Matematická analýza 2

Riemannův určitý integrál

Pavel Hrabák[1], Tomáš Kalvoda[2], Ivo Petr[3]

[1]pavel.hrabak@fit.cvut.cz, [2]tomas.kalvoda@fit.cvut.cz, [3]ivo.petr@fit.cvut.cz

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze

25. ledna 2025
ZS 2024/2025

Hlavní body

$$\sum_{j=1}^{n} \Delta_j \sup_{\langle x_{j-1}, x_j \rangle} f$$

1. Připomenutí: infimum a supremum
2. Konstrukce Riemannova integrálu
3. Vlastnosti Riemannova integrálu
4. Newtonova formule
5. Obsahy plošných útvarů

$$\int_0^1 x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

$$\int_a^b f(x) \mathrm{d}x$$

Hlavní výsledky této přednášky

- Riemannova konstrukce určitého integrálu a její geometrický význam.
- Základní vlastnosti určitého integrálu.
- Výpočet určitého integrálu pomocí Newtonovy formule.

Hlavní body

1. Připomenutí: infimum a supremum
2. Konstrukce Riemannova integrálu
3. Vlastnosti Riemannova integrálu
4. Newtonova formule
5. Obsahy plošných útvarů

$$\sum_{j=1}^{n} \Delta_j \sup_{\langle x_{j-1}, x_j \rangle} f$$

$$\int_0^1 x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

$$\int_a^b f(x) \mathrm{d}x$$

Připomenutí: infimum a supremum množiny $A \subset \mathbb{R}$

Definice:

Buď A neprázdná zdola omezená podmnožina množiny reálných čísel. Číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ nazveme **infimem** množiny A, značíme $\inf A$, právě když

1. pro každé $x \in A$ platí $\alpha \leq x$,
2. pokud $\beta \in \mathbb{R}$ také splňuje předchozí bod, pak $\beta \leq \alpha$.

Pokud množina A není zdola omezená, pak klademe $\inf A := -\infty$. Pro prázdnou množinu klademe $\inf \emptyset := +\infty$.

Připomenutí: infimum a supremum množiny $A \subset \mathbb{R}$

Definice:

Buď A neprázdná zdola omezená podmnožina množiny reálných čísel. Číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ nazveme **infimem** množiny A, značíme $\inf A$, právě když

1. pro každé $x \in A$ platí $\alpha \leq x$,
2. pokud $\beta \in \mathbb{R}$ také splňuje předchozí bod, pak $\beta \leq \alpha$.

Pokud množina A není zdola omezená, pak klademe $\inf A := -\infty$. Pro prázdnou množinu klademe $\inf \emptyset := +\infty$.

Definice:

Buď A neprázdná shora omezená podmnožina množiny reálných čísel. Číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ nazveme **supremem** množiny A, značíme $\sup A$, právě když

1. pro každé $x \in A$ platí $x \leq \alpha$,
2. pokud $\beta \in \mathbb{R}$ také splňuje předchozí bod, pak $\alpha \leq \beta$.

Pokud množina A není shora omezená, pak klademe $\sup A := +\infty$. Pro prázdnou množinu klademe $\sup \emptyset := -\infty$.

Připomenutí: minimum a maximum množiny

Definice:

Buď $M \subset \mathbb{R}$. Číslo $\alpha \in M$ nazveme

- **maximem** množiny M právě když pro všechna $x \in M$ platí $x \leq \alpha$.
- **minimem** množiny M právě když pro všechna $x \in M$ platí $\alpha \leq x$.

Maximum, resp. minimum, množiny M značíme $\max M$, resp. $\min M$.

Připomenutí: minimum a maximum množiny

Definice:

Buď $M \subset \mathbb{R}$. Číslo $\alpha \in M$ nazveme

- **maximem** množiny M právě když pro všechna $x \in M$ platí $x \leq \alpha$.
- **minimem** množiny M právě když pro všechna $x \in M$ platí $\alpha \leq x$.

Maximum, resp. minimum, množiny M značíme $\max M$, resp. $\min M$.

Poznámka:

Některé množiny $M \subset \mathbb{R}$ nemusí mít minimum ani maximum. Například otevřený interval $M = (0,1)$. Čísla 0 a 1 nejsou minimem/maximem, neboť $0, 1 \notin M$.

Připomenutí: minimum a maximum množiny

Definice:

Buď $M \subset \mathbb{R}$. Číslo $\alpha \in M$ nazveme

- **maximem** množiny M právě když pro všechna $x \in M$ platí $x \leq \alpha$.
- **minimem** množiny M právě když pro všechna $x \in M$ platí $\alpha \leq x$.

Maximum, resp. minimum, množiny M značíme $\max M$, resp. $\min M$.

Poznámka:

Některé množiny $M \subset \mathbb{R}$ nemusí mít minimum ani maximum. Například otevřený interval $M = (0, 1)$. Čísla 0 a 1 nejsou minimem/maximem, neboť $0, 1 \notin M$.

Věta:

Buď A podmnožina množiny reálných čísel. Potom existuje její infimum $(\inf A)$ a supremum $(\sup A)$.

Připomenutí: infimum a supremum funkce na množině

Pro $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a množinu $M \subset D_f$ klademe

$$\inf_M f = \inf_{x \in M} f(x) := \inf\{f(x) \mid x \in M\},$$
$$\sup_M f = \sup_{x \in M} f(x) := \sup\{f(x) \mid x \in M\}.$$

Připomenutí: infimum a supremum funkce na množině

Pro $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a množinu $M \subset D_f$ klademe

$$\inf_M f = \inf_{x \in M} f(x) := \inf\{f(x) \mid x \in M\},$$
$$\sup_M f = \sup_{x \in M} f(x) := \sup\{f(x) \mid x \in M\}.$$

Buď $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spojitá funkce a $M \subset D_f$ uzavřený omezený interval. Potom klademe

$$\max_M f = \max_{x \in M} f(x) := \max\{f(x) \mid x \in M\},$$
$$\min_M f = \min_{x \in M} f(x) := \min\{f(x) \mid x \in M\}.$$

Připomeňme, že tato $\min$ a $\max$ existují díky spojitosti f a uzavřenosti M.

