Matematická analýza 2

Výpočet neurčitého integrálu

Pavel Hrabák[1], Tomáš Kalvoda[2], Ivo Petr[3]

[1]pavel.hrabak@fit.cvut.cz, [2]tomas.kalvoda@fit.cvut.cz, [3]ivo.petr@fit.cvut.cz

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze

1. listopadu 2024
ZS 2024/2025

Hlavní body

1. Integrace per partes
2. Substituce v neurčitém integrálu
3. Další příklady

$$\int fg = Fg - \int Fg'$$

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = F(\varphi(x)) + C$$

Hlavní výsledky této přednášky

- Integrace součinu funkcí metodou *per partes*.
- Integrace pomocí *substituce* v neurčitém integrálu.
- Integrace racionálních funkcí.

Hlavní body

1. Integrace per partes

$$\int fg = Fg - \int Fg'$$

2. Substituce v neurčitém integrálu

3. Další příklady

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = F(\varphi(x)) + C$$

Integrace per partes

Věta (Per partes / *integration by parts*):

Nechť funkce f je diferencovatelná v intervalu (a, b) a G je primitivní funkce k funkci g na intervalu (a, b) a konečně nechť existuje primitivní funkce k funkci $f'G$. Potom existuje primitivní funkce k funkci fg a platí

$$\int fg = fG - \int f'G.$$

Integrace per partes

Věta (Per partes / *integration by parts*):

Nechť funkce f je diferencovatelná v intervalu (a,b) a G je primitivní funkce k funkci g na intervalu (a,b) a konečně nechť existuje primitivní funkce k funkci $f'G$. Potom existuje primitivní funkce k funkci fg a platí

$$\int fg = fG - \int f'G.$$

Důkaz.

Tvrzení věty můžeme přímo ověřit derivováním

$$\left(fG - \int f'G\right)' = (fG)' - f'G = f'G + fG' - f'G = fG' = fg.$$

Všimněte si, že ve výpočtu jsme použili pravidlo pro derivování součinu dvou funkcí. □

Integrace per partes

Poznámka:

- „per partes“, česky „po částech“.
- Umožňuje integrovat *některé* součiny funkcí. Srovnejte obtížnost s výpočtem derivace součinu funkcí.
- Někdy je vzorec pro integraci per partes uváděn i v následujícím tvaru: $\int uv' = uv - \int u'v$.

Aby bylo jasné jak per partes používáme budeme v následujících výpočtech používat jednoduchou notaci:

$$\int fg = \left| \begin{matrix} f & \quad & g \\ & & \\ & & \end{matrix} \right| =$$

Integrace per partes

Poznámka:

- „per partes“, česky „po částech“.
- Umožňuje integrovat *některé* součiny funkcí. Srovnejte obtížnost s výpočtem derivace součinu funkcí.
- Někdy je vzorec pro integraci per partes uváděn i v následujícím tvaru: $\int uv' = uv - \int u'v$.

Aby bylo jasné jak per partes používáme budeme v následujících výpočtech používat jednoduchou notaci:

$$\int fg = \left| \begin{array}{cc} f & g \\ \downarrow & \downarrow \\ f' & G \end{array} \right| =$$

Integrace per partes

Poznámka:

- „per partes“, česky „po částech“.
- Umožňuje integrovat *některé* součiny funkcí. Srovnejte obtížnost s výpočtem derivace součinu funkcí.
- Někdy je vzorec pro integraci per partes uváděn i v následujícím tvaru: $\int uv' = uv - \int u'v$.

Aby bylo jasné jak per partes používáme budeme v následujících výpočtech používat jednoduchou notaci:

$$\int fg = \left| \begin{array}{cc} f & g \\ f' & G \end{array} \right| = fG$$

Integrace per partes

Poznámka:

- „per partes“, česky „po částech“.
- Umožňuje integrovat *některé* součiny funkcí. Srovnejte obtížnost s výpočtem derivace součinu funkcí.
- Někdy je vzorec pro integraci per partes uváděn i v následujícím tvaru: $\int uv' = uv - \int u'v$.

