Matematická analýza 2

Mocninné řady

Pavel Hrabák[1], Tomáš Kalvoda[2], Ivo Petr[3]

[1]pavel.hrabak@fit.cvut.cz, [2]tomas.kalvoda@fit.cvut.cz, [3]ivo.petr@fit.cvut.cz

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze

13. listopadu 2024
ZS 2024/2025

Hlavní body

$$e^x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

1. Exponenciální funkce

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k$$

2. Mocninné řady

$$L := \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$$

Hlavní výsledky této přednášky

- Definice exponenciální funkce.
- Mocninné řady a jejich vlastnosti.
- Obor konvergence mocninných řad.

Hlavní body

1. Exponenciální funkce
2. Mocninné řady

$$e^x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k$$

$$L := \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$$

Exponenciální funkce

Definice (Exponenciální funkce / *Exponential function*):

Zobrazení, které každému $x \in \mathbb{R}$ přiřadí součet absolutně konvergentní řady

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

nazýváme **exponenciální funkcí**. Její funkční hodnotu pro zadaná $x \in \mathbb{R}$ značíme symbolem e^x.

Exponenciální funkce

Definice (Exponenciální funkce / *Exponential function*):

Zobrazení, které každému $x \in \mathbb{R}$ přiřadí součet absolutně konvergentní řady

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

nazýváme **exponenciální funkcí**. Její funkční hodnotu pro zadaná $x \in \mathbb{R}$ značíme symbolem e^x.

O „exponenciální funkci" také často zkráceně mluvíme jako o „exponenciále".

Exponenciální funkce

Definice (Exponenciální funkce / *Exponential function*):

Zobrazení, které každému $x \in \mathbb{R}$ přiřadí součet absolutně konvergentní řady

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

nazýváme **exponenciální funkcí**. Její funkční hodnotu pro zadaná $x \in \mathbb{R}$ značíme symbolem e^x.

O „exponenciální funkci" také často zkráceně mluvíme jako o „exponenciále".

Dále ukážeme, že tato definice je v souladu se zavedením exponenciální funkce v BI-MA1.

Exponenciální funkce

Věta (Základní vlastnosti exponenciální funkce):

Exponenciální funkce má následující vlastnosti:

1. $\mathrm{e}^0 = 1$,
2. pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ platí $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^y$,
3. pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $\mathrm{e}^x \neq 0$ a dále $\mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{\mathrm{e}^x}$,
4. pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $\mathrm{e}^x > 0$,
5. exponenciála je ostře rostoucí funkce, tj. pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ splňující nerovnost $x < y$ platí nerovnost $\mathrm{e}^x < \mathrm{e}^y$.

Exponenciální funkce

Věta (Základní vlastnosti exponenciální funkce):

Exponenciální funkce má následující vlastnosti:

1. $\mathrm{e}^0 = 1$,
2. pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ platí $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^y$,
3. pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $\mathrm{e}^x \neq 0$ a dále $\mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{\mathrm{e}^x}$,
4. pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $\mathrm{e}^x > 0$,
5. exponenciála je ostře rostoucí funkce, tj. pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ splňující nerovnost $x < y$ platí nerovnost $\mathrm{e}^x < \mathrm{e}^y$.

Důkaz bodu *1*.

Plyne přímo z dosazení $x = 0$ do definičního vztahu,

$$\mathrm{e}^0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{0^k}{k!} = 1 + 0 + 0 + \cdots = 1.$$

□

Exponenciální funkce

Důkaz bodu 2.

Uvažme $x, y \in \mathbb{R}$. Potom

$$\mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^y = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right) \cdot \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{y^\ell}{\ell!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{k} \frac{x^\ell}{\ell!} \frac{y^{k-\ell}}{(k-\ell)!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} x^\ell y^{k-\ell} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+y)^k}{k!} = \mathrm{e}^{x+y}. \qquad \square$$

Exponenciální funkce

Důkaz bodu *2*.