Hlavní body

$$\sum_{j=1}^{n} \Delta_j \sup_{\langle x_{j-1}, x_j \rangle} f$$

1 Připomenutí: infimum a supremum

2 Konstrukce Riemannova integrálu

$$\int_0^1 x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

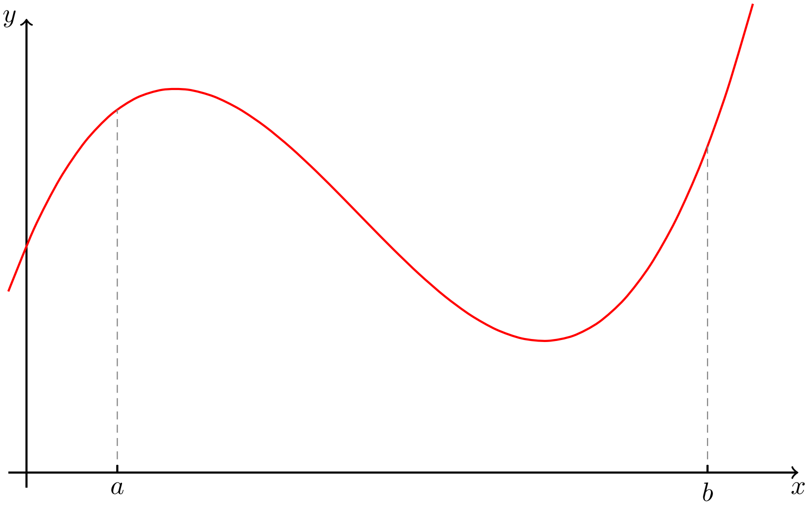
3 Vlastnosti Riemannova integrálu

4 Newtonova formule

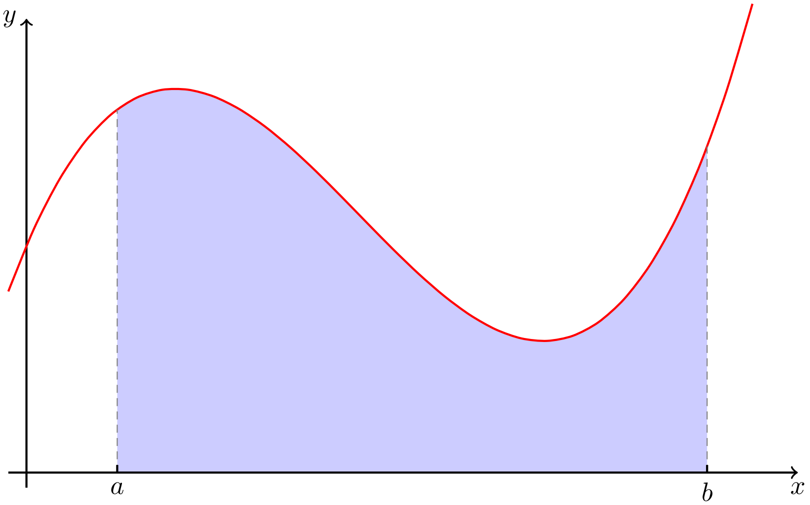
$$\int_a^b f(x) \mathrm{d}x$$

5 Obsahy plošných útvarů

Motivace: Výpočet obsahu plochy pod grafem funkce



Motivace: Výpočet obsahu plochy pod grafem funkce



Dělení intervalu $\langle a, b \rangle$

Definice:

Buď dán interval $\langle a, b \rangle$. Konečnou množinu

$$\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$$

takovou, že $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ a

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

nazýváme **dělením intervalu** $\langle a, b \rangle$. Bodům x_k, $k \in \widehat{n-1}$, říkáme **dělící body intervalu** $\langle a, b \rangle$. Interval $\langle x_{k-1}, x_k \rangle$, $k \in \hat{n}$, nazýváme k**-tý částečný interval** intervalu $\langle a, b \rangle$ při dělení σ. Číslo

$$\nu(\sigma) := \max\{\Delta_k \mid k = 1, 2, \ldots, n\}, \quad \text{kde} \quad \Delta_k := x_k - x_{k-1},\ k = 1, 2, \ldots, n,$$

nazýváme **normou dělení** σ.

Příklad dělení

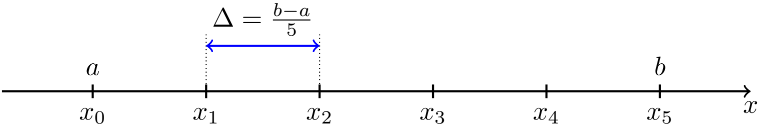
Příklad (Ekvidistantní dělení).

