Matematická analýza 2

Taylorovy polynomy a řady

Pavel Hrabák[1], Tomáš Kalvoda[2], Ivo Petr[3]

[1]pavel.hrabak@fit.cvut.cz, [2]tomas.kalvoda@fit.cvut.cz, [3]ivo.petr@fit.cvut.cz

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze

5. března 2025
ZS 2024/2025

Hlavní body

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

$$\ln(x+1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$$

Hlavní výsledky této přednášky

- Aproximace funkcí pomocí polynomů.
- Taylorovy polynomy.
- Taylorovy řady.

Hlavní body

1 Motivace

2 Aproximace funkcí pomocí polynomů

3 Taylorovy řady

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

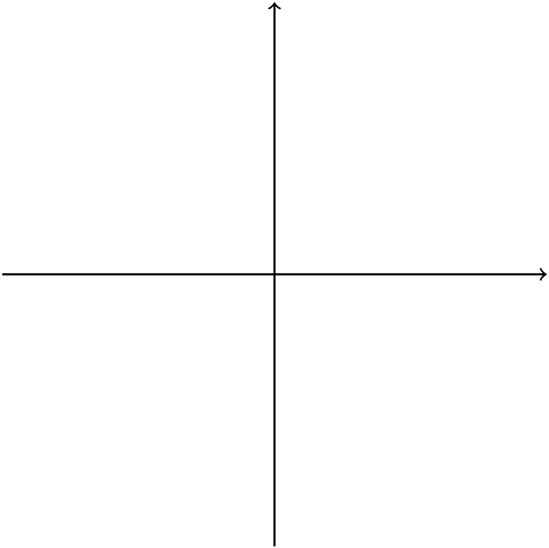
$$\ln(x+1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$$

Přibližné výpočty

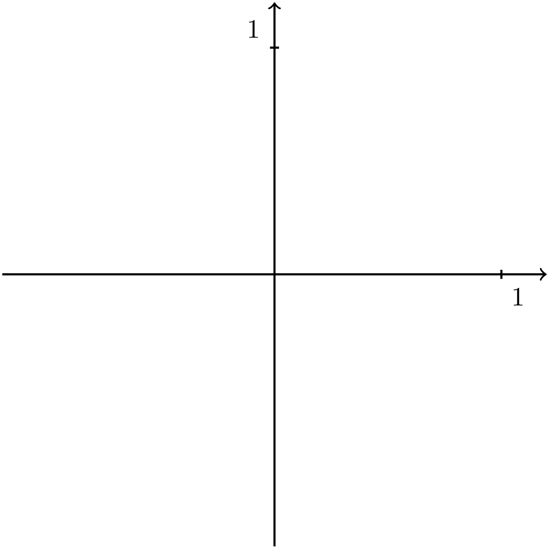
Otázka:

Jak určit hodnotu $\sin(37^\circ)$?

