Matematická analýza 2

Numerická integrace

Pavel Hrabák[1], Tomáš Kalvoda[2], Ivo Petr[3]

[1]pavel.hrabak@fit.cvut.cz, [2]tomas.kalvoda@fit.cvut.cz, [3]ivo.petr@fit.cvut.cz

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze

1. listopadu 2024
ZS 2024/2025

Hlavní body

1. Připomenutí: Integrální součet
2. Středové pravidlo
3. Lichoběžníkové pravidlo
4. Simpsonovo pravidlo

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \mathcal{J}(\sigma_n, f, a, b)$$

Hlavní výsledky této přednášky

- Přibližné výpočty hodnoty určitého integrálu (ukázka).
- Odhad chyby při výpočtu integrálu.

Hlavní body

1. Připomenutí: Integrální součet
2. Středové pravidlo
3. Lichoběžníkové pravidlo
4. Simpsonovo pravidlo

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \mathcal{J}(\sigma_n, f, a, b)$$

Připomenutí: Integrální součet

Definice:

Pro funkci f spojitou na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a dělení $\sigma = \{x_0 = a, \ldots, x_n = b\}$ tohoto intervalu definujeme **integrální součet funkce** f **při dělení** σ předpisem

$$\mathcal{J}(\sigma) \equiv \mathcal{J}(\sigma, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta_i,$$

kde $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ a α_i patří do intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Připomenutí: Integrální součet

Definice:

Pro funkci f spojitou na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a dělení $\sigma = \{x_0 = a, \ldots, x_n = b\}$ tohoto intervalu definujeme **integrální součet funkce** f **při dělení** σ předpisem

$$\mathcal{J}(\sigma) \equiv \mathcal{J}(\sigma, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta_i,$$

kde $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ a α_i patří do intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Riemannův integrál funkce f spojité na intervalu $\langle a, b\rangle$ lze pak počítat i jako limitu z integrálních součtů

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \mathcal{J}(\sigma_n),$$

kde $(\sigma_n)_{n=1}^{\infty}$ je libovolná normální posloupnost dělení.

Hlavní body

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \mathcal{J}(\sigma_n, f, a, b)$$

Středové pravidlo (*Midpoint rule*)

Buď f spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$.

- Pro $n \in \mathbb{N}$ a $\Delta := \frac{b-a}{n}$ zavedeme ekvidistantní dělení $x_i := a + i \cdot \Delta$, $i = 0, 1, \ldots, n$, tedy

$$\sigma = \big\{a,\, a+\Delta,\, a+2\Delta, \ldots,\, a+(n-1)\Delta,\, a+n\Delta = b\big\}.$$

Středové pravidlo (*Midpoint rule*)

Buď f spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$.

- Pro $n \in \mathbb{N}$ a $\Delta := \frac{b-a}{n}$ zavedeme ekvidistantní dělení $x_i := a + i \cdot \Delta$, $i = 0, 1, \ldots, n$, tedy

$$\sigma = \big\{a,\, a + \Delta,\, a + 2\Delta, \ldots,\, a + (n-1)\Delta,\, a + n\Delta = b\big\}.$$

- α_i v integrálním součtu volíme jako středy dělících intervalů, tedy

$$\alpha_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}.$$

Středové pravidlo (*Midpoint rule*)

Buď f spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$.

- Pro $n \in \mathbb{N}$ a $\Delta := \frac{b-a}{n}$ zavedeme ekvidistantní dělení $x_i := a + i \cdot \Delta$, $i = 0, 1, \ldots, n$, tedy

$$\sigma = \big\{a,\, a+\Delta,\, a+2\Delta, \ldots,\, a+(n-1)\Delta,\, a+n\Delta = b\big\}.$$