Uvažme $x, y \in \mathbb{R}$. Potom

$$\mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^y = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right) \cdot \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{y^\ell}{\ell!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{k} \frac{x^\ell}{\ell!} \frac{y^{k-\ell}}{(k-\ell)!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} x^\ell y^{k-\ell} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+y)^k}{k!} = \mathrm{e}^{x+y}. \qquad \square$$

Důkaz bodu *3*.

Z předchozích (již dokázaných) bodů 1) a 2) plyne rovnost

$$\mathrm{e}^x \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{x-x} = \mathrm{e}^0 = 1, \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Tato rovnost implikuje $e^x \neq 0$ pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ (rozmyslete např. sporem).

Exponenciální funkce

Důkaz bodu *2*.

Uvažme $x, y \in \mathbb{R}$. Potom

$$\mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^y = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right) \cdot \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{y^\ell}{\ell!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{k} \frac{x^\ell}{\ell!} \frac{y^{k-\ell}}{(k-\ell)!} =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} x^\ell y^{k-\ell} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+y)^k}{k!} = \mathrm{e}^{x+y}.$$

□

Důkaz bodu *3*.

Z předchozích (již dokázaných) bodů 1) a 2) plyne rovnost

$$\mathrm{e}^x \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{x-x} = \mathrm{e}^0 = 1, \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Tato rovnost implikuje $e^x \neq 0$ pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ (rozmyslete např. sporem). Z rovnosti (1) pak ihned dostáváme $\mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{\mathrm{e}^x}$.

□

Exponenciální funkce – vlastnosti

Důkaz bodu *4*.

Buď $z > 0$. Potom přímo z definice exponenciály dostáváme

$$\mathrm{e}^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \cdots > 1.$$

Předchozí nerovnost a bod 3) dále implikují, že pro $z < 0$ platí

$$\mathrm{e}^z = \frac{1}{\mathrm{e}^{-z}} \in (0, 1).$$

Rozmyslete! □

Důkaz bodu *5*.

Je-li nyní $x < y$, pak $\mathrm{e}^y = \mathrm{e}^{y-x}\mathrm{e}^x > 1 \cdot \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x$, protože $y - x > 0$ a $\mathrm{e}^x > 0$. □

Exponenciální funkce – vlastnosti

Lemma:

Platí

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Exponenciální funkce – vlastnosti

Lemma:

Platí
$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1.$$

Uvažme $x \in (-1, 1)$, $x \neq 0$, a $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Potom

$$\frac{\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} - 1}{x} - 1 = \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!}}{x} - 1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{k!} - 1 = x \sum_{k=2}^{n} \frac{x^{k-2}}{k!}.$$

Exponenciální funkce – vlastnosti

Lemma:

Platí
$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1.$$

Uvažme $x \in (-1,1)$, $x \neq 0$, a $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Potom

$$\frac{\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} - 1}{x} - 1 = \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!}}{x} - 1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{k!} - 1 = x \sum_{k=2}^{n} \frac{x^{k-2}}{k!}.$$

Za stejných předpokladů z těchto rovností plyne odhad

$$0 \leq \left| \frac{\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} - 1}{x} - 1 \right| \leq |x| \sum_{k=2}^{n} \frac{|x|^{k-2}}{k!} \leq |x| \sum_{k=2}^{n} \frac{|x|^{k-2}}{2^{k-1}} =$$
$$= \frac{|x|}{2} \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{|x|}{2} \right)^{k-2} \leq \frac{|x|}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{|x|}{2} \right)^{k-2} = \frac{|x|}{2} \frac{1}{1 - |x|/2} \leq \frac{|x|}{2} \frac{1}{1 - 1/2} = |x|.$$

Odtud ihned plyne nerovnost (limitní přechod $n \to \infty$)

$$0 \le \left| \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} - 1 \right| \le |x|$$

pro každé $x \in (-1, 1)$, $x \neq 0$.

