Vraťme se k příkladu zobrazení zmíněnému ve Varování 11.1. Definujeme-li dále zobrazení $g\colon \mathbb{R} \to \{1\}$ předpisem $g(x) = 1, x \in D_g = \mathbb{R}$, pak toto zobrazení není rovné (není shodné s) zobrazením f definovaným ve Varování 11.1, ačkoliv obě jsou na první pohled dané stejným předpisem.

11.2 Injekce, surjekce a bijekce

Podle dodatečných vlastností zobrazení vyčleňujeme následující tři důležité typy zobrazení. Opět jde o terminologii, kterou již důvěrně známe minimálně z definice (BI-DML, Definice).

Definice 11.5 (Důležité typy zobrazení)**:** Zobrazení $f\colon A \to B$ je

- **prosté (injektivní)**, jestliže pro každou dvojici $x_1, x_2 \in A$ pro kterou platí rovnost $f(x_1) = f(x_2)$ platí i rovnost $x_1 = x_2$.
- **na (surjektivní)**, jestliže $f(A) = B$, to jest pro každé $y \in B$ existuje $x \in A$ splňující $f(x) = y$.
- **vzájemně jednoznačné (bijektivní)**, jestliže f je prosté a na.

Pomocí kvantifikátorů lze tyto podmínky zapsat následovně:

$$
\begin{aligned}
f \text{ je prosté} \quad &\overset{\text{def}}{\iff} \quad (\forall x_1, x_2 \in A)\big(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2\big),\\
f \text{ je na} \quad &\overset{\text{def}}{\iff} \quad (\forall y \in B)(\exists x \in A)(f(x) = y).
\end{aligned}
$$

Podmínku prostoty zobrazení lze ekvivalentně vyjádřit[1] i takto:

$$
f \text{ je prosté} \quad \iff \quad (\forall x_1, x_2 \in A)\big(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)\big).
$$

Jako jednoduchý, ale obecný, příklad konkrétního zobrazení čtenáři připomeňme indentické zobrazení.

Příklad 11.1 (Identické zobrazení)**:** Buď A libovolná množina. Zobrazení $\mathrm{id}_A\colon A \to A$ definované předpisem

$$
\mathrm{id}_A(x) := x, \quad x \in A,
$$

nazýváme **identické zobrazení**. Zobrazení id_A je injektivní, surjektivní a tedy i bijektivní.

[1] Vzpomeňte na větu obměněnou.

11.3 Obraz a vzor množiny při zobrazení

Zobrazení $f: A \to B$ prvky množiny A zobrazuje[2] na prvky množiny B. Často chceme ale sledovat „globálnější" působení daného zobrazení na celých podmnožinách množiny A. Přirozeně se tak dostáváme k následujícím dvěma pojmům, se kterými jste si setkali už v (BI-DML, Definice). Ovšem pozor, v BI-DML se používá lehce odlišné značení. Není v tom ovšem problém, v daný okamžik byste měli vědět, jestli v kulatých závorkách máte uvedený jeden prvek množiny B, nebo jistou její podmnožinu.

Definice 11.6 (Obraz a vzor množiny)**:** Nechť je dáno zobrazení $f: A \to B$. Je-li $E \subset A$, pak množinu

$$f(E) := \{f(x) \in B \mid x \in E\}$$

nazveme **obrazem množiny** E **při zobrazení** f. Je-li $G \subset B$, potom množinu

$$f^{-1}(G) := \{x \in A \mid f(x) \in G\}$$

nazveme **vzorem množiny** G při zobrazení f.

Symbol pro vzor množiny, $f^{-1}(G)$, je nutno chápat jako nedělitelný. Netvrdíme nic o existenci inverzního zobrazení (tj. f^{-1}, viz Definici 11.9 níže). Všimněte si, že obrazem jednoprvkové množiny $\{x\}$ pro nějaké $x \in A$ je $f(\{x\}) = \{f(x)\}$ a tedy jednoprvková množina, opačně tak tomu být nemusí. Obor hodnot zobrazení $f: A \to B$ je v této terminologii obrazem definičního oboru, tj. $f(A) = H_f \subset B$.

Příklad 11.2: Mějme zobrazení $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definované předpisem $f(n) = n^2$ pro každé $n \in D_f = \mathbb{Z}$. Potom platí

$$f\big(\{-1,0,1,2\}\big) = \{f(-1), f(0), f(1), f(2)\} = \{1,0,1,4\} = \{0,1,4\}.$$

Tento výpočet obrazu množiny v takovémto diskrétním případě je zřejmě poměrně názorný. Pojďme určit vzor množiny $N = \{-1,0,3,4\}$. Hledáme tedy všechna celočíselná n splňující $f(n) \in N$, tj. vlastně v tomto případě postupně řešíme sadu rovnic:

$$\begin{aligned} f(n) &= n^2 = -1 && \Rightarrow && n \in \emptyset, \\ f(n) &= n^2 = 0 && \Rightarrow && n \in \{0\}, \\ f(n) &= n^2 = 3 && \Rightarrow && n \in \emptyset, \\ f(n) &= n^2 = 4 && \Rightarrow && n \in \{-2,2\}. \end{aligned}$$

[2] Jiné slovo zde bohužel použít nemohu.

Příklad tak uzavíráme s výsledkem $f^{-1}(N) = \{-2, 0, 2\}$.

Příklad 11.3: Koncept obrazu množiny při zobrazení je často využívaný v programovacích jazycích podporujících funkcionální paradigma. Například množinu[3] všech druhých mocnin všech přirozených čísel mezi 0 a 5 v Pythonu vytvoříme příkazem[4]

```
[ n ** 2 for n in range(6) ]
```

Srovnejte tento zápis s matematičtějším zápisem[5]

$$\left\{n^2 \,\middle|\, n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}\right\}.$$

Tato množina představuje obraz množiny $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ při zobrazení definovaným předpisem $f(n) = n^2, n \in D_f := \mathbb{N}$. Jedná se tedy o množinu $f(E)$. V jazyce Python tohoto faktu také můžeme využít následovně:

```
map(lambda x: x ** 2, range(6))
```

Tento zápis může být přehlednější, na rozdíl od konstrukce listu pomocí *for* cyklu.

11.4 Zúžení a skládání zobrazení

Nyní se zaměříme na způsoby jak lze ze zobrazení vyrábět nová zobrazení. Připomeneme si nejprve operaci zúžení a poté skládání. I zúžení zobrazení jste již potkali v definici (BI-DML, Definice). Dále některá zobrazení umíme sčítat a násobit, těmto operacím se ale věnujeme v hlavním textu v Definici 3.2 v případě funkcí.

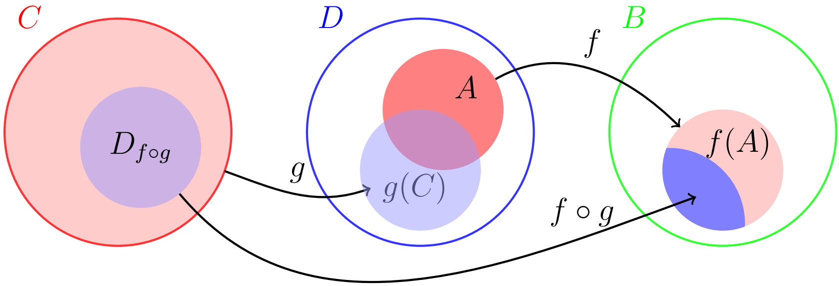
Definice 11.7 (Zúžení zobrazení)**:** Buď $f\colon A \to B$ a $M \subset A$. Zobrazení $g\colon M \to B$ definované předpisem $g(x) := f(x)$ pro každé $x \in M$ nazýváme **zúžením zobrazení f na množinu** M. Zapisujeme $g = f\big|_M$.

Nová zobrazení můžeme také vytvářet pomocí operace skládání. Ovšem pouze pokud jsou zobrazení správného typu. Zde se také lehce odchylujeme od definice zavedené v BI-DML, tj. (BI-DML, Definice), která je pro naše účely příliš restriktivní.

[3]Technicky `list`.

[4]Operátor `**` v Pythonu představuje umocňování.

[5]Podobnost obou zápisů samozřejmě není náhodná, ale tvůrci Pythonu se matematickou syntaxí inspirovali.



Obrázek 11.2: Ilustrace k složenému zobrazení.

Definice 11.8 (Složené zobrazení)**:** Nechť $f\colon A \to B$ a $g\colon C \to D$ jsou zobrazení. Označíme-li $D_{f\circ g} = \{x \in C \mid g(x) \in A\}$, pak je-li tato množina neprázdná definujeme **složené zobrazení** $f \circ g\colon D_{f\circ g} \to B$ předpisem

$$(f \circ g)(x) := f\big(g(x)\big)$$

pro všechna $x \in D_{f\circ g}$.

Názorně je tato situace uvedena na obrázku 11.2. O zobrazení f se často mluví jako o **vnějším** a o g jako o **vnitřním** zobrazení složeného zobrazení $f \circ g$.

Definiční obor složeného zobrazení lze vyjádřit pomocí vzoru množiny při zobrazení. Při použití notace z Definice 11.8 platí $D_{f\circ g} = g^{-1}(A)$.

Poznámka 11.2: Pro názornost rozeberme rozdíl mezi Definicí 11.8 a Definicí BI-DML (BI-DML, Definice).