Pro interval $\langle a, b\rangle$ a $n \in \mathbb{N}$ položme $\Delta := \frac{b-a}{n}$ a

$$x_i := a + i \cdot \Delta, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Tedy

$$\sigma = \big\{a,\, a+\Delta,\, a+2\Delta, \ldots,\, a+(n-1)\Delta,\, a+n\Delta = b\big\}.$$



Horní a dolní součet

Definice:

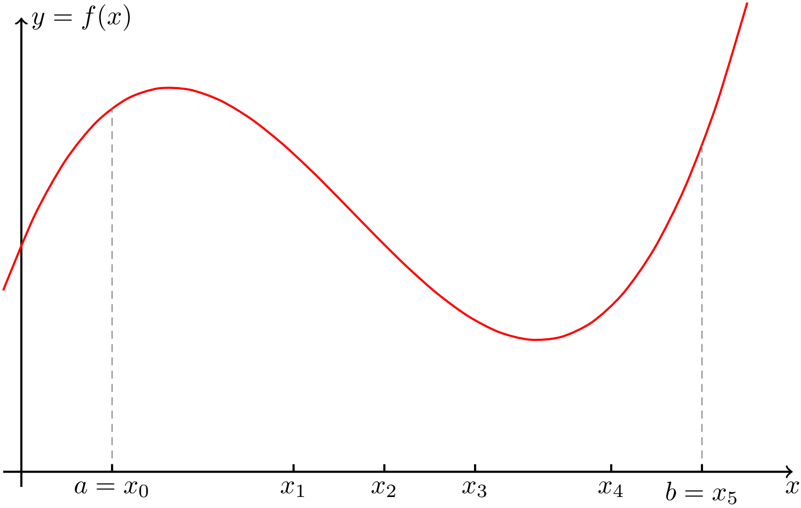
Buďte funkce f definovaná a omezená na intervalu $J = \langle a, b\rangle$ a $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ dělení intervalu J. Označme

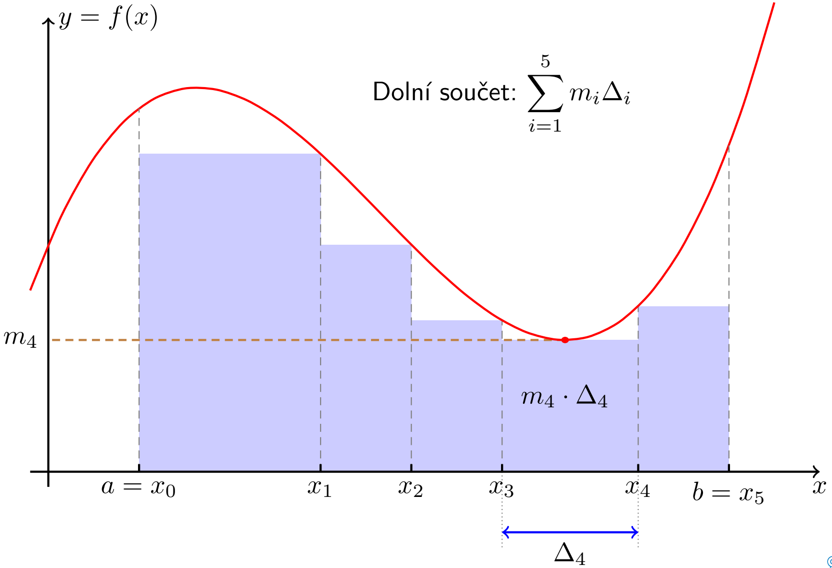
$$M_i(\sigma, f) := \sup_{\langle x_{i-1}, x_i\rangle} f \quad \text{a} \quad m_i(\sigma, f) := \inf_{\langle x_{i-1}, x_i\rangle} f.$$

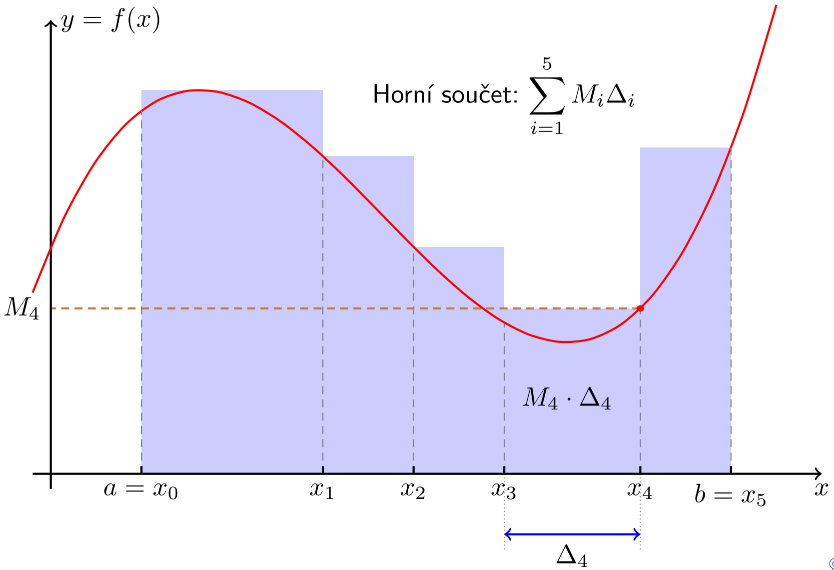
pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$. Potom součty

$$S(\sigma, f) := \sum_{i=1}^{n} M_i(\sigma, f)\Delta_i \quad \text{a} \quad s(\sigma, f) := \sum_{i=1}^{n} m_i(\sigma, f)\Delta_i$$

nazýváme **horním**, resp. **dolním**, **součtem funkce** f při dělení σ.


$y = f(x)$
$a = x_0$
x_1
x_2
x_3
x_4
$b = x_5$
x


$y = f(x)$
Dolní součet: $\sum_{i=1}^{5} m_i \Delta_i$
m_4
$m_4 \cdot \Delta_4$
$a = x_0$
x_1
x_2
x_3
x_4
$b = x_5$
x
Δ_4


$y = f(x)$
Horní součet: $\sum_{i=1}^{5} M_i \Delta_i$
M_4
$M_4 \cdot \Delta_4$
$a = x_0$
x_1
x_2
x_3
x_4
$b = x_5$
x
Δ_4

Horní a dolní integrál

Definice:

Pro funkci f definovanou a omezenou na uzavřeném intervalu $J = \langle a, b \rangle$ definujeme čísla

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x := \inf\{S(\sigma, f) | \sigma \text{ libovolné dělení intervalu } J\} \text{ a } \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x := \sup\{s(\sigma, f$$

a nazýváme **horním**, resp. **dolním**, **integrálem** funkce f na intervalu J.

