Matematická analýza 2

Číselné řady

Pavel Hrabák[1], Tomáš Kalvoda[2], Ivo Petr[3]

[1]pavel.hrabak@fit.cvut.cz, [2]tomas.kalvoda@fit.cvut.cz, [3]ivo.petr@fit.cvut.cz

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze

1. ledna 2025
ZS 2024/2025

Hlavní body

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

1. Číselné řady

2. Postačující podmínky konvergence

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} = 2$$

3. Integrální kritérium

4. Další příklady na odhad růstu

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n \text{ pro } n \to \infty$$

Hlavní výsledky této přednášky

- Číselné řady, základní pojmy.
- Kritéria konvergence a divergence číselných řad.
- Odhad částečných součtů řad pomocí integrálu.

Hlavní body

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

1 Číselné řady

2 Postačující podmínky konvergence

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} = 2$$

3 Integrální kritérium

4 Další příklady na odhad růstu

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n \text{ pro } n \to \infty$$

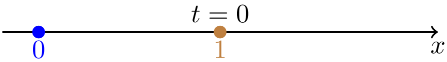
Zenonův paradox: Achilles a želva

historje.tumblr.com

Zenonův paradox: Achilles a želva

historje.tumblr.com

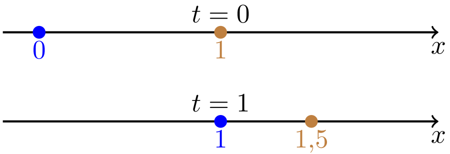
Achilles je dvakrát rychlejší než (závodní) želva s rychlostí $0{,}5\,m/s$, želva má náskok $1\,m$.



Zenonův paradox: Achilles a želva

historje.tumblr.com

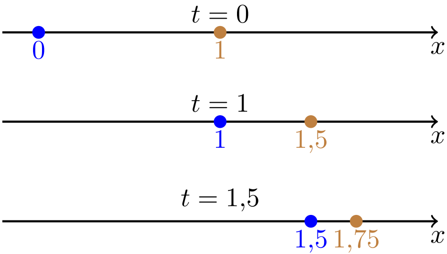
Achilles je dvakrát rychlejší než (závodní) želva s rychlostí $0{,}5\,m/s$, želva má náskok $1\,m$.



Zenonův paradox: Achilles a želva

historje.tumblr.com

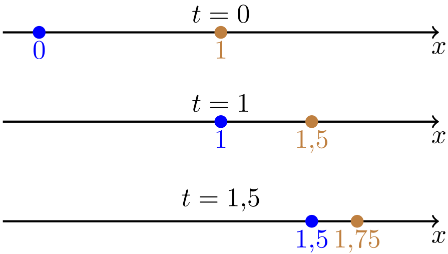
Achilles je dvakrát rychlejší než (závodní) želva s rychlostí $0{,}5\,m/s$, želva má náskok $1\,m$.



Zenonův paradox: Achilles a želva

historje.tumblr.com

Achilles je dvakrát rychlejší než (závodní) želva s rychlostí $0{,}5\,m/s$, želva má náskok $1\,m$.



Ergo, Achilles želvu nikdy nedohoní.

Časové okamžiky a polohy Achilla a želvy:

$$t_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k+1}, \quad a_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k+1}, \quad z_n = \sum_{k=0}^{n} 2^{-k}.$$

Číselná řada

Definice (Číselná řada / *number series*):

Uvažujme číselnou posloupnost $(a_k)_{k=0}^{\infty}$. Formální výraz tvaru

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$$

nazýváme **číselnou řadou**.

Číselná řada

Definice (Číselná řada / *number series*):

Uvažujme číselnou posloupnost $(a_k)_{k=0}^{\infty}$. Formální výraz tvaru

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$$

nazýváme **číselnou řadou**. Pokud je posloupnost **částečných součtů** $(s_n)_{n=0}^{\infty}$,

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

konvergentní, nazýváme příslušnou řadu také **konvergentní**. V opačném případě mluvíme o **divergentní** číselné řadě.

Číselná řada

Definice (Číselná řada / *number series*):

Uvažujme číselnou posloupnost $(a_k)_{k=0}^{\infty}$. Formální výraz tvaru

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$$

nazýváme **číselnou řadou**. Pokud je posloupnost **částečných součtů** $(s_n)_{n=0}^{\infty}$,

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

konvergentní, nazýváme příslušnou řadu také **konvergentní**. V opačném případě mluvíme o **divergentní** číselné řadě. **Součtem** konvergentní řady $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ nazýváme hodnotu limity $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$.

Připomenutí terminologie z BI-MA1

Definice (Konvergence a divergence / *convergence and divergence*):

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá **konvergentní**, právě když její limita existuje a je prvkem $\mathbb{R}$. V ostatních případech ji nazýváme **divergentní**.

Připomenutí terminologie z BI-MA1

Definice (Konvergence a divergence / *convergence and divergence*):

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá **konvergentní**, právě když její limita existuje a je prvkem $\mathbb{R}$. V ostatních případech ji nazýváme **divergentní**.

- Řada $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ je konvergentní právě když **existuje konečná** limita

  $$S = \lim_{n\to\infty} s_n.$$

Připomenutí terminologie z BI-MA1

Definice (Konvergence a divergence / *convergence and divergence*):

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá **konvergentní**, právě když její limita existuje a je prvkem $\mathbb{R}$. V ostatních případech ji nazýváme **divergentní**.

- Řada $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ je konvergentní právě když **existuje konečná** limita

  $S = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$. Této limitě říkáme součet řady a zapisujeme $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k = S$.

Připomenutí terminologie z BI-MA1

Definice (Konvergence a divergence / *convergence and divergence*):

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá **konvergentní**, právě když její limita existuje a je prvkem $\mathbb{R}$. V ostatních případech ji nazýváme **divergentní**.

- Řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ je konvergentní právě když **existuje konečná** limita $S = \lim_{n\to\infty} s_n$. Této limitě říkáme součet řady a zapisujeme $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = S$.
- Řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ je divergentní právě když $\lim_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$ nebo neexistuje.

Připomenutí terminologie z BI-MA1

Definice (Konvergence a divergence / *convergence and divergence*):

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá **konvergentní**, právě když její limita existuje a je prvkem $\mathbb{R}$. V ostatních případech ji nazýváme **divergentní**.

- Řada $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ je konvergentní právě když **existuje konečná** limita

  $S = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$. Této limitě říkáme součet řady a zapisujeme $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k = S$.

- Řada $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ je divergentní právě když $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$ nebo neexistuje.
  Ani v jednom z těchto případů o součtu řady nehovoříme.