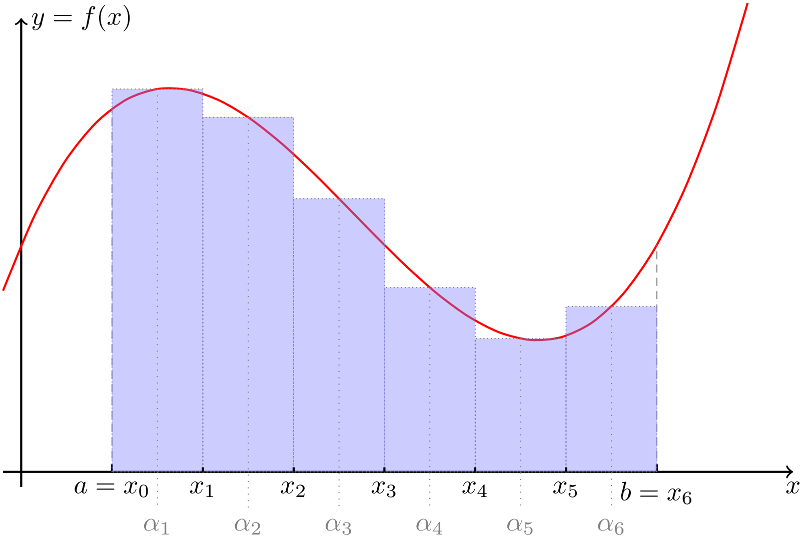
- α_i v integrálním součtu volíme jako středy dělících intervalů, tedy

$$\alpha_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}.$$

- Hodnotu integrálu $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ aproximujeme pomocí integrálního součtu

$$\mathcal{J}(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} f\left(\alpha_i\right)\Delta_i = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)\cdot\Delta = $$
$$= \frac{b-a}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right).$$

Středové pravidlo



Středové pravidlo: chyba aproximace

Pro dané $a, b \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ označme aproximaci integrálu $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ jako

$$\mathcal{J}_{\text{midpoint}} = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right).$$

Následující věta nám předem umožňuje při zadané přesnosti určit potřebný počet dělících bodů.

Věta:

Nechť funkce f má na intervalu $\langle a, b\rangle$ druhou derivaci a existuje $M \in \mathbb{R}$ takové, že $|f''(x)| \leq M$ pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$. Potom

$$\left| \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \mathcal{J}_{\text{midpoint}} \right| \leq \frac{M(b-a)^3}{24n^2}.$$

Důkaz nyní vynecháváme (potřebujeme k němu Taylorovy polynomy, které ještě nemáme probrané).

Hlavní body

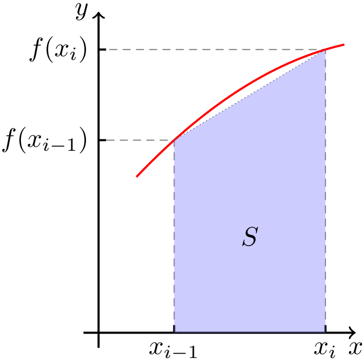
1. Připomenutí: Integrální součet
2. Středové pravidlo
3. Lichoběžníkové pravidlo
4. Simpsonovo pravidlo

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \mathcal{J}(\sigma_n, f, a, b)$$

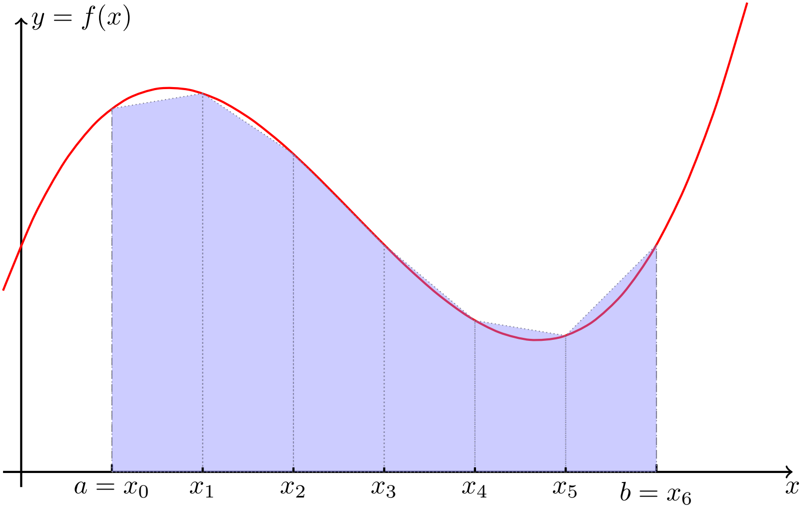
Lichoběžníkové pravidlo (*Trapezoid rule*)

