Matematická analýza 2

Výpočet určitého integrálu

Pavel Hrabák[1], Tomáš Kalvoda[2], Ivo Petr[3]

[1]pavel.hrabak@fit.cvut.cz, [2]tomas.kalvoda@fit.cvut.cz, [3]ivo.petr@fit.cvut.cz

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze

1. listopadu 2024
ZS 2024/2025

Hlavní body

1. Per partes pro určitý integrál
2. Substituce v určitém integrálu
3. Zobecněný Riemannův integrál
4. Integrace sudých a lichých funkcí

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = [F(x)g(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x$$

Hlavní výsledky této přednášky

- Metoda per partes pro určitý integrál.
- Substituce v určitém integrálu.
- Zobecněný Riemannův integrál.
- Další vlastnosti určitého integrálu.

Hlavní body

1 Per partes pro určitý integrál

2 Substituce v určitém integrálu

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

3 Zobecněný Riemannův integrál

4 Integrace sudých a lichých funkcí

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = [F(x)g(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x$$

Per partes pro určitý integrál

Věta:

Nechť f a g jsou funkce spojité na $\langle a, b\rangle$, f má spojitou derivaci na intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť G je primitivní funkce k funkci g na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \big[f(x)G(x)\big]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x)\mathrm{d}x.$$

Per partes pro určitý integrál

Věta:

Nechť f a g jsou funkce spojité na $\langle a,b\rangle$, f má spojitou derivaci na intervalu $\langle a,b\rangle$ a nechť G je primitivní funkce k funkci g na intervalu $\langle a,b\rangle$. Potom

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \big[f(x)G(x)\big]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x)\mathrm{d}x.$$

Důkaz.

Funkce fG je primitivní funkcí k funkci $f'G + fg$ na intervalu (a,b) a spojitá na $\langle a,b\rangle$. Předpoklady spojitosti na intervalu $\langle a,b\rangle$ zaručují existenci integrálů $\int_a^b f'G$ a $\int_a^b fg$. Použijeme-li linearitu integrálu a Newtonovu formuli, dostáváme

$$\int_a^b f'(x)G(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (fG)'(x)\,\mathrm{d}x = \big[f(x)G(x)\big]_a^b. \qquad \square$$

Příklad.

Vypočtěte

$$\int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x.$$

Příklad.

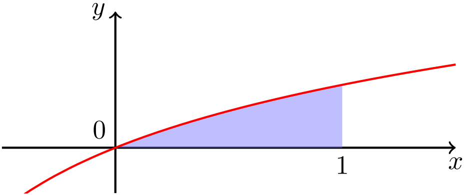
Vypočtěte

$$\int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x.$$

Derivujeme $\ln(1+x)$ a integrujeme 1,

$$\int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x = \Big[x\ln(1+x)\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \ln(2) - \Big[x - \ln|1+x|\Big]_0^1 = 2\ln(2) - 1.$$



Hlavní body

1 Per partes pro určitý integrál

2 Substituce v určitém integrálu

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

3 Zobecněný Riemannův integrál

4 Integrace sudých a lichých funkcí

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = [F(x)g(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x$$

Substituce v určitém integrálu

Poznámka:

Zavádíme následující značení

- $\displaystyle\int_a^a f := 0,$
- pro $a > b$ klademe $\int_a^b f := -\int_b^a f$.

Věta (O substituci I):

Nechť pro funkce f a φ platí

1. φ a její derivace φ' jsou spojité na $\langle\alpha, \beta\rangle$,
2. f je spojitá na $\varphi\big(\langle\alpha, \beta\rangle\big)$.

Potom

$$\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\mathrm{d}x.$$

Podobně můžeme formulovat i druhou větu o substituci, kterou známe pro neurčitý integrál. Pozor na změnu mezí při substituci!

Příklad.

