Matematická analýza 2

Taylorova věta

Pavel Hrabák[1], Tomáš Kalvoda[2], Ivo Petr[3]

[1]pavel.hrabak@fit.cvut.cz, [2]tomas.kalvoda@fit.cvut.cz, [3]ivo.petr@fit.cvut.cz

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze

5. března 2025
ZS 2024/2025

Hlavní body

$$\left|f(x) - T_{n,a}(x)\right|$$

1. Úvod
2. Chyba aproximace
3. Taylorova věta a její aplikace

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n$$

Hlavní výsledky této přednášky

- Zbytek po Taylorově polynomu a odhad chyby aproximace pomocí Taylorova polynomu.

- Taylorova věta a její mnohostranné použití.

Hlavní body

1 Úvod

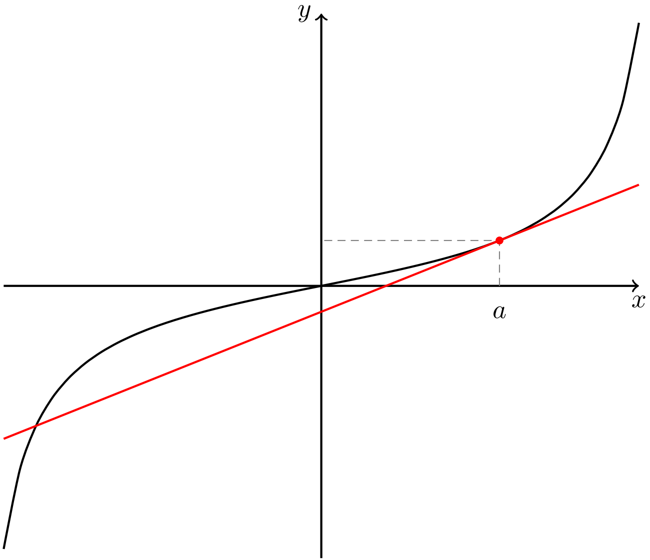
2 Chyba aproximace

3 Taylorova věta a její aplikace

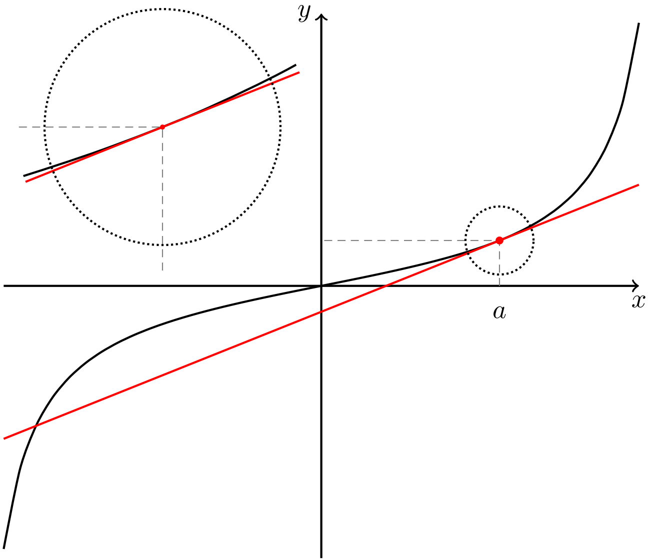
$$\left| f(x) - T_{n,a}(x) \right|$$

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n$$

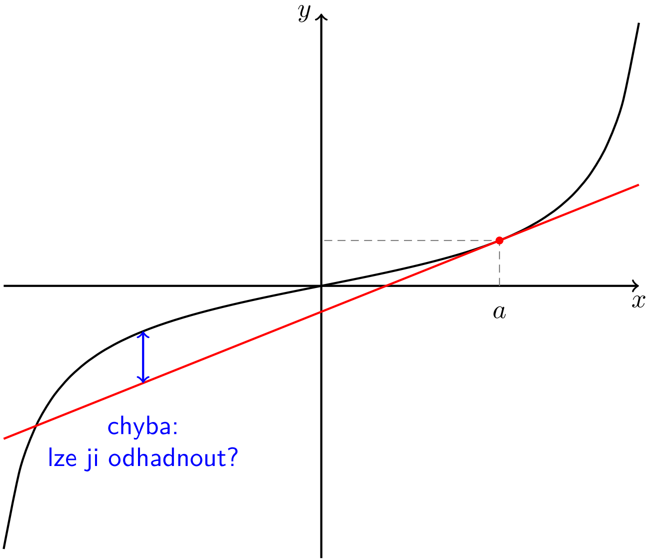
Aproximace funkce pomocí $T_{1,a}(x)$



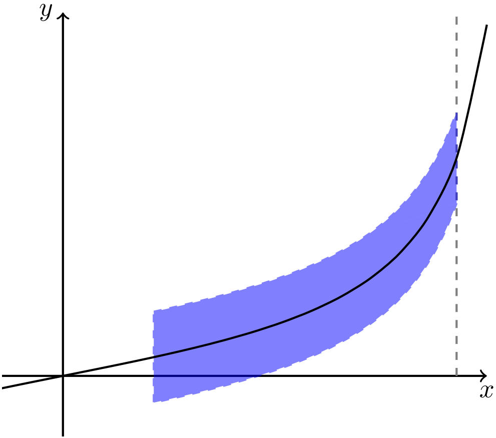
Aproximace funkce pomocí $T_{1,a}(x)$



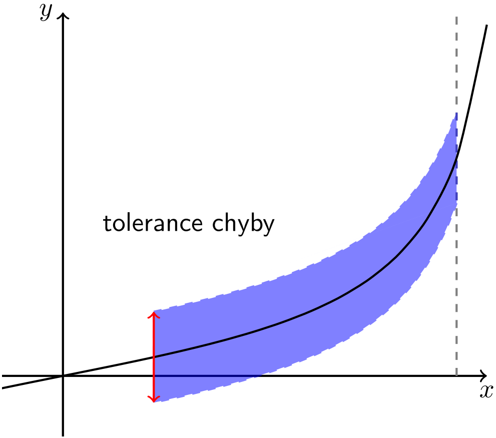