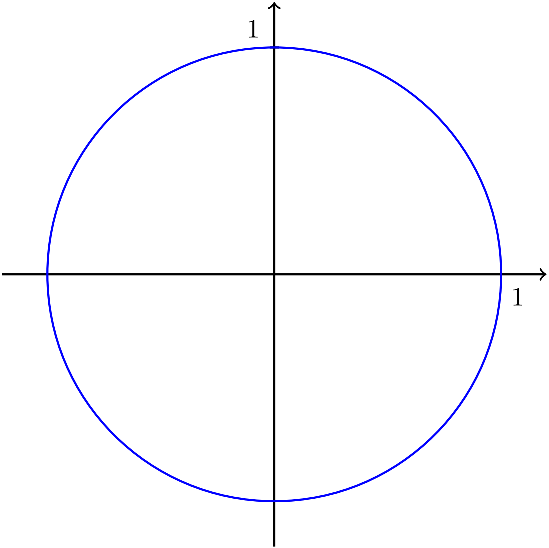
Odpověď: Geometrická konstrukce



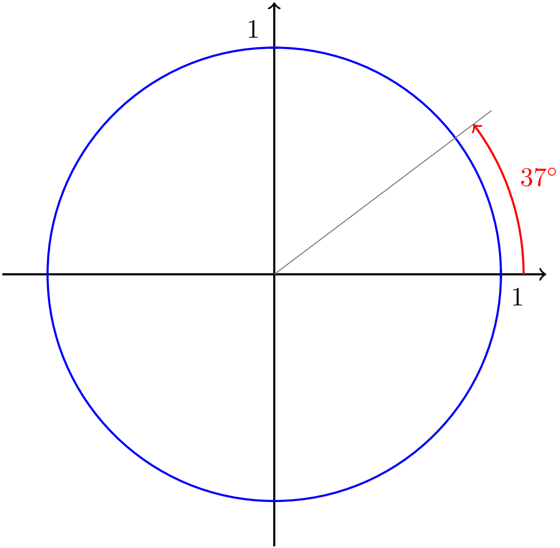
Odpověď: Geometrická konstrukce



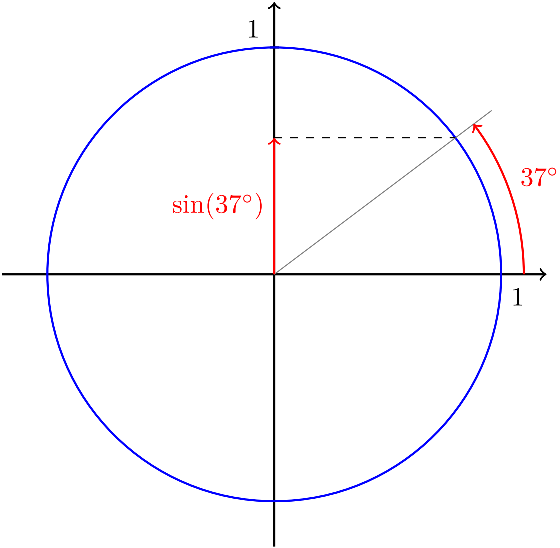
Odpověď: Geometrická konstrukce



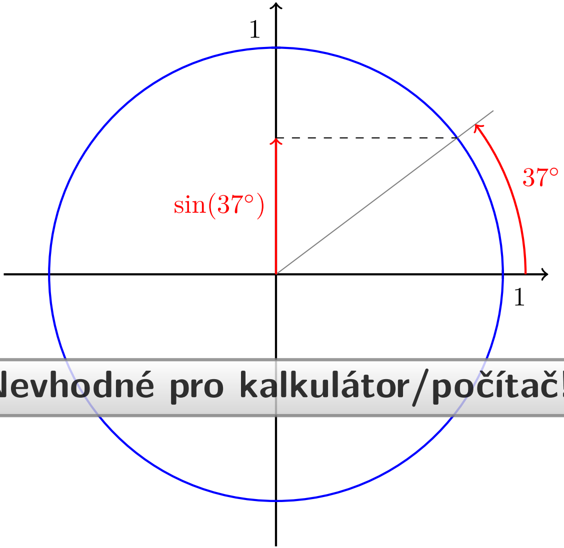
Odpověď: Geometrická konstrukce



Odpověď: Geometrická konstrukce

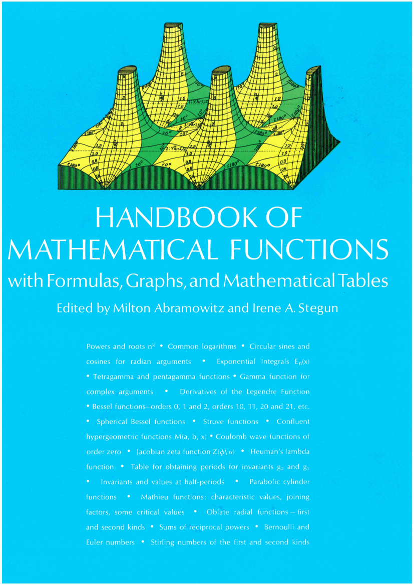


Odpověď: Geometrická konstrukce



Nevhodné pro kalkulátor/počítač!

Odpověď: Tabulky



Odpověď: Tabulky

Table 4.10 CIRCULAR SINES AND COSINES TO TENTHS OF A DEGREE

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$90° - \theta$
35.0°	0.57357 64363 51046	0.81915 20442 88992	55.0°
35.1	0.57500 52520 43279	0.81814 97174 25023	54.9
35.2	0.57643 23161 69793	0.81714 48983 35129	54.8
35.3	0.57785 76243 83505	0.81613 75900 80160	54.7
35.4	0.57928 11723 42679	0.81512 77957 28554	54.6
35.5	0.58070 29557 10940	0.81411 55183 56319	54.5
35.6	0.58212 29701 57289	0.81310 07610 47028	54.4
35.7	0.58354 12113 56118	0.81208 35268 91806	54.3
35.8	0.58495 76749 87215	0.81106 38189 89327	54.2
35.9	0.58637 23567 35789	0.81004 16404 45796	54.1
36.0	0.58778 52522 92473	0.80901 69943 74947	54.0
36.1	0.58919 63573 53342	0.80798 98838 98031	53.9
36.2	0.59060 56676 19925	0.80696 03121 43802	53.8
36.3	0.59201 31787 99220	0.80592 82822 48516	53.7
36.4	0.59341 88866 03701	0.80489 37973 55914	53.6
36.5	0.59482 27867 51341	0.80385 68606 17217	53.5
36.6	0.59622 48749 65616	0.80281 74751 91115	53.4
36.7	0.59762 51469 75521	0.80177 56442 43754	53.3
36.8	0.59902 35985 15586	0.80073 13709 48733	53.2
36.9	0.60042 02253 25884	0.79968 46584 87091	53.1
37.0	0.60181 50231 52048	0.79863 55100 47293	53.0
37.1	0.60320 79877 45282	0.79758 39288 25229	52.9
37.2	0.60459 91148 62375	0.79652 99180 24196	52.8
37.3	0.60598 84002 65711	0.79547 34808 54896	52.7
37.4	0.60737 58397 23287	0.79441 46205 35418	52.6

Odpověď: Tabulky

Table 4.6 CIRCULAR SINES AND COSINES FOR RADIAN ARGUMENTS

x	sin x	cos x
0.000	0.00000 00000 00000 00000 000	1.00000 00000 00000 00000 000
0.001	0.00099 99998 33333 34166 667	0.99999 95000 00041 66666 528
0.002	0.00199 99986 66666 93333 331	0.99999 80000 00666 66657 778
0.003	0.00299 99955 00002 02499 957	0.99999 55000 03374 99898 750
0.004	0.00399 99893 33341 86666 342	0.99999 20000 10666 66097 778
0.005	0.00499 99791 66692 70831 783	0.99998 75000 26041 64496 529
0.006	0.00599 99640 00064 79994 446	0.99998 20000 53999 93520 004
0.007	0.00699 99428 33473 39150 327	0.99997 55001 00041 50326 542
0.008	0.00799 99146 66939 73291 723	0.99996 80001 70666 30257 819
0.009	0.00899 98785 00492 07405 100	0.99995 95002 73374 26188 857
0.010	0.00999 98333 34166 66468 254	0.99995 00004 16665 27778 026
0.011	0.01099 97781 68008 75446 684	0.99993 95006 10039 20617 059
0.012	0.01199 97120 02073 59289 053	0.99992 80008 63995 85281 066
0.013	0.01299 96338 36427 42921 659	0.99991 55011 90034 96278 551
0.014	0.01399 95426 71148 51241 801	0.99990 20016 00656 20901 438
0.015	0.01499 94375 06328 09109 944	0.99988 75021 09359 17975 106
0.016	0.01599 93173 42071 41340 585	0.99987 20027 30643 36508 430
0.017	0.01699 91811 78498 72691 726	0.99985 55034 80008 14243 829
0.018	0.01799 90280 15746 27852 832	0.99983 80043 73952 76107 331
0.019	0.01899 88568 53967 31431 205	0.99981 95054 29976 32558 650

Odpověď: Tabulky

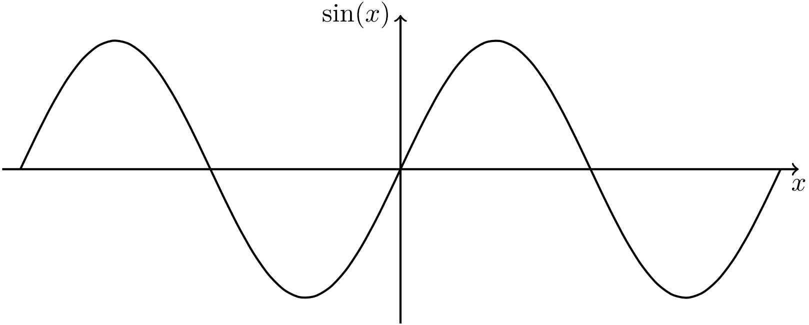
Table 4.6 CIRCULAR SINES AND COSINES FOR RADIAN ARGUMENTS