Horní a dolní integrál

Definice:

Pro funkci f definovanou a omezenou na uzavřeném intervalu $J = \langle a, b\rangle$ definujeme čísla

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x := \inf\{S(\sigma, f) | \sigma \text{ libovolné dělení intervalu } J\} \text{ a } \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x := \sup\{s(\sigma, f$$

a nazýváme **horním**, resp. **dolním**, **integrálem** funkce f na intervalu J.

Definice:

Pokud pro funkci f definovanou a omezenou na uzavřeném intervalu J platí $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R}$, pak jejich společnou hodnotu nazýváme **Riemannovým integrálem funkce f na intervalu** J a toto číslo značíme symboly

$$\int_a^b f, \quad \text{případně} \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Postačující podmínka pro existenci Riemannova integrálu

Definice:

Posloupnost dělení σ_n nazveme **normální**, pokud pro její normy platí

$$\lim_{n\to\infty} \nu(\sigma_n) = 0.$$

Postačující podmínka pro existenci Riemannova integrálu

Definice:

Posloupnost dělení σ_n nazveme **normální**, pokud pro její normy platí

$$\lim_{n\to\infty} \nu(\sigma_n) = 0.$$

Věta (Postačující podmínka pro existenci Riemannova integrálu):

Buď f spojitá funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom existuje její Riemannův integrál na intervalu $\langle a, b\rangle$.

Postačující podmínka pro existenci Riemannova integrálu

Definice:

Posloupnost dělení σ_n nazveme **normální**, pokud pro její normy platí

$$\lim_{n\to\infty} \nu(\sigma_n) = 0.$$

Věta (Postačující podmínka pro existenci Riemannova integrálu):

Buď f spojitá funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom existuje její Riemannův integrál na intervalu $\langle a, b\rangle$.
Pokud je navíc $(\sigma_n)_{n=1}^{\infty}$ normální posloupnost dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ potom limity

$$\lim_{n\to\infty} s(\sigma_n, f) \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} S(\sigma_n, f)$$

existují, a jsou rovny Riemannově integrálu funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$.

Příklady

Příklad.

Vypočtěte integrál z konstantní funkce $f(x) = c$ na intervalu $\langle a, b \rangle$.

Příklady

Příklad.

Vypočtěte integrál z konstantní funkce $f(x) = c$ na intervalu $\langle a, b\rangle$.

Pro libovolné dělení σ intervalu $\langle a, b\rangle$ platí

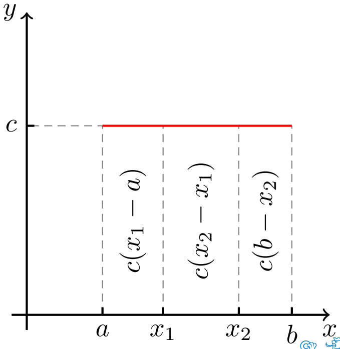
$$s(\sigma) = S(\sigma) = c(b-a).$$

Takže pro libovolnou normální posloupnost (σ_n) dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} s(\sigma_n) = \lim_{n\to\infty} S(\sigma_n) = c(b-a).$$

Riemannův integrál funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$ je pak

$$\int_a^b f = c(b-a).$$



Příklad.

Vypočtěte Riemannův integrál funkce $f(x) = x$ na intervalu $J = \langle 0, 1 \rangle$.

Příklad.

Vypočtěte Riemannův integrál funkce $f(x) = x$ na intervalu $J = \langle 0, 1\rangle$.

Zvolme normální posloupnost $(\sigma_n)_{n=1}^{\infty}$ ekvidistantních dělení intervalu J.

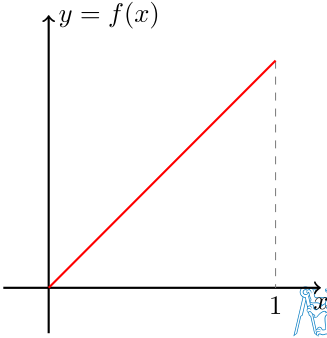
$$\sigma_n = \left\{0 = x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)} = 1\right\}, \quad x_i^{(n)} = i \cdot \frac{1}{n}, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Pro dolní součet při dělení σ_n dostáváme

$$s(\sigma_n) = \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}^{(n)} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2}.$$

Tudíž

$$\int_0^1 x \, \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} s(\sigma_n) = \frac{1}{2}.$$



Příklad.

Vypočtěte Riemannův integrál funkce $f(x) = x$ na intervalu $J = \langle 0, 1\rangle$.

Zvolme normální posloupnost $(\sigma_n)_{n=1}^{\infty}$ ekvidistantních dělení intervalu J.

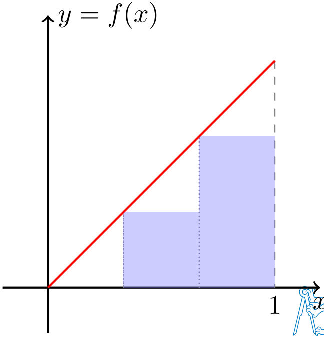
$$\sigma_n = \left\{0 = x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)} = 1\right\}, \quad x_i^{(n)} = i \cdot \frac{1}{n}, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Pro dolní součet při dělení σ_n dostáváme

$$s(\sigma_n) = \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}^{(n)} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2}.$$

Tudíž

$$\int_0^1 x \, \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} s(\sigma_n) = \frac{1}{2}.$$



Příklad.