Aproximace funkce pomocí $T_{1,a}(x)$



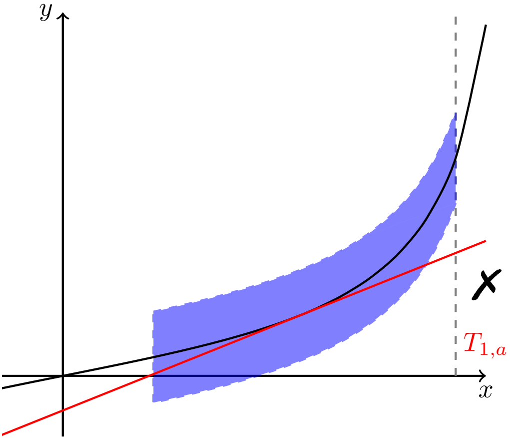
Aproximace na intervalu



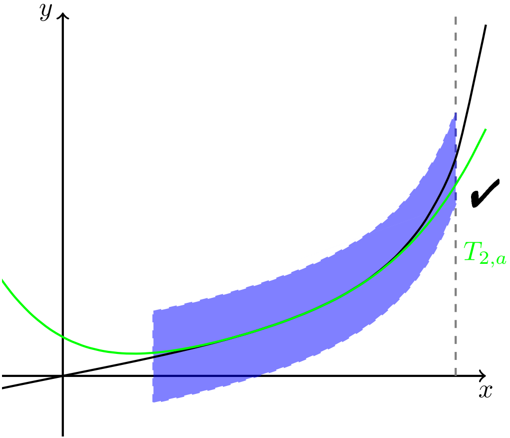
Aproximace na intervalu



Aproximace na intervalu



Aproximace na intervalu



Hlavní body

1. Úvod
2. Chyba aproximace
3. Taylorova věta a její aplikace

$$\left|f(x) - T_{n,a}(x)\right|$$

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n$$

Zbytek v Taylorově vzorci

Definice:

Nechť funkce f má v bodě a konečnou n-tou derivaci. Pro všechna přípustná x položme $R_{n,a}(x) := f(x) - T_{n,a}(x)$. Potom vztah

$$f(x) = T_{n,a}(x) + R_{n,a}(x)$$

nazýváme **Taylorovým vzorcem** a $R_{n,a}$ nazýváme n-**tým zbytkem** v Taylorově vzorci.

Zbytek v Taylorově vzorci

Definice:

Nechť funkce f má v bodě a konečnou n-tou derivaci. Pro všechna přípustná x položme $R_{n,a}(x) := f(x) - T_{n,a}(x)$. Potom vztah

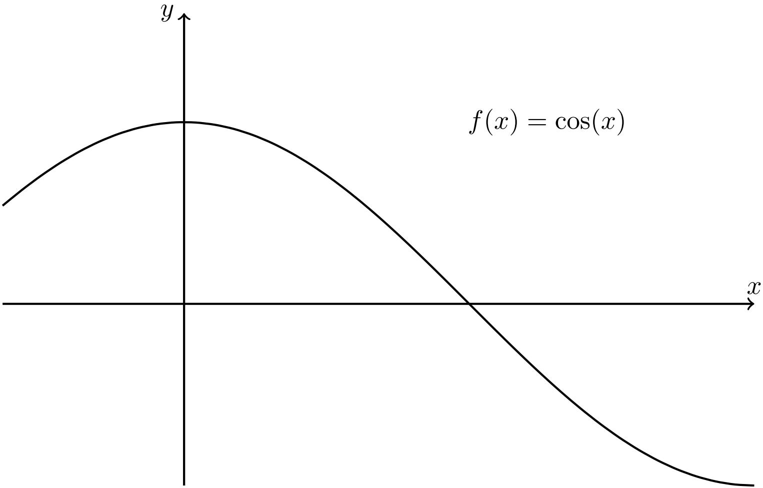
$$f(x) = T_{n,a}(x) + R_{n,a}(x)$$

nazýváme **Taylorovým vzorcem** a $R_{n,a}$ nazýváme n-**tým zbytkem** v Taylorově vzorci.