Aby bylo jasné jak per partes používáme budeme v následujících výpočtech používat jednoduchou notaci:

$$\int fg = \left| \begin{array}{cc} f & g \\ & \\ f' & G \end{array} \right| = fG - \int f'G.$$

Příklady

Příklad.

Vypočtěte neurčitý integrál $\int x \sin x \,\mathrm{d}x$.

Příklady

Příklad.

Vypočtěte neurčitý integrál $\int x \sin x \, \mathrm{d}x$.

Řešení:

$$\int x \sin x \, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} f(x) = x & g(x) = \sin x \\ f'(x) = 1 & G(x) = -\cos x \end{array} \right| = -x \cos x + \int \cos x \, \mathrm{d}x =$$

$$= -x \cos x + \sin x + C.$$

Příklady

Příklad.

Vypočtěte neurčitý integrál $\int x \sin x \, \mathrm{d}x$.

Řešení:

$$\int x \sin x \, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} f(x) = x & g(x) = \sin x \\ f'(x) = 1 & G(x) = -\cos x \end{array} \right| = -x \cos x + \int \cos x \, \mathrm{d}x =$$

$$= -x \cos x + \sin x + C.$$

Připomeňme, že výsledek můžeme snadno ověřit:

$$\big(-x \cos x + \sin x + C \big)' = -\cos x + x \sin x + \cos x + 0 = x \sin x.$$

Příklady

Příklad.

Vypočtěte neurčitý integrál $\int x^2 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$.

Příklady

Příklad.

Vypočtěte neurčitý integrál $\int x^2 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$.

Nyní je potřeba per partes použít dvakrát.

$$\int x^2 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{cc} x^2 & \mathrm{e}^x \\ & \\ 2x & \mathrm{e}^x \end{array} \right| = x^2 \mathrm{e}^x - \int 2x \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = x^2 \mathrm{e}^x - 2 \int x \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{array}{cc} x & \mathrm{e}^x \\ & \\ 1 & \mathrm{e}^x \end{array} \right| = x^2 \mathrm{e}^x - 2 \left(x \mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \right) =$$

$$= x^2 \mathrm{e}^x - 2x \mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^x + C = \left(x^2 - 2x + 2\right) \mathrm{e}^x + C.$$

Příklady

Příklad.

Vypočtěte neurčitý integrál $\int \ln x \, \mathrm{d}x$ pro $x > 0$.

Příklady

Příklad.

Vypočtěte neurčitý integrál $\int \ln x \, \mathrm{d}x$ pro $x > 0$.

Integrand sice na první pohled není ve tvaru součinu, ale můžeme postupovat následovně:

$$\int \ln x \, \mathrm{d}x = \int 1 \cdot \ln x \, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{cc} \ln x & 1 \\ \frac{1}{x} & x \end{array} \right| = x \ln x - \int \frac{x}{x} \, \mathrm{d}x =$$

$$= x \ln x - \int 1 \mathrm{d}x = x \ln x - x + C.$$

Příklady

Příklad.

Někdy per partes nevede k cíli. Vypočtěte integrál

$$\int \sin^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

I opakované použití per partes nikam nevede,

$$\begin{aligned} I := \int \sin(x)\cdot\sin(x)\,\mathrm{d}x &= -\sin(x)\cos(x) + \int \cos(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\sin(x)\cos(x) + \cos(x)\sin(x) + \int \sin^2(x)\,\mathrm{d}x = 0 + I = I. \end{aligned}$$

Ale s využitím trocha trigonometrie a znalosti derivací dostáváme

$$\begin{aligned} \int \sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos(2x)}{2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int 1\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \cos(2x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + C. \end{aligned}$$

Příklad


Doing per partes
Things start cancelling out
More things cancel out
I = I

Hlavní body

1. Integrace per partes
2. Substituce v neurčitém integrálu
3. Další příklady

$$\int fg = Fg - \int Fg'$$

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = F(\varphi(x)) + C$$

Substituce v neurčitém integrálu (první varianta)

Věta (O substituci I):

Nechť pro funkce f a φ platí

1. f má primitivní funkci F na intervalu (a,b),
2. φ je na intervalu (α,β) diferencovatelná,
3. $\varphi\big((\alpha,\beta)\big) \subset (a,b)$.