Odtud ihned plyne nerovnost (limitní přechod $n \to \infty$)

$$0 \leq \left| \frac{e^x - 1}{x} - 1 \right| \leq |x|$$

pro každé $x \in (-1, 1)$, $x \neq 0$. Konečně věta o limitě sevřené funkce implikuje

$$\lim_{x \to 0} \left| \frac{e^x - 1}{x} - 1 \right| = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Odtud ihned plyne nerovnost (limitní přechod $n \to \infty$)

$$0 \leq \left| \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} - 1 \right| \leq |x|$$

pro každé $x \in (-1, 1)$, $x \neq 0$. Konečně věta o limitě sevřené funkce implikuje

$$\lim_{x \to 0} \left| \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} - 1 \right| = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1.$$

Poznámka:

Neboť pro $z > 0$ platí $\mathrm{e}^z > 1 + z$, plyne z věty o vytlačení do nekonečna

$$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty \, .$$

Což dále použitím věty o limitě složené funkce

$$\lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = \lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^x} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Exponenciální funkce – vlastnosti

Připomeňme důsledky ukázané v BI-MA1, které z těchto vlastností plynou.

- Funkce e^x je spojitá na celém $\mathbb{R}$, obor hodnot je tedy $(0, +\infty)$.
- Existuje inverzní funkce k e^x, přirozený logaritmus $\ln(x)$.
- Pro $a > 0$ zavádíme obecnou mocninu jako

$$a^x := \mathrm{e}^{x \ln(a)}.$$

- Definujeme Eulerovo číslo $\mathrm{e} := \mathrm{e}^1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$, pro které platí

$$(\mathrm{e})^x = \mathrm{e}^{x \ln \mathrm{e}} = \mathrm{e}^{x \ln \mathrm{e}^1} = \mathrm{e}^x.$$

- Pro obecnou mocninu platí

$$a^{x+y} = a^x a^y\,, \quad (a^x)^y = a^{xy}\,, \quad (ab)^x = a^x b^x\,.$$

- Pro $a \neq 1$ existuje inverzní funkce k a^x, logaritmus $\log_a(x)$.

Hlavní body

$$e^x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

1. Exponenciální funkce

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k$$

2. Mocninné řady

$$L := \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$$

Mocninná řada

Exponenciální funkce není v jejím vyjádření pomocí řady mezi elementárními funkcemi výjimkou!

Definice (Mocninná řada / *Power series*):

Nechť je dána posloupnost $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ a číslo $c \in \mathbb{R}$. Číselnou řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - c)^k$$

závisející na reálném parametru x nazýváme **mocninnou řadou se středem v bodě** c.

Mocninná řada

Exponenciální funkce není v jejím vyjádření pomocí řady mezi elementárními funkcemi výjimkou!

Definice (Mocninná řada / *Power series*):

Nechť je dána posloupnost $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ a číslo $c \in \mathbb{R}$. Číselnou řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - c)^k$$

závisející na reálném parametru x nazýváme **mocninnou řadou se středem v bodě** c.

Příkladem mocninné řady je řada definující exponenciálu,

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (x - 0)^k .$$

Obor konvergence

Poznámka:

Uvažme mocninnou řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}(x-1)^k\,.$$

Obor konvergence

Poznámka:

Uvažme mocninnou řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}(x-1)^k \,.$$

- Pro $x = 1/2$ dostaneme **konvergentní** řadu $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\left(-\frac{1}{2}\right)^k$,

Obor konvergence

Poznámka:

Uvažme mocninnou řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}(x-1)^k .$$

- Pro $x = 1/2$ dostaneme **konvergentní** řadu $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\left(-\frac{1}{2}\right)^k$,
- pro $x = 3$ dostaneme **divergentní** řadu $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k}$.

Obor konvergence

Poznámka:

Uvažme mocninnou řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}(x-1)^k .$$

- Pro $x = 1/2$ dostaneme **konvergentní** řadu $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\left(-\frac{1}{2}\right)^k$,
- pro $x = 3$ dostaneme **divergentní** řadu $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k}$.

Definice (Obor konvergence):

Množinu všech hodnot $x \in \mathbb{R}$, pro které mocninná řada $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-c)^k$ konverguje nazýváme **oborem konvergence mocninné řady**.