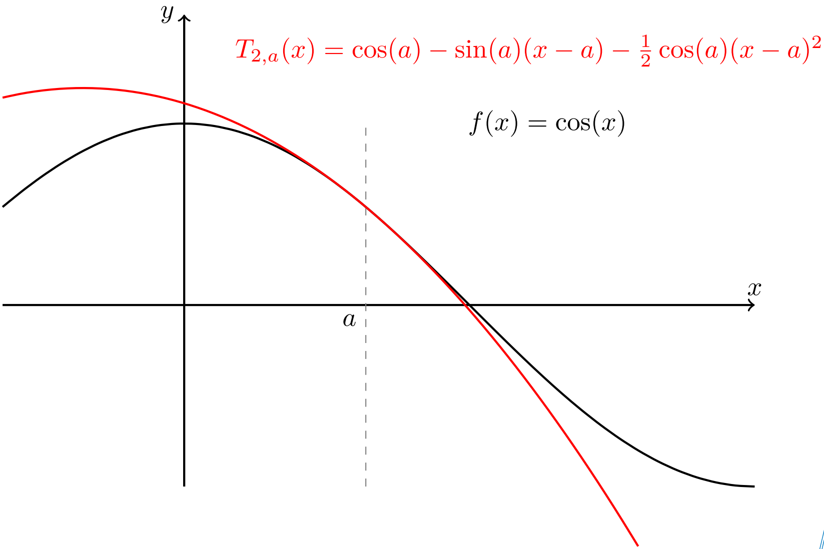
Poznámka (Značení):

V případě, že mluvíme o Taylorově polynomu v bodě $a = 0$ píšeme pro jednoduchost T_n místo $T_{n,0}$. Podobně v případě zbytku $R_n = R_{n,0}$.

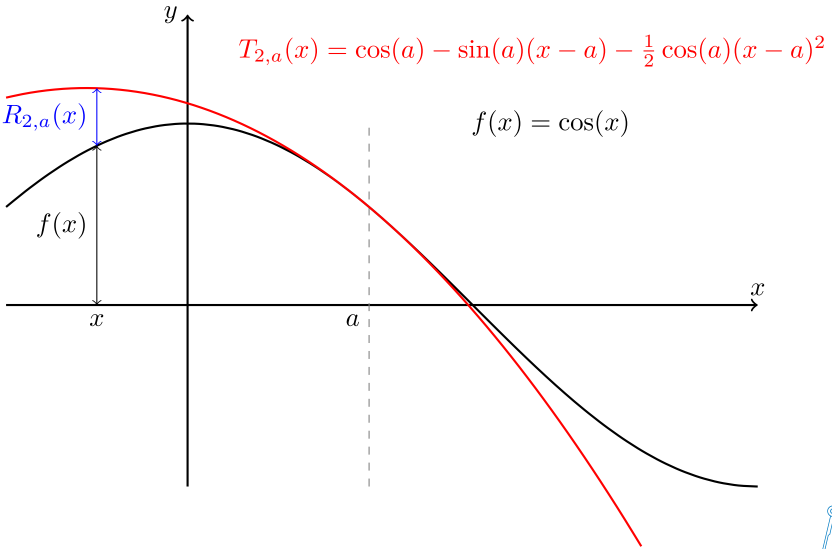
Zbytek v Taylorově vzorci



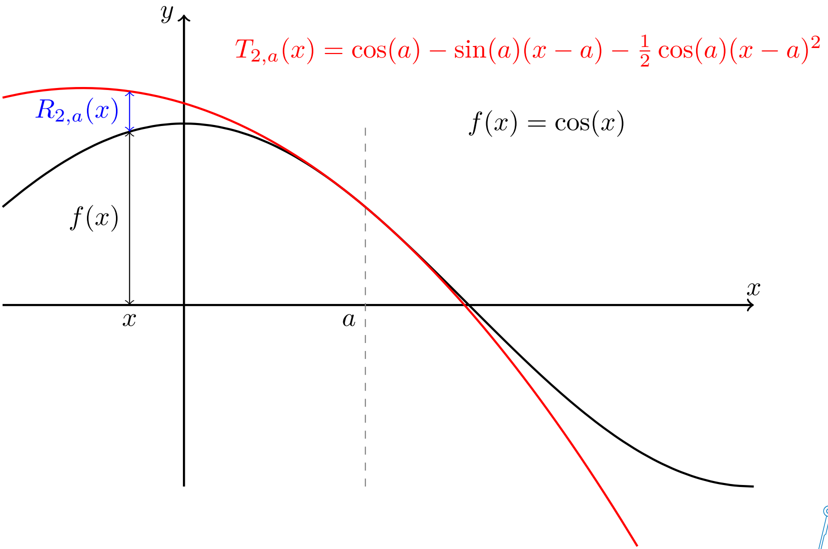
Zbytek v Taylorově vzorci



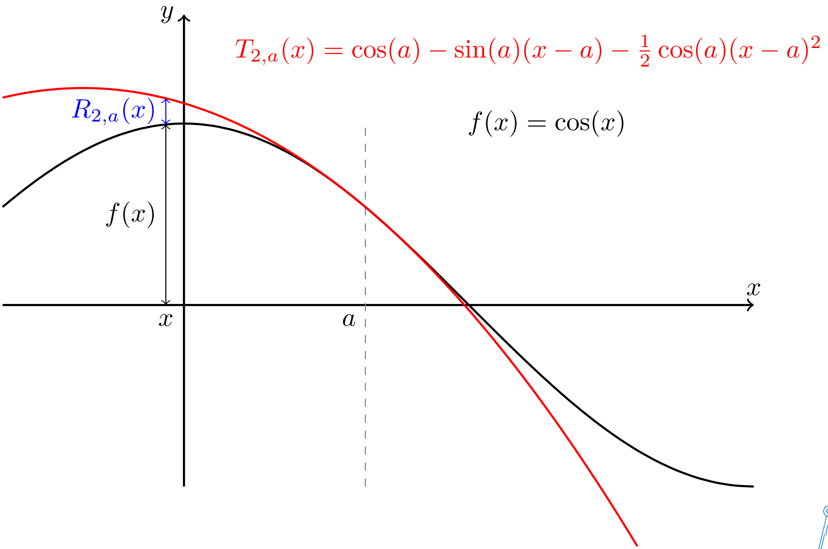
Zbytek v Taylorově vzorci



Zbytek v Taylorově vzorci



Zbytek v Taylorově vzorci



Chování zbytku

Věta:

Nechť funkce f má v jistém okolí U_a bodu a spojitou n-tou derivaci. Pak pro zbytek v Taylorově vzorci platí

$$\lim_{x \to a} \frac{R_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Chování zbytku

Věta:

Nechť funkce f má v jistém okolí U_a bodu a spojitou n-tou derivaci. Pak pro zbytek v Taylorově vzorci platí

$$\lim_{x \to a} \frac{R_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Důkaz.

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $a = 0$. Z definice zbytku a vlastností Taylorova polynomu plyne

$$R_n(0) = R_n'(0) = \cdots = R_n^{(n-1)}(0) = R_n^{(n)}(0) = 0.$$

Chování zbytku

Věta:

Nechť funkce f má v jistém okolí U_a bodu a spojitou n-tou derivaci. Pak pro zbytek v Taylorově vzorci platí

$$\lim_{x\to a} \frac{R_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Důkaz.

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $a = 0$. Z definice zbytku a vlastností Taylorova polynomu plyne

$$R_n(0) = R_n'(0) = \cdots = R_n^{(n-1)}(0) = R_n^{(n)}(0) = 0.$$

Pro výpočet limity lze použít l'Hospitalovo pravidlo (zdůvodněte proč!). Potom

$$\lim_{x\to 0} \frac{R_n(x)}{x^n} = \lim_{x\to 0} \frac{R_n'(x)}{nx^{n-1}} = \cdots = \lim_{x\to 0} \frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n!\cdot x} = \lim_{x\to 0} \frac{R_n^{(n)}(x)}{n!} = 0. \qquad \square$$

Chování zbytku

Poznámka:

Předchozí věta implikuje, že

$$R_{n,a}(x) = o\big((x-a)^n\big) \quad \text{pro} \quad x \to a\,.$$

Chování zbytku

Poznámka:

Předchozí věta implikuje, že

$$R_{n,a}(x) = o\big((x-a)^n\big) \quad \text{pro} \quad x \to a\,.$$

Taylorův vzorec pak lze přepsat jako

$$f(x) = T_{n,a}(x) + o\big((x-a)^n\big) \quad \text{pro} \quad x \to a\,.$$

případně explicitně $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\big((x-a)^n\big)$ pro $x \to a$.

Chování zbytku

Poznámka:

Předchozí věta implikuje, že

$$R_{n,a}(x) = o\big((x-a)^n\big) \quad \text{pro} \quad x \to a\,.$$

Taylorův vzorec pak lze přepsat jako

$$f(x) = T_{n,a}(x) + o\big((x-a)^n\big) \quad \text{pro} \quad x \to a\,.$$

případně explicitně $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\big((x-a)^n\big)$ pro $x \to a$.

Příklad.

Pro $x \to 0$ a $\alpha \neq 0$ tak např. dostáváme

$$\mathrm{e}^{\alpha x} = 1 + \alpha x + o(x)\,, \qquad \sin(x) = x + o(x^2)\,,$$

$$\mathrm{e}^{\alpha x} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha^2}{2}x^2 + o(x^2)\,, \qquad \sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)\,.$$

Důkaz věty o nejlepší aproximaci

Poznámka (Připomenutí tvrzení věty):

Chceme ukázat, že pro libovolný polynom Q stupně nejvýše n různý od $T_{n,a}$ existuje okolí U_a takové, že $|f(x) - T_{n,a}(x)| < |f(x) - Q(x)|$ pro $x \in U_a \smallsetminus \{a\}$.

Důkaz věty o nejlepší aproximaci

Poznámka (Připomenutí tvrzení věty):

Chceme ukázat, že pro libovolný polynom Q stupně nejvýše n různý od $T_{n,a}$ existuje okolí U_a takové, že $|f(x) - T_{n,a}(x)| < |f(x) - Q(x)|$ pro $x \in U_a \setminus \{a\}$.

Důkaz věty o nejlepší aproximaci (1/2)

BÚNO uvažujme $a = 0$. Označme pro jednoduchost koeficienty polynomů

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k\,, \quad Q(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k\,.$$

Důkaz věty o nejlepší aproximaci

Poznámka (Připomenutí tvrzení věty):

Chceme ukázat, že pro libovolný polynom Q stupně nejvýše n různý od $T_{n,a}$ existuje okolí U_a takové, že $|f(x) - T_{n,a}(x)| < |f(x) - Q(x)|$ pro $x \in U_a \setminus \{a\}$.

Důkaz věty o nejlepší aproximaci (1/2)

BÚNO uvažujme $a = 0$. Označme pro jednoduchost koeficienty polynomů

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \,, \quad Q(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k \,.$$

Polynomy jsou různé, jistě tedy existuje $i \leq n$ takové, že $a_i \neq b_i$. Uvažujme dále nejmenší takové i.