Vypočtěte Riemannův integrál funkce $f(x) = x$ na intervalu $J = \langle 0, 1 \rangle$.

Zvolme normální posloupnost $(\sigma_n)_{n=1}^{\infty}$ ekvidistantních dělení intervalu J.

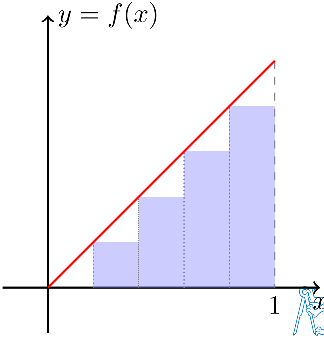
$$\sigma_n = \left\{ 0 = x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)} = 1 \right\}, \quad x_i^{(n)} = i \cdot \frac{1}{n}, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Pro dolní součet při dělení σ_n dostáváme

$$s(\sigma_n) = \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}^{(n)} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2}.$$

Tudíž

$$\int_0^1 x \, \mathrm{d}x = \lim_{n \to \infty} s(\sigma_n) = \frac{1}{2}.$$



Příklad.

Vypočtěte Riemannův integrál funkce $f(x) = x$ na intervalu $J = \langle 0, 1 \rangle$.

Zvolme normální posloupnost $(\sigma_n)_{n=1}^{\infty}$ ekvidistantních dělení intervalu J.

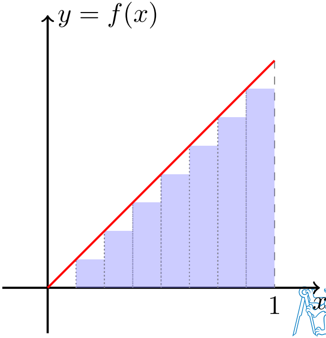
$$\sigma_n = \left\{ 0 = x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)} = 1 \right\}, \quad x_i^{(n)} = i \cdot \frac{1}{n}, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Pro dolní součet při dělení σ_n dostáváme

$$s(\sigma_n) = \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}^{(n)} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2}.$$

Tudíž

$$\int_0^1 x \, \mathrm{d}x = \lim_{n \to \infty} s(\sigma_n) = \frac{1}{2}.$$



Příklad.

Vypočtěte Riemannův integrál funkce $f(x) = x$ na intervalu $J = \langle 0, 1 \rangle$.

Zvolme normální posloupnost $(\sigma_n)_{n=1}^{\infty}$ ekvidistantních dělení intervalu J.

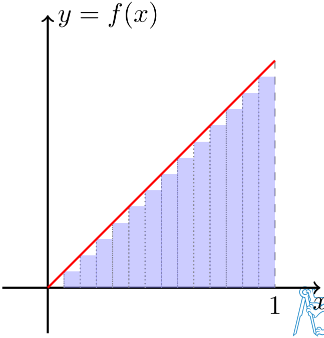
$$\sigma_n = \left\{0 = x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)} = 1\right\}, \quad x_i^{(n)} = i \cdot \frac{1}{n}, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Pro dolní součet při dělení σ_n dostáváme

$$s(\sigma_n) = \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}^{(n)} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2}.$$

Tudíž

$$\int_0^1 x \, \mathrm{d}x = \lim_{n \to \infty} s(\sigma_n) = \frac{1}{2}.$$



Hlavní body

1. Připomenutí: infimum a supremum
2. Konstrukce Riemannova integrálu
3. Vlastnosti Riemannova integrálu
4. Newtonova formule
5. Obsahy plošných útvarů

$$\sum_{j=1}^{n} \Delta_j \sup_{\langle x_{j-1}, x_j \rangle} f$$

$$\int_0^1 x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

$$\int_a^b f(x) \mathrm{d}x$$

Linearita integrálu

Věta (Aditivita integrálu):

Nechť f a g jsou spojité funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom pro Riemannův integrál funkce $f + g$ (která je také automaticky spojitá na $\langle a, b\rangle$) platí

$$\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Linearita integrálu

Věta (Aditivita integrálu):

Nechť f a g jsou spojité funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom pro Riemannův integrál funkce $f + g$ (která je také automaticky spojitá na $\langle a, b\rangle$) platí

$$\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Věta (Multiplikativita integrálu):

Nechť f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ a $c \in \mathbb{R}$ je konstanta. Potom pro Riemannův integrál funkce cf platí

$$\int_a^b (cf)(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Chování v mezích

Věta (Aditivita integrálu v mezích):

Riemannův integrál funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$ existuje, právě když pro každé $c \in (a, b)$ existují Riemannovy integrály funkce f na intervalech $\langle a, c\rangle$ a $\langle c, b\rangle$. V takovém případě navíc platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Chování v mezích

Věta (Aditivita integrálu v mezích):

Riemannův integrál funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$ existuje, právě když pro každé $c \in (a, b)$ existují Riemannovy integrály funkce f na intervalech $\langle a, c\rangle$ a $\langle c, b\rangle$. V takovém případě navíc platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Věta (Nerovnosti mezi integrály):

Nechť jsou f a g spojité funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť platí nerovnost $f(x) \le g(x)$ pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$. Potom pro jejich Riemannovy integrály platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Hlavní body

1. Připomenutí: infimum a supremum
2. Konstrukce Riemannova integrálu
3. Vlastnosti Riemannova integrálu
4. Newtonova formule
5. Obsahy plošných útvarů

$$\sum_{j=1}^{n} \Delta_j \sup_{\langle x_{j-1}, x_j \rangle} f$$

$$\int_0^1 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Definice:

Pro funkci f spojitou na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a dělení $\sigma = \{x_0 = a,\, x_1, \ldots, x_n = b\}$ tohoto intervalu definujeme **integrální součet funkce f při dělení σ** předpisem

$$\mathcal{J}(\sigma) \equiv \mathcal{J}(\sigma, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta_i,$$

kde $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ a α_i patří do intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Definice:

Pro funkci f spojitou na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a dělení $\sigma = \{x_0 = a,\ x_1, \ldots,\ x_n = b\}$ tohoto intervalu definujeme **integrální součet funkce** f **při dělení** σ předpisem

$$\mathcal{J}(\sigma) \equiv \mathcal{J}(\sigma, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta_i,$$

kde $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ a α_i patří do intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Vztah mezi dolním a horním součtem a integrálním součtem funkce f při dělení σ je dán nerovnostmi

$$s(\sigma) \leq \mathcal{J}(\sigma) \leq S(\sigma).$$

Definice:

Pro funkci f spojitou na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a dělení $\sigma = \{x_0 = a,\, x_1, \ldots,\, x_n = b\}$ tohoto intervalu definujeme **integrální součet funkce f při dělení** σ předpisem

$$\mathcal{J}(\sigma) \equiv \mathcal{J}(\sigma, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta_i,$$

kde $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ a α_i patří do intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Vztah mezi dolním a horním součtem a integrálním součtem funkce f při dělení σ je dán nerovnostmi

$$s(\sigma) \leq \mathcal{J}(\sigma) \leq S(\sigma).$$

Riemannův integrál funkce f spojité na intervalu $\langle a, b\rangle$ lze tedy počítat i jako limitu z integrálních součtů

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \mathcal{J}(\sigma_n),$$

kde $(\sigma_n)_{n=1}^{\infty}$ je libovolná normální posloupnost dělení.

Newtonova formule

Poznámka:

Následující věta odhaluje vztah mezi určitým (Riemannův) a neurčitým (primitivní funkce) integrálem. Umožnuje nám počítat Riemannův integrál bez explicitního použití limitní definice.

Newtonova formule

Poznámka:

Následující věta odhaluje vztah mezi určitým (Riemannův) a neurčitým (primitivní funkce) integrálem. Umožnuje nám počítat Riemannův integrál bez explicitního použití limitní definice.

Věta (Newtonova formule):

Nechť f je funkce spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ s primitivní funkcí F. Pak platí rovnost

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) =: \Big[F(x)\Big]_a^b.$$

Důkaz.

Uvažme $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ dělení intervalu $\langle a, b\rangle$. Použijeme Lagrangeovu větu o přírustku funkce na funkci F a intervaly $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ postupně pro $i = 1, 2, \dots, n$,

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} \Big(F(x_i) - F(x_{i-1})\Big) = \sum_{i=1}^{n} F'(\alpha_i)(x_i - x_{i-1}) = \\ = \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta_i,$$

kde $\alpha_i \in (x_{i-1}, x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Důkaz.

Uvažme $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ dělení intervalu $\langle a, b\rangle$. Použijeme Lagrangeovu větu o přírustku funkce na funkci F a intervaly $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ postupně pro $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} \Big(F(x_i) - F(x_{i-1})\Big) = \sum_{i=1}^{n} F'(\alpha_i)(x_i - x_{i-1}) = \\ = \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta_i,$$

kde $\alpha_i \in (x_{i-1}, x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.Takže

$$F(b) - F(a) = \mathcal{J}(\sigma).$$

Uvážíme-li nyní libovolnou normální posloupnost dělení (σ_n) pak

$$F(b) - F(a) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{J}(\sigma_n) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x. \qquad \square$$

Příklady

Příklad.

Vypočtěte Riemannův integrál funkce $f(x) = x$ na intervalu $J = \langle 0, 1 \rangle$.

Příklady

Příklad.

Vypočtěte Riemannův integrál funkce $f(x) = x$ na intervalu $J = \langle 0, 1 \rangle$.

Primitivní funkcí k x je funkce $\frac{x^2}{2}$. Pak

$$\int_0^1 x \mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

Příklady

Příklad.

Pro $a < b$ vypočtěte integrál

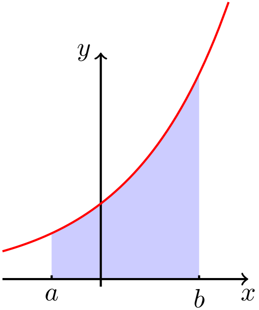
$$\int_a^b \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x.$$

Příklady

Příklad.

Pro $a < b$ vypočtěte integrál

$$\int_a^b \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x.$$



Primitivní funkcí k e^x je funkce e^x. Pak

$$\int_a^b \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \Big[\mathrm{e}^x\Big]_a^b = \mathrm{e}^b - \mathrm{e}^a.$$

Příklad.

Spočítejte integrál
$$\int_0^\pi \sin x \, \mathrm{d}x.$$

Příklad.

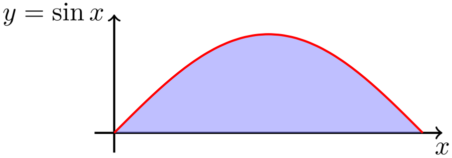
Spočítejte integrál

$$\int_0^\pi \sin x \, \mathrm{d}x.$$

Primitivní funkcí k funkci $\sin x$ je funkce $-\cos x$. Proto

$$\int_0^\pi \sin x \, \mathrm{d}x = \Big[-\cos x \Big]_0^\pi = -\cos \pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2.$$

Plocha jednoho „hrbu“ grafu funkce $\sin$ je tedy 2 (v daných jednotkách plochy).



