Matematická analýza 2

Primitivní funkce a neurčitý integrál

Pavel Hrabák[1], Tomáš Kalvoda[2], Ivo Petr[3]

[1]pavel.hrabak@fit.cvut.cz, [2]tomas.kalvoda@fit.cvut.cz, [3]ivo.petr@fit.cvut.cz

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze

1. listopadu 2024
ZS 2024/2025

Hlavní body

$$F'(x) = f(x)$$

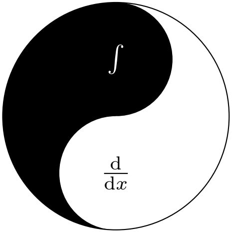
1. Primitivní funkce
2. Neurčitý integrál
3. Vlastnosti neurčitého integrálu
4. Existence primitivní funkce

$$\int \cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x) + C$$

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

Integrální počet

- V BI-MA1 jsme na konci letního semestru vybudovali základy *diferenciálního počtu*.
- Nyní v BI-MA2 plynule navážeme studiem *integrálního počtu*.
- Derivace a integrace spolu velmi úzce souvisí!



Hlavní výsledky této přednášky

- Definice a význam **primitivní funkce**.
- Definice **neurčitého integrálu** a jeho základní vlastnosti.
- **Příklady** jednoduchého výpočtu neurčitého integrálu.

Hlavní body

$$F'(x) = f(x)$$

1. Primitivní funkce
2. Neurčitý integrál

$$\int \cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x) + C$$

3. Vlastnosti neurčitého integrálu
4. Existence primitivní funkce

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

Primitivní funkce

Definice (primitivní funkce / *antiderivative*):

Nechť funkce f je definována na intervalu (a, b), kde $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Funkci F splňující podmínku

$$F'(x) = f(x) \text{ pro každé } x \in (a, b)$$

nazýváme **primitivní funkcí k funkci f na intervalu** (a, b).

Poznámka:

Z definice ihned plyne, že F je diferencovatelná v každém bodě intervalu (a, b) a tedy je i spojitá na (a, b).

Příklady primitivních funkcí

Příklad.

Funkce $F(x) = x^3$ je primitivní funkcí k funkci $f(x) = 3x^2$ na libovolném intervalu (a, b).
Skutečně, platí $\left(x^3\right)' = 3x^2$.

Příklady primitivních funkcí

Příklad.

Funkce $F(x) = x^3$ je primitivní funkcí k funkci $f(x) = 3x^2$ na libovolném intervalu (a, b).
Skutečně, platí $\big(x^3\big)' = 3x^2$.

Příklad.

Funkce $F(x) = \ln x$ je primitivní funkcí k funkci $f(x) = \frac{1}{x}$ na libovolném intervalu $(a, b) \subset (0, +\infty)$.
Skutečně, platí $\big(\ln x\big)' = \frac{1}{x}$.

Příklady primitivních funkcí

Příklad.

Funkce $F(x) = x^3$ je primitivní funkcí k funkci $f(x) = 3x^2$ na libovolném intervalu (a, b).
Skutečně, platí $\big(x^3\big)' = 3x^2$.

Příklad.

Funkce $F(x) = \ln x$ je primitivní funkcí k funkci $f(x) = \frac{1}{x}$ na libovolném intervalu $(a, b) \subset (0, +\infty)$.
Skutečně, platí $\big(\ln x\big)' = \frac{1}{x}$.

Příklad.

Funkce $F(x) = \operatorname{arctg} x$ je primitivní funkcí k funkci $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ na libovolném intervalu (a, b).
Skutečně, platí $\big(\operatorname{arctg} x\big)' = \frac{1}{1+x^2}$.

Hlavní body

$$F'(x) = f(x)$$

$$\int \cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x) + C$$

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

(Ne)jednoznačnost primitivní funkce

Věta (O jednoznačnosti primitivní funkce):

Nechť F je primitivní funkcí k funkci f na intervalu (a,b). Pak G je primitivní funkcí k funkci f na intervalu (a,b) právě tehdy, když existuje konstanta $C \in \mathbb{R}$ taková, že

$$G(x) = F(x) + C, \quad \text{pro každé } x \in (a,b).$$

(Ne)jednoznačnost primitivní funkce

Věta (O jednoznačnosti primitivní funkce):

Nechť F je primitivní funkcí k funkci f na intervalu (a,b). Pak G je primitivní funkcí k funkci f na intervalu (a,b) právě tehdy, když existuje konstanta $C \in \mathbb{R}$ taková, že

$$G(x) = F(x) + C, \quad \text{pro každé } x \in (a,b).$$

Důkaz.