Obor konvergence

Poznámka:

Uvažme mocninnou řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}(x-1)^k .$$

- Pro $x = 1/2$ dostaneme **konvergentní** řadu $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\left(-\frac{1}{2}\right)^k$,
- pro $x = 3$ dostaneme **divergentní** řadu $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k}$.

Definice (Obor konvergence):

Množinu všech hodnot $x \in \mathbb{R}$, pro které mocninná řada $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-c)^k$ konverguje nazýváme **oborem konvergence mocninné řady**.

Mocninná řada definuje jistou funkci, která každému x z oboru konvergence přiřadí součet této mocninné řady.

Příklad.

Nalezněte obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (x-1)^k \,.$$

Použijeme d'Alembertovo kritérium pro řadu $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(x-1)^k}{k} \right|$ a $x \neq 1$ (pro $x = 1$ jistě absolutně konverguje).

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k+1} |x-1|^{k+1}}{\frac{1}{k} |x-1|^k} = |x-1| \,,$$

Řada **konverguje absolutně** pro $|x-1| < 1$ a **diverguje** pro $|x-1| > 1$.

Příklad.

Nalezněte obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}(x-1)^k \,.$$

Použijeme d'Alembertovo kritérium pro řadu $\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(x-1)^k}{k} \right|$ a $x \neq 1$ (pro $x = 1$ jistě absolutně konverguje).

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k+1}|x-1|^{k+1}}{\frac{1}{k}|x-1|^k} = |x-1| \,,$$

Řada **konverguje absolutně** pro $|x-1| < 1$ a **diverguje** pro $|x-1| > 1$.

Pro $x = 2$ dostaneme **divergentní** řadu $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$.

Příklad.

Nalezněte obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}(x-1)^k \,.$$

Použijeme d'Alembertovo kritérium pro řadu $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left|\frac{(x-1)^k}{k}\right|$ a $x \neq 1$ (pro $x = 1$ jistě absolutně konverguje).

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k+1}|x-1|^{k+1}}{\frac{1}{k}|x-1|^k} = |x-1| \,,$$

Řada **konverguje absolutně** pro $|x-1| < 1$ a **diverguje** pro $|x-1| > 1$.

Pro $x = 2$ dostaneme **divergentní** řadu $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$.

Pro $x = 0$ dostaneme **konvergentní** řadu $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$.

Příklad.

Nalezněte obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}(x-1)^k .$$

Použijeme d'Alembertovo kritérium pro řadu $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(x-1)^k}{k} \right|$ a $x \neq 1$ (pro $x = 1$ jistě absolutně konverguje).

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k+1}|x-1|^{k+1}}{\frac{1}{k}|x-1|^k} = |x-1| ,$$

Řada **konverguje absolutně** pro $|x-1| < 1$ a **diverguje** pro $|x-1| > 1$.

Pro $x = 2$ dostaneme **divergentní** řadu $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$.

Pro $x = 0$ dostaneme **konvergentní** řadu $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$.

Závěr: **Obor konvergence** této řady je tedy interval $\langle 0, 2)$.

Poloměr konvergence

Předchozí postup lze obecně formulovat pomocí následující věty.

Věta:

Pokud existuje limita

$$L := \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|,$$

Poloměr konvergence

Předchozí postup lze obecně formulovat pomocí následující věty.

Věta:

Pokud existuje limita

$$L := \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|,$$

potom klademe

$$R := \begin{cases} \frac{1}{L}, & L > 0, \\ +\infty, & L = 0, \\ 0, & L = +\infty \end{cases}$$

Poloměr konvergence

Předchozí postup lze obecně formulovat pomocí následující věty.

Věta:

Pokud existuje limita

$$L := \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|,$$

potom klademe

$$R := \begin{cases} \frac{1}{L}, & L > 0, \\ +\infty, & L = 0, \\ 0, & L = +\infty \end{cases}$$

a tvrdíme, že mocninná řada

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k$$

konverguje absolutně pro $x \in (c-R, c+R)$ a diverguje pro $|x-c| > R$.