x	$\sin x$	$\cos x$
0.000	0.00000 00000 00000 00000 000	1.00000 00000 00000 00000 000
0.001	0.00099 99998 33333 34166 667	0.99999 95000 00041 66666 528
0.002	0.00199 99986 66666 93333 331	0.99999 80000 00666 66657 778
0.003	0.00299 99955 00002 02499 957	0.99999 55000 03374 99898 750
0.004	0.00399 99893 33341 86666 342	0.99999 20000 10666 66097 778
0.005	0.00499 99791 66692 70831 783	0.99998 75000 26041 64496 529
0.006	0.00599 99640 00064 79994 446	0.99998 20000 53999 93520 004
0.007	0.00699 99428 33473 39150 327	0.99997 55001 00041 50326 542
0.008	0.00799 99146 66939 73291 723	0.99996 80001 70666 30257 819
0.009	0.00899 98785 00492 07405 100	0.99995 95002 73374 26188 857
0.010	0.00999 98333 34166 66468 254	0.99995 00004 16665 27778 026
0.011	0.01099 97781 68008 75446 684	0.99993 95006 10039 20617 059
0.012	0.01199 97120 02073 59289 053	0.99992 80008 63995 85281 066
0.013	0.01299 96338 36427 42921 659	0.99991 55011 90034 96278 551
0.014	0.01399 95426 71148 51241 801	0.99990 20016 00656 20901 438
0.015	0.01499 94375 06328 09109 944	0.99988 75021 09359 17975 106
0.016	0.01599 93173 42071 41340 585	0.99987 20027 30643 36508 430
0.017	0.01699 91811 78498 72691 726	0.99985 55034 80008 14243 829
0.018	0.01799 90280 15746 27852 832	0.99983 80043 73952 76107 331
0.019	0.01899 88568 53967 31431 205	0.99981 95054 29976 32558 650

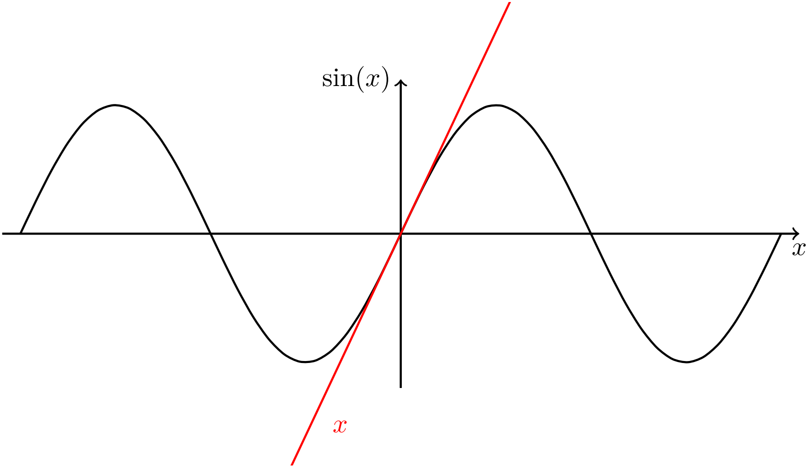
Pozorování:

Pro malé hodnoty x, $|x| \ll 1$ platí $\sin x \approx x$.

Aproximace $\sin x$ lineární funkcí x



Aproximace $\sin x$ lineární funkcí x



Přirozeně vyvstávají následující otázky:

- Jak se dospělo k hodnotám uvedeným v těchto tabulkách?
- Jak zlepšit lineární aproximaci?
- Jak odhadnout chybu aproximace?

Na tyto otázky budeme postupně odpovídat v této a příští přednášce.

Hlavní body

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

1 Motivace

2 Aproximace funkcí pomocí polynomů

3 Taylorovy řady

$$\ln(x+1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$$

Co je to polynom?

Definice (Polynom (Mnohočlen) / *Polynomial*):

Reálnou funkci reálné proměnné $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazveme **polynomem**, právě když existují nezáporné celé číslo $n \in \mathbb{N}_0$ a reálná čísla $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ taková, že rovnost

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

platí pro všechna reálná $x \in \mathbb{R}$.

Co je to polynom?

Definice (Polynom (Mnohočlen) / *Polynomial*):

Reálnou funkci reálné proměnné $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazveme **polynomem**, právě když existují nezáporné celé číslo $n \in \mathbb{N}_0$ a reálná čísla $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ taková, že rovnost

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

platí pro všechna reálná $x \in \mathbb{R}$.

Definice (Terminologie):

1. Je-li $a_n \neq 0$, nazýváme číslo n *stupněm polynomu* p.
2. Jsou-li všechny koeficienty a_k, $k = 0, \ldots, n$ nulové, nazýváme p *nulovým polynomem* a jeho stupeň nedefinujeme.

Příklady polynomů

Notoricky známými příklady polynomů jsou:

Příklady polynomů

Notoricky známými příklady polynomů jsou:

1. **Lineární** funkce $f(x) = ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$ parametry) je polynomem nejvýše prvního stupně.

Příklady polynomů

Notoricky známými příklady polynomů jsou:

1. **Lineární** funkce $f(x) = ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$ parametry) je polynomem nejvýše prvního stupně.
2. **Kvadratická** funkce $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ parametry) je polynomem druhého stupně.

Příklady polynomů

Notoricky známými příklady polynomů jsou:

1. **Lineární** funkce $f(x) = ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$ parametry) je polynomem nejvýše prvního stupně.
2. **Kvadratická** funkce $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ parametry) je polynomem druhého stupně.

Vyhodnocování funkčních hodnot polynomů

K vyhodnocení funkční hodnoty polynomu stačí operace sčítání (odčítání) a násobení.

Tečna funkce jakožto lineární aproximace

1. Je-li funkce f diferencovatelná v bodě $a \in \mathbb{R}$, pak rovnice její **tečny v bodě** a má tvar
$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$
Je to přímka „nejvíce připomínající" funkci f v okolí bodu a.

Tečna funkce jakožto lineární aproximace

1. Je-li funkce f diferencovatelná v bodě $a \in \mathbb{R}$, pak rovnice její **tečny v bodě** a má tvar
$$y = f(a) + f'(a)(x-a).$$
Je to přímka „nejvíce připomínající“ funkci f v okolí bodu a.

2. Tečnu také můžeme chápat jako graf lineární funkce
$$g(x) := f(a) + f'(a)(x-a).$$
Pro tyto funkce f a g platí
$$g(a) = f(a), \quad g'(a) = f'(a).$$
(Mají stejnou funkční hodnotu a stejný „sklon“ v bodě a.)