Pokud F a G jsou funkce primitivní k f na intervalu (a,b), potom

$$(F-G)'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0, \quad \text{pro všechna } x \in (a,b).$$

Funkce $F - G$ je proto konstantní na intervalu (a,b).

(Ne)jednoznačnost primitivní funkce

Věta (O jednoznačnosti primitivní funkce):

Nechť F je primitivní funkcí k funkci f na intervalu (a, b). Pak G je primitivní funkcí k funkci f na intervalu (a, b) právě tehdy, když existuje konstanta $C \in \mathbb{R}$ taková, že

$$G(x) = F(x) + C, \quad \text{pro každé } x \in (a, b).$$

Důkaz.

Pokud F a G jsou funkce primitivní k f na intervalu (a, b), potom

$$(F - G)'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0, \quad \text{pro všechna } x \in (a, b).$$

Funkce $F - G$ je proto konstantní na intervalu (a, b).

Naopak, je-li $G(x) = F(x) + C$, pro libovolné $x \in (a, b)$, pak $G'(x) = F'(x)$. □

Neurčitý integrál

Definice (neurčitý integrál / *indefinite integral*):

Nechť k funkci f existuje primitivní funkce na intervalu (a, b). Množinu všech primitivních funkcí k funkci f na (a, b) nazýváme **neurčitým integrálem funkce** f **na intervalu** (a, b). Značíme jej $\int f$ nebo $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Neurčitý integrál

Definice (neurčitý integrál / *indefinite integral*):

Nechť k funkci f existuje primitivní funkce na intervalu (a,b). Množinu všech primitivních funkcí k funkci f na (a,b) nazýváme **neurčitým integrálem funkce f na intervalu** (a,b). Značíme jej $\int f$ nebo $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Poznámka (Terminologie):

Najdeme-li k f na intervalu (a,b) primitivní funkci F, zapisujeme tento fakt obvykle

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C.$$

Funkci f nazýváme **integrovanou funkcí** (integrandem), x **integrační proměnnou** a C **integrační konstantou**. Úkolu určit $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ říkáme „vypočítat integrál z f“ nebo „integrovat f“.

Primitivní funkce a derivace

Poznámka (Vztah „derivace“ a „integrace“):

- Je-li funkce g diferencovatelná na intervalu (a, b), pak přímo z definice plyne

$$\int g'(x)\,\mathrm{d}x = g(x) + C, \quad x \in (a, b).$$

Primitivní funkce a derivace

Poznámka (Vztah „derivace“ a „integrace“):

- Je-li funkce g diferencovatelná na intervalu (a,b), pak přímo z definice plyne

$$\int g'(x)\,\mathrm{d}x = g(x) + C, \quad x \in (a,b).$$

- Má-li funkce f primitivní funkci na intervalu (a,b), potom opět přímo z definice plyne

$$\left(\int f\right)'(x) = f(x), \quad x \in (a,b).$$

(Výraz na levé straně poslední rovnosti je nutno chápat jako derivaci libovolné funkce z uvedené množiny primitivních funkcí.)

Primitivní funkce elementárních funkcí...

Ze znalosti derivací můžeme ihned sestavit tabulku primitivních funkcí:

vzorec	interval, parametry
$\int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$
$\int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \leq -2$
$\int x^\alpha \,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$x \in (0, +\infty)$, $\alpha \notin \mathbb{Z}$
$\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \ln\lvert x\rvert + C$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\int a^x \,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$x \in \mathbb{R}$, $a > 0$ a $a \neq 1$
$\int \sin(x) \,\mathrm{d}x = -\cos(x) + C$	$x \in \mathbb{R}$

...pokračování

vzorec	interval, parametry
$\int \cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x) + C$	$x \in \mathbb{R}$
$\int \frac{1}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = \mathrm{tg}(x) + C$	$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi,\ \frac{\pi}{2} + k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}$
$\int \frac{1}{\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{cotg}(x) + C$	$x \in \left(k\pi,\ \pi + k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin(x) + C$	$x \in (-1, 1)$
$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{arctg}(x) + C$	$x \in \mathbb{R}$