Příklad

Příklad.

Pro $|q| < 1$ řada

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \cdots$$

konverguje a jejím součtem je $\frac{1}{1-q}$.

Příklad

Příklad.

Pro $|q| < 1$ řada
$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \cdots$$
konverguje a jejím součtem je $\frac{1}{1-q}$.

Členy posloupnosti částečných součtů lze přímo sečíst,
$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}. \qquad \text{(platí pro lib. } q \neq 1\text{)}$$

Příklad

Příklad.

Pro $|q| < 1$ řada

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \cdots$$

konverguje a jejím součtem je $\frac{1}{1-q}$.

Členy posloupnosti částečných součtů lze přímo sečíst,

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}. \qquad \text{(platí pro lib. } q \neq 1\text{)}$$

Takže pro $|q| < 1$ dostáváme $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \dfrac{1}{1-q}$. Píšeme také

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}\,, \quad |q| < 1\,.$$

Příklad: zpět k Achillovi a želvě

V čase t_n je Achilles a_n metrů od startu a želva z_n metrů od startu,

$$t_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k+1}, \quad a_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k+1}, \quad z_n = \sum_{k=0}^{n} 2^{-k}.$$

Příklad: zpět k Achillovi a želvě

V čase t_n je Achilles a_n metrů od startu a želva z_n metrů od startu,

$$t_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k+1}, \quad a_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k+1}, \quad z_n = \sum_{k=0}^{n} 2^{-k}.$$

Dle předchozího příkladu víme

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k+1} = \frac{1}{1-1/2} = 2,$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k+1} = 2,$$

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} = 2.$$

Příklad: zpět k Achillovi a želvě

V čase t_n je Achilles a_n metrů od startu a želva z_n metrů od startu,

$$t_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k+1}, \quad a_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k+1}, \quad z_n = \sum_{k=0}^{n} 2^{-k}.$$

Dle předchozího příkladu víme

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k+1} = \frac{1}{1-1/2} = 2,$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k+1} = 2,$$

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} = 2.$$

Achilles proto želvu **doběhne** za 2 sekundy 2 metry od startu!

Nutná podmínka konvergence řady

Následující větu lze použít k **vyvrácení** konvergence řady.

Věta (Nutná podmínka konvergence řady):

Pokud řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konverguje, **potom** pro limitu sčítanců platí $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Nutná podmínka konvergence řady

Následující větu lze použít k **vyvrácení** konvergence řady.

Věta (Nutná podmínka konvergence řady):

Pokud řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konverguje, **potom** pro limitu sčítanců platí $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Důkaz.

Označme $S \in \mathbb{R}$ součet naší konvergentní řady. Pro libovolné kladné celé n platí

$$0 \leq |a_n| = |s_n - s_{n-1}| = |s_n - S + S - s_{n-1}| \leq |s_n - S| + |S - s_{n-1}|.$$

Protože $S = \lim_{n\to\infty} s_n$ dostáváme z věty o limitě sevřené posloupnosti, že $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$, což implikuje $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ $\square$

Nutná podmínka konvergence

Předchozí podmínka je **pouze nutná**, jak demonstruje následující příklad.

Příklad.

Uvažme řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}},$$

tedy $a_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$, pro $k = 1, 2, \ldots$. Víme již, že platí

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0.$$

Ale pro částečné součty je

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

Proto $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$. Zkoumaná řada diverguje.

Bolzanovo–Cauchyovo kritérium

Věta (Bolzano–Cauchy):

Řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konverguje právě tehdy, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{R}$ tak, že pro každé $n \geq n_0$ a $p \in \mathbb{N}$ platí

$$\left|a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}\right| < \varepsilon.$$

Bolzanovo–Cauchyovo kritérium

Věta (Bolzano–Cauchy):

Řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konverguje právě tehdy, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{R}$ tak, že pro každé $n \geq n_0$ a $p \in \mathbb{N}$ platí

$$|a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Důkaz.

Jedná se pouze o použití Bolzanova–Cauchyova kritéria konvergence posloupnosti (viz BI-MA1) na posloupnost částečných součtů příslušné řady a přeznačení některých symbolů. $\square$

Absolutní konvergence

Definice:

Řadu $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ nazýváme **absolutně konvergentní**, pokud řada $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konverguje.

Absolutní konvergence

Definice:

Řadu $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ nazýváme **absolutně konvergentní**, pokud řada $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konverguje.

Věta:

Pokud řada absolutně konverguje, potom konverguje.

Absolutní konvergence

Definice:

Řadu $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ nazýváme **absolutně konvergentní**, pokud řada $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konverguje.

Věta:

Pokud řada absolutně konverguje, potom konverguje.

Důkaz.

Použijeme Bolzanova-Cauchyova kritéria pro konvergenci řady. Buď $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolutně konvergentní řada. Potom pro $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $n \geq n_0$ a $p \in \mathbb{N}$ je podle trojúhelníkové nerovnosti

$$\left|a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}\right| \leq |a_n| + |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ tedy konverguje. $\square$

Řada součtů

Pozorování:

Uvažujme **konvergentní řady** $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ a $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ se součty $S_a, S_b \in \mathbb{R}$ a $c \in \mathbb{R}$. Pak

1. řada $\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k)$ konverguje a její součet je $S_a + S_b$,
2. řada $\sum_{k=0}^{\infty} (c \cdot a_k)$ také konverguje a její součet je $c \cdot S_a$.

Řada součtů

Pozorování:

Uvažujme **konvergentní řady** $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ a $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ se součty $S_a, S_b \in \mathbb{R}$ a $c \in \mathbb{R}$. Pak

1. řada $\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k)$ konverguje a její součet je $S_a + S_b$,
2. řada $\sum_{k=0}^{\infty} (c \cdot a_k)$ také konverguje a její součet je $c \cdot S_a$.

Formálně

$$\sum_{k=0}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k\,, \qquad \sum_{k=0}^{\infty}(c \cdot a_k) = c \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,.$$

Řada součtů

Pozorování:

Uvažujme **konvergentní řady** $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ a $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ se součty $S_a, S_b \in \mathbb{R}$ a $c \in \mathbb{R}$. Pak

1. řada $\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k)$ konverguje a její součet je $S_a + S_b$,
2. řada $\sum_{k=0}^{\infty} (c \cdot a_k)$ také konverguje a její součet je $c \cdot S_a$.

Formálně

$$\sum_{k=0}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k \,, \qquad \sum_{k=0}^{\infty}(c \cdot a_k) = c \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_k \,.$$

Použitím věty o limitě součtu na posloupnost částečných součtů dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n}(a_k + b_k) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} b_k \right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} b_k$$

Příklad.