Tečna funkce jakožto lineární aproximace

1. Je-li funkce f diferencovatelná v bodě $a \in \mathbb{R}$, pak rovnice její **tečny v bodě** a má tvar
$$y = f(a) + f'(a)(x-a).$$
Je to přímka „nejvíce připomínající“ funkci f v okolí bodu a.

2. Tečnu také můžeme chápat jako graf lineární funkce
$$g(x) := f(a) + f'(a)(x-a).$$
Pro tyto funkce f a g platí
$$g(a) = f(a), \quad g'(a) = f'(a).$$
(Mají stejnou funkční hodnotu a stejný „sklon“ v bodě a.)

Tj. **funkce** f a její **tečna** (reprezentovaná funkcí g) v bodě a mají stejnou 0. a 1. derivaci v bodě a.

Proč neuvažovat polynom vyššího stupně?

Nechť funkce f má konečné derivace v bodě a až do řádu $n \in \mathbb{N}$ včetně. Lze nalézt polynom p takový, že $p^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ pro všechna $k = 0, 1, \ldots, n$?

Proč neuvažovat polynom vyššího stupně?

Nechť funkce f má konečné derivace v bodě a až do řádu $n \in \mathbb{N}$ včetně. Lze nalézt polynom p takový, že $p^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ pro všechna $k = 0, 1, \ldots, n$?

Odpověď je **kladná**. Hledejme polynom ve tvaru

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k.$$

$$\begin{aligned}
f(a) = p(a) = a_0 \qquad &\Longrightarrow \qquad a_0 = f(a) \\
f'(a) = p'(a) = a_1 \qquad &\Longrightarrow \qquad a_1 = f'(a) \\
f''(a) = p''(a) = 2a_2 \qquad &\Longrightarrow \qquad a_2 = \frac{1}{2} f''(a) \\
f^{(k)}(a) = p^{(k)}(a) = k!\, a_k \qquad &\Longrightarrow \qquad a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(a),\ k = 0, 1, \ldots, n
\end{aligned}$$

Proč neuvažovat polynom vyššího stupně?

Nechť funkce f má konečné derivace v bodě a až do řádu $n \in \mathbb{N}$ včetně. Lze nalézt polynom p takový, že $p^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ pro všechna $k = 0, 1, \ldots, n$?

Odpověď je **kladná**. Hledejme polynom ve tvaru

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k.$$

$$\begin{aligned}
f(a) = p(a) = a_0 \quad &\Longrightarrow \quad a_0 = f(a) \\
f'(a) = p'(a) = a_1 \quad &\Longrightarrow \quad a_1 = f'(a) \\
f''(a) = p''(a) = 2a_2 \quad &\Longrightarrow \quad a_2 = \frac{1}{2} f''(a) \\
f^{(k)}(a) = p^{(k)}(a) = k!\, a_k \quad &\Longrightarrow \quad a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(a),\ k = 0, 1, \ldots, n
\end{aligned}$$

Uzavíráme, že hledaný polynom p požadovaných vlastností je tvaru

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

Taylorův polynom

Definice (Taylorův polynom / *Taylor polynomial*):

Nechť reálná funkce reálné proměnné f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ konečnou n-tou derivaci. Polynom

$$T_{n,a}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

nazýváme n-**tým Taylorovým polynomem funkce** f **v bodě** a.

Taylorův polynom

Definice (Taylorův polynom / *Taylor polynomial*):

Nechť reálná funkce reálné proměnné f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ konečnou n-tou derivaci. Polynom

$$T_{n,a}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

nazýváme n-**tým Taylorovým polynomem funkce** f **v bodě** a.

Věta:

Nechť reálná funkce reálné proměnné f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ konečnou n-tou derivaci. Potom Taylorův polynom $T_{n,a}$ existuje a je to jediný polynom stupně nejvýše n takový, že

$$T_{n,a}^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) \text{ pro každé } k = 0, 1, \ldots, n.$$

Taylorův polynom

Definice (Taylorův polynom / *Taylor polynomial*):

Nechť reálná funkce reálné proměnné f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ konečnou n-tou derivaci. Polynom

$$T_{n,a}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

nazýváme n-**tým Taylorovým polynomem funkce** f **v bodě** a.

Věta:

Nechť reálná funkce reálné proměnné f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ konečnou n-tou derivaci. Potom Taylorův polynom $T_{n,a}$ existuje a je to jediný polynom stupně nejvýše n takový, že

$$T_{n,a}^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) \text{ pro každé } k = 0, 1, \dots, n.$$

Důkaz.

Existence i jednoznačnost plyne z úvah na předchozím slidu. □

Příklad: e^x

Exponenciála

Nalezněme n-tý Taylorův polynom funkce $f(x) = \mathrm{e}^x$ v bodě 0.

Příklad: e^x

Exponenciála

Nalezněme n-tý Taylorův polynom funkce $f(x) = \mathrm{e}^x$ v bodě 0.

Pro libovolné $k \in \mathbb{N}_0$ platí $f^{(k)}(x) = \mathrm{e}^x$ a proto $f^{(k)}(0) = 1$. Dostáváme

$$T_{n,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k.$$

Příklad: e^x

Exponenciála

Nalezněme n-tý Taylorův polynom funkce $f(x) = \mathrm{e}^x$ v bodě 0.

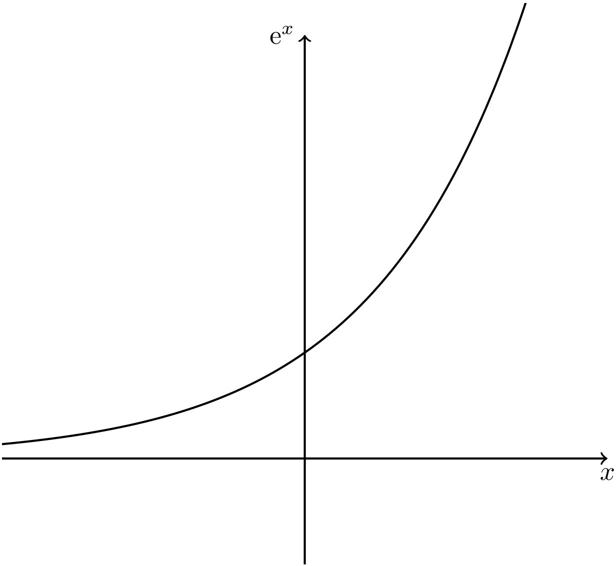
Pro libovolné $k \in \mathbb{N}_0$ platí $f^{(k)}(x) = \mathrm{e}^x$ a proto $f^{(k)}(0) = 1$. Dostáváme