Hlavní body

1. Připomenutí: infimum a supremum
2. Konstrukce Riemannova integrálu
3. Vlastnosti Riemannova integrálu
4. Newtonova formule
5. Obsahy plošných útvarů

$$\sum_{j=1}^{n} \Delta_j \sup_{\langle x_{j-1}, x_j \rangle} f$$

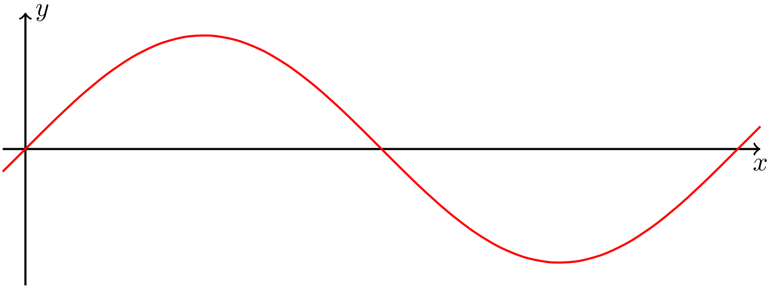
$$\int_0^1 x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

$$\int_a^b f(x) \mathrm{d}x$$

Poznámka:

Určitý integrál interpretujeme jako obsah plochy mezi grafem funkce a osou x. Ovšem tento obsah se počítá i se znaménkem:

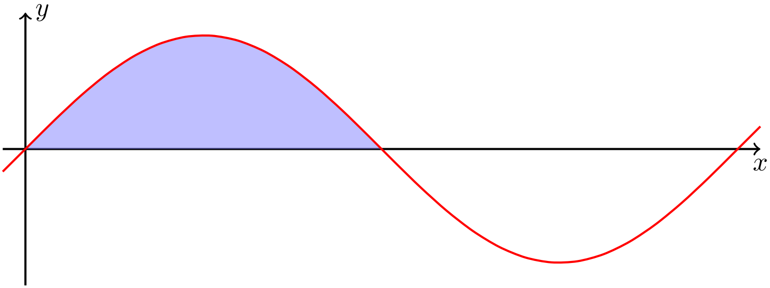
$$\int_0^{\pi} \sin(x)\mathrm{d}x = 2, \quad \int_0^{2\pi} \sin(x)\mathrm{d}x = 0, \quad \int_{\pi}^{2\pi} \sin(x)\mathrm{d}x = -2.$$



Poznámka:

Určitý integrál interpretujeme jako obsah plochy mezi grafem funkce a osou x. Ovšem tento obsah se počítá i se znaménkem:

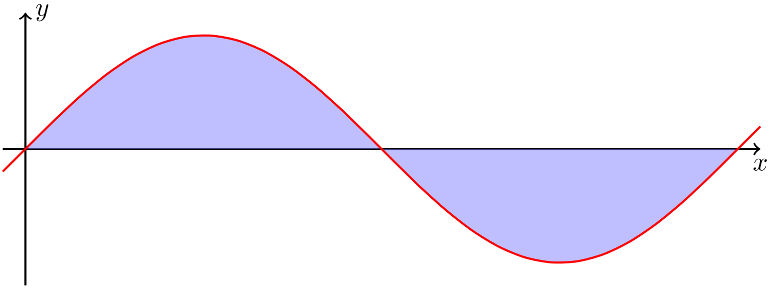
$$\int_0^{\pi} \sin(x)\mathrm{d}x = 2, \quad \int_0^{2\pi} \sin(x)\mathrm{d}x = 0, \quad \int_{\pi}^{2\pi} \sin(x)\mathrm{d}x = -2.$$



Poznámka:

Určitý integrál interpretujeme jako obsah plochy mezi grafem funkce a osou x. Ovšem tento obsah se počítá i se znaménkem:

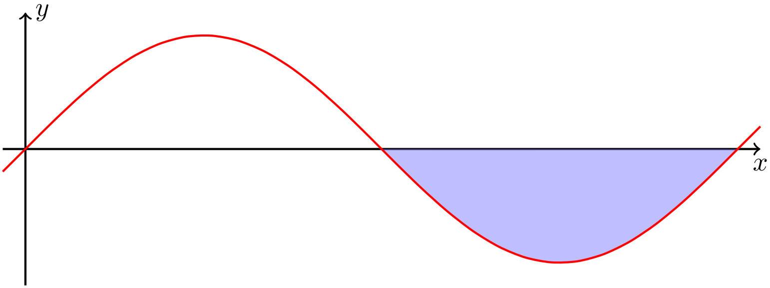
$$\int_0^{\pi} \sin(x)\mathrm{d}x = 2, \quad \int_0^{2\pi} \sin(x)\mathrm{d}x = 0, \quad \int_{\pi}^{2\pi} \sin(x)\mathrm{d}x = -2.$$



Poznámka:

Určitý integrál interpretujeme jako obsah plochy mezi grafem funkce a osou x. Ovšem tento obsah se počítá i se znaménkem:

$$\int_0^{\pi} \sin(x)\mathrm{d}x = 2, \quad \int_0^{2\pi} \sin(x)\mathrm{d}x = 0, \quad \int_{\pi}^{2\pi} \sin(x)\mathrm{d}x = -2.$$

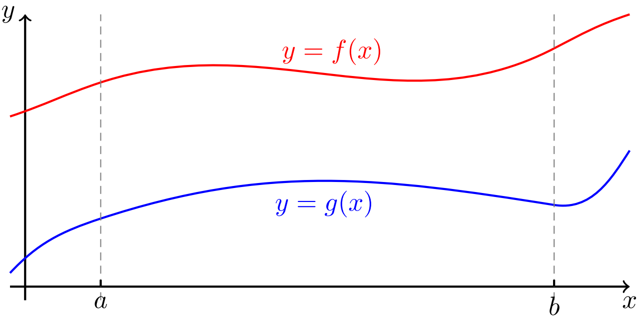


Plocha útvaru ohraničeného dvěma funkcemi

Poznámka:

Nechť f a g jsou funkce spojité na $\langle a, b\rangle$ takové, že $f(x) \geq g(x)$ pro každé $x \in \langle a, b\rangle$. Pak obsah plochy P ohraničené přímkami $x = a$ a $x = b$ a grafy funkcí f a g je rovna

$$P = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x.$$

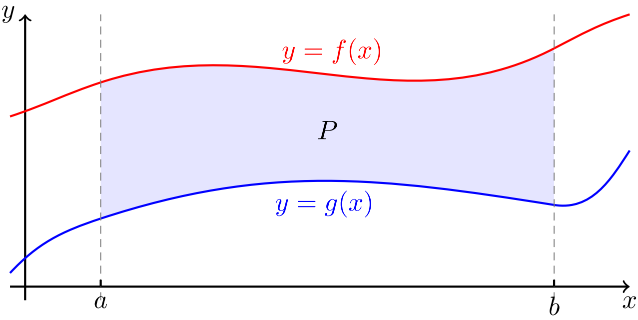


Plocha útvaru ohraničeného dvěma funkcemi

Poznámka:

Nechť f a g jsou funkce spojité na $\langle a, b\rangle$ takové, že $f(x) \geq g(x)$ pro každé $x \in \langle a, b\rangle$. Pak obsah plochy P ohraničené přímkami $x = a$ a $x = b$ a grafy funkcí f a g je rovna

$$P = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x.$$



Příklad

Příklad.

Spočítejte obsah plochy ohraničené křivkami $y = x^3$ a $y = x$.

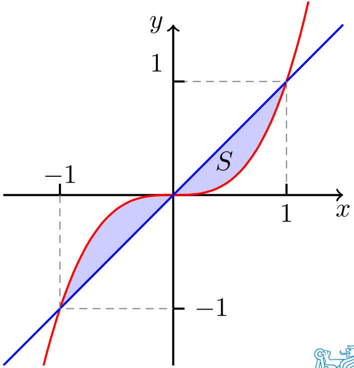
Příklad

Příklad.

Spočítejte obsah plochy ohraničené křivkami $y = x^3$ a $y = x$.

Nejprve nalezneme průsečíky grafů. Řešením rovnice $x^3 = x$ jsou $x = -1$, $x = 1$ a $x = 0$. Dostáváme proto průsečíky

$$(-1,-1),\ (1,1) \text{ a } (0,0).$$



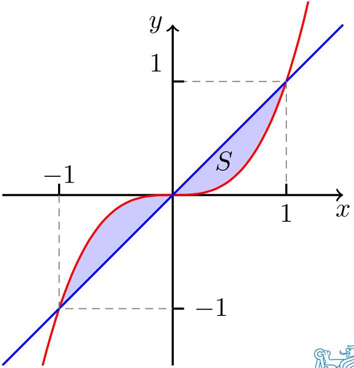
Příklad

Příklad.

Spočítejte obsah plochy ohraničené křivkami $y = x^3$ a $y = x$.

Nejprve nalezneme průsečíky grafů. Řešením rovnice $x^3 = x$ jsou $x = -1$, $x = 1$ a $x = 0$. Dostáváme proto průsečíky

$$(-1,-1),\ (1,1) \text{ a } (0,0).$$



Z náčrtku (resp. průběhu) je pak patrné, že obsah plochy je

$$S = 2\int_0^1 (x - x^3)\mathrm{d}x = 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 =$$
$$= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}.$$

Příklad

Příklad.

Nalezněte obsah plochy ohraničené křivkami

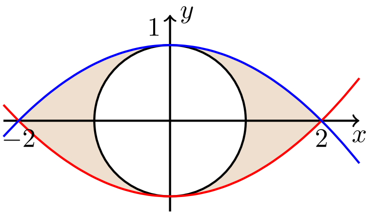
$$y = \frac{1}{4}x^2 - 1, \quad y = 1 - \frac{1}{4}x^2, \quad x^2 + y^2 = 1.$$

Příklad

Příklad.

Nalezněte obsah plochy ohraničené křivkami

$$y = \frac{1}{4}x^2 - 1, \quad y = 1 - \frac{1}{4}x^2, \quad x^2 + y^2 = 1.$$



Obsah útvaru bez vyjmuté kružnice je

$$\int_{-2}^{2} \left(1 - \frac{1}{4}x^2\right) - \left(\frac{1}{4}x^2 - 1\right) \mathrm{d}x =$$

$$2\int_0^2 2 - \frac{1}{2}x^2 \mathrm{d}x = 2\left[2x - \frac{x^3}{6}\right]_0^2 = \frac{16}{3}.$$

Takže plocha našeho útvaru je

$$S = \frac{16}{3} - \pi.$$

Hlavní body

6 Dodatek

$$\sum_{j=1}^{n} \Delta_j \sup_{\langle x_{j-1}, x_j \rangle} f$$

$$\int_0^1 x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

$$\int_a^b f(x) \mathrm{d}x$$

Komentář

- Riemannova konstrukce integrálu není jediná možná. Pro první kontakt s problematikou je však asi nejpřístupnější, nejnázornější. Historicky spadá do 19. století.

- Moderní teorie integrace vychází z Lebesgueovy konstrukce (začátek 20. století). Úzce souvisí s teorií pravděpodobnosti a částečně na ní narazíte v předmětu BI-PST.