Mějme zobrazení $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definované předpisem $f(x) = \ln(x)$, $x \in (0, +\infty)$, a $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definované předpisem $g(x) = (x-1)^3$, $x \in \mathbb{R}$. Chceme, aby f hrálo při skládání roli vnějšího a g vnitřního zobrazení, tj. snažíme se sestrojit $f \circ g$.

Dle definice (BI-DML, Definice) tato zobrazení nemůžeme složit, protože g zobrazuje mimo definiční obor f. Podle této definice bychom mohli složit třeba f se zúžením $g|_{(1,+\infty)}$. Ale měli bychom i další možnosti, například vzít zúžení $g|_{(42,1024\rangle}$. Které z nich máme vzít? To bychom vždy museli explicitně zmínit, než bychom se do skládání pustili.

„Naše“ Definice 11.8 nám rovnou umožňuje nad $f \circ g$ uvažovat, tj. napsat $\ln\big((x-1)^3\big)$ s jedním jasným významem. Prostě definiční obor zúžíme tak, aby operace měli dobrý smysl a vezmeme *největší* takovou množinu. Takto postupujeme v mnoha situacích a už nad tím ani příliš nepřemýšlíme.

11.5 Inverzní zobrazení

Přirozeně se nabízí otázka, jestli můžeme „změnit směr" zobrazení $f\colon A \to B$. Přesněji, jestli zadanému prvku x z oboru hodnot zobrazení f můžeme jednoznačně přiřadit nějaký prvek v definičním oboru $D_f = A$, který by se na x zobrazil pomocí f. To lze zřejmě pouze v případě, že každý prvek v oboru hodnot zobrazení f má právě jeden vzor vzhledem k f, čili když zobrazení f je *prosté*. Je-li tedy $f\colon A \to B$ prosté zobrazení, pak každému prvku x z oboru hodnot $f(A)$ lze přiřadit právě jedno y z množiny A tak, že $x = f(y)$. Takto získané zobrazení nazýváme inverzním a značíme f^{-1}.

Tento úhel pohledu se mírně liší od přístupu použitého v BI-DML (viz (BI-DML, Definice)), kde hlavním cílem je porovnávání velikostí množin pomocí mohutností. Tamní definici bychom mohli shrnout následovně.

Definice 11.9 (Inverzní zobrazení)**:** Je-li $f\colon A \to B$ bijektivní zobrazení, pak **inverzní zobrazení** $f^{-1}\colon B \to A$ k zobrazení f definujeme pro každé $x \in B = f(A)$ předpisem $f^{-1}(x) = y$, kde y je (za uvedených předpokladů nutně jednoznačně daný) prvek A splňující $x = f(y)$.

Z této definice ihned plynou vztahy $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$ a $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{f(A)}$, přičemž f^{-1} je jediné zobrazení, které tuto dvojici podmínek splňuje. Inverzi pro naše reálné funkce reálné proměnné zavádíme v hlavním textu v Definici 3.5.

Poznámka 11.3: Obecný způsob rozhodování o injektivnosti (prostotě) a surjektivitě (být na) lze vyjádřit pomocí řešitelnosti jisté parametrické úlohy. Mějme konkrétně[6] zobrazení $f\colon A \to B$ a zamysleme se nad řešitelností rovnice

$$f(y) = x$$

pro zadaný *parametr* $x \in B$ s *neznámou* y nabývajících hodnot z A. Mohou nastat následující situace:

1. Pro nějaké $x \in B$ tato rovnice nemá řešení $y \in A$. Tj. toto x není v oboru hodnot zobrazení f a f tak není surjektivní (na).

[6] Ano, konkrétní na této úrovni. Není potřeba jít níž.

2. Pro každé $x \in B$, pro které má tato rovnice řešení, existuje právě jedno takové řešení $y \in A$. Tj. f je prosté.

3. Pro nějaké $x \in B$ má tato rovnice více než jedno řešení $y \in A$. Tj. f není prosté.

Pokud jsme postaveni před úlohy určit vlastnosti zobrazení dle definice, tak si efektivně musíme rozepsat, jak rovnice $f(y) = x$ přesně vypadá a řešit ji pro neznámou $y \in A$ vzhledem k parametru $x \in B$.

Poznámka 11.4: Všimněte si, že vlastnost „být na“, tedy surjektivní, závisí na cílové množině. Například uvažme dvě zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $g : \mathbb{R} \to \langle -1, 1 \rangle$ definované *stejným předpisem* $f(x) := \sin(x)$ a $g(x) := \sin(x)$ pro $x \in \mathbb{R}$. První zobrazení není surjektivní (na), druhé zobrazení je surjektivní (na). Jsou to různá zobrazení, píšeme $f \neq g$.

11.6 Uspořádání

Intuitivně si pod „uspořádáním“ představujeme vztah mezi objekty nějaké množiny. V BI-DML byl tento pojem zaveden pod heslem „částečné uspořádání“ v Definici (BI-DML, Definice).

Definice 11.10 (Uspořádání)**:** Relaci $\mathcal{R}$ na množině M splňující

1. (reflexivita): pro každé $x \in M$ platí $x\mathcal{R}x$,

2. (antisymetrie): pro každé $x, y \in M$ platí, že pokud $x\mathcal{R}y$ a $y\mathcal{R}x$ pak i $x = y$,

3. (tranzitivita): pokud pro $x, y, z \in M$ platí $x\mathcal{R}y$ a $y\mathcal{R}z$, pak platí $x\mathcal{R}z$,

nazýváme **uspořádáním** na množině M.

Relaci $\mathcal{R}$, jež je uspořádáním, většinou značíme symbolem $\leq$.

Příklad 11.4: Je-li M množina reálných čísel a $x\mathcal{R}y$ znamená „x je menší nebo rovno y“, pak $\mathcal{R}$ představuje uspořádání na množině $\mathbb{R}$. Toto uspořádání je tzv. **úplné**. Pro každé $x, y \in M$ platí $x\mathcal{R}y$ nebo $y\mathcal{R}x$.

Příklad 11.5: Uvažme množinu kladných přirozených čísel $M = \{1, 2, 3, \ldots\}$ a nechť $m\mathcal{R}n$ právě když m dělí n. Tato relace $\mathcal{R}$ na M je uspořádáním.

Řešení. Ověřme potřebné vlastnosti

1. (reflexivita): Pro každé $n \in M$ platí, že n dělí n, tedy $n\mathcal{R}n$.
2. (antisimetrie): Uvažme $n, m \in M$ tak, že n dělí m a m dělí n, pak existují $k, \ell \in M$ splňující $m = k \cdot n$ a $n = \ell \cdot m$. Tudíž $m = (k\ell) \cdot m$, což může nastat pouze v případě $k = \ell = 1$. Proto $m = n$.
3. (tranzitivita): Podobně, pokud n dělí m a m dělí k, pak n dělí k.

12 Dodatek: Elementární funkce

Pod termínem **elementární funkce** máme na mysli

- polynomy (mnohočleny),
- odmocniny,
- racionální (lomené) funkce,
- trigonometrické funkce,
- exponenciální a logaritmické funkce,
- součty, součiny, podíly a složení uvedených funkcí a jejich případných inverzí.

V této části textu uvádíme stručný přehled vlastností těchto funkcí, které by studenti měli znát, pohybujeme se na středoškolské úrovni. Navíc učiníme několik důležitých poznámek, ke kterým se později během studia ještě vrátíme. Tato kapitola nepředstavuje ucelený výklad této problematiky. Slouží spíše jako připomenutí důležitých vlastností, které tak čtenář může během studia na tomto místě snadno konzultovat.

12.1 Polynomy

Polynomy jsou v jistém smyslu z elementárních funkcí ty „nejelementárnější“. K vyhodnocení jejich funkční hodnoty si vystačíme pouze se sčítáním a násobením reálných čísel! Přesná definice polynomu, v češtině taktéž mnohočlenu, je následující.

Definice 12.1 (Polynom – mnohočlen / *polynomial*): Funkci $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazveme **polynomem**, právě když existuje $n \in \mathbb{N}_0$ a konstanty $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Pokud je v definici výše $a_n \neq 0$, pak o n mluvíme jako o **stupni** polynomu P. Polynom $P(x) = 0$ nazýváme **nulovým polynomem** a jeho stupeň nedefinujeme (pozor, polynom stupně nula nikdy není nulový polynom). **Kořenem polynomu** P nazýváme libovolné reálné číslo x splňující $P(x) = 0$. Dále si všimněte, že každý polynom je dle definice definován na celé množině $\mathbb{R}$.

Nulový polynom a polynomy stupně nejvýše 1 můžeme vyjádřit ve tvaru $P(x) = ax + b$ pro nějaké reálné konstanty a a b. O takovýchto funkcích mluvíme jako o **lineárních** (nebo **afinních**) funkcích. Pozor, v tomto kontextu je slovíčko „lineárních“ použito v jiném významu, než je obvyklé v Lineární algebře.

Grafem lineární funkce je přímka. Ne každá přímka v rovině ovšem je grafem nějaké lineární funkce (rozmyslete!). Je-li $f(x) = ax + b$ lineární funkce, pak jejím grafem je přímka s rovnicí $y - ax - b = 0$. O parametru a mluvíme jako o **směrnici** této přímky. Tato přímka pak má **normálový vektor** (například) $(-a, 1)$ a **směrový vektor** $(1, a)$.