$$T_{n,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k.$$

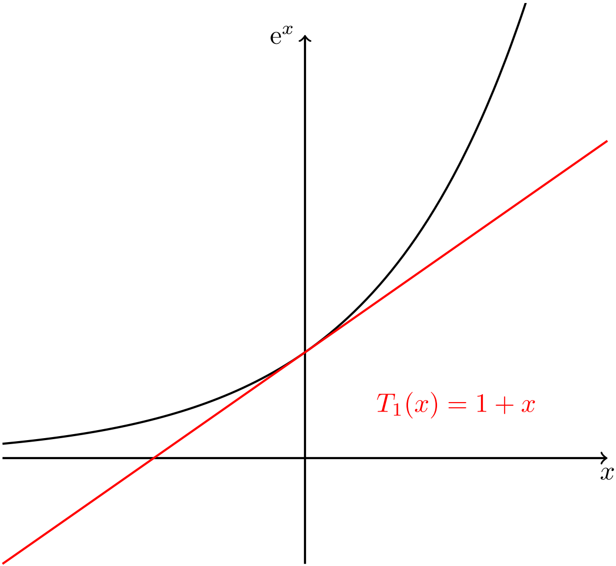
Poznámka (Značení):

Pokud $a = 0$, budeme pro jednoduchost místo $T_{n,0}$ psát pouze T_n.

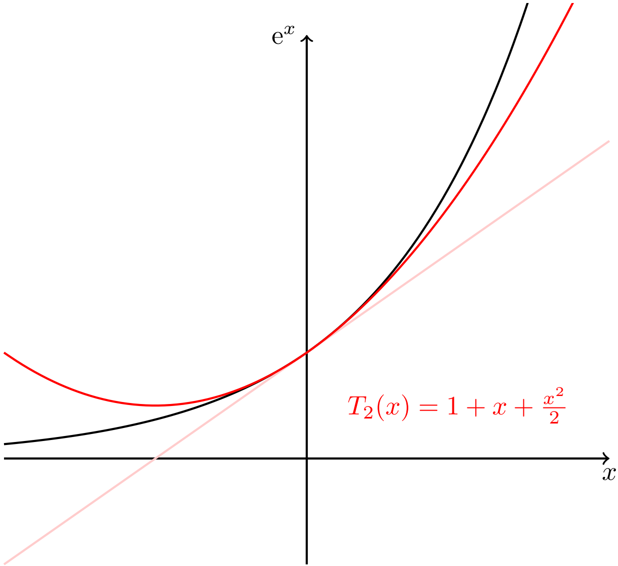
Příklad: e^x



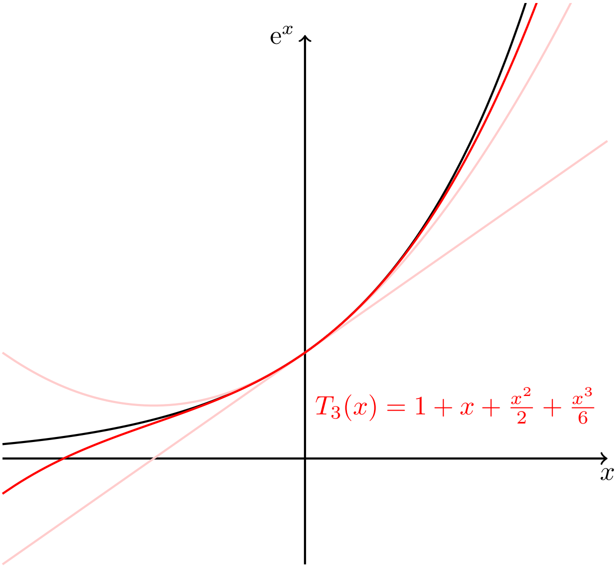
Příklad: e^x



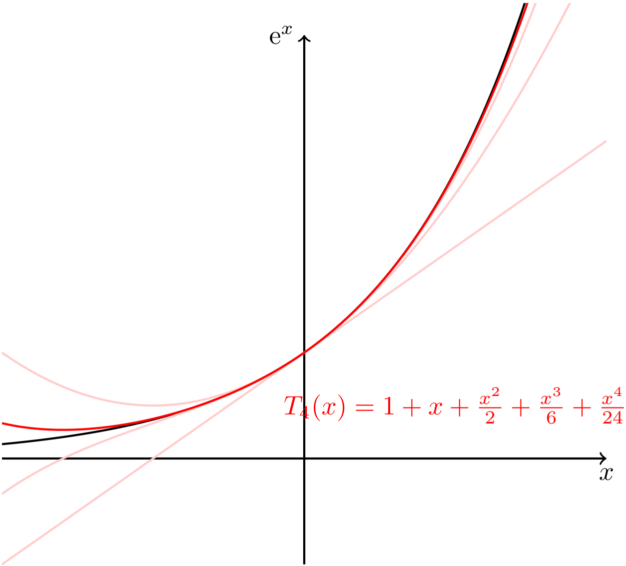
Příklad: e^x



Příklad: e^x



Příklad: e^x



Příklad: $\sin(x)$

Sinus

Nalezněme n-tý Taylorův polynom funkce $f(x) = \sin(x)$ v bodě 0.

Příklad: $\sin(x)$

Sinus

Nalezněme n-tý Taylorův polynom funkce $f(x) = \sin(x)$ v bodě 0.

Derivace funkce f se cyklicky opakují, v závislosti na $k \in \mathbb{N}_0$ platí

$$f^{(2k)}(x) = (-1)^k \sin(x) \quad \text{a} \quad f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \cos(x).$$

Proto

$$f^{(2k)}(0) = 0 \quad \text{a} \quad f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k.$$

Výsledkem pro $n = 2\ell$ nebo $n = 2\ell - 1$ platí

$$T_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j = \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

Příklad: $\sin(x)$

Sinus

Nalezněme n-tý Taylorův polynom funkce $f(x) = \sin(x)$ v bodě 0.