Důkaz věty o nejlepší aproximaci

Poznámka (Připomenutí tvrzení věty):

Chceme ukázat, že pro libovolný polynom Q stupně nejvýše n různý od $T_{n,a}$ existuje okolí U_a takové, že $|f(x) - T_{n,a}(x)| < |f(x) - Q(x)|$ pro $x \in U_a \setminus \{a\}$.

Důkaz věty o nejlepší aproximaci (1/2)

BÚNO uvažujme $a = 0$. Označme pro jednoduchost koeficienty polynomů

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k , \quad Q(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k .$$

Polynomy jsou různé, jistě tedy existuje $i \leq n$ takové, že $a_i \neq b_i$. Uvažujme dále nejmenší takové i. Potom

$$f(x) - Q(x) = T_n(x) + R_n(x) - Q(x) = \sum_{k=i}^{n} (a_k - b_k) x^k + R_n(x) .$$

Důkaz věty o nejlepší aproximaci (2/2).

Potom pro $x \to 0$ dostaneme použitím předchozí věty (Rozmyslete!)

$$\left|\frac{f(x)-Q(x)}{x^i}\right| = \left|(a_i - b_i) + \sum_{k=i+1}^{n} (a_k - b_k)x^{k-i} + \frac{R_n(x)}{x^i}\right|$$

$$\xrightarrow{x\to 0} |a_i - b_i + 0 - 0| = |a_i - b_i| > 0\,.$$

Důkaz věty o nejlepší aproximaci (2/2).

Potom pro $x \to 0$ dostaneme použitím předchozí věty (Rozmyslete!)

$$\left|\frac{f(x) - Q(x)}{x^i}\right| = \left|(a_i - b_i) + \sum_{k=i+1}^{n} (a_k - b_k)x^{k-i} + \frac{R_n(x)}{x^i}\right|$$

$$\xrightarrow{x \to 0} |a_i - b_i + 0 - 0| = |a_i - b_i| > 0\,.$$

Předchozí věta ale také implikuje (Rozmyslete!)

$$\lim_{x \to 0}\left|\frac{f(x) - T_n(x)}{x^i}\right| = \lim_{x \to 0}\left|\frac{R_n(x)}{x^i}\right| = 0$$

Důkaz věty o nejlepší aproximaci (2/2).

Potom pro $x \to 0$ dostaneme použitím předchozí věty (Rozmyslete!)

$$\left|\frac{f(x) - Q(x)}{x^i}\right| = \left|(a_i - b_i) + \sum_{k=i+1}^{n} (a_k - b_k)x^{k-i} + \frac{R_n(x)}{x^i}\right|$$

$$\xrightarrow{x\to 0} |a_i - b_i + 0 - 0| = |a_i - b_i| > 0\,.$$

Předchozí věta ale také implikuje (Rozmyslete!)

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x) - T_n(x)}{x^i}\right| = \lim_{x\to 0}\left|\frac{R_n(x)}{x^i}\right| = 0 < \lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x) - Q(x)}{x^i}\right|\,.$$

Důkaz věty o nejlepší aproximaci (2/2).

Potom pro $x \to 0$ dostaneme použitím předchozí věty (Rozmyslete!)

$$\left|\frac{f(x)-Q(x)}{x^i}\right| = \left|(a_i-b_i) + \sum_{k=i+1}^{n}(a_k-b_k)x^{k-i} + \frac{R_n(x)}{x^i}\right|$$
$$\xrightarrow{x\to 0} |a_i-b_i+0-0| = |a_i-b_i| > 0\,.$$

Předchozí věta ale také implikuje (Rozmyslete!)

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)-T_n(x)}{x^i}\right| = \lim_{x\to 0}\left|\frac{R_n(x)}{x^i}\right| = 0 < \lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)-Q(x)}{x^i}\right|\,.$$

Musí tedy existovat okolí U_0 takové, že pro $x \in U_0 \setminus \{0\}$ platí

$$\left|\frac{f(x)-Q(x)}{x^i}\right| > \left|\frac{f(x)-T_n(x)}{x^i}\right| \implies |f(x)-Q(x)| > |f(x)-T_n(x)|. \qquad \square$$

Důkaz věty o nejlepší aproximaci (2/2).

Potom pro $x \to 0$ dostaneme použitím předchozí věty (Rozmyslete!)

$$\left|\frac{f(x)-Q(x)}{x^i}\right| = \left|(a_i-b_i) + \sum_{k=i+1}^{n}(a_k-b_k)x^{k-i} + \frac{R_n(x)}{x^i}\right|$$

$$\xrightarrow{x\to 0} |a_i-b_i+0-0| = |a_i-b_i| > 0\,.$$

Předchozí věta ale také implikuje (Rozmyslete!)

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)-T_n(x)}{x^i}\right| = \lim_{x\to 0}\left|\frac{R_n(x)}{x^i}\right| = 0 < \lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)-Q(x)}{x^i}\right|\,.$$

Musí tedy existovat okolí U_0 takové, že pro $x \in U_0 \smallsetminus \{0\}$ platí

$$\left|\frac{f(x)-Q(x)}{x^i}\right| > \left|\frac{f(x)-T_n(x)}{x^i}\right| \implies |f(x)-Q(x)| > |f(x)-T_n(x)|. \qquad \square$$

Předchozí věty nám říkají, že v blízkosti bodu a se Taylorův polynom $T_{n,a}$ a zbytek $R_{n,a}$ chovají „hezky“.