Vypočtěte integrál

$$\int_0^{\ln(2)} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\frac{1}{2}+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x.$$

Použijeme substituci $y = \varphi(x) = \frac{1}{2} + \mathrm{e}^{-x}$. Potom

$$\int_0^{\ln(2)} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\frac{1}{2}+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x = -\int_{3/2}^{1} \frac{1}{y}\mathrm{d}y = \Big[\ln|y|\Big]_1^{3/2} = \ln\frac{3}{2}.$$

Příklad

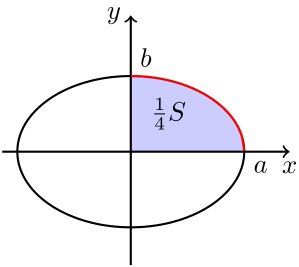
Příklad.

Vypočtěte obsah S elipsy s hlavní poloosou a a vedlejší poloosou b.

Příklad

Příklad.

Vypočtěte obsah S elipsy s hlavní poloosou a a vedlejší poloosou b.

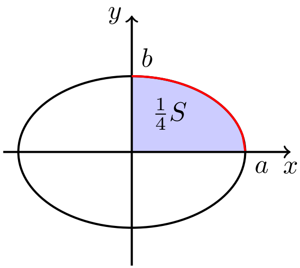


Příklad

Příklad.

Vypočtěte obsah S elipsy s hlavní poloosou a a vedlejší poloosou b.

Rovnice elipsy zní $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Vrchní oblouk elipsy je popsán funkcí $f(x) = b\sqrt{1 - x^2/a^2}$, $D_f = \langle 0, a \rangle$.



Příklad

Příklad.

Vypočtěte obsah S elipsy s hlavní poloosou a a vedlejší poloosou b.

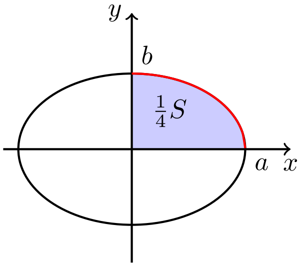
Rovnice elipsy zní $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Vrchní oblouk elipsy je popsán funkcí $f(x) = b\sqrt{1 - x^2/a^2}$, $D_f = \langle 0, a \rangle$.

Tudíž, použijeme-li substituci $x = a \sin t$,

$$\frac{1}{4}S = \int_0^a f(x)\mathrm{d}x = b\int_0^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\mathrm{d}x =$$

$$= b\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2(t)} \cdot a\cos(t)\mathrm{d}t =$$

$$= ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}ab.$$



Dostáváme $S = \pi ab$.

Hlavní body

1. Per partes pro určitý integrál
2. Substituce v určitém integrálu
3. Zobecněný Riemannův integrál
4. Integrace sudých a lichých funkcí

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = [F(x)g(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x$$

Nespojité funkce

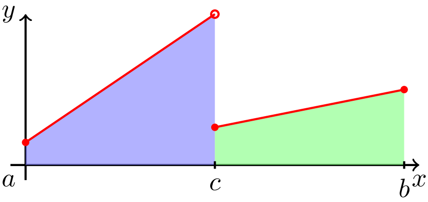
Poznámka:

Předpokládejme, že pro funkci f na intervalu $\langle a, b\rangle$ platí

- existuje $c \in (a, b)$ tak, že f je spojitá na $\langle a, c)$ i $(c, b\rangle$,
- existují konečné jednostranné limity funkce f v bodě c.

Potom můžeme počítat její Riemannův integrál následujícím způsobem

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$



Příklad.

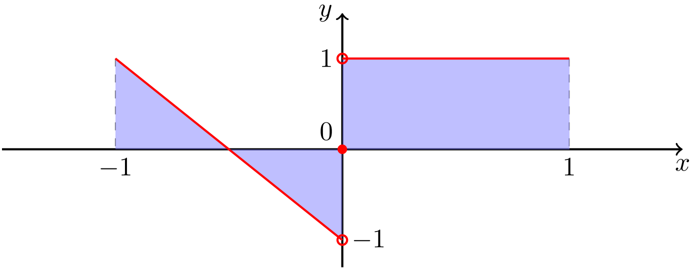
Vypočtěte integrál $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$, kde $f(x) = |x| - x + \operatorname{sgn}(x)$.