Existují vzorce pro kořeny polynomů stupně 1, 2, 3 a 4. Je dokázáno, že podobné vzorce pro polynomy stupně ostře většího než 4 neexistují. Obyčejný smrtelník si z praktických důvodů pamatuje vzorce pro kořeny polynomů stupně dva, tedy pro kvadratické polynomy. Vzorce pro polynomy vyšších stupňů (3 a 4) jsou poměrně komplikované, viz např. zde.

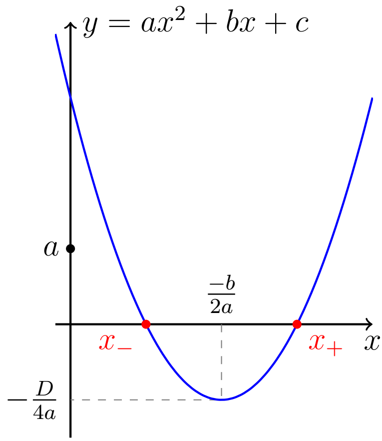
Kořeny kvadratického polynomu $P(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, umíme snadno nalézt. Jsou jimi x_+ a x_- splňující

$$x_\pm = \frac{1}{2a}\Big(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\Big).$$

Tyto kořeny jsou reálné pouze pokud je **diskriminant** $D = b^2 - 4ac$ nezáporný. Díky **úpravě na čtverec**,

$$P(x) = ax^2 + bx + c = a\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 + c - \frac{b^2}{4a},$$

víme, že vrchol paraboly (graf funkce P) se nachází v bodě $\big(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\big)$, viz Obrázek 12.1.



Obrázek 12.1: Parabola jakožto graf kvadratické funkce $f(x) = ax^2 + bx + c$ s dvěma průsečíky osy x (tedy s kladným diskriminantem) a znázorněnými souřadnicemi vrcholu.

Poznámka 12.1 (O stupni nulového polynomu)**:** Jak bylo řečeno výše, stupeň nulového polynomu v našem kurzu nedefinujeme. Z tohoto úhlu pohledu jde o výjimečný okrajový případ, „stupeň“ tedy u nás mají pouze nenulové polynomy.

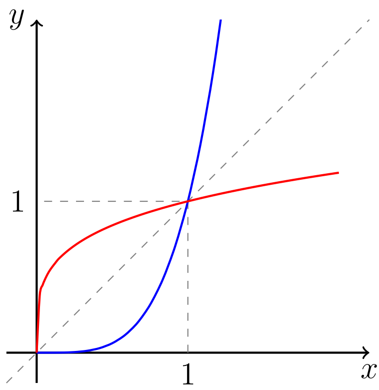
V některých materiálech se stupeň nulového polynomu klade roven -1, v dalších zase $-\infty$. Každá z těchto tří uvedených možností má svou motivaci a může v některých případech zjednodušit značení, či argumentaci.

12.2 Odmocniny

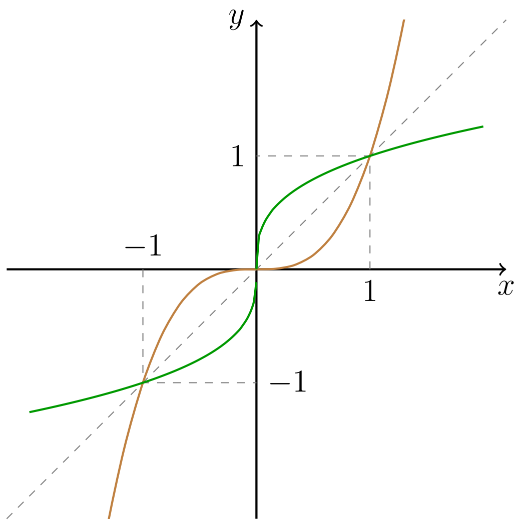
Uvažme $k \in \mathbb{N}$ a zamysleme se nad existencí inverzní funkce k funkci $f(x) = x^k$. Musíme rozlišit dva případy:

Pokud je k sudé, tj. $k = 2\ell$ pro nějaké $\ell \in \mathbb{N}$, pak funkce f není prostá, ale $f|_{\langle 0,+\infty)}$ je a její inverzí dostáváme funkci $\sqrt[2\ell]{x}$, která má definiční obor i obor hodnot roven $\langle 0, +\infty)$. Funkce $\sqrt[2\ell]{x}$ je ostře rostoucí. Grafická ukázka této situace je znázorněna na Obrázku 12.2.

Pokud je k liché, pak existuje $\ell \in \mathbb{N}$ takové, že $k = 2\ell - 1$. V tomto případě je funkce f prostá a její inverzí dostáváme funkci $\sqrt[2\ell-1]{x}$, která má definiční obor i obor hodnot roven $\mathbb{R}$. Funkce $\sqrt[2\ell-1]{x}$ je ostře rostoucí. Grafická ilustrace této situace je



Obrázek 12.2: Ilustrace grafu sudé odmocniny: $x^{2\ell}$ zúžené na $\langle 0, +\infty)$ modře a $\sqrt[2\ell]{x}$ červeně.



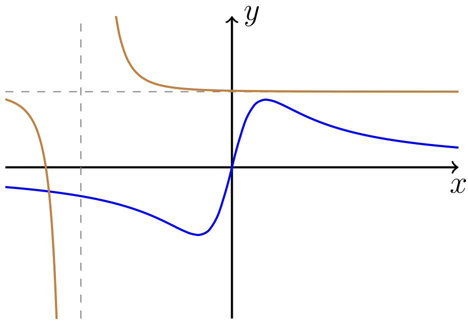
Obrázek 12.3: Ilustrace grafu liché odmocniny: $x^{2\ell-1}$ hnědě a $\sqrt[2\ell-1]{x}$ zeleně.

znázorněna na Obrázku 12.3.

Otázka 12.1: Definujte druhou odmocninu z nezáporného čísla x.

Otázka 12.2: Shrňte základní vlastnosti sudých odmocnin, tj. funkcí tvaru $f(x) = \sqrt[2k]{x}$ pro $k \in \mathbb{N}$.

Otázka 12.3: Shrňte základní vlastnosti lichých odmocnin, tj. funkcí tvaru $f(x) =$



Obrázek 12.4: Grafy dvou racionálních funkcí: $f(x) = \frac{4x}{1+5x^2}$ (modrá) a $g(x) = 1 + \frac{1}{10(2+x)^3}$ (hnědá).

$\sqrt[2k-1]{x}$ pro $k \in \mathbb{N}$.

12.3 Racionální funkce

Pokud navíc třídu polynomů rozšíříme i o operaci dělení, dostaneme:

Definice 12.2 (Racionální funkce / *rational function*)**:** Funkci $f : D_f \to \mathbb{R}$ nazveme **racionální funkcí**, právě když existují dva polynomy P a Q takové, že $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}$ a pro každé $x \in D_f$ platí

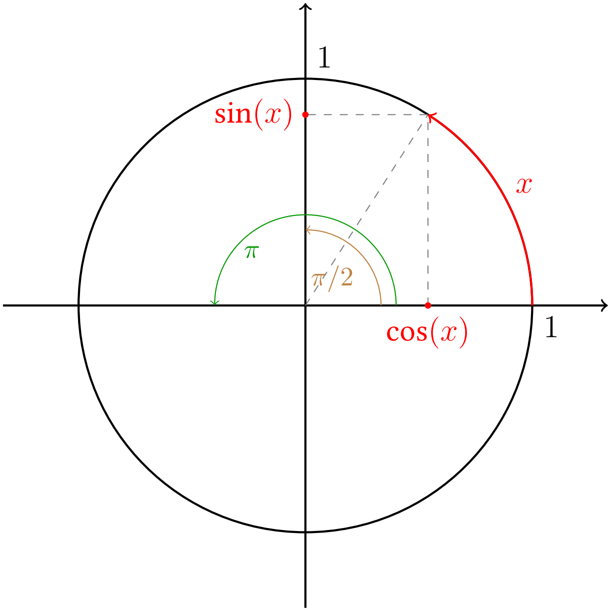
$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Definičním oborem takovýchto funkcí již nutně nemusí být celá reálná osa. Jako příklady uvažme

$$f(x) = \frac{4x}{1+5x^2},$$
$$g(x) = 1 + \frac{1}{10(2+x)^3}.$$

12.4 Trigonometrické (také goniometrické) funkce

Mezi trigonometrické funkce počítáme funkce sin, cos, tg, cotg a inverzní funkce k vhodným zúžením těchto funkcí.



Obrázek 12.5: Konstrukce funkcí sinus a kosinus pomocí jednotkové kružnice, x označuje délku znázorněného (červeného) oblouku.