Důkaz věty o nejlepší aproximaci (2/2).

Potom pro $x \to 0$ dostaneme použitím předchozí věty (Rozmyslete!)

$$\left|\frac{f(x)-Q(x)}{x^i}\right| = \left|(a_i - b_i) + \sum_{k=i+1}^{n} (a_k - b_k)x^{k-i} + \frac{R_n(x)}{x^i}\right|$$

$$\xrightarrow{x\to 0} |a_i - b_i + 0 - 0| = |a_i - b_i| > 0\,.$$

Předchozí věta ale také implikuje (Rozmyslete!)

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)-T_n(x)}{x^i}\right| = \lim_{x\to 0}\left|\frac{R_n(x)}{x^i}\right| = 0 < \lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)-Q(x)}{x^i}\right|\,.$$

Musí tedy existovat okolí U_0 takové, že pro $x \in U_0 \setminus \{0\}$ platí

$$\left|\frac{f(x)-Q(x)}{x^i}\right| > \left|\frac{f(x)-T_n(x)}{x^i}\right| \implies |f(x)-Q(x)| > |f(x)-T_n(x)|. \qquad \square$$

Předchozí věty nám říkají, že v blízkosti bodu a se Taylorův polynom $T_{n,a}$ a zbytek $R_{n,a}$ chovají „hezky“.

Nás ale typicky zajímá chování pro konkrétní $x \in \mathbb{R}$ a co se bude dít, když $n \to \infty$.

Hlavní body

$$\left|f(x) - T_{n,a}(x)\right|$$

1 Úvod

2 Chyba aproximace

3 Taylorova věta a její aplikace

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n$$

Taylorova věta o Lagrangeově tvaru zbytku

Věta (Taylorova):

Nechť existuje okolí U_a bodu a takové, že funkce f v něm má konečnou $(n+1)$-ní derivaci. Pak zbytek v Taylorově vzorci $f(x) = T_{n,a}(x) + R_{n,a}(x)$ lze pro každé $x \in U_a$ zapsat ve tvaru

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

kde číslo ξ závisí na x a n a leží uvnitř intervalu s krajními body x a a. Tento tvar zbytku nazýváme **Lagrangeův**.

Taylorova věta o Lagrangeově tvaru zbytku

Věta (Taylorova):

Nechť existuje okolí U_a bodu a takové, že funkce f v něm má konečnou $(n+1)$-ní derivaci. Pak zbytek v Taylorově vzorci $f(x) = T_{n,a}(x) + R_{n,a}(x)$ lze pro každé $x \in U_a$ zapsat ve tvaru

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

kde číslo ξ závisí na x a n a leží uvnitř intervalu s krajními body x a a. Tento tvar zbytku nazýváme **Lagrangeův**.

Poznámka:

- Tato Věta nám dává velmi důležitou informaci o zbytku v Taylorově vzorci. Umožňuje **odhadovat** chybu aproximace původní funkce jejím Taylorovým polynomem.
- Hodnota ξ závisí na x a n, je ji proto třeba chápat ve smyslu $\xi_{x,n}$.

Příklad: Přibližný výpočet

Příklad.

Určete, jaké chyby se dopustíme, když pro výpočet čísla $\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}}$ použijeme hodnotu Taylorova polynomu funkce e^x třetího stupně v bodě 0 vyhodnoceného v bodě $x = \frac{1}{2}$,

$$T_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3.$$

Dosazením dostaneme funkční hodnotu Taylorova polynomu v $x = \frac{1}{2}$:

$$T_3\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{79}{48} = 1.6458\overline{3}.$$

Toto číslo nám samo o sobě nic neříká. Je nutné odhadnout chybu.

Příklad: Přibližný výpočet, pokračování

Podle **Taylorovy věty** platí ($f(x) = e^x$) rovnost

$$\sqrt{e} = T_3\left(\frac{1}{2}\right) + R_3\left(\frac{1}{2}\right),$$

kde zbytek je tvaru

$$R_3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^\xi}{4!}\left(\frac{1}{2}\right)^4.$$

O čísle ξ pouze víme, že leží v intervalu $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Navíc umíme odhadnout velikost čísla e, platí nerovnost $e < 4$ (zdůvodněte!).

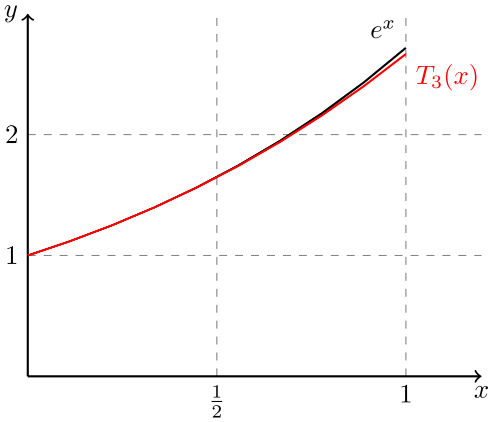
Celkem tedy

$$0 < R_3\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{4^{1/2}}{4!}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{192} = 0.005208\overline{3}.$$

Příklad: Přibližný výpočet, pokračování

Závěr

Číslo $\sqrt{e}$ leží v intervalu $\left(1.6458\overline{3},\ 1.651041\overline{6}\right)$.