Funkce f není spojitá v bodě 0:

$$\lim_{x \to 0_+} f(x) = 1, \quad \lim_{x \to 0_-} f(x) = -1.$$

Takže

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} (-2x - 1)\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} 1\mathrm{d}x = -\Big[x^2 + x\Big]_{-1}^{0} + 1 = 1.$$



Zobecněný Riemannův integrál

Definice:

Nechť f je funkce definovaná na intervalu $\langle a, b)$ pro nějaké $a \in \mathbb{R}$ a $b \in (a, +\infty\rangle$, která je Riemannovsky integrabilní na intervalu $\langle a, c\rangle$ pro každé $c \in (a, b)$. Pokud existuje konečná limita

$$\lim_{c \to b_-} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x,$$

pak její hodnotu značíme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

nazýváme **zobecněným Riemannovým integrálem** funkce f na intervalu $\langle a, b)$ a říkáme, že **integrál** $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ **konverguje**.

Zobecněný Riemannův integrál

Definice:

Nechť f je funkce definovaná na intervalu $\langle a, b)$ pro nějaké $a \in \mathbb{R}$ a $b \in (a, +\infty\rangle$, která je Riemannovsky integrabilní na intervalu $\langle a, c\rangle$ pro každé $c \in (a, b)$. Pokud existuje konečná limita

$$\lim_{c \to b_-} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x,$$

pak její hodnotu značíme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

nazýváme **zobecněným Riemannovým integrálem** funkce f na intervalu $\langle a, b)$ a říkáme, že **integrál** $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ **konverguje**.

- Pokud $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ konverguje, tak lze ukázat, že i $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje. V takovém případě říkáme, že f má **absolutně konvergentní zobecněný Riemannův integrál** na $\langle a, b)$.

Zobecněný Riemannův integrál

Definice:

Nechť f je funkce definovaná na intervalu $\langle a, b)$ pro nějaké $a \in \mathbb{R}$ a $b \in (a, +\infty\rangle$, která je Riemannovsky integrabilní na intervalu $\langle a, c\rangle$ pro každé $c \in (a, b)$. Pokud existuje konečná limita

$$\lim_{c \to b_-} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x,$$

pak její hodnotu značíme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

nazýváme **zobecněným Riemannovým integrálem** funkce f na intervalu $\langle a, b)$ a říkáme, že **integrál** $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ **konverguje**.

- Pokud $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ konverguje, tak lze ukázat, že i $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje. V takovém případě říkáme, že f má **absolutně konvergentní zobecněný Riemannův integrál** na $\langle a, b)$.
- Analogicky definujeme předchozí pojmy pro interval $(a, b\rangle$.

Zobecněný Riemannův integrál

- Předchozí definice je zajímavá, především, když $b = +\infty$, anebo když funkci v bodě b nejde spojitě dodefinovat.

Zobecněný Riemannův integrál

- Předchozí definice je zajímavá, především, když $b = +\infty$, anebo když funkci v bodě b nejde spojitě dodefinovat.
- Platí tedy např.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \lim_{c \to +\infty} \int_1^c \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \lim_{c \to +\infty} \left(-\frac{1}{c} + \frac{1}{1} \right) = 1$$

Zobecněný Riemannův integrál

- Předchozí definice je zajímavá, především, když $b = +\infty$, anebo když funkci v bodě b nejde spojitě dodefinovat.
- Platí tedy např.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \lim_{c\to+\infty} \int_1^c \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \lim_{c\to+\infty} \left(-\frac{1}{c} + \frac{1}{1}\right) = 1$$

a

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \lim_{c\to 0_+} \int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \lim_{c\to 0_+} \left(2 - 2\sqrt{c}\right) = 2.$$

Zobecněný Riemannův integrál

- Předchozí definice je zajímavá, především, když $b = +\infty$, anebo když funkci v bodě b nejde spojitě dodefinovat.