Pak funkce $f\big(\varphi(x)\big)\cdot\varphi'(x)$ má primitivní funkci na intervalu (α,β) a platí

$$\int f\big(\varphi(x)\big)\cdot\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = F\big(\varphi(x)\big) + C.$$

Substituce v neurčitém integrálu (první varianta)

Důkaz.

F je primitivní funkcí k funkci f, tj. $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in (a, b)$. Podle věty o derivaci složené funkce dostaneme

$$(F \circ \varphi)'(x) = F'\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x) = f\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x),$$

pro každé $x \in (\alpha, \beta)$. □

Substituce v neurčitém integrálu (první varianta)

Důkaz.

F je primitivní funkcí k funkci f, tj. $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in (a, b)$. Podle věty o derivaci složené funkce dostaneme

$$(F \circ \varphi)'(x) = F'\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x) = f\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x),$$

pro každé $x \in (\alpha, \beta)$. □

Poznámka:

Jedná se vlastně o „derivaci složené funkce naruby".

Příklad

Příklad.

Vypočtěte

$$\int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x.$$

Příklad

Příklad.

Vypočtěte

$$\int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x.$$

Použijeme substituci $y = \varphi(x) = \frac{1}{x}$. Potom $\varphi'(x) = -\frac{1}{x^2}$. Proto

$$\int \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{-\varphi'(x)} \sin \underbrace{\frac{1}{x}}_{\varphi(x)} \mathrm{d}x = -\int \sin y \, \mathrm{d}y = \cos y + C = \cos \frac{1}{x} + C.$$

Příklad.

Nalezněte primitivní funkci k funkci $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ na intervalu $J = \left(\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right)$.

Příklad.

Nalezněte primitivní funkci k funkci $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ na intervalu $J = \left(\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right)$.

Funkce f je na intervalu J spojitá a má zde tedy primitivní funkci. Nejprve upravme integrand

$$\int \operatorname{tg} x \,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \mathrm{d}x = -\int \frac{1}{\cos(x)} \cdot \big(-\sin(x)\big) \mathrm{d}x.$$

Použijeme větu o substituci, kde zvolíme $f(y) = \frac{1}{y}$ a $y = \varphi(x) = \cos(x)$.

Příklad.

Nalezněte primitivní funkci k funkci $f(x) = \mathrm{tg}(x)$ na intervalu $J = \left(\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right)$.

Funkce f je na intervalu J spojitá a má zde tedy primitivní funkci. Nejprve upravme integrand

$$\int \mathrm{tg}\, x \,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \mathrm{d}x = -\int \frac{1}{\cos(x)} \cdot \big(-\sin(x)\big) \mathrm{d}x.$$

Použijeme větu o substituci, kde zvolíme $f(y) = \frac{1}{y}$ a $y = \varphi(x) = \cos(x)$. Funkce φ zobrazuje interval J na interval $(-1, 0)$ kde má f primitivní funkci $F(y) = \ln(-y)$. Navíc $\varphi'(x) = -\sin(x)$. Větu lze tudíž použít a dostáváme

$$\int \mathrm{tg}(x)\,\mathrm{d}x = -\ln\big(-\cos(x)\big) + C, \quad x \in J.$$

Příklad.

Nalezněte primitivní funkci k funkci $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ na intervalu $J = \left(\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right)$.