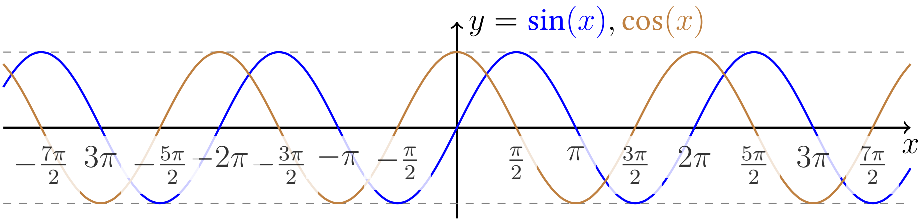
Funkce sin **a** cos

Konstrukce funkcí sin (**sinus**) a cos (**kosinus**) již není algebraická, jako u funkcí výše, ale vychází z *geometrie*. Funkce sin a cos definujeme pomocí **jednotkové kružnice**. Viz Obrázek 12.5 a Obrázek 12.6.

Proměnná x má nyní význam úhlu měřeného od kladného směru vodorovné osy proti směru hodinových ručiček v obloukové míře (radiánech).

Funkce sin a cos mají jako definiční obor celou reálnou osu. Jsou periodické s periodou 2π a omezené, jejich obor hodnot je $H_{\sin} = H_{\cos} = \langle -1, 1 \rangle$. Nejsou prosté, ani na, ani (ostře) rostoucí či klesající (na celém svém definičním oboru). Funkce sin je lichá a funkce cos je sudá.

Přímo z definice těchto funkcí plyne formulka $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ (Pythago-



Obrázek 12.6: Grafy funkcí sinus a kosinus.

ras![1]). Dále tyto funkce splňují důležité součtové vzorce

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y), \\ \cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \end{aligned}$$

a z nich plynoucí vzorce pro dvojnásobný úhel

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) \quad \text{a} \quad \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x).$$

Existují i další vztahy, které na tomto místě vynecháme. Zde uvedené považujeme pro nás za nejdůležitější.

Všechny (a další) výsledky týkající se funkcí sin a cos *plynou* z jejich geometrické definice pomocí jednotkové kružnice.

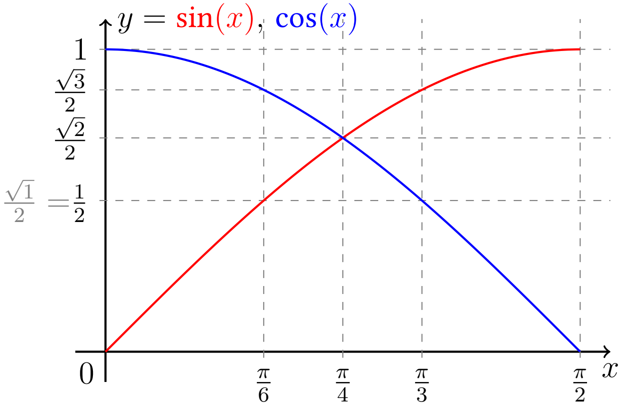
Varování 12.1 (Jak počítat funkční hodnoty sin a cos?)**:** Geometrická konstrukce se očividně nehodí například k výpočtu funkčních hodnot pomocí kalkulaček nebo počítačů! Jednou z možných metod výpočtu pomocí Taylorových polynomů se budeme zabývat příští semestr v BI-MA2.

Pokud si rozmyslíme geometrii ve vhodně zvolených rovnostranných a rovnoramenných trojúhelnících, dostaneme funkční hodnoty sin a cos pro některé význačné úhly, viz Obrázek 12.7.

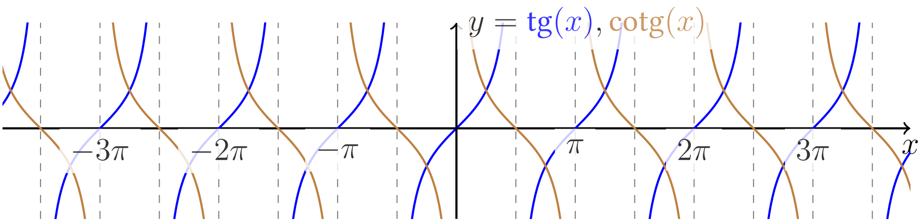
Otázka 12.4: Shrňte základní vlastnosti funkce sin.

Otázka 12.5: Shrňte základní vlastnosti funkce cos.

[1] Pythagoras (570 – 495 před naším letopočtem) byl řecký filozof.



Obrázek 12.7: Sinus a kosinus a jejich význačné funkční hodnoty.



Obrázek 12.8: Funkce tangens a kotangens.

Funkce tg **a** cotg

Funkce tg (**tangens**) a cotg (**kotangens**) jsou odvozené od sin a cos pomocí vzorců

$$\mathrm{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \quad \text{a} \quad \mathrm{cotg}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

Tyto funkce již nejsou definované na celém $\mathbb{R}$, ale platí

$$D_{\mathrm{tg}} = \mathbb{R} \smallsetminus \{\pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \quad \text{a} \quad D_{\mathrm{cotg}} = \mathbb{R} \smallsetminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Obě jsou periodické s periodou π, nejsou prosté ani omezené. Jsou na, jejich obor hodnot je $H_{\mathrm{tg}} = H_{\mathrm{cotg}} = \mathbb{R}$. Nejsou ani (ostře) rostoucí či klesající. Obě jsou liché funkce.

Otázka 12.6: Shrňte základní vlastnosti funkce tg.

Otázka 12.7: Shrňte základní vlastnosti funkce cotg.

Funkce arcsin, arccos, arctg a arccotg

Trigonometrické funkce sin, cos, tg ani cotg nejsou prosté. Neexistují k nim tedy inverzní funkce.

Postupujeme proto tak, že tyto funkce *zúžíme* na vhodný interval, na kterém již tyto funkce prosté jsou a inverzi mají. Standardní volba je následující:

$$\arcsin := \left(\sin|_{\langle -\pi/2,\pi/2\rangle}\right)^{-1}, \qquad \arccos := \left(\cos|_{\langle 0,\pi\rangle}\right)^{-1},$$
$$\operatorname{arctg} := \left(\operatorname{tg}|_{(-\pi/2,\pi/2)}\right)^{-1}, \qquad \operatorname{arccotg} := \left(\operatorname{cotg}|_{(0,\pi)}\right)^{-1}.$$

Poznámka 12.2: V různých zdrojích a prostředích nepanuje zcela jednota v konstrukci funkce arccotg. My ji definujeme jako inverzi zúžení funkce cotg na interval $(0,\pi)$. Například ale Mathematica pod funkcí `ArcCot` chápe inverzi zúžení funkce cotg (v Mathematica k dispozici pod jménem `Cot`) na množinu $(-\pi/2,\pi/2) \setminus \{0\}$. Výhodou „naší“ volby je, že funkce arccotg je definována na intervalu a je na něm spojitá a monotonní. Spojitostí funkcí se bude zabývat v Kapitole 7. Rozmyslete si, jaké vlastnosti má onen alternativní arccotg.

Otázka 12.8: Shrňte základní vlastnosti funkce arcsin.

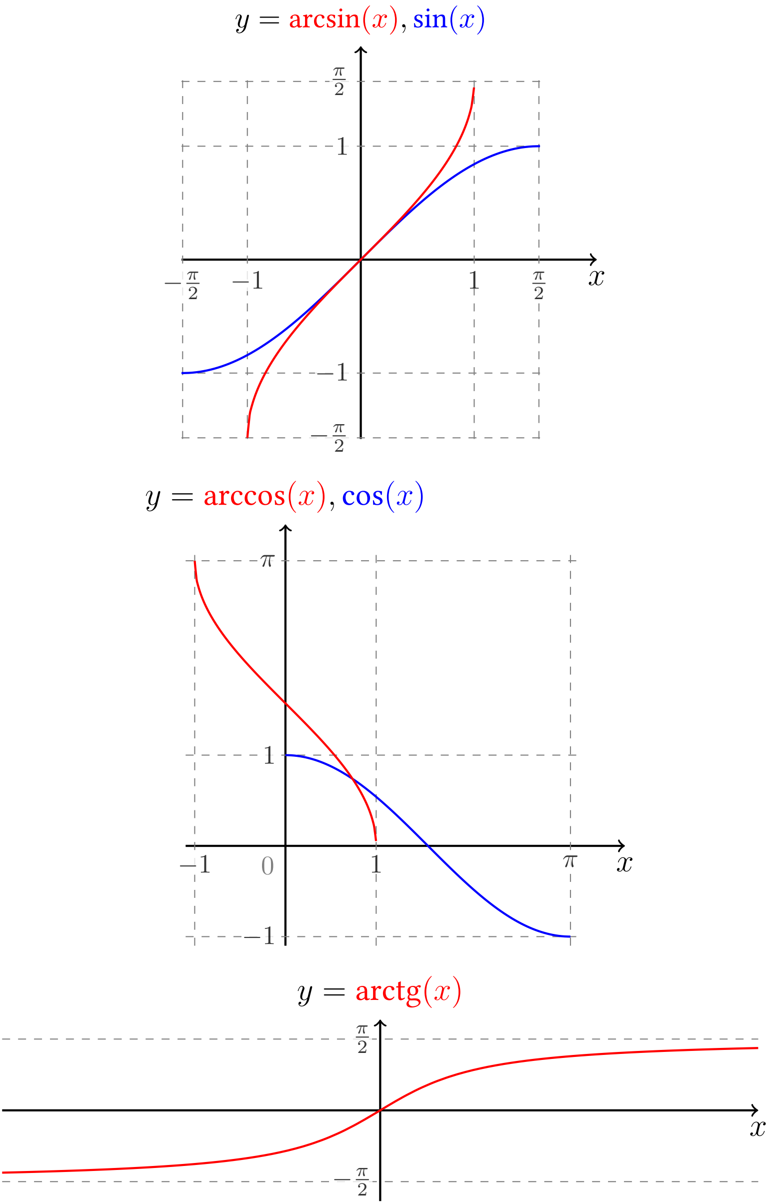
Otázka 12.9: Shrňte základní vlastnosti funkce arccos.