- Na dílčích intervalech se můžeme pokusit integrovanou funkci aproximovat lineární funkcí, která prochází body $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ a $(x_i, f(x_i))$.
- „Obsah“ plochy pod grafem funkce, resp. $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,\mathrm{d}x$, pak lze aproximovat obsahem lichoběžníku

$$S = \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \cdot (x_i - x_{i-1}).$$



Lichoběžníkové pravidlo



Lichoběžníkové pravidlo

Buď f spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$.

- Pro $n \in \mathbb{N}$ a $\Delta := \frac{b-a}{n}$ zavedeme ekvidistantní dělení $x_i := a + i \cdot \Delta$, $i = 0, 1, \ldots, n$, tedy

$$\sigma = \{a,\, a + \Delta,\, a + 2\Delta, \ldots,\, a + (n-1)\Delta,\, a + n\Delta = b\}.$$

Lichoběžníkové pravidlo

Buď f spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$.

- Pro $n \in \mathbb{N}$ a $\Delta := \frac{b-a}{n}$ zavedeme ekvidistantní dělení $x_i := a + i \cdot \Delta$, $i = 0, 1, \ldots, n$, tedy

$$\sigma = \big\{a,\ a+\Delta,\ a+2\Delta, \ldots,\ a+(n-1)\Delta,\ a+n\Delta = b\big\}.$$

- Hodnotu integrálu $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ aproximujeme pomocí součtu obsahů lichoběžníků

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \cdot \Delta = \frac{b-a}{2n} \cdot \left(f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b) \right).$$

Lichoběžníkové pravidlo: chyba aproximace

Pro dané $a, b \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ označme aproximaci integrálu $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ jako

$$\mathcal{J}_{\mathrm{trapezoid}} = \frac{b-a}{2n} \cdot \left(f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b) \right).$$

Věta:

Nechť funkce f má na intervalu $\langle a, b\rangle$ druhou derivaci a existuje $M \in \mathbb{R}$ takové, že $|f''(x)| \leq M$ pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$. Potom

$$\left| \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \mathcal{J}_{\mathrm{trapezoid}} \right| \leq \frac{M(b-a)^3}{12n^2}.$$

Hlavní body

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \mathcal{J}(\sigma_n, f, a, b)$$

Simpsonovo pravidlo (*Simpson's rule*)

- Integrovanou funkci f můžeme na dílčích intervalech aproximovat pomocí kvadratické funkce p procházející body

$$(x_{i-1}, f(x_{i-1})), \quad \left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}, f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)\right), \quad (x_i, f(x_i)).$$

Simpsonovo pravidlo (*Simpson's rule*)

- Integrovanou funkci f můžeme na dílčích intervalech aproximovat pomocí kvadratické funkce p procházející body

$$(x_{i-1}, f(x_{i-1})), \quad \left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}, f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)\right), \quad (x_i, f(x_i)).$$

- Nalézt p ve tvaru $p(x) = ax^2 + bx + c$ znamená řešit soustavu lineárních rovnic

$$p(x_{i-1}) = f(x_{i-1}), \quad p\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) = f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right), \quad p(x_i) = f(x_i)$$

pro neznámé a, b a c. (Hodnoty těchto konstant zde vynecháme.)