Hlavní body

$$F'(x) = f(x)$$

1. Primitivní funkce
2. Neurčitý integrál
3. Vlastnosti neurčitého integrálu
4. Existence primitivní funkce

$$\int \cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x) + C$$

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

Základní pravidla pro integrování

Věta:

Nechť F, resp. G, je primitivní funkce k funkci f, resp. g, na intervalu (a, b) a nechť $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak

Základní pravidla pro integrování

Věta:

Nechť F, resp. G, je primitivní funkce k funkci f, resp. g, na intervalu (a, b) a nechť $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak

- $F + G$ je primitivní funkcí k funkci $f + g$ na intervalu (a, b),

Základní pravidla pro integrování

Věta:

Nechť F, resp. G, je primitivní funkce k funkci f, resp. g, na intervalu (a, b) a nechť $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak

- $F + G$ je primitivní funkcí k funkci $f + g$ na intervalu (a, b),
- αF je primitivní funkcí k funkci αf na intervalu (a, b).

Základní pravidla pro integrování

Věta:

Nechť F, resp. G, je primitivní funkce k funkci f, resp. g, na intervalu (a, b) a nechť $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak

- $F + G$ je primitivní funkcí k funkci $f + g$ na intervalu (a, b),
- αF je primitivní funkcí k funkci αf na intervalu (a, b).

Důkaz.

Plyne ihned z pravidla po derivaci součtu funkcí a konstantního násobku funkce. $\square$

Základní pravidla pro integrování

Věta:

Nechť F, resp. G, je primitivní funkce k funkci f, resp. g, na intervalu (a, b) a nechť $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak

- $F + G$ je primitivní funkcí k funkci $f + g$ na intervalu (a, b),
- αF je primitivní funkcí k funkci αf na intervalu (a, b).

Důkaz.

Plyne ihned z pravidla po derivaci součtu funkcí a konstantního násobku funkce. □

Poznámka:

Větu symbolicky zapisujeme a při výpočtech využíváme takto:

$$\int (f + g) = \int f + \int g \quad \text{a} \quad \int (\alpha f) = \alpha \int f.$$

Příklad

Příklad.

Vypočtěte

$$\int \left(4x^2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right) \mathrm{d}x.$$

Příklad

Příklad.

Vypočtěte

$$\int \left(4x^2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right) \mathrm{d}x.$$

$$\int \left(4x^2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right) \mathrm{d}x = 4\int x^2 \,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x + \int x^{-2/3} \,\mathrm{d}x =$$

$$= 4 \cdot \frac{x^3}{3} - \ln|x| + \frac{x^{1/3}}{1/3} + C = \frac{4}{3}x^3 - \ln|x| + 3x^{1/3} + C.$$

Příklad

Příklad.

Vypočtěte

$$\int \left(2^x + 3^x\right)^2 \mathrm{d}x.$$

Příklad

Příklad.
Vypočtěte
$$\int \left(2^x + 3^x\right)^2 \mathrm{d}x.$$

$$\begin{aligned}\int \left(2^x + 3^x\right)^2 \mathrm{d}x &= \int \left(2^{2x} + 2 \cdot 2^x \cdot 3^x + 3^{2x}\right) \mathrm{d}x = \\ &= \int 4^x \mathrm{d}x + 2\int 6^x \mathrm{d}x + \int 9^x \mathrm{d}x = \\ &= \frac{4^x}{\ln 4} + 2 \cdot \frac{6^x}{\ln 6} + \frac{9^x}{\ln 9} + C.\end{aligned}$$

Hlavní body

$$F'(x) = f(x)$$

1 Primitivní funkce

2 Neurčitý integrál

$$\int \cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x) + C$$

3 Vlastnosti neurčitého integrálu

4 Existence primitivní funkce

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

Existence primitivní funkce

Věta (Postačující podmínka pro existenci primitivní funkce):

Nechť funkce f je spojitá na intervalu (a, b). Pak funkce f má na tomto intervalu primitivní funkci.

Existence primitivní funkce

Věta (Postačující podmínka pro existenci primitivní funkce):

Nechť funkce f je spojitá na intervalu (a, b). Pak funkce f má na tomto intervalu primitivní funkci.

Důkaz.

Vynecháme. $\square$

Existence primitivní funkce

Věta (Postačující podmínka pro existenci primitivní funkce):

Nechť funkce f je spojitá na intervalu (a, b). Pak funkce f má na tomto intervalu primitivní funkci.

Důkaz.