Otázka 12.10: Shrňte základní vlastnosti funkce arctg.

12.5 Exponenciální a logaritmické funkce

Exponenciální a logaritmické funkce jsou důležité samy o sobě, ale nacházejí i uplatnění v přírodních aplikacích. Pomocí exponenciálních funkcí můžeme například vyjádřit fyzikální zákon popisující radioaktivní rozpad. Logaritmické funkce pak často najdeme ve „stupnicích vnímání“, například Richterova škála popisující intenzitu zemětřesení nebo decibely popisující hlasitost zvuku jsou logaritmické škály.

V této části textu se budeme ovšem více zabývat matematickými vlastnostmi těchto funkcí a později během studia se k nim ještě několikrát vrátíme a budeme je využívat.



Obrázek 12.9: Funkce arcsin, arccos a arctg.

Exponenciála

Exponenciální funkce o základu e **(exponenciála)**, tj. e^x, je funkce s definičním oborem $\mathbb{R}$, oborem hodnot $(0, +\infty)$, ostře rostoucí a splňující

$$\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^y, \quad (\mathrm{e}^x)^y = \mathrm{e}^{xy}, \quad \mathrm{e}^0 = 1,$$

pro každé $x, y \in \mathbb{R}$.

Varování 12.2 (Jak je exponenciála vlastně definována?)**:** Jak se počítají funkční hodnoty e^x? Tímto problémem se budeme zabývat v BI-MA2. Už v BI-MA1 si ale s tímto popisem e^x nevystačíme, jedna důležitá vlastnost nám zde chybí, konkrétně viz rovnost (7.1)!

Otázka 12.11: Shrňte základní vlastnosti funkce e^x.

Přirozený logaritmus

Inverzní funkci k exponenciále nazýváme **přirozeným logaritmem** a značíme ji ln. Z vlastností exponenciály plynou vlastnosti přirozeného logaritmu: jeho definičním oborem je $(0, +\infty)$, oborem hodnot $\mathbb{R}$, je ostře rostoucí a splňuje vztahy

$$\ln(\mathrm{e}^z) = z, \quad \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y), \quad \ln(1) = 0, \quad \ln(\mathrm{e}) = 1,$$

kde $x, y > 0$ a $z \in \mathbb{R}$.

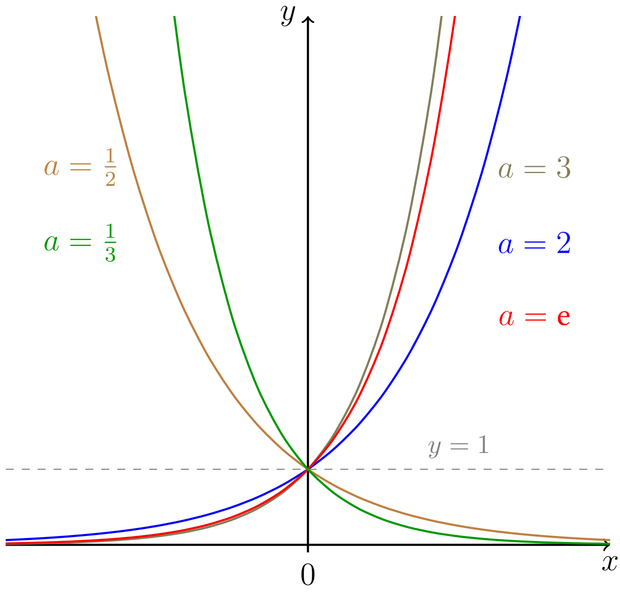
Otázka 12.12: Shrňte základní vlastnosti funkce $\ln(x)$.

Exponenciální funkce o základu $a > 0$

Exponenciální funkci s jiným základem než e můžeme odvodit od exponenciální funkce. Nejprve si připomeňme umocňování na celočíselný exponent:

$$a^n := \begin{cases} 1, & \text{pro } n = 0 \text{ a libovolné } a \in \mathbb{R}, \\ \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\times}, & \text{pro } n \in \mathbb{N} \text{ a libovolné } a \in \mathbb{R}, \\ \frac{1}{a^{-n}}, & \text{pro záporné celé } n \text{ a nenulové } a. \end{cases}$$

Exponenciální funkce o základu a představuje zobecnění tohoto umocňování i na neceločíselné exponenty, značíme ji a^x a lze ji definovat pro $a > 0$ a libovolné $x \in \mathbb{R}$



Obrázek 12.10: Exponenciální funkce o základu $a > 0$: grafy.

předpisem
$$a^x := \mathrm{e}^{x \ln(a)}.$$

Definičním oborem a^x je $\mathbb{R}$, oborem hodnot $(0, +\infty)$, je neomezená, pro $x = 0$ má hodnotu 1, je ostře rostoucí (resp. klesající) pro $a > 1$ (resp. $a < 1$). Pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ splňuje

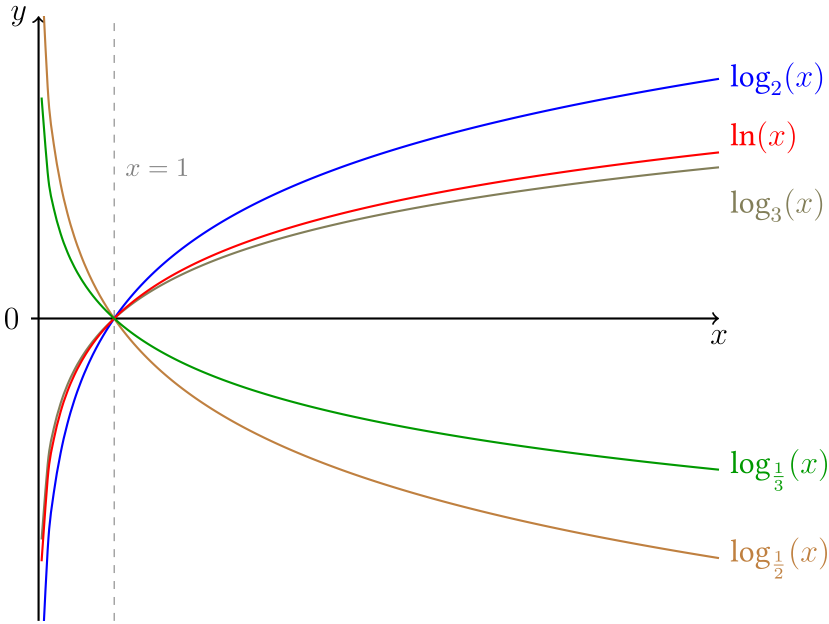
$$\ln(a^x) = x \ln(a), \quad a^{x+y} = a^x a^y \quad \text{a} \quad \left(a^x\right)^y = a^{xy}.$$

Grafickou ilustraci funkce a^x pro různé hodnoty a uvádíme na Obrázku 12.10.

Logaritmus

Exponenciální funkce a^x je prostá pro $0 < a \neq 1$, existuje k ní proto inverzní funkce, kterou nazýváme logaritmem o základu a a značíme $\log_a$.

Funkce $\log_a$ je definována na $(0, +\infty)$, jejím oborem hodnot je $\mathbb{R}$. Je prostá, ostře rostoucí (resp. klesající) pro $a > 1$ (resp. $a \in (0, 1)$).



Obrázek 12.11: Logaritmus o základu $a > 0$, $a \neq 1$: grafy.

Z vlastností exponenciálních funkcí poměrně přímočaře plynou následující vlastnosti logaritmu o základu a:

$$\begin{aligned}
\log_a(a) = 1,\ \log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}, &\qquad \text{pro } x > 0, \text{ a } 0 < a, b \neq 1, \\
\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y), &\qquad \text{pro } x, y > 0, \\
\log_a(x^y) = y \log_a(x), &\qquad \text{pro } x > 0 \text{ a } y \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Odtud i (mimo jiné) plyne

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y), \quad \text{pro } x, y > 0.$$

Grafickou ilustraci funkce $\log_a x$ pro různé hodnoty a uvádíme na Obrázku 12.11.

Logaritmus o základu e nazýváme přirozeným logaritmem a značíme ln (pozor, v řadě jazyků/CAS je tento značen rovnou jako log).

12.6 Další funkce

Definici absolutní hodnoty jsme připomněli již dříve, viz podkapitolu 2.2. Zde ještě stručněji zmíníme dolní a horní celé části a znaménko reálného čísla.

Dolní celou část reálného čísla x, kterou ze středních škol asi znáte jako celou část, definujeme jako největší celé číslo, které je menší nebo rovno x a značíme $\lfloor x \rfloor$. Tj.

$$\lfloor x \rfloor := \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}.$$

Horní celou část reálného čísla x definujeme jako nejmenší celé číslo, které je větší nebo rovno x a značíme $\lceil x \rceil$. Tj.

$$\lceil x \rceil := \min\{k \in \mathbb{Z} \mid k \geq x\}.$$

Všimněte si, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1 \quad \text{a} \quad \lceil x \rceil - 1 < x \leq \lceil x \rceil.$$

Dolní i horní celá část jsou rostoucí funkce definované na celém $\mathbb{R}$ jejichž obor hodnot je množina celých čísel $\mathbb{Z}$. Nejsou prosté ani na.