Řada $\sum_{k=0}^{\infty}(2^{-k}+3^{-k})$ konverguje a její součet je

$$\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k}+\sum_{k=0}^{\infty}3^{-k}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}+\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=2+\frac{3}{2}=\frac{7}{2}\,,$$

neboť konvergují řady $\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k}$ a $\sum_{k=0}^{\infty}3^{-k}$.

Příklad.

Řada $\sum_{k=0}^{\infty}(2^{-k}+3^{-k})$ konverguje a její součet je

$$\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k}+\sum_{k=0}^{\infty}3^{-k}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}+\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=2+\frac{3}{2}=\frac{7}{2},$$

neboť konvergují řady $\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k}$ a $\sum_{k=0}^{\infty}3^{-k}$.

Konvergence sčítaných řad je zásadní. Uvažme triviální příklad $\sum_{k=0}^{\infty}(k+(-k))$.

Poznámka:

Je-li $c\neq 0$, pak divergence řady $\sum_{k=0}^{\infty}a_k$ implikuje divergenci řady $\sum_{k=0}^{\infty}(c\cdot a_k)$, protože divergence posloupnosti $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ implikuje divergenci posloupnosti $(c\cdot s_n)_{n=1}^{\infty}$. Rozmyslete!

Hlavní body

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

1 Číselné řady

2 Postačující podmínky konvergence

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} = 2$$

3 Integrální kritérium

4 Další příklady na odhad růstu

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n \text{ pro } n \to \infty$$

Leibnizovo kritérium

Věta (Leibnizovo kritérium):

Buď $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ monotónní posloupnost konvergující k nule. Potom řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$$

konverguje.

Leibnizovo kritérium

Věta (Leibnizovo kritérium):

Buď $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ monotónní posloupnost konvergující k nule. Potom řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$$

konverguje.

Důkaz.

Důkaz tohoto kritéria vynecháváme (jedná se o speciální případ Dirichletova kritéria; samostatný důkaz je uveden ve studijním textu). $\square$

Leibnizovo kritérium

Věta (Leibnizovo kritérium):

Buď $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ monotónní posloupnost konvergující k nule. Potom řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$$

konverguje.

Důkaz.

Důkaz tohoto kritéria vynecháváme (jedná se o speciální případ Dirichletova kritéria; samostatný důkaz je uveden ve studijním textu). $\square$

Monotonie a $\lim\limits_{k \to +\infty} a_k = 0$ zaručí, že prvky a_k mají shodné znaménko. Sčítance $(-1)^k a_k$ tedy tzv. **střídají znaménka**.

Leibnizovo kritérium

Věta (Leibnizovo kritérium):

Buď $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ monotónní posloupnost konvergující k nule. Potom řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$$

konverguje.

Důkaz.

Důkaz tohoto kritéria vynecháváme (jedná se o speciální případ Dirichletova kritéria; samostatný důkaz je uveden ve studijním textu). $\square$

Monotonie a $\lim\limits_{k \to +\infty} a_k = 0$ zaručí, že prvky a_k mají shodné znaménko. Sčítance $(-1)^k a_k$ tedy tzv. **střídají znaménka**.

Pozor! Vždy je nutné ověřit oba předpoklady!

Leibnizovo kritérium – příklad

Příklad.

Uvažme řadu
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}\,.$$

Leibnizovo kritérium – příklad

Příklad.

Uvažme řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}\,.$$

Protože posloupnost $\left(\frac{1}{k}\right)_{k=1}^{\infty}$ je klesající a platí, že $\frac{1}{k} \to 0$ pro $k \to \infty$, **konverguje** uvažovaná řada dle Leibnizova kritéria.

Leibnizovo kritérium – příklad

Příklad.

Uvažme řadu
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} .$$

Protože posloupnost $\left(\frac{1}{k}\right)_{k=1}^{\infty}$ je klesající a platí, že $\frac{1}{k} \to 0$ pro $k \to \infty$, **konverguje** uvažovaná řada dle Leibnizova kritéria.

Prozkoumejme absolutní konvergenci této řady, tj. konvergenci řady
$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^k}{k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} .$$

Leibnizovo kritérium – příklad

Příklad.

Uvažme řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}.$$

Protože posloupnost $\left(\frac{1}{k}\right)_{k=1}^{\infty}$ je klesající a platí, že $\frac{1}{k} \to 0$ pro $k \to \infty$, **konverguje** uvažovaná řada dle Leibnizova kritéria.

Prozkoumejme absolutní konvergenci této řady, tj. konvergenci řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^k}{k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}.$$

V BI-MA1 jsme ukázali, že $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$.

Leibnizovo kritérium – příklad

Příklad.

Uvažme řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} .$$

Protože posloupnost $\left(\frac{1}{k}\right)_{k=1}^{\infty}$ je klesající a platí, že $\frac{1}{k} \to 0$ pro $k \to \infty$, **konverguje** uvažovaná řada dle Leibnizova kritéria.

Prozkoumejme absolutní konvergenci této řady, tj. konvergenci řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^k}{k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} .$$

V BI-MA1 jsme ukázali, že $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$. Řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ tedy diverguje a proto řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ **nekonverguje absolutně**.

Srovnávací kritérium

Věta (Srovnávací kritérium):

Buďte $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ a $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ číselné řady. Potom platí následující dvě tvrzení.

1. Nechť existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ větší než k_0 platí $0 \leq |a_k| \leq b_k$ a nechť řada $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konverguje. Potom řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolutně konverguje.
2. Nechť existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ větší než k_0 platí $0 \leq a_k \leq b_k$ a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverguje. Potom i řada $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ diverguje.

Srovnávací kritérium

Věta (Srovnávací kritérium):

Buďte $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ a $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ číselné řady. Potom platí následující dvě tvrzení.

1. Nechť existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ větší než k_0 platí $0 \leq |a_k| \leq b_k$ a nechť řada $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konverguje. Potom řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolutně konverguje.
2. Nechť existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ větší než k_0 platí $0 \leq a_k \leq b_k$ a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverguje. Potom i řada $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ diverguje.

Důkaz.

První bod: opět použijeme Bolzanova–Cauchyova kritéria. Lze postupovat shodně jako v důkazu předchozí věty. Tvrzení plyne z následujícího odhadu.

$$\big||a_n| + |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}|\big| = |a_n| + |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}| \leq b_n + b_{n+1} + \cdots b_{n+p}.$$

Druhý bod plyne z nerovnosti $0 \leq \sum_{k=k_0}^{n} a_k \leq \sum_{k=k_0}^{n} b_k$. □

Srovnávací kritérium – příklad

Příklad (Desetinný rozvoj).