Funkce f je na intervalu J spojitá a má zde tedy primitivní funkci. Nejprve upravme integrand

$$\int \operatorname{tg} x \, \mathrm{d}x = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \mathrm{d}x = -\int \frac{1}{\cos(x)} \cdot \big(-\sin(x)\big) \mathrm{d}x.$$

Použijeme větu o substituci, kde zvolíme $f(y) = \frac{1}{y}$ a $y = \varphi(x) = \cos(x)$. Funkce φ zobrazuje interval J na interval $(-1, 0)$ kde má f primitivní funkci $F(y) = \ln(-y)$. Navíc $\varphi'(x) = -\sin(x)$. Větu lze tudíž použít a dostáváme

$$\int \operatorname{tg}(x) \, \mathrm{d}x = -\ln\big(-\cos(x)\big) + C, \quad x \in J.$$

Poznámka: Často se též substituce zapisuje jako $y = \cos x$, $\mathrm{d}y = -\sin x \, \mathrm{d}x$ a

$$\int \operatorname{tg} x \, \mathrm{d}x = -\int \frac{1}{y} \, \mathrm{d}y = -\ln|y| + C = -\ln\big(-\cos(x)\big) + C.$$

Substituce v neurčitém integrálu (druhá varianta)

Věta (O substituci II):

Nechť f je definována na intervalu (a,b) a nechť φ je bijekce intervalu (α,β) na (a,b) s nenulovou konečnou derivací v každém bodě intervalu (α,β). Pak platí

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = G(t) + C \quad \Longrightarrow \quad \int f(x)\mathrm{d}x = G\big(\varphi^{-1}(x)\big) + C$$

Substituce v neurčitém integrálu (druhá varianta)

Věta (O substituci II):

Nechť f je definována na intervalu (a, b) a nechť φ je bijekce intervalu (α, β) na (a, b) s nenulovou konečnou derivací v každém bodě intervalu (α, β). Pak platí

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = G(t) + C \quad \Longrightarrow \quad \int f(x)\mathrm{d}x = G\big(\varphi^{-1}(x)\big) + C$$

Důkaz.

Pomocí věty o derivaci inverzní funkce odvodíme, že

$$\Big(G\big(\varphi^{-1}(x)\big)\Big)' = G'\big(\varphi^{-1}(x)\big) \cdot \frac{1}{\varphi'\big(\varphi^{-1}(x)\big)} =$$

$$= f\Big(\varphi\big(\varphi^{-1}(x)\big)\Big) \cdot \varphi'\big(\varphi^{-1}(x)\big) \cdot \frac{1}{\varphi'\big(\varphi^{-1}(x)\big)} = f(x). \qquad \square$$

Příklad

Příklad.

Pomocí předchozí věty spočtěte známý integrál

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x + C.$$

Příklad

Příklad.

Pomocí předchozí věty spočtěte známý integrál

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x + C.$$

Integrand

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

je definován na intervalu $(a,b) = (-1,1)$. Abychom se zbavili odmocniny ve jmenovateli položme

$$x = \varphi(t) = \sin(t), \quad t \in (\alpha, \beta) := \big(-{}^{\pi}/_{2}, {}^{\pi}/_{2}\big).$$

Příklad, pokračování...

Funkce $\sin$ je na intervalu (α, β) rostoucí s nenulovou derivací $\varphi'(t) = \cos t$. Dále

$$G(t) = \int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \cos t \,\mathrm{d}t =$$
$$= \int \frac{\cos t}{\cos t}\,\mathrm{d}t = \int 1\,\mathrm{d}t = t + C.$$

Protože $t = \arcsin(x)$ uzavíráme,

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin(x) + C.$$

Poznámka: Při rutinním počítání často píšeme $x = \sin t$, $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$ a pak

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \cos t\,\mathrm{d}t = \int 1\mathrm{d}t = t + C = \arcsin x + C.$$

Ovšem pozor na intervaly rozmyšlené výše!

Hlavní body

1. Integrace per partes

$$\int fg = Fg - \int Fg'$$

2. Substituce v neurčitém integrálu

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = F(\varphi(x)) + C$$

3. Další příklady

Výpočet neurčitého integrálu

- Nelze zaručit, že uvedenými metodami primitivní funkci nalezneme.
- Obvykle je třeba metody kombinovat.
- Není jednoznačný „správný postup“ integrace. Výsledky dosažené různými postupy se mohou zdánlivě lišit. Správnost výsledku můžeme vždy ověřit pomocí derivace.
- Integrace vyžaduje cvik a zkušenosti.

Příklady

Příklad.

Vypočtěte neurčitý integrál $\int \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x$.