Poznámka 12.3: Dolní celá část reálného čísla $\lfloor x \rfloor$ v některých materiálech bývá značena pomocí hranatých závorek, tedy symbolem $[x]$. Toto značení v našich materiálech nepoužíváme, hranaté závorky tím nechceme ještě více přetěžovat.

Znaménko reálného čísla $x \in \mathbb{R}$ je definováno předpisem

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases} \tag{12.1}$$

Graf funkce sgn uvádíme na Obrázku 7.7. Konvenčně tedy klademe $\operatorname{sgn}(0) = 0$. Znaménko sgn je tak lichá rostoucí funkce definovaná na celém $\mathbb{R}$ s oborem hodnot $\{-1, 0, 1\}$, která není prostá ani na.

12.7 Užitečné vztahy

V rámci této shrnující kapitoly se hodí uvést i několik užitečných algebraických vztahů.

Věta 12.1 (Binomická)**:** Pro libovolná reálná $a, b \in \mathbb{R}$ a nezáporné celé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Symbolem $\binom{n}{k}$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ zde označujeme **kombinační číslo** definované předpisem

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Toto číslo označuje počet možností, jak lze z n-prvkové množiny vybrat k prvků, nezávisle na jejich pořadí. Například $\binom{3}{2} = 3$, protože $\{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\} \subset \{1,2,3\}$ a jiné dvouprvkové podmnožiny neexistují. Pravá strana v rovnici ve Větě 12.1 je s touto interpretací v souladu. Pokud si levou stranu této rovnice představíme jako součin n závorek $(a+b)$ a roznásobíme je, pak koeficient u členu $a^k b^{n-k}$ udává počet způsobů, jak z uvedených závorek vybrat právě k členů a a $n-k$ členů b, což lze právě $\binom{n}{k}$ způsoby.

Důkaz binomické věty. Důkaz Věty 12.1 lze snadno provést indukcí. Tvrzení očividně platí pro $n = 0$ ve tvaru $1 = 1$ a i pro $n = 1$ ve tvaru $(a+b) = a+b$. Předpokládejme, že tvrzení platí pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Potom

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n+1-k} + b^{n+1}.
\end{aligned}$$

Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ a $k \in \hat{n}$ ovšem platí

$$\begin{aligned}\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!(n+1-k)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \left(\frac{1}{n+1-k} + \frac{1}{k} \right) \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{k+n+1-k}{k(n+1-k)} \\ &= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}.\end{aligned}$$

Takže celkem dostáváme, vzhledem k rovnostem $\binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1} = 1$,

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}. \qquad \square$$

Dalším neméně důležitým vztahem je rovnost uvedená v následujícím tvrzení.

Tvrzení 12.1 (O rozdílu n-tých mocnin)**:** Pro libovolná reálná $a, b \in \mathbb{R}$ a nezáporné celé $n \in \mathbb{N}_0$ platí rovnost

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}.$$

Důkaz. Tvrzení lze ověřit přímým výpočtem. Vyjdeme z pravé strany, kterou roznásobíme a upravíme,

$$\begin{aligned}(a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} &= \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} b^{n-1-k} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a^k b^{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} a^k b^{n-k} + a^n - b^n - \sum_{k=1}^{n-1} a^k b^{n-k} = a^n - b^n,\end{aligned}$$

což je přesně levá strana dokazované rovnosti. $\square$

Poznámka 12.4 (Rozdíl odmocnin)**:** Vzorec z předchozího Tvrzení 12.1 často používáme za účelem „zbavení se rozdílu odmocnin". Například nás může zajímat výraz $\sqrt{x} - \sqrt{y}$, pro nějaká kladná x a y. Chtěli bychom velikost tohoto výrazu nějak vyjádřit pomocí rozdílu *argumentů* odmocnin, s kterým třeba jsme schopni pracovat. K tomu přesně použijeme uvedené Tvrzení 12.1, kde zvolíme $a = \sqrt{x}$, $b = \sqrt{y}$ a drobnou úpravu uvedené rovnosti

$$a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b}.$$

Dostáváme tak rovnost

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}.$$

Alternativně, ale lehce uměle, lze tuto úpravu interpretovat jako využití Tvrzení 12.1 a vynásobení vhodnou jedničkou, konkrétně

$$\begin{aligned}
\sqrt{x} - \sqrt{y} &= \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right) \cdot 1 \\
&= \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right) \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \\
&= \frac{\sqrt{x}^2 - \sqrt{y}^2}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}.
\end{aligned}$$

V čitateli je již rozdíl x a y, v jmenovateli součet, který nás většinou netrápí. Analogicky v případě třetích odmocnin bychom například dostali

$$\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = \frac{x - y}{x^{2/3} + (xy)^{1/3} + y^{2/3}}.$$

Tato úprava není samoúčelná. Oceníme ji v některých výpočtech. Vedle toho lze pomocí ní v některých případech částečně řešit tzv. **katastrofické krácení** při počítání se strojovými čísly.

13 Dodatek: Často kladené dotazy

Tato část textu vychází z BI-MA1 Course Pages stránky FAQ, kde shrnujeme nejkřiklavější problémy, na které jsme během několika let výuky BI-MA1 a dříve staršího předmětu BI-ZMA narazili. Následující seznam problémů nemusí být kompletní a pravděpodobně se bude rozrůstat.

13.1 Zobrazení a funkce na

Hned v prvním semestru v předmětu BI-DML zavádíme pojem „zobrazení na“ (resp. „funkce na“). Nejedná se o překlep, jak si řada studentů myslí. Ani jsme si tento pojem sami nevymysleli. Narazíte na něj v české literatuře celkem běžně. Často se také k označení této vlastnosti zobrazení používá cizí slovíčko „surjektivní“ (*sur* je právě francouzská předložka „na“). V tomto textu pro úplnost tento pojem zavádíme v Definici 11.5.

13.2 Na střední jsme to dělali/značili/nazývali jinak

To je možné a naprosto v pořádku. Neočekáváte ale přece, že všichni na celém světě budou ctít přístup, který jste na střední měli. Různí lidé mohou používat různé konvence a mít k tomu velmi dobré důvody.

Pokud studujete nějaký materiál, pak je rozumné se nejprve seznámit s jazykem, který tento materiál používá. Například (nejen) ve studijním textu k BI-MA1 je na konci uveden seznam symbolů a rejstřík pojmů umožňující snadno konkrétní definice dohledat.

Jako konkrétní a asi nejkřiklavější případ uveďme pojmy týkající se monotonie funkcí a posloupností (rostoucí, ostře rostoucí, nerostoucí aj.). Existuje několik variant tohoto názvosloví. My používáme pouze jednu (viz Definice 3.8), aby nedocházelo ke zmatkům.

Tato poznámka se netýká jenom matematiky, ale platí naprosto obecně. Přeci neexistuje právě jeden programovací jazyk i když jsou si ve výsledku prakticky ekvivalentní!

13.3 Značení inkluze

V tomto předmětu používáme pro inkluzi převážně symbol $\subset$ a nepoužíváme pojmy vlastní a nevlastní podmnožina. Tj. inkluze $A \subset B$ platí právě tehdy, když každý prvek množiny A patří do množiny B. Speciálně pro libovolnou množinu platí $A \subset A$. V celém kurzu bez problému vystačíme s tímto jedním pojmem. Ve výjimečných případech použijeme zápis $A \subsetneq B$ implikující $A \neq B$.

V textech, kde se mezi vlastní a nevlastní podmnožinou rozlišuje, bývá zvykem k tomu využívat i speciální značení, například $A \subseteq B$ a $A \subsetneq B$.

Pokud si nejste jisti významem některého ze symbolů, nebo si potenciálně nejasné použití symbolu chcete ověřit, tak nejlépe zkonzultuje seznam symbolů na konci studijního textu.

13.4 Definiční obory trigonometrických funkcí

Funkce sin, cos, tg nejsou prosté a tudíž k nim neexistují inverzní funkce. Lze je ovšem zúžit na obor, kde jsou prosté a k těmto prostým zúžením pak sestrojit inverzní funkce. Je ale nekonečně mnoho způsobů, jak tyto funkce zúžit a vyrobit tak prosté funkce. *Standardní* volba je následující

$$\begin{aligned}
\arcsin &= \left(\sin\Big|_{\langle -\pi/2, \pi/2\rangle}\right)^{-1}, \\
\arccos &= \left(\cos\Big|_{\langle 0, \pi\rangle}\right)^{-1}, \\
\operatorname{arctg} &= \left(\operatorname{tg}\Big|_{(-\pi/2, \pi/2)}\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Odtud plynou následující vztahy

$$
\begin{aligned}
D_{\text{arcsin}} &= \langle -1, 1 \rangle, & H_{\text{arcsin}} &= \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle, \\
D_{\text{arccos}} &= \langle -1, 1 \rangle, & H_{\text{arccos}} &= \langle 0, \pi \rangle, \\
D_{\text{arctg}} &= \mathbb{R}, & H_{\text{arctg}} &= (-\pi/2, \pi/2).
\end{aligned}
$$

13.5 Nula na nultou

Algebraický výraz 0^0 definujeme jako 1. Nula v exponentu vyjadřuje prázdný součin (není co násobit) a výsledkem je proto neutrální prvek vůči násobení, tedy 1. Podobně u prázdné sumy je výsledkem 0, neutrální prvek vůči sčítání.