Buď $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ posloupnost jejíž členy nabývají hodnot z množiny $\{0, 1, \ldots, 8, 9\}$. Potom klademe

$$0.a_1 a_2 a_3 \cdots := \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot 10^{-k}.$$

Srovnávací kritérium – příklad

Příklad (Desetinný rozvoj).

Buď $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ posloupnost jejíž členy nabývají hodnot z množiny $\{0, 1, \ldots, 8, 9\}$. Potom klademe

$$0.a_1a_2a_3 \cdots := \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot 10^{-k}.$$

Řada konverguje a její součet jednoznačně definuje jisté reálné číslo.

Srovnávací kritérium – příklad

Příklad (Desetinný rozvoj).

Buď $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ posloupnost jejíž členy nabývají hodnot z množiny $\{0, 1, \ldots, 8, 9\}$. Potom klademe

$$0.a_1 a_2 a_3 \cdots := \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot 10^{-k}.$$

Řada konverguje a její součet jednoznačně definuje jisté reálné číslo.

Konvergence plyne ze srovnávacího kritéria, zřejmě

$$a_k \cdot 10^{-k} \leq 9 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^k.$$

Řada $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k$ konverguje, její součet je $\frac{1}{9}$.

Srovnávací kritérium – příklad

Příklad (Desetinný rozvoj).

Buď $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ posloupnost jejíž členy nabývají hodnot z množiny $\{0, 1, \ldots, 8, 9\}$. Potom klademe

$$0.a_1 a_2 a_3 \cdots := \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot 10^{-k}.$$

Řada konverguje a její součet jednoznačně definuje jisté reálné číslo.

Konvergence plyne ze srovnávacího kritéria, zřejmě

$$a_k \cdot 10^{-k} \leq 9 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^k.$$

Řada $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k$ konverguje, její součet je $\frac{1}{9}$.
Speciálně například

$$0.999\overline{9} = \sum_{k=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-k} = \frac{\frac{9}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = 1.$$

Srovnávací kritérium – s čím srovnávat?

Abychom mohli použít srovnávací kriterium, je potřeba mít k dispozici sadu vhodných řad s **nezápornými** členy.

Srovnávací kritérium – s čím srovnávat?

Abychom mohli použít srovnávací kriterium, je potřeba mít k dispozici sadu vhodných řad s **nezápornými** členy.

Již jsme ukázali, že

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} q^k$ konverguje pro $0 \leq q < 1$ a diverguje pro $q \geq 1$,
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ a $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ divergují.

Srovnávací kritérium – s čím srovnávat?

Abychom mohli použít srovnávací kriterium, je potřeba mít k dispozici sadu vhodných řad s **nezápornými** členy.

Již jsme ukázali, že

- $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k$ konverguje pro $0 \leq q < 1$ a diverguje pro $q \geq 1$,
- $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ a $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ divergují.

Dále ukážeme, že

- $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!}$ konverguje pro libovolné $a \geq 0$,
- $\sum_{k=0}^{+\infty} k^\alpha$ konverguje pro $\alpha < -1$ a diverguje pro $\alpha \geq -1$.

d'Alembertovo kritérium

Věta (d'Alembertovo kritérium / *ratio test for series*):

Nechť $a_k > 0$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Potom platí dvě následující tvrzení:

1. Pokud
$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} > 1,$$
pak řada $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ diverguje.
2. Pokud
$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1,$$
pak řada $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ (absolutně) konverguje.

Připomenutí věty z BI-MA1

Pro jistotu připomeňme podílové kritérium pro posloupnosti známé z BI-MA1, které využijeme v důkazu d'Alembertova kritéria.

Věta (Podílové kritérium / *ratio test for sequences*):

Buď $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ posloupnost **kladných** čísel a nechť existuje limita

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

označme její hodnotu symbolem q. Potom

1. pokud $q < 1$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,
2. pokud $q > 1$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

d'Alembertovo kritérium

Důkaz.

První bod: Z podílového kritéria aplikovaného na posloupnost $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ plyne

$$\lim_{k\to\infty} a_k = +\infty.$$

Není proto splněna nutná podmínka konvergence a řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ proto diverguje.

d'Alembertovo kritérium

Důkaz.

První bod: Z podílového kritéria aplikovaného na posloupnost $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ plyne

$$\lim_{k\to\infty} a_k = +\infty.$$

Není proto splněna nutná podmínka konvergence a řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ proto diverguje.

Druhý bod: Dle předpokladu existuje $r < 1$ a $k_0 \in \mathbb{N}$ pro něž platí

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq r < 1, \quad k \geq k_0.$$

d'Alembertovo kritérium

Důkaz.

První bod: Z podílového kritéria aplikovaného na posloupnost $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ plyne

$$\lim_{k\to\infty} a_k = +\infty.$$

Není proto splněna nutná podmínka konvergence a řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ proto diverguje.

Druhý bod: Dle předpokladu existuje $r < 1$ a $k_0 \in \mathbb{N}$ pro něž platí

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq r < 1, \quad k \geq k_0.$$

Odtud nahlédneme, že pro každé $k \geq k_0$ platí

$$a_k \leq r^{k-k_0} a_{k_0}.$$

d'Alembertovo kritérium

Důkaz.

První bod: Z podílového kritéria aplikovaného na posloupnost $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ plyne

$$\lim_{k\to\infty} a_k = +\infty.$$

Není proto splněna nutná podmínka konvergence a řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ proto diverguje.

Druhý bod: Dle předpokladu existuje $r < 1$ a $k_0 \in \mathbb{N}$ pro něž platí

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq r < 1, \quad k \geq k_0.$$

Odtud nahlédneme, že pro každé $k \geq k_0$ platí

$$a_k \leq r^{k-k_0} a_{k_0}.$$

Už ale víme, že řada $\sum_{k=0}^{\infty} r^k$ konverguje pro $|r| < 1$. Podle srovnávacího kritéria tedy konverguje i řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. □

d'Alembertovo kritérium – příklad

Příklad.

Pro každé $a \in \mathbb{R}$ uvažme řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} = 1 + \frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \cdots .$$

d'Alembertovo kritérium – příklad

Příklad.

Pro každé $a \in \mathbb{R}$ uvažme řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} = 1 + \frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \cdots .$$

Tato řada jistě (absolutně) konverguje pro $a = 0$. Pro ostatní a platí

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\left|\frac{a^{k+1}}{(k+1)!}\right|}{\left|\frac{a^k}{k!}\right|} = \lim_{k\to\infty} \frac{|a|}{k+1} = 0 < 1.$$

Podle d'Alembertova kritéria proto řada (absolutně) konverguje.

d'Alembertovo kritérium – příklad

Příklad.