Jak je to tedy s tím sinem 37°?

Jak je to tedy s tím sinem $37°$?

- Již víme že, pro funkci $f(x) = \sin(x)$, $n \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$ platí

$$T_{2n-1}(x) = T_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1} .$$

Jak je to tedy s tím sinem $37°$?

- Již víme že, pro funkci $f(x) = \sin(x)$, $n \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$ platí

$$T_{2n-1}(x) = T_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1} \,.$$

- Díky Taylorově větě víme, zbytek lze vyjádřit v Lagrangeově tvaru

$$R_{2n-1}(x) = R_{2n}(x) = \frac{f^{(2n+1)}(\xi_{n,x})}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \frac{(-1)^n \cos(\xi_{n,x})}{(2n+1)!} x^{2n+1} \,,$$

kde $\xi_{n,x}$ je nějaké číslo mezi 0 a x.

Jak je to tedy s tím sinem $37°$?

- Již víme že, pro funkci $f(x) = \sin(x)$, $n \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$ platí

$$T_{2n-1}(x) = T_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1}\,.$$

- Díky Taylorově větě víme, zbytek lze vyjádřit v Lagrangeově tvaru

$$R_{2n-1}(x) = R_{2n}(x) = \frac{f^{(2n+1)}(\xi_{n,x})}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \frac{(-1)^n \cos(\xi_{n,x})}{(2n+1)!} x^{2n+1}\,,$$

kde $\xi_{n,x}$ je nějaké číslo mezi 0 a x.

- Chybu aproximace $\sin(x)$ polynomem $T_{2n-1}(x)$ lze odhadnout jako

$$|\sin(x) - T_{2n-1}(x)| = |R_{2n-1}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Jak je to tedy s tím sinem $37°$?

- Již víme že, pro funkci $f(x) = \sin(x)$, $n \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$ platí

$$T_{2n-1}(x) = T_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1}\,.$$

- Díky Taylorově větě víme, zbytek lze vyjádřit v Lagrangeově tvaru

$$R_{2n-1}(x) = R_{2n}(x) = \frac{f^{(2n+1)}(\xi_{n,x})}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \frac{(-1)^n \cos(\xi_{n,x})}{(2n+1)!} x^{2n+1}\,,$$

kde $\xi_{n,x}$ je nějaké číslo mezi 0 a x.
- Chybu aproximace $\sin(x)$ polynomem $T_{2n-1}(x)$ lze odhadnout jako

$$|\sin(x) - T_{2n-1}(x)| = |R_{2n-1}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

- Pomocí podílového kritéria tak snadno ukážeme, že pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\lim_{n\to\infty} |R_{2n-1}(x)| = 0$$

Jak je to tedy s tím sinem $37°$?

- Již víme že, pro funkci $f(x) = \sin(x)$, $n \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$ platí

$$T_{2n-1}(x) = T_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1}.$$

- Díky Taylorově větě víme, zbytek lze vyjádřit v Lagrangeově tvaru

$$R_{2n-1}(x) = R_{2n}(x) = \frac{f^{(2n+1)}(\xi_{n,x})}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \frac{(-1)^n \cos(\xi_{n,x})}{(2n+1)!} x^{2n+1},$$

kde $\xi_{n,x}$ je nějaké číslo mezi 0 a x.

- Chybu aproximace $\sin(x)$ polynomem $T_{2n-1}(x)$ lze odhadnout jako

$$|\sin(x) - T_{2n-1}(x)| = |R_{2n-1}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

- Pomocí podílového kritéria tak snadno ukážeme, že pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\lim_{n\to\infty} |R_{2n-1}(x)| = 0 \implies T_n(x) \to \sin(x) \text{ pro } n \to \infty.$$

Jak je to tedy s tím sinem 37°?

- Převedeme stupně na radiány, tj. $x = \frac{37}{180}\pi \doteq 0.645772$.

Jak je to tedy s tím sinem 37°?

- Převedeme stupně na radiány, tj. $x = \frac{37}{180}\pi \doteq 0.645772$.
- Při aproximaci $\sin(37^\circ)$ pomocí $(2n-1)$-tého Taylorova polynomu se dopustíme chyby nejvýše:

$$\left| R_{2n-1}\left(\frac{37\pi}{180}\right)\right| \leq \frac{1}{(2n+1)!}\left(\frac{37\pi}{180}\right)^{2n+1}.$$

Jak je to tedy s tím sinem $37°$?

- Převedeme stupně na radiány, tj. $x = \frac{37}{180}\pi \doteq 0.645772$.
- Při aproximaci $\sin(37°)$ pomocí $(2n-1)$-tého Taylorova polynomu se dopustíme chyby nejvýše:

$$\left| R_{2n-1}\left(\frac{37\pi}{180}\right) \right| \leq \frac{1}{(2n+1)!} \left(\frac{37\pi}{180}\right)^{2n+1} .$$

Aproximace $\sin(37°)$ Taylorovým polynomem

n	$T_n(37°)$	odhad $R_n(37°)$	$T_n(x)$
1	0.64577 18232 37902	0.04488 34285 74738	x
3	0.60088 83946 63164	0.00093 58671 69238	$x - \frac{x^3}{3!}$
5	0.60182 42618 32402	0.00000 92922 97490	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$
7	0.60181 49695 34912	0.00000 00538 20632	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$
9	0.60181 50233 55543	0.00000 00002 04040	$x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^9}{9!}$
11	0.60181 50231 51504	0.00000 00000 00545	$x - \frac{x^3}{3!} + \cdots - \frac{x^{11}}{11!}$
13	0.60181 50231 52049	0.00000 00000 00001	$x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{13}}{13!}$
∞	0.60181 50231 52048	0.0	$\sin(x)$

Typické problémy řešené pomocí Taylorovy věty

Příklad (Chyba na intervalu).