To ovšem neznamená, že každá limita „typu“ 0^0 je 1!

13.6 Nutná podmínka, směr implikace

Pokud platí implikace $A \Rightarrow B$, pak o B často mluvíme jako o **nutné podmínce** pro A. Pokud B neplatí, pak nutně nemůže platit A (protože kdyby A platilo, pak platí B).

Studenti mají často tendenci směr implikace obracet. Například na přednáškách BI-MA2 si budeme formulovat následující větu: Pokud je řada $\sum_k a_k$ konvergentní, potom $\lim_k a_k = 0$. Z nějakého neznámého důvodu pak někteří studenti v písemkách tvrdí, že pokud $\lim_k a_k = 0$, pak je řada $\sum_k a_k$ konvergentní. To je samozřejmě holý nesmysl.

14 Přehled použitého značení

14.1 Přehled symboliky BI-MA1

Níže uvedené značení je kompatibilní s přednáškami, proseimináři a cvičeními BI--MA1.

Symbol	Význam	Definice
$:=$	definice, symbol na levé straně je definován výrazem na straně pravé	
$\approx$	přibližné vyjádření na konečný počet desetinných míst	
$\wedge$	konjunkce	BI-DML
$\vee$	disjunkce	
$\Rightarrow$	implikace	
$\Leftrightarrow$	ekvivalence	
$\forall$	velký (obecný) kvantifikátor	
$\exists$	existenční kvantifikátor	
$\{a, b, c\}$	množina obsahující prvky a, b a c	
$\{x \in M \mid P(x)\}$	množina všech x z M splňující $P(x)$	
$x \in M$, $x \notin M$	prvek x náleží/nenáleží množině M	
$A \subset B$	A je podmnožinou B (připouští se rovnost)	
$A \subsetneq B$	A je podmnožinou B a současně $A \neq B$	
$\emptyset$	prázdná množina	
$A \cup B$	sjednocení množin A a B	
$A \cap B$	průnik množin A a B	
$A \setminus B$	rozdíl množin A a B	

Symbol	Význam	Definice
$A \times B$	kartézský součin množiny A a B	
$\mathcal{P}(A)$	množina všech podmnožin množiny A	
$\min M$	minimum množiny M, existuje-li	Definice 9.1
$\max M$	maximum množiny M, existuje-li	Definice 9.1
$\inf M$	infimum množiny M	Definice 9.2
$\sup M$	supremum množiny M	Definice 9.3
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$	množina přirozených čísel	
$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$	množina přirozených čísel s nulou	
$\mathbb{Z}$	množina celých čísel	
$\mathbb{Q}$	množina racionálních čísel	
$\mathbb{R}$	množina reálných čísel	
$\overline{\mathbb{R}}$	rozšířená množina reálných čísel	
$\mathbb{R}_0^+$	nezáporná reálná čísla, tj. $\langle 0, +\infty)$	
$\mathbb{R}^+$	kladná reálná čísla, tj. $(0, +\infty)$	
$\mathbb{R}_0^-$	nekladná reálná čísla, tj. $(-\infty, 0\rangle$	
$\mathbb{R}^-$	záporná reálná čísla, tj. $(-\infty, 0)$	
$\mathbb{C}$	množina komplexních čísel	
$n!$	faktoriál čísla $n \in \mathbb{N}_0$	
$\binom{n}{k}$	kombinační číslo n nad k	
$\lfloor x \rfloor$	dolní celá část reálného x	
$\lceil x \rceil$	horní celá část reálného x	
$\operatorname{sgn}(x)$	znaménko reálného čísla x	
(a, b)	otevřený interval, nebo uspořádaná dvojice, podle kontextu	
$\langle a, b \rangle$	uzavřený interval	
$U_a(\varepsilon)$	ε-okolí bodu a	Definice 2.5
$U_a^+(\varepsilon),\ U_a^-(\varepsilon)$	pravé, levé ε-okolí bodu a	Definice 2.6
$U_{+\infty}(\alpha),\ U_{-\infty}(\alpha)$	α-okolí bodu $+\infty$, $-\infty$	Definice 2.7
$f\colon A \to B$	totální zobrazení množiny A do množiny B	Definice 11.3
D_f	definiční obor zobrazení f	Definice 11.3
H_f	obor hodnot zobrazení f	Definice 11.3
Γ_f	graf funkce f	
$f\big\rvert_M$	zúžení zobrazení f na množinu M	Definice 11.7

Symbol	Význam	Definice
$f(M)$	obraz množiny M při zobrazení f	Definice 11.6
$\mathcal{C}(J)$	množina všech funkcí spojitých a definovaných na J	Definice 7.2
$f^{-1}(M)$	vzor množiny M při zobrazení f	Definice 11.6
$f \circ g$	složené zobrazení	Definice 11.8
id_A	identické zobrazení na množině A	Příklad 11.1
f^{-1}	inverzní zobrazení	Definice 11.9
$\inf\limits_M f$	infimum funkce f na množině M, tj. $\inf f(M)$	rovnice 9.1
$\sup\limits_M f$	supremum funkce f na množině M, tj. $\sup f(M)$	rovnice 9.1
$\max\limits_M f$	maximum funkce f na množině M, tj. $\max f(M)$, existuje-li	rovnice 9.2
$\min\limits_M f$	minimum funkce f na množině M, tj. $\min f(M)$, existuje-li	rovnice 9.2
$(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$	reálná číselná posloupnost	Definice 4.1
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$	limita posloupnosti	Definice 5.1
$\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$	součet prvních n členů posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$	
$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	limita funkce f v bodě a	Definice 5.2
$\lim\limits_{x\to a_+} f(x)$	limita funkce f v bodě a zprava	Definice 5.3
$\lim\limits_{x\to a_-} f(x)$	limita funkce f v bodě a zleva	Definice 5.3
$f'(a)$	derivace funkce f v bodě a	Definice 8.1
$\mathcal{O}(f(x))$ pro $x \to a$	horní asymptotická mez $f(x)$ pro x jdoucí k a	Definice 3.12
$o(f(x))$ pro $x \to a$	striktní horní asymptotická mez $f(x)$ pro x jdoucí k a	Definice 3.13
$\Omega(a_n)$ pro $n \to \infty$	dolní asymptotická mez	Definice 4.7
$\omega(a_n)$ pro $n \to \infty$	striktní dolní asymptotická mez	Definice 4.8
$\Theta(a_n)$ pro $n \to \infty$	těsná asymptotická mez	Definice 4.9
$\sim$	asymptotická ekvivalence	Definice 5.4

14.2 Řecká abeceda

V následující tabulce jsou uvedena často používaná řecká písmena i s jejich přibližnou českou výslovností.

Řecké písmeno	Kapitálka	Česká výslovnost	LaTeX
α	A	alfa	`\alpha`
β	B	beta	`\beta`
γ	Γ	gama	`\gamma`, `\Gamma`
δ	Δ	delta	`\delta`, `\Delta`
ϵ, ε	E	epsilon	`\epsilon`, `\varepsilon`
ζ	Z	zeta	`\zeta`
η	H	éta	`\eta`
θ, ϑ	Θ	théta	`\theta`, `\vartheta`, `\Theta`
ι	I	ióta	`\iota`
κ	K	kapa	`\kappa`
λ	Λ	lambda	`\lambda`, `\Lambda`
μ	M	mí	`\mu`
ν	N	ný	`\nu`
ξ	Ξ	ksí	`\xi`, `\Xi`
o	O	omikron	`o`
π	Π	pí	`\pi`, `\Pi`
ρ, ϱ	P	ró	`\rho`, `\varrho`
σ	Σ	sigma	`\sigma`, `\Sigma`
τ	T	tau	`\tau`
υ	Υ	upsilon	`\upsilon`, `\Upsilon`
ϕ, φ	Φ	fí	`\phi`, `\varphi`, `\Phi`
χ	X	chí	`\chi`
ψ	Ψ	psí	`\psi`, `\Psi`
ω	Ω	omega	`\omega`, `\Omega`

Odpovědi na některé otázky

2.1 Přirozená čísla i celá čísla lze sčítat a násobit, jsou splněny asociativní, distributivní i komutativní zákony, ale v přirozených číslech neexistuje 0 (neutrální prvek vůči sčítání) a v celých číslech k některým nenulovým prvkům neexistují inverze vůči násobení (např. k 3). Tyto množiny spolu s uvedenými operacemi proto tělesa netvoří.

2.2 Ne, uvažte například $a = -2$ a $b = 1$.

2.3 Připomeňme definici ostrého uspořádání: pro dvě $a, b \in \mathbb{Q}$ platí $a < b$, právě když $0 < b - a$. Máme-li $a, b, c \in \mathbb{Q}$ a platí $a < b$, pak podmínka $a + c < b + c$ je ekvivalentní podmínce $(b+c)-(a+c) > 0$. S využitím distributivního, asociativního a komutativního zákona a předpokladu $a < b$ dostáváme $(b + c) - (a + c) = (b + c) + (-a - c) = (b - a) + (c - c) = b - a > 0$.