Pro každé $a \in \mathbb{R}$ uvažme řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} = 1 + \frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \cdots .$$

Tato řada jistě (absolutně) konverguje pro $a = 0$. Pro ostatní a platí

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\left| \frac{a^{k+1}}{(k+1)!} \right|}{\left| \frac{a^k}{k!} \right|} = \lim_{k \to \infty} \frac{|a|}{k+1} = 0 < 1.$$

Podle d'Alembertova kritéria proto řada (absolutně) konverguje.

Je tedy možné definovat funkci, která číslu $x \in \mathbb{R}$ přiřadí součet řady $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.

d'Alembertovo kritérium – příklad

Příklad.

Pro každé $a \in \mathbb{R}$ uvažme řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} = 1 + \frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \cdots .$$

Tato řada jistě (absolutně) konverguje pro $a = 0$. Pro ostatní a platí

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\left|\frac{a^{k+1}}{(k+1)!}\right|}{\left|\frac{a^k}{k!}\right|} = \lim_{k\to\infty} \frac{|a|}{k+1} = 0 < 1.$$

Podle d'Alembertova kritéria proto řada (absolutně) konverguje.

Je tedy možné definovat funkci, která číslu $x \in \mathbb{R}$ přiřadí součet řady $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.
V příští přednášce ukážeme, že touto funkcí je právě exponenciála e^x.

Hlavní body

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} = 2$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n \text{ pro } n \to \infty$$

Připomenutí známých součtů

- **aritmetická posloupnost** $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, tj. $a_n = a_1 + (n-1)d$,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_1 + d\sum_{k=1}^{n}(k-1) = a_1 n + d \cdot \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

Připomenutí známých součtů

- **aritmetická posloupnost** $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, tj. $a_n = a_1 + (n-1)d$,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_1 + d\sum_{k=1}^{n}(k-1) = a_1 n + d \cdot \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

- **geometrická posloupnost** $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, tj. $a_n = a_1 q^{n-1}$,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_1 q^{k-1} = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad q \neq 1.$$

Připomenutí známých součtů

- **aritmetická posloupnost** $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, tj. $a_n = a_1 + (n-1)d$,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_1 + d\sum_{k=1}^{n}(k-1) = a_1 n + d\cdot\frac{n(n-1)}{2} = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

- **geometrická posloupnost** $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, tj. $a_n = a_1 q^{n-1}$,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_1 q^{k-1} = a_1\frac{q^n - 1}{q-1}, \quad q \neq 1.$$

- **geometrická řada**

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}, \quad |q| < 1.$$

Připomenutí známých součtů

- **aritmetická posloupnost** $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, tj. $a_n = a_1 + (n-1)d$,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_1 + d \sum_{k=1}^{n} (k-1) = a_1 n + d \cdot \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

- **geometrická posloupnost** $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, tj. $a_n = a_1 q^{n-1}$,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_1 q^{k-1} = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad q \neq 1.$$

- **geometrická řada**

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}, \quad |q| < 1\,.$$

- **exponenciála**

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \mathrm{e}^x, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Sčítání členů posloupností

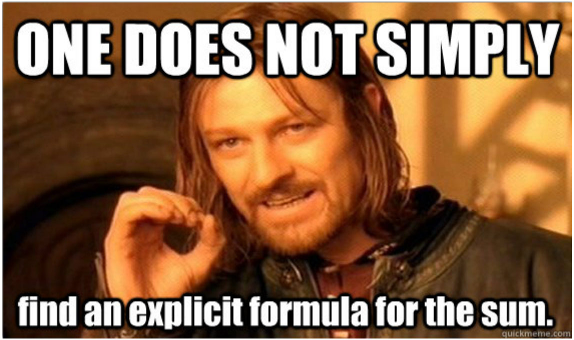
- Hledání explicitního vzorce pro daný součet je obecně komplikovaná a často neřešitelná úloha.

Sčítání členů posloupností

- Hledání explicitního vzorce pro daný součet je obecně komplikovaná a často neřešitelná úloha.
- Často nás ale přesný součet ani nezajímá, jde nám pouze o typické chování pro velká n. Tedy o tzv. asymptotické chování součtů.

Sčítání členů posloupností

- Hledání explicitního vzorce pro daný součet je obecně komplikovaná a často neřešitelná úloha.
- Často nás ale přesný součet ani nezajímá, jde nám pouze o typické chování pro velká n. Tedy o tzv. asymptotické chování součtů.



Odhadování rychlosti růstu různých součtů

Věta:

Nechť f je spojitá funkce na $\langle 1, +\infty)$ a $n \in \mathbb{N}$.

1. Je-li f klesající, pak

$$f(n) + \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq f(1) + \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Odhadování rychlosti růstu různých součtů

Věta:

Nechť f je spojitá funkce na $\langle 1, +\infty)$ a $n \in \mathbb{N}$.

1. Je-li f klesající, pak
$$f(n) + \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq f(1) + \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x.$$
2. Je-li f rostoucí, pak
$$f(1) + \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq f(n) + \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Odhadování rychlosti růstu různých součtů

Důkaz pro f klesající.

Buď $k \in \mathbb{N}$, pak pro každé $x \in \langle k, k+1 \rangle$ platí $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$.

Odhadování rychlosti růstu různých součtů

Důkaz pro f klesající.

Buď $k \in \mathbb{N}$, pak pro každé $x \in \langle k, k+1 \rangle$ platí $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$.
Z věty o nerovnosti mezi integrály dostaneme nerovnost

$$f(k+1) = \int_k^{k+1} f(k+1)\mathrm{d}x \leq \int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x \leq \int_k^{k+1} f(k)\mathrm{d}x = f(k).$$

Odhadování rychlosti růstu různých součtů

Důkaz pro f klesající.

Buď $k \in \mathbb{N}$, pak pro každé $x \in \langle k, k+1 \rangle$ platí $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$.
Z věty o nerovnosti mezi integrály dostaneme nerovnost

$$f(k+1) = \int_k^{k+1} f(k+1)\mathrm{d}x \leq \int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x \leq \int_k^{k+1} f(k)\mathrm{d}x = f(k).$$

Sečtením nerovností pro $k = 1, 2, \ldots, n-1$ dostaneme

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \int_1^n f(x)\mathrm{d}x \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k).$$

Odhadování rychlosti růstu různých součtů

Důkaz pro f klesající.