Příklady

Příklad.

Vypočtěte neurčitý integrál $\int \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x$.

Můžeme postupovat následovně, nejprve per partes a poté substitucí $y = x^2$.

$$\int \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x = \int 1 \cdot \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{cc} \operatorname{arctg} x & 1 \\ \frac{1}{1+x^2} & x \end{array} \right| = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} \, \mathrm{d}x =$$

$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \underbrace{\frac{2x}{1+x^2}}_{(\ln(1+x^2))'} \, \mathrm{d}x = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln\left(1+x^2\right) + C.$$

Racionální funkce

- Pro *racionální* (někdy též. *lomené*) *funkce*, tedy funkce tvaru

$$\frac{p(x)}{q(x)},$$

kde p a q jsou polynomy, lze dát obecný algoritmus pro jejich integraci (metoda integrace pomocí rozkladu na parciální zlomky).

Racionální funkce

- Pro *racionální* (někdy též. *lomené*) *funkce*, tedy funkce tvaru

$$\frac{p(x)}{q(x)},$$

  kde p a q jsou polynomy, lze dát obecný algoritmus pro jejich integraci (metoda integrace pomocí rozkladu na parciální zlomky).

- Touto problematikou se zde nebudeme plně zabývat. Omezíme se na případ kdy polynom $q(x)$ ve jmenovateli je stupně nejvýše dvě.

Racionální funkce

- Pro *racionální* (někdy též. *lomené*) *funkce*, tedy funkce tvaru
$$\frac{p(x)}{q(x)},$$
kde p a q jsou polynomy, lze dát obecný algoritmus pro jejich integraci (metoda integrace pomocí rozkladu na parciální zlomky).

- Touto problematikou se zde nebudeme plně zabývat. Omezíme se na případ kdy polynom $q(x)$ ve jmenovateli je stupně nejvýše dvě.

- V následující části přednášky tedy rozebereme, jak integrovat
$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x,$$
kde p je libovolný polynom a q je polynom stupně *nejvýše* dvě.

Stručný popis metody

Integrujeme $\displaystyle\int \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x$, stupeň q je menší nebo roven 2.

Stručný popis metody

Integrujeme $\int \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x$, stupeň q je menší nebo roven 2.

1. Pokud to lze, *vydělíme* polynom p polynomem q. Pak

$$\frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)},$$

a stupeň polynomu r je nejvýše 1. Polynom s zintegrujeme snadno.

Stručný popis metody

Integrujeme $\int \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x$, stupeň q je menší nebo roven 2.

1. Pokud to lze, *vydělíme* polynom p polynomem q. Pak

$$\frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)},$$

   a stupeň polynomu r je nejvýše 1. Polynom s zintegrujeme snadno.

2. Pokud je stupeň polynomu q roven 1, použijeme $\int \frac{b}{x-a}\,\mathrm{d}x = b\ln|x-a| + C$.

Stručný popis metody

Integrujeme $\displaystyle\int \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x$, stupeň q je menší nebo roven 2.

1. Pokud to lze, *vydělíme* polynom p polynomem q. Pak
$$\frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)},$$
a stupeň polynomu r je nejvýše 1. Polynom s zintegrujeme snadno.
2. Pokud je stupeň polynomu q roven 1, použijeme $\int \frac{b}{x-a}\,\mathrm{d}x = b\ln|x-a| + C$.
3. Pokud má polynom q dva různé reálné kořeny a_1 a a_2, pak $\frac{r}{q}$ převedeme na tvar $\frac{b_1}{x-a_1} + \frac{b_2}{x-a_2}$ a použijeme předchozí bod.

Stručný popis metody

Integrujeme $\int \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x$, stupeň q je menší nebo roven 2.

1. Pokud to lze, *vydělíme* polynom p polynomem q. Pak

$$\frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)},$$

   a stupeň polynomu r je nejvýše 1. Polynom s zintegrujeme snadno.