2.4 $7^2 = 49 < 8^2 = 64$.

2.5 Ano, podívejte se znovu na definici neostré nerovnosti prvků v $\mathbb{Q}$ (Poznámka 2.3).

2.6 $f(-2) = 1$, $f(-1/2) = 2$ a $f(1) = 3$.

2.7 Ne, do $\overline{\mathbb{R}}$ dle definice nepatří. Prvkem $\overline{\mathbb{R}}$ je buď reálné číslo, nebo „$+\infty$“ a „$-\infty$“.

2.8 $-\infty$.

2.9 Ne.

2.10 a. omezená, b. omezená, c. neomezená, d. neomezená, e. neomezená, f. omezená.

2.11 Poslední možnost dle naší definice nepředstavuje okolí bodu $-\infty$.

2.12 Ani jeden.

2.13 Například množina $\mathbb{Z} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$ má jako hromadné body $-\infty$, 0 a $+\infty$.

2.14 Ano, rozmyslete si toto tvrzení přímo z definice!

2.15 Maximem je číslo $x = +(1.11\ldots11)_2 \cdot 2^{2^{11}-2-1023} = 2^{1024} - 2^{971}$. Druhým největším strojovým číslem je $y = +(1.11\ldots10)_2 \cdot 2^{2^{11}-2-1023} = 2^{1024} - 2^{972}$. Mezera mezi nimi je tedy velikosti $x - y = 2^{972} - 2^{971} = 2^{971}$.

2.16 $1 + \frac{1}{2^{52}} = \frac{4503599627370497}{4503599627370496}$.

3.1 $D_{f+g} = \{0\}$ a $(f+g)(0) = 0$.

3.2 Ne.

3.3 Ano, například $f(1) = 1$, $D_f = \{1\}$. Vymyslíte méně triviální příklad?

3.4 Funkce sin je omezená jedničkou, pro všechna reálná x platí $|\sin(x)| \leq 1$. Funkce x není omezená: každou hypotetickou mez $K \geq 0$ překonáme volbou $x = K + 1$.

3.5 Ano, funkce f je konstantní, právě když její obor hodnot je jednoprvková množina.

3.6 Například $f(x) = 0 \cdot x$, nebo méně triviálně $g(x) = \sin^2(x) + \cos^2(x)$.

3.7 Platí $f \neq g$, $g = h$ a $f \neq h$.

3.8 Ano. Dle definice $a \leq b$ platí právě tehdy, když $a = b$ nebo $a < b$.

3.9 Ano, například konstantní funkce.

3.10 Ano, pokud platí $a < b$, pak platí i $a \leq b$.

3.11 Ano.

3.12 F je lichá, G je lichá, H nemusí být ani sudá ani lichá.

3.13 Ano, například $f(x) = 0$.

3.14 Ne.

3.15 Například $f(x) = x$ a $g(x) = 2x$.

4.1 Jedná se o stejný rozdíl jako mezi funkční hodnotou a funkcí. Symbol a_n označuje n-tý člen posloupnosti, kdežto symbol $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ celou posloupnost (zobrazení $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$).

4.2 $\alpha = -1$

4.3 Každá posloupnost má nekonečně mnoho členů. Členy této konkrétní posloupnosti nabývají právě tří hodnot $\{-1, 0, 1\}$.

4.4 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je konstantní, tedy současně rostoucí i klesající, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je klesající, $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ není ani jednoho typu z definice 4.2.

4.5 a. je rostoucí, b. nemusí být rostoucí, např. $a_n = 0$, $b_n = n$, c. nemusí být rostoucí, např. $a_n = -1$, $b_n = n$, d. nemusí být ani dobře definována, natož rostoucí.

4.6 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou omezené, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je neomezená.

4.7 Ano, zadaná posloupnost totiž obsahuje nekonečně mnoho členů majících hodnotu 1 i -1.

5.2 Tvrzení není pravdivé, stačí vzít například ostře rostoucí posloupnost $a_n = 1 - \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Členy této posloupnosti splňují $a_n < 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a proto tato posloupnost nemůže mít jako limitu $+\infty$. Například interval $(2, +\infty)$, tedy jedno z okolí $+\infty$, neobsahuje ani jeden bod této posloupnosti.

6.1 1. $a_n = 0$, $b_n = n$, 2. $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = n$, 3. $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = n^2$.

7.1 Možností je mnoho. Například pokud $f = \operatorname{sgn}$ a $J = (-1, 1)$, pak $f(J) = \{-1, 0, 1\}$.

8.1 $f'(0) = -\infty$, $g'(0)$ neexistuje.

9.1 Ne, viz např. funkci $f(x) = -1/x$, $x \neq 0$ a $f(0) = 0$.

9.2 Ano, stačí využít čístě definici ostře rostoucí funkce.

9.3 Ano, stačí využít čístě definici ostře rostoucí funkce a spojitost dané funkce v bodě 0 (postupujte například sporem).

9.4 Ano, viz např. $f(x) = x + \frac{1}{x}\sin(x)$.

12.1 Druhou odmocninou z nezáporného čísla x je nezáporné číslo y splňující $y^2 = x$, značíme ho $y = \sqrt{x}$.

12.2 Každá taková funkce má definiční obor i obor hodnot roven množině $\langle 0, +\infty)$. Je ostře rostoucí a tedy i ryze monotonní a prostá, není surjektivní.

12.3 Každá taková funkce má definiční obor i obor hodnot roven množině $\mathbb{R}$. Je ostře rostoucí a tedy i ryze monotonní a prostá, je surjektivní.

12.4 Definičním oborem funkce sin je množina $\mathbb{R}$, jejím oborem hodnot je interval $\langle -1, 1\rangle$. Tato funkce je omezená, není prostá ani na. Je periodická s minimální periodou 2π. Není monotónní.

12.5 Definičním oborem funkce cos je množina $\mathbb{R}$, jejím oborem hodnot je interval $\langle -1, 1\rangle$. Tato funkce je omezená, není prostá ani na. Je periodická s minimální periodou 2π. Není monotónní.

12.6 Definičním oborem funkce tg je množina $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, jejím oborem hodnot je množina $\mathbb{R}$. Tato funkce není omezená ani prostá. Je surjektivní. Je periodická s minimální periodou π. Není monotónní.

12.7 Definičním oborem funkce cotg je množina $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, jejím oborem hodnot je množina $\mathbb{R}$. Tato funkce není omezená ani prostá. Je surjektivní. Je periodická s minimální periodou π. Není monotónní.

12.8 Tato funkce je definována jako inverze k zúžení funkce sin na interval $\langle -\pi/2, \pi/2$ Definičním oborem funkce arcsin je množina $\langle -1, 1\rangle$, jejím oborem hodnot je množina $\langle -\pi/2, \pi/2\rangle$. Tato funkce je omezená i prostá. Není surjektivní. Je ostře rostoucí.

12.9 Tato funkce je definována jako inverze k zúžení funkce cos na interval $\langle 0, \pi \rangle$. Definičním oborem funkce arccos je množina $\langle -1, 1 \rangle$, jejím oborem hodnot je množina $\langle 0, \pi \rangle$. Tato funkce je omezená i prostá. Není surjektivní. Je ostře klesající.

12.10 Tato funkce je definována jako inverze k zúžení funkce tg na interval $(-\pi/2, \pi/2$ Definičním oborem funkce arctg je množina $\mathbb{R}$, jejím oborem hodnot je množina $(-\pi/2, \pi/2)$. Tato funkce je omezená i prostá. Není surjektivní. Je ostře rostoucí.

12.11 Tato funkce má definiční obor $\mathbb{R}$ a obor hodnot $(0, +\infty)$. Není omezená ani periodická. Je prostá, ale není na. Je ostře rostoucí. Splňuje veledůležitý vztah $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^y$, $x, y \in \mathbb{R}$.

12.12 Tato funkce má definiční obor $(0, +\infty)$ a obor hodnot $\mathbb{R}$. Není omezená ani periodická. Je prostá a je na. Je ostře rostoucí. Splňuje vztah $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$, $x, y > 0$.

Literatura

[1] M.L. Bittinger, D.J. Ellenbogen, and S.A. Surgent. *Calculus and Its Applications.* Pearson, 2015.

[2] C. A. R. Hoare. Algorithm 64: Quicksort. *Comm. ACM*, 4:321, 1961.

[3] IEEE. Ieee standard for floating-point arithmetic, 2008.

[4] Jiří Kopáček. *Matematická analýza nejen pro fyziky I.* matfyzpress, 2004.

[5] Jiří Kopáček. *Matematická analýza nejen pro fyziky II.* matfyzpress, 2004.

[6] Michael Oberguggenberger and Alexander Ostermann. *Analysis for Computer Scientists.* Springer, 2011.

[7] Richard A. Silverman. *Essential calculus with applications.* Dover, 1989.

[8] J. Stewart. *Calculus.* Cengage Learning, 2015.

[9] Steven Strogatz. *Infinite Powers: How Calculus Reveals the Secrets of the Universe.* Houghton Mifflin Harcourt, 2019.

Index