Buď $k \in \mathbb{N}$, pak pro každé $x \in \langle k,\, k+1\rangle$ platí $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$.
Z věty o nerovnosti mezi integrály dostaneme nerovnost

$$f(k+1) = \int_k^{k+1} f(k+1)\mathrm{d}x \leq \int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x \leq \int_k^{k+1} f(k)\mathrm{d}x = f(k).$$

Sečtením nerovností pro $k = 1, 2, \ldots, n-1$ dostaneme

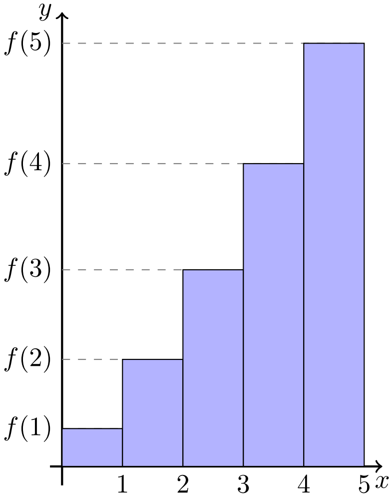
$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \int_1^n f(x)\mathrm{d}x \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k).$$

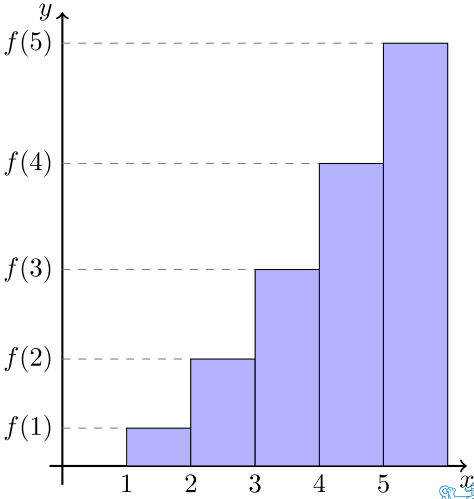
Odtud

$$f(n) + \int_1^n f(x)\mathrm{d}x \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq f(1) + \int_1^n f(x)\mathrm{d}x.$$

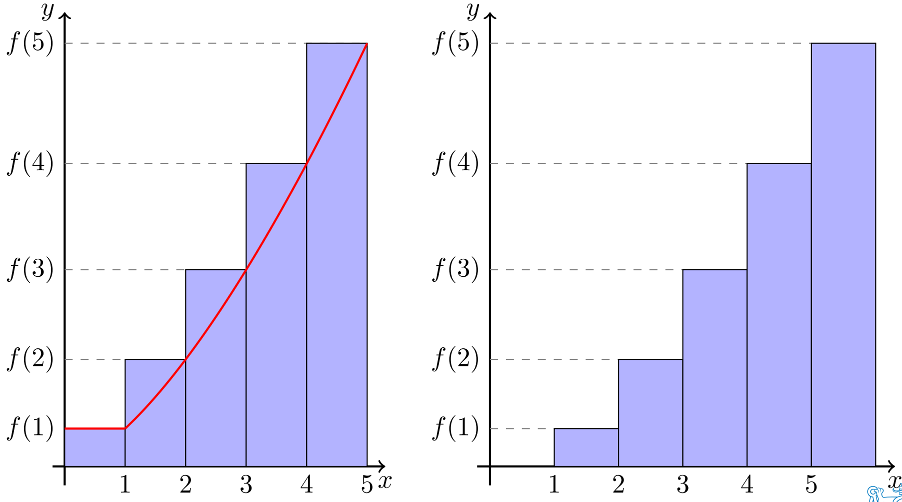
$\square$

Geometrická interpretace odhadu

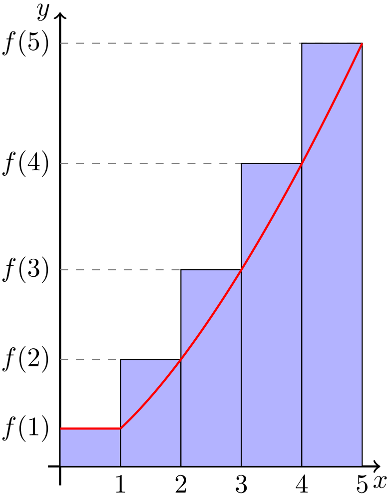


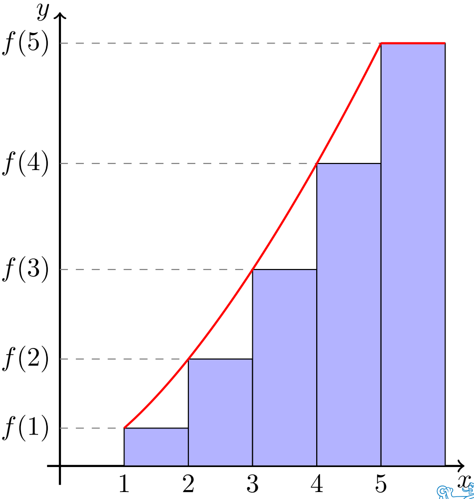


Geometrická interpretace odhadu



Geometrická interpretace odhadu





Příklad.

Pomocí odhadu odhadněte rychlost růstu posloupnosti $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ s členy

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} k^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Příklad.

Pomocí odhadu odhadněte rychlost růstu posloupnosti $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ s členy

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} k^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nyní $f(x) = x^2$ je rostoucí na $\langle 1, +\infty)$ a proto pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$1 + \int_1^n x^2 \, \mathrm{d}x \leq \sum_{k=1}^{n} k^2 \leq n^2 + \int_1^n x^2 \mathrm{d}x.$$

Příklad.

Pomocí odhadu odhadněte rychlost růstu posloupnosti $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ s členy

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} k^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nyní $f(x) = x^2$ je rostoucí na $\langle 1, +\infty)$ a proto pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$1 + \int_1^n x^2 \,\mathrm{d}x \le \sum_{k=1}^{n} k^2 \le n^2 + \int_1^n x^2 \mathrm{d}x.$$

Tudíž

$$\frac{1}{3}n^3 + \frac{2}{3} \le s_n \le \frac{1}{3}n^3 + n^2 - \frac{1}{3}.$$

Příklad.