Poloměr konvergence

Důkaz.

BÚNO $c = 0$. Pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ dostáváme

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1} x^{k+1}}{a_k x^k} \right| = \lim_{k\to\infty} |x| \cdot \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = |x| \cdot L.$$

Shrnujeme, že pokud

Poloměr konvergence

Důkaz.

BÚNO $c = 0$. Pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ dostáváme

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}x^{k+1}}{a_k x^k} \right| = \lim_{k\to\infty} |x| \cdot \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = |x| \cdot L.$$

Shrnujeme, že pokud

- $|x| \cdot L < 1$, tedy $|x| < R$, pak podle d'Alembertova kritéria zkoumaná řada konverguje absolutně,

Poloměr konvergence

Důkaz.

BÚNO $c = 0$. Pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ dostáváme

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}x^{k+1}}{a_k x^k} \right| = \lim_{k\to\infty} |x| \cdot \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = |x| \cdot L.$$

Shrnujeme, že pokud

- $|x| \cdot L < 1$, tedy $|x| < R$, pak podle d'Alembertova kritéria zkoumaná řada konverguje absolutně,
- $|x| \cdot L > 1$, tedy $|x| > R$, pak podle podílového kritéria je $\lim\limits_{k\to\infty} |a_k x^k| = +\infty$. Tudíž nemůže být splněna nutná podmínka konvergence zkoumané řady (tj. neplatí $\lim\limits_{n\to\infty} a_k x^k = 0$). □

Poloměr konvergence

Důkaz.

BÚNO $c = 0$. Pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ dostáváme

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}x^{k+1}}{a_k x^k} \right| = \lim_{k\to\infty} |x| \cdot \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = |x| \cdot L.$$

Shrnujeme, že pokud

- $|x| \cdot L < 1$, tedy $|x| < R$, pak podle d'Alembertova kritéria zkoumaná řada konverguje absolutně,
- $|x| \cdot L > 1$, tedy $|x| > R$, pak podle podílového kritéria je $\lim\limits_{k\to\infty} |a_k x^k| = +\infty$. Tudíž nemůže být splněna nutná podmínka konvergence zkoumané řady (tj. neplatí $\lim\limits_{n\to\infty} a_k x^k = 0$). □

Poznámka:

Číslu R z předchozí věty říkáme **poloměr konvergence** mocninné řady.

Uvažujme mocninnou řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k. \tag{2}$$

- Předchozí věta říká, že pokud existuje limita $L = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k+1}{a_k}\right|$, tak tato mocninná řada (2) konverguje pro $|x-c| < R$ a diverguje pro $|x-c| > R$. **Neříká nic** o konvergenci na krajích oboru konvergence, tj. pro $x = c + R$ a $x = c - R$.

Uvažujme mocninnou řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k. \tag{2}$$

- Předchozí věta říká, že pokud existuje limita $L = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k+1}{a_k}\right|$, tak tato mocninná řada (2) konverguje pro $|x-c| < R$ a diverguje pro $|x-c| > R$. **Neříká nic** o konvergenci na krajích oboru konvergence, tj. pro $x = c + R$ a $x = c - R$.
- Každá mocninná řada se chová tímto způsobem. Platí totiž následující

Věta (Cauchy–Hadamard):

Ke každé mocninné řadě tvaru (2) existuje $R \in \langle 0, +\infty \rangle$ takové, že tato mocninná řada absolutně konverguje pro $|x-c| < R$ (pro $x = c$ pokud $R = 0$) a diverguje pro $|x-c| > R$.

Uvažujme mocninnou řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k. \qquad (2)$$

- Předchozí věta říká, že pokud existuje limita $L = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k+1}{a_k}\right|$, tak tato mocninná řada (2) konverguje pro $|x-c| < R$ a diverguje pro $|x-c| > R$. **Neříká nic** o konvergenci na krajích oboru konvergence, tj. pro $x = c + R$ a $x = c - R$.
- Každá mocninná řada se chová tímto způsobem. Platí totiž následující

Věta (Cauchy–Hadamard):

Ke každé mocninné řadě tvaru (2) existuje $R \in \langle 0, +\infty \rangle$ takové, že tato mocninná řada absolutně konverguje pro $|x-c| < R$ (pro $x = c$ pokud $R = 0$) a diverguje pro $|x-c| > R$.