2. Pokud je stupeň polynomu q roven 1, použijeme $\int \frac{b}{x-a}\,\mathrm{d}x = b\ln|x-a| + C$.
3. Pokud má polynom q dva různé reálné kořeny a_1 a a_2, pak $\frac{r}{q}$ převedeme na tvar $\frac{b_1}{x-a_1} + \frac{b_2}{x-a_2}$ a použijeme předchozí bod.
4. Pokud má polynom q dvojnásobný reálný kořen c, použijeme $\int \frac{ax+b}{(x-c)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{a}{x-c} + \frac{b+ac}{(x-c)^2}\,\mathrm{d}x = a\ln|x-c| - \frac{b+ac}{x-c} + C$.

Stručný popis metody

Integrujeme $\displaystyle\int \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x$, stupeň q je menší nebo roven 2.

1. Pokud to lze, *vydělíme* polynom p polynomem q. Pak

$$\frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)},$$

   a stupeň polynomu r je nejvýše 1. Polynom s zintegrujeme snadno.

2. Pokud je stupeň polynomu q roven 1, použijeme $\int \frac{b}{x-a}\,\mathrm{d}x = b\ln|x-a| + C$.
3. Pokud má polynom q dva různé reálné kořeny a_1 a a_2, pak $\frac{r}{q}$ převedeme na tvar $\frac{b_1}{x-a_1} + \frac{b_2}{x-a_2}$ a použijeme předchozí bod.
4. Pokud má polynom q dvojnásobný reálný kořen c, použijeme $\int \frac{ax+b}{(x-c)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{a}{x-c} + \frac{b+ac}{(x-c)^2}\,\mathrm{d}x = a\ln|x-c| - \frac{b+ac}{x-c} + C$.
5. Pokud polynom q nemá reálné kořeny, odhalíme vhodnou substituci po *doplnění jmenovatele na čtverec*. Integrál pak vede na arctg nebo $\ln$.

Příklady

Ukázky použití metody na postupně se komplikujících příkladech.

Příklady

Ukázky použití metody na postupně se komplikujících příkladech.

- $\displaystyle\int \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int x - 1 + \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + C.$

Příklady

Ukázky použití metody na postupně se komplikujících příkladech.

- $\displaystyle\int \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int x - 1 + \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + C.$
- $\displaystyle\int \frac{3x-3}{(x-2)(x+1)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x+1}\,\mathrm{d}x = \ln|x-2| + 2\ln|x+1| + C.$

Příklady

Ukázky použití metody na postupně se komplikujících příkladech.

- $\displaystyle\int \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int x - 1 + \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + C.$
- $\displaystyle\int \frac{3x-3}{(x-2)(x+1)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x+1}\,\mathrm{d}x = \ln|x-2| + 2\ln|x+1| + C.$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = \operatorname{arctg} y + C =$ $\operatorname{arctg}(x-1) + C$, kde jsme použili substituci $y = x - 1$.

Příklady

Ukázky použití metody na postupně se komplikujících příkladech.

- $\displaystyle\int \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int x - 1 + \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + C.$
- $\displaystyle\int \frac{3x-3}{(x-2)(x+1)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x+1}\,\mathrm{d}x = \ln|x-2| + 2\ln|x+1| + C.$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = \operatorname{arctg} y + C =$ $\operatorname{arctg}(x-1) + C$, kde jsme použili substituci $y = x - 1$.
- $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2+2}{1+(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{\left((x-1)^2\right)'}{1+(x-1)^2}\,\mathrm{d}x +$ $\displaystyle\int \frac{1}{1+(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left(1+(x-1)^2\right) + \int \frac{1}{1+(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$, a na druhý integrál použijeme předchozí bod.

Hlavní body

4 Dodatek

$$\int fg = Fg - \int Fg'$$

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = F(\varphi(x)) + C$$

Komentář

- Integrace racionálních lomených funkcí pomocí rozkladu na parciální zlomky v plné obecnosti neprobíráme. Obecně při ní je potřeba faktorizovat polynom (hledat jeho kořeny), což i tak není snadná úloha.

- Uvědomte si, jak nástroje pro integraci plynou z pravidel pro derivování. Konkrétně per partes z derivace součinu a substituce z derivace složené funkce.