Derivace funkce f se cyklicky opakují, v závislosti na $k \in \mathbb{N}_0$ platí

$$f^{(2k)}(x) = (-1)^k \sin(x) \quad \text{a} \quad f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \cos(x).$$

Proto

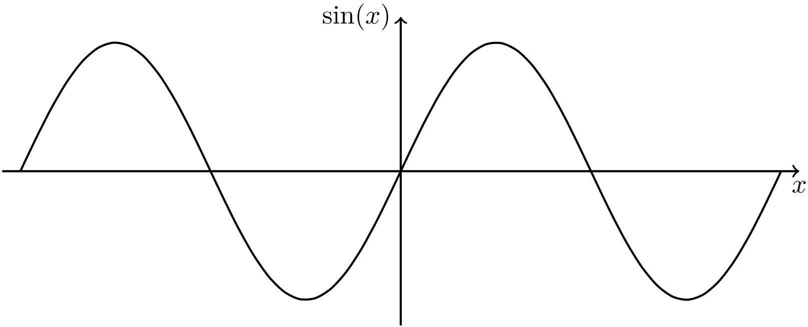
$$f^{(2k)}(0) = 0 \quad \text{a} \quad f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k.$$

Výsledkem pro $n = 2\ell$ nebo $n = 2\ell - 1$ platí

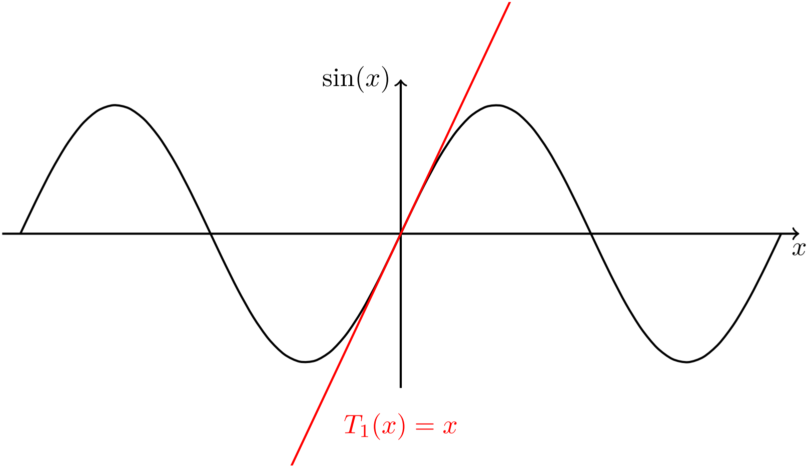
$$T_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j = \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

Speciálně tedy platí $T_{2n} = T_{2n-1}$, $n \in \mathbb{N}$ a ještě speciálněji třeba $T_{40} = T_{39}$.

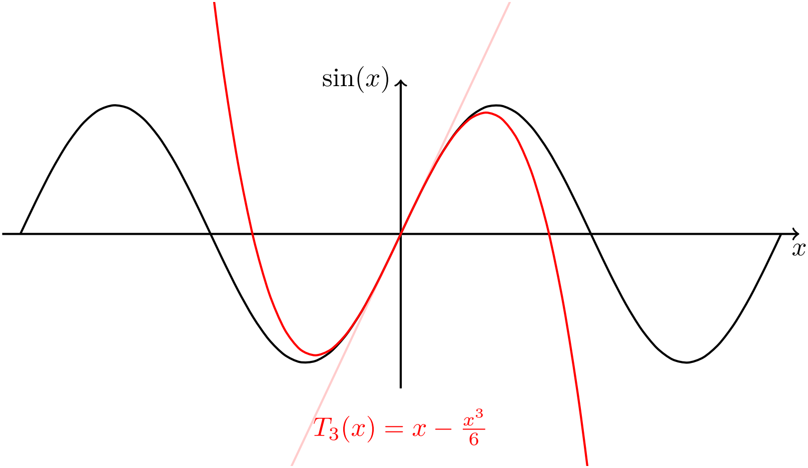
Příklad: $\sin(x)$



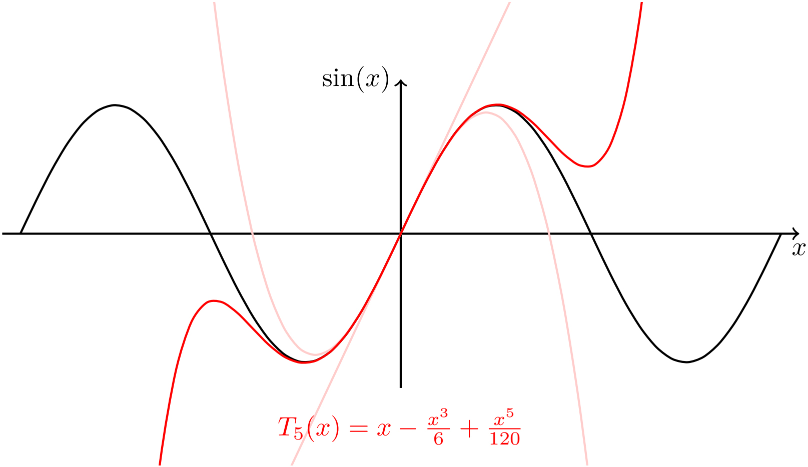
Příklad: $\sin(x)$



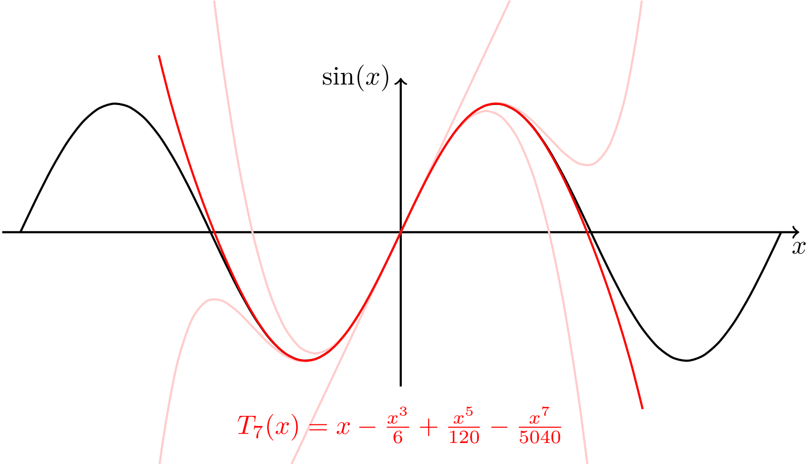
Příklad: $\sin(x)$



Příklad: $\sin(x)$



Příklad: $\sin(x)$



„Taylorův polynom je nejlepší aproximace“

Věta (O nejlepší aproximaci):

Nechť funkce f má na okolí bodu a spojitou n-tou derivaci a nechť Q je polynom stupně nejvýše n, různý od Taylorova polynomu $T_{n,a}$ funkce f v bodě a. Potom existuje okolí H_a bodu a takové, že

$$|f(x) - T_{n,a}(x)| < |f(x) - Q(x)| \quad \text{pro každé } x \in H_a \smallsetminus \{a\}.$$

„Taylorův polynom je nejlepší aproximace“

Věta (O nejlepší aproximaci):

Nechť funkce f má na okolí bodu a spojitou n-tou derivaci a nechť Q je polynom stupně nejvýše n, různý od Taylorova polynomu $T_{n,a}$ funkce f v bodě a. Potom existuje okolí H_a bodu a takové, že

$$|f(x) - T_{n,a}(x)| < |f(x) - Q(x)| \quad \text{pro každé } x \in H_a \smallsetminus \{a\}.$$

- Výraz $|f(x) - Q(x)|$ představuje absolutní velikost chyby pří aproximaci funkce f pomocí polynomu Q v bodě x.