Pomocí odhadu odhadněte rychlost růstu posloupnosti $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ s členy

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} k^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nyní $f(x) = x^2$ je rostoucí na $\langle 1, +\infty)$ a proto pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$1 + \int_1^n x^2 \, \mathrm{d}x \le \sum_{k=1}^{n} k^2 \le n^2 + \int_1^n x^2 \mathrm{d}x.$$

Tudíž

$$\frac{1}{3}n^3 + \frac{2}{3} \le s_n \le \frac{1}{3}n^3 + n^2 - \frac{1}{3}.$$

Pro velká n je největším členem $\frac{1}{3}n^3$, přesněji

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{\frac{1}{3}n^3} = 1, \quad \text{tj.} \quad s_n \sim \frac{1}{3}n^3.$$

Integrální kritérium

Z předcházejících odhadů sum pomocí integrálů je patrné, že platí následující věta.

Integrální kritérium

Z předcházejících odhadů sum pomocí integrálů je patrné, že platí následující věta.

Věta:

Buď $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ číselná řada s kladnými členy. Nechť existuje spojitá a monotónní funkce definovaná na $\langle 1, +\infty)$ taková, že $f(n) = a_n$ pro každé n. Potom:

Integrální kritérium

Z předcházejících odhadů sum pomocí integrálů je patrné, že platí následující věta.

Věta:

Buď $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ číselná řada s kladnými členy. Nechť existuje spojitá a monotónní funkce definovaná na $\langle 1, +\infty)$ taková, že $f(n) = a_n$ pro každé n. Potom:

- Pokud integrál $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, pak číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Integrální kritérium

Z předcházejících odhadů sum pomocí integrálů je patrné, že platí následující věta.

Věta:

Buď $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ číselná řada s kladnými členy. Nechť existuje spojitá a monotónní funkce definovaná na $\langle 1, +\infty)$ taková, že $f(n) = a_n$ pro každé n. Potom:

- Pokud integrál $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, pak číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
- Pokud integrál $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ diverguje, pak číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Příklad.

Řada $\sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha}$ konverguje pro $\alpha < -1$ a diverguje pro $\alpha \geq -1$.

Příklad.

Řada $\sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha}$ konverguje pro $\alpha < -1$ a diverguje pro $\alpha \geq -1$.

Protože

$$\int_1^n x^{\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1},\ \alpha \neq -1, \quad \text{a} \quad \int_1^n x^{-1}\mathrm{d}x = \ln n$$

platí

$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^n x^{\alpha}\mathrm{d}x = \frac{1}{-1-\alpha}, \quad \alpha < -1,$$
$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^n x^{\alpha}\mathrm{d}x = +\infty, \quad \alpha \geq -1.$$

Hlavní body

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

1. Číselné řady

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} = 2$$

2. Postačující podmínky konvergence

3. Integrální kritérium

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n \text{ pro } n \to \infty$$

4. Další příklady na odhad růstu

Harmonická čísla

Příklad.

Již víme, že

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=+\infty.$$

Odhadněme nyní **jak rychle** se $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ blíží k nekonečnu s rostoucím n.

Harmonická čísla

Příklad.

Již víme, že

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty.$$

Odhadněme nyní **jak rychle** se $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ blíží k nekonečnu s rostoucím n.

Podle předchozí věty, pro $f(x) = \frac{1}{x}$ klesající na $\langle 1, +\infty)$ dostáváme odhad

$$\frac{1}{n} + \int_1^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \ \le \ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \le 1 + \int_1^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Po integraci

$$\frac{1}{n} + \ln(n) \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \le 1 + \ln(n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Harmonická čísla: znovu a podrobněji

Poznámka:

Opět máme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\ln(n)} = 1, \quad \text{tj.} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n.$$

Dále si povšimněte, že

$$\frac{1}{n} \;\leq\; \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \;\leq\; 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

O posloupnosti $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right)$ lze ukázat, že je klesající a tudíž má limitu.

Tato limita se označuje γ a nazývá se **Eulerova–Mascheroniova konstanta**. Její přibližná hodnota je $\gamma = 0{,}577218\ldots$

Příklad.

Kolikrát se zavolá funkce `doSomething()` v následujícím příkladě?

```
for (i = 0; i < n; i++) {
  j = 1;
  while ( j < i ) {
    doSomething();
    j = j * 2;
  }
}
```

Příklad.

Kolikrát se zavolá funkce `doSomething()` v následujícím příkladě?

```
for (i = 0; i < n; i++) {
  j = 1;
  while ( j < i ) {
    doSomething();
    j = j * 2;
  }
}
```

- Přesný počet volání: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \lceil \log_2 i \rceil$.

Příklad.

Kolikrát se zavolá funkce `doSomething()` v následujícím příkladě?

```
for (i = 0; i < n; i++) {
  j = 1;
  while ( j < i ) {
    doSomething();
    j = j * 2;
  }
}
```

- Přesný počet volání: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \lceil \log_2 i \rceil$.
- Hrubý **horní** odhad:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \lceil \log_2 i \rceil \leq \sum_{i=1}^{n-1} \big(\log_2 i + 1\big) \leq \sum_{i=1}^{n-1} \big(\log_2 (n-1) + 1\big) =$$
$$= (n-1)\big(1 + \log_2(n-1)\big) \leq n(1 + \log_2 n) = \mathcal{O}(n \log_2 n).$$

- Jemný **oboustranný** odhad: jistě platí

$$\sum_{i=1}^{n-1} \log_2 i \leq \sum_{i=1}^{n-1} \lceil \log_2 i \rceil \leq \sum_{i=1}^{n-1} 1 + \log_2 i$$

- Jemný **oboustranný** odhad: jistě platí

$$\sum_{i=1}^{n-1} \log_2 i \le \sum_{i=1}^{n-1} \lceil \log_2 i \rceil \le \sum_{i=1}^{n-1} 1 + \log_2 i$$

a tudíž

$$0 + \int_1^{n-1} \log_2 x \, \mathrm{d}x \le \sum_{i=1}^{n-1} \lceil \log_2 i \rceil \le 1 + \log_2(n-1) + \int_1^{n-1} \big(1 + \log_2 x\big) \, \mathrm{d}x.$$

- Jemný **oboustranný** odhad: jistě platí

$$\sum_{i=1}^{n-1} \log_2 i \le \sum_{i=1}^{n-1} \lceil \log_2 i \rceil \le \sum_{i=1}^{n-1} 1 + \log_2 i$$

a tudíž

$$0 + \int_1^{n-1} \log_2 x \, \mathrm{d}x \le \sum_{i=1}^{n-1} \lceil \log_2 i \rceil \le 1 + \log_2(n-1) + \int_1^{n-1} \left(1 + \log_2 x\right) \mathrm{d}x.$$

Protože ale

$$\int_1^{n-1} \log_2 x \, \mathrm{d}x = (n-1)\log_2(n-1) - \frac{n-1}{\ln 2},$$

- Jemný **oboustranný** odhad: jistě platí

$$\sum_{i=1}^{n-1} \log_2 i \leq \sum_{i=1}^{n-1} \lceil \log_2 i \rceil \leq \sum_{i=1}^{n-1} 1 + \log_2 i$$

a tudíž

$$0 + \int_1^{n-1} \log_2 x \, \mathrm{d}x \leq \sum_{i=1}^{n-1} \lceil \log_2 i \rceil \leq 1 + \log_2(n-1) + \int_1^{n-1} \big(1 + \log_2 x\big) \, \mathrm{d}x.$$

Protože ale

$$\int_1^{n-1} \log_2 x \, \mathrm{d}x = (n-1)\log_2(n-1) - \frac{n-1}{\ln 2},$$

dostáváme

$$\sum_{i=1}^{n-1} \lceil \log_2 i \rceil \sim n \log_2 n.$$

Příklad.