Simpsonovo pravidlo (*Simpson's rule*)

- Integrovanou funkci f můžeme na dílčích intervalech aproximovat pomocí kvadratické funkce p procházející body

$$(x_{i-1}, f(x_{i-1})), \quad \left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}, f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)\right), \quad (x_i, f(x_i)).$$

- Nalézt p ve tvaru $p(x) = ax^2 + bx + c$ znamená řešit soustavu lineárních rovnic

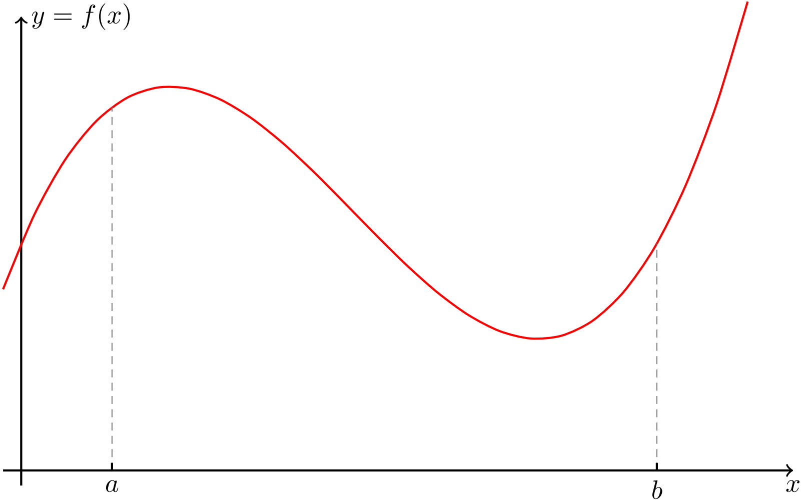
$$p(x_{i-1}) = f(x_{i-1}), \quad p\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) = f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right), \quad p(x_i) = f(x_i)$$

pro neznámé a, b a c. (Hodnoty těchto konstant zde vynecháme.)

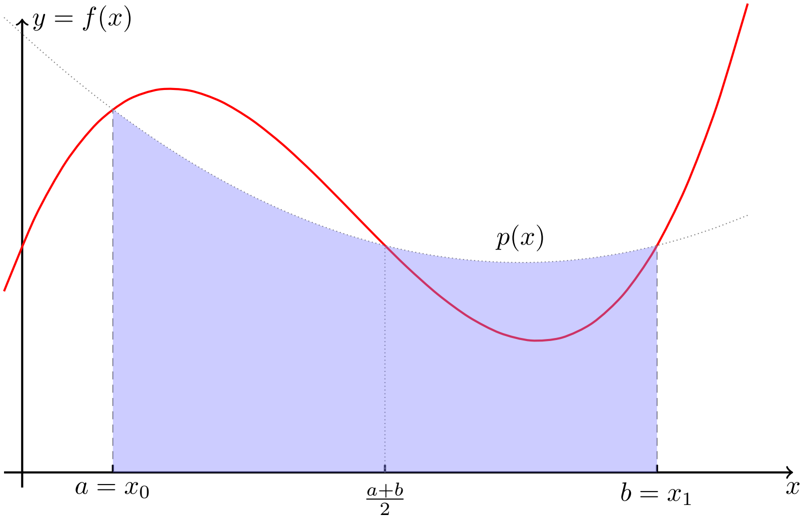
- Kvadratickou funkci lze snadno zintegrovat a nalézt tak „obsah“ plochy pod jejím grafem. Platí

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x)\mathrm{d}x = \frac{x_i - x_{i-1}}{6} \cdot \left(f(x_{i-1}) + 4f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right) + f(x_i)\right).$$