„Taylorův polynom je nejlepší aproximace“

Věta (O nejlepší aproximaci):

Nechť funkce f má na okolí bodu a spojitou n-tou derivaci a nechť Q je polynom stupně nejvýše n, různý od Taylorova polynomu $T_{n,a}$ funkce f v bodě a. Potom existuje okolí H_a bodu a takové, že

$$|f(x) - T_{n,a}(x)| < |f(x) - Q(x)| \quad \text{pro každé } x \in H_a \setminus \{a\}.$$

- Výraz $|f(x) - Q(x)|$ představuje absolutní velikost chyby pří aproximaci funkce f pomocí polynomu Q v bodě x.
- Pokud $T_{n-1,a} \neq T_{n,a}$, pak pro jisté okolí H_a podle předchozí věty platí

$$|f(x) - T_{n,a}(x)| < |f(x) - T_{n-1,a}(x)| \quad \text{pro každé } x \in H_a \setminus \{a\}.$$

Tedy, každý další Taylorův polynom (pokud existuje a je různý od předchozího) aproximuje funkci f lépe než předchozí.

„Taylorův polynom je nejlepší aproximace“

Věta (O nejlepší aproximaci):

Nechť funkce f má na okolí bodu a spojitou n-tou derivaci a nechť Q je polynom stupně nejvýše n, různý od Taylorova polynomu $T_{n,a}$ funkce f v bodě a. Potom existuje okolí H_a bodu a takové, že

$$|f(x) - T_{n,a}(x)| < |f(x) - Q(x)| \quad \text{pro každé } x \in H_a \setminus \{a\}.$$

- Výraz $|f(x) - Q(x)|$ představuje absolutní velikost chyby pří aproximaci funkce f pomocí polynomu Q v bodě x.
- Pokud $T_{n-1,a} \neq T_{n,a}$, pak pro jisté okolí H_a podle předchozí věty platí

  $$|f(x) - T_{n,a}(x)| < |f(x) - T_{n-1,a}(x)| \quad \text{pro každé } x \in H_a \setminus \{a\}.$$

  Tedy, každý další Taylorův polynom (pokud existuje a je různý od předchozího) aproximuje funkci f lépe než předchozí.
- Důkazem věty se budeme zabývat na příští přednášce. Pojďme se nyní zabývat tím, pro které hodnoty x má vůbec smysl zvyšovat řád polynomu.

Hlavní body

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

1 Motivace

2 Aproximace funkcí pomocí polynomů

3 Taylorovy řady

$$\ln(x+1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$$

Taylorova řada

Definice (Taylorova řada / *Taylor series*):

Nechť reálná funkce reálné proměnné f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ konečné derivace všech řádů. Mocninnou řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

potom nazýváme **Taylorovou řadou funkce f v bodě** a.

Taylorova řada

Definice (Taylorova řada / *Taylor series*):

Nechť reálná funkce reálné proměnné f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ konečné derivace všech řádů. Mocninnou řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

potom nazýváme **Taylorovou řadou funkce f v bodě a**.

Poznámka:

Taylorova řada v bodě $a = 0$ se často nazývá Maclaurinova řada (*Maclaurin series*). Stejně tak mluvíme o Maclaurinovu polynomu.

Taylorova řada

Definice (Taylorova řada / *Taylor series*):

Nechť reálná funkce reálné proměnné f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ konečné derivace všech řádů. Mocninnou řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

potom nazýváme **Taylorovou řadou funkce f v bodě** a.

Poznámka:

Taylorova řada v bodě $a = 0$ se často nazývá Maclaurinova řada (*Maclaurin series*). Stejně tak mluvíme o Maclaurinovu polynomu.

- Taylorova řada funkce f definuje na oboru konvergence součtovou funkci.

Taylorova řada

Definice (Taylorova řada / *Taylor series*):

Nechť reálná funkce reálné proměnné f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ konečné derivace všech řádů. Mocninnou řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

potom nazýváme **Taylorovou řadou funkce f v bodě** a.

Poznámka:

Taylorova řada v bodě $a = 0$ se často nazývá Maclaurinova řada (*Maclaurin series*). Stejně tak mluvíme o Maclaurinovu polynomu.

- Taylorova řada funkce f definuje na oboru konvergence součtovou funkci.
- Obecně není jednoduché ukázat, že tou součtovou funkcí je právě funkce f.

Taylorova řada

Definice (Taylorova řada / *Taylor series*):

Nechť reálná funkce reálné proměnné f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ konečné derivace všech řádů. Mocninnou řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

potom nazýváme **Taylorovou řadou funkce f v bodě** a.

Poznámka:

Taylorova řada v bodě $a = 0$ se často nazývá Maclaurinova řada (*Maclaurin series*). Stejně tak mluvíme o Maclaurinovu polynomu.

- Taylorova řada funkce f definuje na oboru konvergence součtovou funkci.
- Obecně není jednoduché ukázat, že tou součtovou funkcí je právě funkce f.
- Je ale zřejmé, že nemá smysl aproximovat funkci f Taylorovým polynomem mimo obor konvergence příslušné Taylorovy řady.

Příklad: e^x

Příklad.

Nalezněte Taylorovu řadu funkce e^x v bodě 0 a její obor konvergence.

Příklad: e^x

Příklad.

Nalezněte Taylorovu řadu funkce e^x v bodě 0 a její obor konvergence.

- Stejným postupem jako u Taylorova polynomu získáme Taylorovu řadu ve tvaru

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\,.$$

Příklad: e^x

Příklad.
Nalezněte Taylorovu řadu funkce e^x v bodě 0 a její obor konvergence.