Určete rychlost růstu posloupnosti $(n!)_{n=1}^{\infty}$.

Příklad.

Určete rychlost růstu posloupnosti $(n!)_{n=1}^{\infty}$.

Využijme šikovné úpravy

$$\ln n! = \sum_{k=1}^{n} \ln k.$$

Funkce $f(x) = \ln x$ je rostoucí na $\langle 1, +\infty)$ a proto

$$0 + \int_1^n \ln(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \leq \ln(n) + \int_1^n \ln(x)\,\mathrm{d}x.$$

Primitivní funkcí F k funkci f je funkce $F(x) = x\ln(x) - x + C$, tudíž

$$n\ln(n) - n + 1 \ \leq \ \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \ \leq \ \ln(n) + n\ln(n) - n + 1.$$

Odlogaritmováním (monotonie e^x) poslední nerovnosti pak dostáváme

$$e^{n\ln(n)-n+1} \leq n! \leq \mathrm{e}^{\ln(n)+n\ln(n)-n+1}$$

a po úpravě

$$\mathrm{e}\cdot\frac{n^n}{\mathrm{e}^n} \leq n! \leq \mathrm{e}n\cdot\frac{n^n}{\mathrm{e}^n}, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Neboli $n! = \mathcal{O}(n^{n+1}/\mathrm{e}^n)$ a také $n! = \Omega(n^n/\mathrm{e}^n)$.

Odlogaritmováním (monotonie e^x) poslední nerovnosti pak dostáváme

$$e^{n\ln(n)-n+1} \leq n! \leq \mathrm{e}^{\ln(n)+n\ln(n)-n+1}$$

a po úpravě

$$\mathrm{e}\cdot\frac{n^n}{\mathrm{e}^n} \leq n! \leq \mathrm{e}n\cdot\frac{n^n}{\mathrm{e}^n}, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Neboli $n! = \mathcal{O}(n^{n+1}/\mathrm{e}^n)$ a také $n! = \Omega(n^n/\mathrm{e}^n)$.

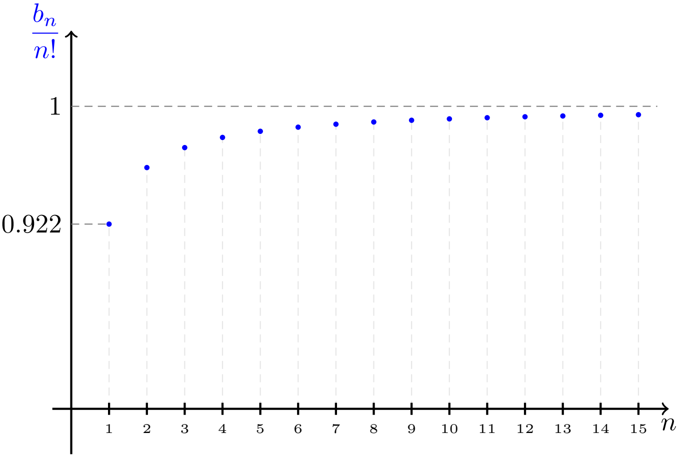
Poznámka:

Tento odhad už je pro většinu aplikací dostatečný. Lze ho však ještě dále zlepšovat. Všimněte, že na rozdíl od předchozího příkladu nám nyní nedává posloupnost $(b_n)_{n=1}^\infty$ takovou, že

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{b_n} = 1.$$

Získání takovéto posloupnosti $(b_n)_{n=1}^\infty$ vyžaduje další práci. Pro úplnost uveďme, že tuto vlastnost má například (tzv. **Stirlingův vzorec**)

$$b_n = \sqrt{2\pi n}\cdot\frac{n^n}{\mathrm{e}^n} \sim n!.$$



$$b_n = \sqrt{2\pi n} \cdot \frac{n^n}{e^n}$$

Hlavní body

5 Dodatek

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} = 2$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n \text{ pro } n \to \infty$$

Komentář

- Důsledně odlišujte pojmy **posloupnost** a **řada**. Středoškolské slovní spojení „řada čísel“ má význam posloupnosti, ne řady.
- O součtu divergentních řad nemluvíme z toho důvodu, že lze zavést různé zobecněné způsoby sčítání, vzhledem k nimž by takové řady již součet měly.
- Součet řad, které jsou konvergentní, ale nejsou absolutně konvergentní, závisí na pořadí, ve kterém se sčítají. Riemannova věta o přeuspořádání dokonce ukazuje, že vhodným přeuspořádáním členů takovýchto tzv. podmíněně konvergentních řad můžeme získat libovolný součet!

Komentář

- Jako příklad k předchozí poznámce uvažme řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \cdots$$

tj. $a_{2k} = \frac{1}{k+1}$ a $a_{2k+1} = -\frac{1}{k+1}$ pro $k = 0, 1, 2, \ldots$ Pro členy posloupnosti částečných součtů platí $s_{2n+1} = 0$ a $s_{2n} = \frac{1}{n+1}$ pro $n = 0, 1, 2, \ldots$ Proto se jedná o konvergentní číselnou řadu, jejímž součtem je 0. Tato řada není absolutně konvergentní.

Nyní pořadí sčítání členů této řady pozměňme tak, že vždy postupně vezmeme dva kladné členy a jeden záporný, který přičteme k menšímu kladnému členu, tj. sčítance v naší řadě přeuspořádáme takto:

$$1 + \underbrace{\left(\frac{1}{2} - 1\right)}_{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{3} + \underbrace{\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)}_{-\frac{1}{4}} + \frac{1}{5} + \underbrace{\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{3}\right)}_{-\frac{!}{6}} + \cdots$$

V tomto uspořádání tedy efektivně získáváme řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1},$$

o které v příštích přednáškách dokážeme, že má součet $\ln 2 \neq 0$.