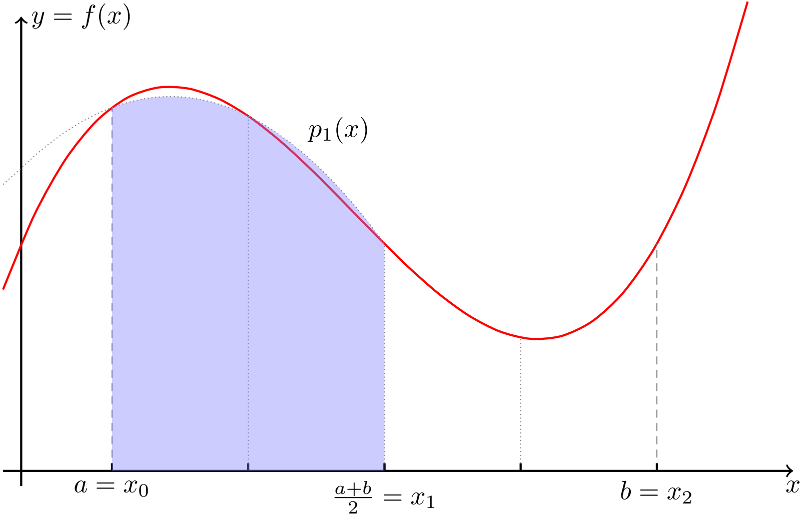
Simpsonovo pravidlo



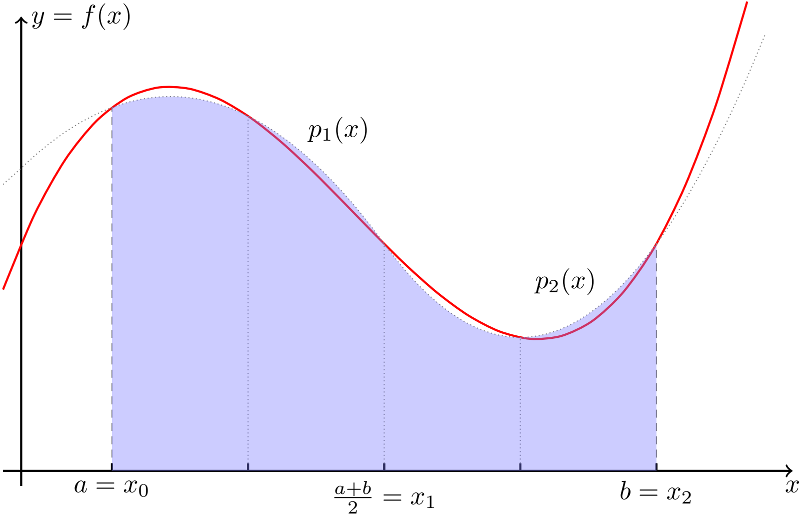
Simpsonovo pravidlo



Simpsonovo pravidlo



Simpsonovo pravidlo



Simpsonovo pravidlo: odhad chyby

Pro sudý počet dílčích intervalů (n) lze pro odhad integrálu $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ použít výraz

$$\mathcal{J}_{\text{Simpson}} = \frac{b-a}{3n} \cdot \sum_{i=1}^{n/2} \big(f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i}) \big).$$

Věta:

Nechť funkce f má na intervalu $\langle a, b\rangle$ čtvrtou derivaci a existuje $M \in \mathbb{R}$ takové, že $|f^{(4)}(x)| \leq M$ pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$. Potom

$$\left| \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \mathcal{J}_{\text{Simpson}} \right| \leq \frac{M(b-a)^5}{180n^4}.$$

Hlavní body

5 Dodatek

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \mathcal{J}(\sigma_n, f, a, b)$$

Komentář

- Thomas Simpson byl britský matematik žijící v osmnáctém století (1710 – 1761).

- Přesnost numerických aproximací lze dále vylepšovat použitím interpolací pomocí polynomů vyšších stupňů. My jsme zde použili stupeň 0 (*midpoint*), 1 (*trapezoid*) a 2 (*Simpson*).

- Dále lze využívat *adaptivní dělení*, ne jen ekvidistantní. Tj. snažit se mít více dělících bodů v oblasti, kde se funkce více „mění“.