Odhadněte chybu, které se dopustíme při aproximaci funkce $\sin(x)$ jejím 3. Taylorovým polynomem na intervalu $\left\langle -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right\rangle$.

Typické problémy řešené pomocí Taylorovy věty

Příklad (Chyba na intervalu).

Odhadněte chybu, které se dopustíme při aproximaci funkce $\sin(x)$ jejím 3. Taylorovým polynomem na intervalu $\left\langle -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right\rangle$.

Z předchozího víme, že

$$|R_3(x)| = |R_4(x)| = \frac{|\cos(\xi)|}{5!} |x|^5 \,.$$

Typické problémy řešené pomocí Taylorovy věty

Příklad (Chyba na intervalu).

Odhadněte chybu, které se dopustíme při aproximaci funkce $\sin(x)$ jejím 3. Taylorovým polynomem na intervalu $\left\langle -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right\rangle$.

Z předchozího víme, že

$$|R_3(x)| = |R_4(x)| = \frac{|\cos(\xi)|}{5!}|x|^5 .$$

Odhadneme-li $|\cos(\xi)| \leq 1$ (pro ξ mezi 0 a x lepší odhad není), dostaneme pro $x \in \left\langle -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right\rangle$

$$|R_3(x)| \leq \frac{|x|^5}{5!} \leq \frac{(\pi/4)^5}{5!} \doteq 0.0025 .$$

Typické problémy řešené pomocí Taylorovy věty

Příklad (Interval, kde je chyba v toleranci).

Pro která $x \in \mathbb{R}$ je chyba aproximace $\sin(x)$ jejím $3.$ Taylorovým polynomem nejvýše 10^{-3}.

Typické problémy řešené pomocí Taylorovy věty

Příklad (Interval, kde je chyba v toleranci).

Pro která $x \in \mathbb{R}$ je chyba aproximace $\sin(x)$ jejím 3. Taylorovým polynomem nejvýše 10^{-3}.

$$|R_3(x)| \leq \frac{|x|^5}{5!} \overset{\text{chci}}{\leq} 10^{-3}\,.$$

Typické problémy řešené pomocí Taylorovy věty

Příklad (Interval, kde je chyba v toleranci).

Pro která $x \in \mathbb{R}$ je chyba aproximace $\sin(x)$ jejím 3. Taylorovým polynomem nejvýše 10^{-3}.

$$|R_3(x)| \leq \frac{|x|^5}{5!} \overset{\text{chci}}{\leq} 10^{-3}\,.$$

$$|x| \leq \sqrt[5]{\frac{5!}{10^3}} \doteq 0.6544\,.$$

Typické problémy řešené pomocí Taylorovy věty

Příklad (Stupeň polynomu, aby chyba na intervalu byla v toleranci).

Pro jaké $n \in \mathbb{N}$ je chyba aproximace $\sin(x)$ jejím n-tým Taylorovým polynomem na intervalu $\left\langle -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right\rangle$ nejvýše 10^{-3}.

Typické problémy řešené pomocí Taylorovy věty

Příklad (Stupeň polynomu, aby chyba na intervalu byla v toleranci).

Pro jaké $n \in \mathbb{N}$ je chyba aproximace $\sin(x)$ jejím n-tým Taylorovým polynomem na intervalu $\left\langle -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right\rangle$ nejvýše 10^{-3}.

$$|R_{2n-1}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \leq \frac{(\pi/4)^{2n+1}}{(2n+1)!} \overset{\text{chci}}{\leq} 10^{-3}\,.$$

Typické problémy řešené pomocí Taylorovy věty

Příklad (Stupeň polynomu, aby chyba na intervalu byla v toleranci).

Pro jaké $n \in \mathbb{N}$ je chyba aproximace $\sin(x)$ jejím n-tým Taylorovým polynomem na intervalu $\left\langle -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right\rangle$ nejvýše 10^{-3}.

$$|R_{2n-1}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \leq \frac{(\pi/4)^{2n+1}}{(2n+1)!} \overset{\text{chci}}{\leq} 10^{-3}\,.$$

Metodou pokus/omyl zjistíme, že T_3 podmínku nesplní, T_5 už ano.

Hlavní body

$$\left| f(x) - T_{n,a}(x) \right|$$

4 Dodatek

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n$$

Komentář

- Vypadá to, že jsme našli ideální způsob pro výpočet $\sin(x)$ pomocí kalkulačky/počítače. Situace je ovšem, jak už to tak bývá, poněkud složitější. Zájemcům doporučujeme blog.

- Pro některé funkce nemusí být tak jednoduché Taylorův polynom libovolného stupně, resp. Taylorovu řadu, nalézt. Příkladem je třeba $\operatorname{tg}(x)$:

$$\operatorname{tg}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)B_k}{(2k)!} x^{2k-1},$$

  kde symbol B_k označuje Bernoulliho čísla, která lze pouze rekurentně napočítat.