- Platí tedy např.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x = \lim_{c \to +\infty} \int_1^c \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x = \lim_{c \to +\infty} \left(-\frac{1}{c} + \frac{1}{1} \right) = 1$$

a

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x = \lim_{c \to 0_+} \int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x = \lim_{c \to 0_+} \left(2 - 2\sqrt{c} \right) = 2.$$

- Povšimněte si, že na předchozí dva integrály nelze použít „obyčejný“ Riemannův integrál. U prvního nemáme omezený interval, u druhého nemáme omezenou funkci: Riemannova konstrukce selhává.

Zobecněný Riemannův integrál

- Předchozí definice je zajímavá, především, když $b = +\infty$, anebo když funkci v bodě b nejde spojitě dodefinovat.
- Platí tedy např.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x = \lim_{c \to +\infty} \int_1^c \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x = \lim_{c \to +\infty} \left(-\frac{1}{c} + \frac{1}{1} \right) = 1$$

a

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x = \lim_{c \to 0_+} \int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x = \lim_{c \to 0_+} \left(2 - 2\sqrt{c} \right) = 2.$$

- Povšimněte si, že na předchozí dva integrály nelze použít „obyčejný“ Riemannův integrál. U prvního nemáme omezený interval, u druhého nemáme omezenou funkci: Riemannova konstrukce selhává.
- Dále se můžeme zabývat situací, kdy chceme dát smysl $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x$. Zde se omezíme pouze na absolutně konvergentní případy pro spojité funkce.

Zobecněný Riemannův integrál

Definice:

Buď f spojitá funkce definovaná na $\mathbb{R}$. Pokud existuje konečná limita

$$\lim_{c \to +\infty} \int_{-c}^{c} |f(x)| \, \mathrm{d}x,$$

pak tuto její hodnotu značíme $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| \, \mathrm{d}x$ a o f říkáme, že má **absolutně konvergentní zobecněný Riemannův integrál na** $\mathbb{R}$.

Zobecněný Riemannův integrál

Definice:

Buď f spojitá funkce definovaná na $\mathbb{R}$. Pokud existuje konečná limita

$$\lim_{c\to+\infty}\int_{-c}^{c}|f(x)|\,\mathrm{d}x,$$

pak tuto její hodnotu značíme $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,\mathrm{d}x$ a o f říkáme, že má **absolutně konvergentní zobecněný Riemannův integrál na** $\mathbb{R}$.

- Pokud má funkce absolutně konvergentní zobecněný Riemannův integrál na $\mathbb{R}$, pak i limita

  $$\lim_{c\to+\infty}\int_{-c}^{c}f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{existuje a značíme ji} \quad \int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x.$$

  Tuto hodnotu pak nazýváme **zobecněným Riemannovým integrálem** f **na** $\mathbb{R}$.

Zobecněný Riemannův integrál

Definice:

Buď f spojitá funkce definovaná na $\mathbb{R}$. Pokud existuje konečná limita

$$\lim_{c\to+\infty}\int_{-c}^{c}|f(x)|\,\mathrm{d}x,$$

pak tuto její hodnotu značíme $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,\mathrm{d}x$ a o f říkáme, že má **absolutně konvergentní zobecněný Riemannův integrál na** $\mathbb{R}$.

- Pokud má funkce absolutně konvergentní zobecněný Riemannův integrál na $\mathbb{R}$, pak i limita

  $$\lim_{c\to+\infty}\int_{-c}^{c}f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{existuje a značíme ji} \quad \int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x.$$

  Tuto hodnotu pak nazýváme **zobecněným Riemannovým integrálem f na $\mathbb{R}$**.
- Absolutní konvergence zajišťuje, že hodnota zobecněného Riemannova integrálu nezávisí na způsobu jakým meze „posíláme“ do nekonečna.

Příklad.

Vypočítejte integrál

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x.$$

Příklad.

Vypočítejte integrál

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x.$$

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x = \lim_{c \to +\infty} \int_0^c \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x = \lim_{c \to +\infty} \left(-\mathrm{e}^{-c} + \mathrm{e}^0 \right) = 1.$$

Příklad.

Vypočítejte integrál

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x.$$

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x = \lim_{c \to +\infty} \int_0^{c} \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x = \lim_{c \to +\infty} \left(-\mathrm{e}^{-c} + \mathrm{e}^{0} \right) = 1.$$

Příklad.