- Poloměr konvergence ale vždy **nemusí** jít spočítat pomocí limity podílů uvedených v předešlé větě (tato limita nemusí existovat).

Příklad.

Rozeberme všechny tyto poznatky na příkladu mocninné řady

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k.$$

Příklad.

Rozeberme všechny tyto poznatky na příkladu mocninné řady

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k.$$

- Pro poloměr konvergence (tj. R) máme

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{1}{1}\right| = 1 = \frac{1}{R} \;\Rightarrow\; R = 1.$$

Dále pro $x = \pm 1$ jsou řady $\sum_{k=0}^{\infty} (\pm 1)^k$ divergentní.

Příklad.

Rozeberme všechny tyto poznatky na příkladu mocninné řady

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k.$$

- Pro poloměr konvergence (tj. R) máme

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{1}{1}\right| = 1 = \frac{1}{R} \;\Rightarrow\; R = 1.$$

  Dále pro $x = \pm 1$ jsou řady $\sum_{k=0}^{\infty} (\pm 1)^k$ divergentní.
- Řada konverguje absolutně pro $x \in (-1, 1)$ a diverguje pro všechna ostatní x.

Příklad.

Rozeberme všechny tyto poznatky na příkladu mocninné řady

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k.$$

- Pro poloměr konvergence (tj. R) máme

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{1}{1}\right| = 1 = \frac{1}{R} \;\Rightarrow\; R = 1.$$

  Dále pro $x = \pm 1$ jsou řady $\sum_{k=0}^{\infty} (\pm 1)^k$ divergentní.
- Řada konverguje absolutně pro $x \in (-1, 1)$ a diverguje pro všechna ostatní x.
- Řadu umíme na oboru konvergence $(-1, 1)$ sečíst:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

  Funkce, kterou tato řada definuje, je tedy $\frac{1}{1-x}$ s definičním oborem $(-1, 1)$.

Závěrečné poznámky

- Jak jsme již uváděli dříve: Hledání explicitního vzorce pro součet řady je obecně komplikovaná a často neřešitelná úloha.
- Nejinak tomu je i u mocninných řad.
- V následující přednášce si však vysvětlíme, jak hledat vhodné mocninné řady, jejichž součtem je předem zvolená funkce, tzv. Taylorovy řady.
- Ukážeme, jak vyjádřit i další elementární funkce (nejen exponenciálu) pomocí mocninných řad a jak této vlastnosti využít k numerickému výpočtu aproximací funkčních hodnot těchto funkcí.

Hlavní body

3 Dodatek

$$e^x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k$$

$$L := \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$$

Komentář

- Součtová funkce mocninné řady je diferencovatelná (a tedy i spojitá) uvnitř oboru konvergence. Navíc platí, že mocninnou řadu lze derivovat „člen po členu“, tj. pro $x \in (c-R, c+R)$ platí

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k (x-c)^k\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot k \cdot (x-c)^{k-1}.$$

- Spojitost součtové funkce zaručuje také existenci primitivní funkce na $(c-R, c+R)$. Mocninnou řadu lze integrovat „člen po členu“.

- Těchto vlastností lze využít při hledání součtů některých řad.

Příklad

Příklad.

Sečtěte řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot x^k \,.$$

Snadno nahlédneme, že oborem konvergence řady je interval $(-1,1)$. Na tomto intervalu lze derivovat a integrovat člen po členu. Pro $x \in (-1,1)$ platí

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot x^k = x \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot x^{k-1} = x \left(\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{x^k}{k} \right)' = \\ = x \left(\sum_{k=1}^{\infty} x^k \right)' = x \left(\frac{x}{1-x} \right)' \\ = \frac{x}{(1-x)^2} \,.\end{aligned}$$