Vynecháme. $\square$

- Jenom malá část elementárních funkcí má primitivní funkci, která by byla elementární. Víme jen, že primitivní funkce existuje, ale nelze ji vyjádřit pomocí konečně mnoha operací (součet, součin, podíl, skládání a invertování) ze základních funkcí. Jako příklad uveďme

$$\int \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x, \quad \int \frac{\sin(x)}{x} \mathrm{d}x, \quad \int \frac{1}{\ln(x)} \mathrm{d}x.$$

Důkaz tohoto tvrzení v této přednášce nebude podán.

Hledání neurčitého integrálu

- Rozpoznat, kdy funkce má „rozumnou“ primitivní funkci, je často složité. Obecný návod (algoritmus) „jak integrovat“ lze dát pouze v případě racionálních funkcí a funkcí které lze na racionální vhodnou substitucí převést.

Hledání neurčitého integrálu

- Rozpoznat, kdy funkce má „rozumnou“ primitivní funkci, je často složité. Obecný návod (algoritmus) „jak integrovat“ lze dát pouze v případě racionálních funkcí a funkcí které lze na racionální vhodnou substitucí převést.

- Integrace, na rozdíl od derivování, vyžaduje *cvik a zkušenost*.

Hledání neurčitého integrálu

- Rozpoznat, kdy funkce má „rozumnou“ primitivní funkci, je často složité. Obecný návod (algoritmus) „jak integrovat“ lze dát pouze v případě racionálních funkcí a funkcí které lze na racionální vhodnou substitucí převést.

- Integrace, na rozdíl od derivování, vyžaduje *cvik a zkušenost*.

Poznámka:

Vždy je však pomocí derivování možné ověřit, zda jsme ve výpočtu neudělali chybu!

Hledání neurčitého integrálu

Příklad.

Ověřte, že $\displaystyle\int 2\sin x\cos x\,\mathrm{d}x = \sin^2 x + C.$

Hledání neurčitého integrálu

Příklad.

Ověřte, že $\displaystyle\int 2\sin x\cos x\,\mathrm{d}x = \sin^2 x + C$.

Ověření:

$$\left(\sin^2 x + C\right)' = 2\sin x \cdot (\sin x)' + 0 = 2\sin x\cos x.$$

Hledání neurčitého integrálu

Příklad.

Ověřte, že $\int 2\sin x \cos x \,\mathrm{d}x = \sin^2 x + C$.

Ověření:

$$\left(\sin^2 x + C\right)' = 2\sin x \cdot (\sin x)' + 0 = 2\sin x \cos x.$$

Poznámka:

Při dobré znalosti derivování je někdy možné primitivní funkci „uhodnout". Pro diferencovatelnou funkci f a $\alpha \in \mathbb{N}$ například platí

$$(f^\alpha)' = \alpha \cdot f^{\alpha-1} \cdot f',$$

což bychom mohli využít při hledání primitivní funkce v předchozím příkladu. Toto pozorování dále rozvineme v další přednášce při studiu integrace pomocí *substituce*.

Hledání neurčitého integrálu

Poznámka:

Podobně pro diferencovatelnou nenulovou funkci f platí

$$\big(\ln|f|\big)' = \frac{f'}{f}.$$

A proto například *ihned vidíme*, že

$$\int \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \ln\big(1+x^2\big) + C.$$

Někdy je potřeba učinit drobnou algebraickou úpravu, abychom výraz převedli do vhodného tvaru, například:

$$\int \frac{\sin x}{2+\cos x}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{-\sin x}{2+\cos x}\,\mathrm{d}x = -\ln(2+\cos x) + C.$$

Hlavní body

5 Dodatek

$$F'(x) = f(x)$$

$$\int \cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x) + C$$

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

Komentář

- Algoritmy pro výčet primitivních funkcí, resp. neurčitých integrálů, existují. Jako příklad zmiňme Rischův algoritmus (1968). Tyto algoritmy jsou ale většinou nevhodné pro použití lidmi, zvláště v prvních stádiích studia této problematiky (kompletní popis Rischova algoritmu zabírá více než 100 stránek textu).

- V příští přednášce budeme studovat i sofistikovanější metody výpočtu, než v podstatě „uhodnutí“ prezentované zde. Konkrétně metody integrace pomocí *substituce* a *per partes*. I tak ale tyto metody vyžadují jistý vhled, myšlenku, nejsou čistě mechanické jako tomu je u derivování.