Vypočítejte integrál

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|x|} \mathrm{d}x.$$

Příklad.

Vypočítejte integrál

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x.$$

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x = \lim_{c \to +\infty} \int_0^c \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x = \lim_{c \to +\infty} \left(-\mathrm{e}^{-c} + \mathrm{e}^0\right) = 1.$$

Příklad.

Vypočítejte integrál

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|x|} \mathrm{d}x.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|x|} \mathrm{d}x = \lim_{c \to +\infty} \int_{-c}^c \mathrm{e}^{-|x|} \mathrm{d}x = \lim_{c \to +\infty} \left(\int_0^c \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x + \int_{-c}^0 \mathrm{e}^{x} \mathrm{d}x\right) =$$

$$= \lim_{c \to +\infty} \left(\int_0^c \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x - \int_c^0 \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t\right) = \lim_{c \to +\infty} \left(2 \cdot \int_0^c \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x\right) = 2.$$

Hlavní body

1. Per partes pro určitý integrál
2. Substituce v určitém integrálu
3. Zobecněný Riemannův integrál
4. Integrace sudých a lichých funkcí

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = [F(x)g(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x$$

Využití symetrií funkce při integraci

Věta:

Nechť f je funkce spojitá na uvažovaných intervalech.

1. Je-li f sudá funkce na $\langle -a, a\rangle$, pak
$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x.$$
2. Je-li f lichá funkce na $\langle -a, a\rangle$, pak
$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0.$$
3. Je-li f periodická na $\mathbb{R}$ s periodou T, pak pro každé $a, b \in \mathbb{R}$ platí
$$\int_{a}^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_{b}^{b+T} f(x)\mathrm{d}x.$$

Důkaz.

1. Pomocí substituce $y = -x$ dostáváme
$$\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x = \int_{a}^{0} f(-y)(-1)\mathrm{d}y = \int_{0}^{a} f(y)\mathrm{d}y.$$
2. Stejným způsobem jako v prvním bodě odvodíme
$$\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x = -\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x.$$
3. Pomocí substituce $y = x + T$ a periodicity f snadno nahlédneme, že

$$\int_{a}^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x + \int_{b}^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_{a+T}^{b+T} f(y)\mathrm{d}y + \int_{b}^{a+T} f(x)\mathrm{d}x =$$
$$= \int_{b}^{a+T} f(x)\mathrm{d}x + \int_{a+T}^{b+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_{b}^{b+T} f(x)\mathrm{d}x.$$
□

Příklad.

Vypočítejte integrály

$$\int_{-2}^{2} (x^3 + 3x^2 - x) \mathrm{d}x, \quad \int_{-1}^{1} x\mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x, \quad \int_{0}^{2\pi} |\sin x| \mathrm{d}x.$$

$$\int_{-2}^{2} (x^3 + 3x^2 - x) \mathrm{d}x = 3 \cdot 2 \int_{0}^{2} x^2 \mathrm{d}x = 3 \cdot 2 \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 16.$$

$$\int_{-1}^{1} x\mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x = 0.$$

V posledním případě je integrand funkce periodická s periodou π a navíc sudá, proto

$$\int_{0}^{2\pi} |\sin x| \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| \mathrm{d}x = 2 \int_{0}^{\pi} \sin x \, \mathrm{d}x = 2\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} = 4.$$

Hlavní body

5 Dodatek

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = [F(x)g(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x$$

Komentář

- Z předchozího víme, že platí například

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = 0$$

nebo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = 2 \cdot \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Hodnotu posledního integrálu ale neumíme určit (zatím), protože neumíme nalézt primitivní funkci k $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.

Komentář

- Z předchozího víme, že platí například

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = 0$$

nebo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = 2 \cdot \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x.$$

Hodnotu posledního integrálu ale neumíme určit (zatím), protože neumíme nalézt primitivní funkci k $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.

- Hodnoty *chybové funkce*

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t,$$

které často potřebujeme znát v pravděpodobnosti a statistice musíme vyčíslit numericky.