- Stejným postupem jako u Taylorova polynomu získáme Taylorovu řadu ve tvaru
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\,.$$
- Již víme, že tato řada absolutně konverguje na $\mathbb{R}$ a její součtovou funkcí je právě e^x (je tak definovaná).

Příklad: e^x

Příklad.
Nalezněte Taylorovu řadu funkce e^x v bodě 0 a její obor konvergence.

- Stejným postupem jako u Taylorova polynomu získáme Taylorovu řadu ve tvaru
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\,.$$
- Již víme, že tato řada absolutně konverguje na $\mathbb{R}$ a její součtovou funkcí je právě e^x (je tak definovaná).
- V tomto případě je tedy funkce e^x rovna součtu své Taylorovy řady (definitoricky).

Příklad: $\sin(x)$

Příklad.

Nalezněte Taylorovu řadu funkce $\sin(x)$ v bodě 0 a její obor konvergence.

Příklad: $\sin(x)$

Příklad.

Nalezněte Taylorovu řadu funkce $\sin(x)$ v bodě 0 a její obor konvergence.

- Stejným postupem jako u Taylorova polynomu dostaneme, že hledanou řadou je

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

Příklad: $\sin(x)$

Příklad.

Nalezněte Taylorovu řadu funkce $\sin(x)$ v bodě 0 a její obor konvergence.

- Stejným postupem jako u Taylorova polynomu dostaneme, že hledanou řadou je

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

- Využijeme toho, že poloměr konvergence řady

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} y^k$$

je $R = +\infty$ (ověřte!).

Příklad: $\sin(x)$

Příklad.

Nalezněte Taylorovu řadu funkce $\sin(x)$ v bodě 0 a její obor konvergence.

- Stejným postupem jako u Taylorova polynomu dostaneme, že hledanou řadou je

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

- Využijeme toho, že poloměr konvergence řady

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} y^k$$

je $R = +\infty$ (ověřte!). Původní řada tedy konverguje pro všechna x pro která $x^2 \in \mathbb{R}$, tedy pro $x \in \mathbb{R}$.

Příklad: $\sin(x)$

Příklad.

Nalezněte Taylorovu řadu funkce $\sin(x)$ v bodě 0 a její obor konvergence.

- Stejným postupem jako u Taylorova polynomu dostaneme, že hledanou řadou je
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$
- Využijeme toho, že poloměr konvergence řady
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} y^k$$
je $R = +\infty$ (ověřte!). Původní řada tedy konverguje pro všechna x pro která $x^2 \in \mathbb{R}$, tedy pro $x \in \mathbb{R}$.
- Na příští přednášce ukážeme, že tato řada konverguje k původní funkci $\sin(x)$.

Podobně máme následující dvojice funkce – Taylorova řada.

e^x	$=$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$	$x \in \mathbb{R}$
$\sin x$	$=$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$=$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$	$x \in \mathbb{R}$
$\ln(1+x)$	$=$	$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^{k}$	$x \in (-1, 1\rangle$
$\operatorname{arctg} x$	$=$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$	$x \in \langle -1, 1\rangle$

Rozvoj funkce do mocninné řady

Poznámka:

Umíme-li funkci f vyjádřit jako součet mocninné řady, tj.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k \quad \text{pro } x \in J \subset D_f \,,$$

mluvíme o **rozvoji funkce do mocninné řady** se středem v a.

Rozvoj funkce do mocninné řady

Poznámka:

Umíme-li funkci f vyjádřit jako součet mocninné řady, tj.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k \quad \text{pro } x \in J \subset D_f \,,$$

mluvíme o **rozvoji funkce do mocninné řady** se středem v a.

Jediným kandidátem pro rozvoj funkce je Taylorova řada této funkce (*plyne z toho, že mocninnou řadu lze derivovat člen po členu*).

Rozvoj funkce do mocninné řady

Poznámka:

Umíme-li funkci f vyjádřit jako součet mocninné řady, tj.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k \quad \text{pro } x \in J \subset D_f \,,$$

mluvíme o **rozvoji funkce do mocninné řady** se středem v a.

Jediným kandidátem pro rozvoj funkce je Taylorova řada této funkce (*plyne z toho, že mocninnou řadu lze derivovat člen po členu*).

Najdeme-li tedy vyjádření funkce f pomocí součtu mocninné řady se středem v a, je tato mocninná řada nutně Taylorovou řadou funkce f v bodě a.

Příklad

Příklad.

Nalezněte Taylorovu řadu funkce e^{-x^2} v bodě 0 a její obor konvergence.

Příklad

Příklad.

Nalezněte Taylorovu řadu funkce e^{-x^2} v bodě 0 a její obor konvergence.

Protože $\mathrm{e}^y = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} y^k$ pro $y \in \mathbb{R}$, musí pro $x \in \mathbb{R}$ platit, že

$$\mathrm{e}^{-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(-x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^{2k} \,.$$

Příklad

Příklad.

Nalezněte Taylorovu řadu funkce e^{-x^2} v bodě 0 a její obor konvergence.

Protože $\mathrm{e}^y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} y^k$ pro $y \in \mathbb{R}$, musí pro $x \in \mathbb{R}$ platit, že

$$\mathrm{e}^{-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (-x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^{2k} .$$

Nalezli jsme tak Taylorovu řadu e^{-x^2}. oborem konvergence jsou všechna reálná čísla.

Příklad

Příklad.

Nalezněte Taylorovu řadu funkce e^{-x^2} v bodě 0 a její obor konvergence.

Protože $\mathrm{e}^y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} y^k$ pro $y \in \mathbb{R}$, musí pro $x \in \mathbb{R}$ platit, že

$$\mathrm{e}^{-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(-x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^{2k}\,.$$

Nalezli jsme tak Taylorovu řadu e^{-x^2}. oborem konvergence jsou všechna reálná čísla.

Pro srovnání zkuste najít Taylorovu řadu této funkce z definice.

Hlavní body

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

4 Dodatek

$$\ln(x+1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$$

Komentář

- Zde studované polynomy jsou pojmenovány na počest angličana Brooka Taylora (1685 – 1731) a skota Colina Maclaurina (1698 – 1746).
- Dále existuje celá řada dalších typů aproximací. Přístup představený v této přednášce spočívá v lineárním kombinování monomů (x^k). Alternativně se používají aproximace pomocí Čebyševových polynomů.
- Dále existují tzv. Padého aproximace využívající lomených funkcí.