Matematická analýza 2

Lineární rekurentní rovnice

Pavel Hrabák[1], Tomáš Kalvoda[2], Ivo Petr[3]

[1]pavel.hrabak@fit.cvut.cz, [2]tomas.kalvoda@fit.cvut.cz, [3]ivo.petr@fit.cvut.cz

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze

1. listopadu 2024
ZS 2024/2025

Hlavní body

$$x_{n+k} + \sum_{i=0}^{k-1} c_{i,n} x_{n+i} = b_n, \quad n \in \mathbb{Z},\ n \geq n_0$$

1. Úvod

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

2. Lineární rekurentní rovnice (LRR)

3. Vlastnosti množiny řešení lineárních rekurentních rovnic

$$S = (\tilde{x}_n)_{n=n_0}^{\infty} + S_0$$

Hlavní výsledky této přednášky

- Lineární rekurentní rovnice jakožto důležitý příklad rekurentních rovnic.
- Zkoumání obecných vlastností řešení lineárních rekurentních rovnic.

Hlavní body

$$x_{n+k} + \sum_{i=0}^{k-1} c_{i,n} x_{n+i} = b_n, \quad n \in \mathbb{Z},\ n \geq n_0$$

1 Úvod

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

2 Lineární rekurentní rovnice (LRR)

3 Vlastnosti množiny řešení lineárních rekurentních rovnic

$$S = (\tilde{x}_n)_{n=n_0}^{\infty} + S_0$$

Úvod

- S rekurentně zadanými posloupnostmi $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jste se setkali již dávno (viz geometrická a aritmetická posloupnost). Obecně je lze popsat vztahem

$$a_n = f_n(a_{n-1},\ a_{n-2}, \ldots, a_2, a_1), \quad n = 2, 3, \ldots,$$

kde $f_n : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$, $n = 2, 3, \ldots$ jsou nějaká pevně zadaná zobrazení.

Úvod

- S rekurentně zadanými posloupnostmi $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jste se setkali již dávno (viz geometrická a aritmetická posloupnost). Obecně je lze popsat vztahem

$$a_n = f_n(a_{n-1},\ a_{n-2}, \ldots, a_2, a_1), \quad n = 2, 3, \ldots,$$

  kde $f_n : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$, $n = 2, 3, \ldots$ jsou nějaká pevně zadaná zobrazení.

- U rekurentně zadaných posloupností nás typicky zajímá:
  - Vyjádření n-tého členu v uzavřeném tvaru („vyřešení rekurence“).
  - Pokud uzavřený tvar neznáme, tak alespoň odvození asymptotických vlastností řešení (popis pomocí $\sim$, $\mathcal{O}$, Ω, Θ, atd.).

Úvod

- S rekurentně zadanými posloupnostmi $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jste se setkali již dávno (viz geometrická a aritmetická posloupnost). Obecně je lze popsat vztahem

$$a_n = f_n(a_{n-1},\ a_{n-2}, \ldots, a_2, a_1), \quad n = 2, 3, \ldots,$$

  kde $f_n : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$, $n = 2, 3, \ldots$ jsou nějaká pevně zadaná zobrazení.

- U rekurentně zadaných posloupností nás typicky zajímá:
  - Vyjádření n-tého členu v uzavřeném tvaru („vyřešení rekurence“).
  - Pokud uzavřený tvar neznáme, tak alespoň odvození asymptotických vlastností řešení (popis pomocí $\sim$, $\mathcal{O}$, Ω, Θ, atd.).

- Oběma aspektům se zde budeme postupně věnovat v různých speciálních případech.

- Nejprve začneme klasickým motivačním příkladem Hanojských věží.

Hanojské věže / *Towers of Hanoi* / Tháp Hà Nội

Máme tři tyče A, B a C, na tyči A je navlečeno n kruhových disků postupně se zmenšující velikosti (zdola nahoru). Tyto disky máme přesunout na tyč B tak, že pohybujeme vždy jen jedním diskem a nikdy nepoložíme větší disk na menší.

Řešení si vyzkoušíme pro $n = 1$ disk a $n = 2$ disky a pak uhádneme obecný postup:

Hanojské věže / *Towers of Hanoi* / Tháp Hà Nội

Máme tři tyče A, B a C, na tyči A je navlečeno n kruhových disků postupně se zmenšující velikosti (zdola nahoru). Tyto disky máme přesunout na tyč B tak, že pohybujeme vždy jen jedním diskem a nikdy nepoložíme větší disk na menší.

Řešení si vyzkoušíme pro $n = 1$ disk a $n = 2$ disky a pak uhádneme obecný postup:

1. Pro $n = 1$ vezmeme disk z tyče A a přemístíme jej na tyč B:

Hanojské věže / *Towers of Hanoi* / Tháp Hà Nội

Máme tři tyče A, B a C, na tyči A je navlečeno n kruhových disků postupně se zmenšující velikosti (zdola nahoru). Tyto disky máme přesunout na tyč B tak, že pohybujeme vždy jen jedním diskem a nikdy nepoložíme větší disk na menší.

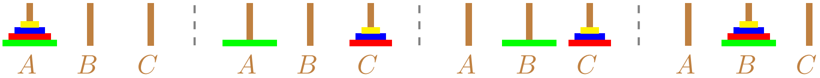
Řešení si vyzkoušíme pro $n = 1$ disk a $n = 2$ disky a pak uhádneme obecný postup:

1. Pro $n = 1$ vezmeme disk z tyče A a přemístíme jej na tyč B:

2. Pro $n = 2$ máme tři kroky:

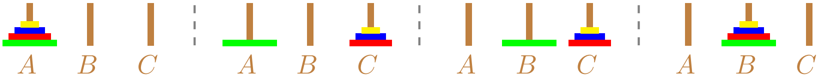
Hanojské věže / *Towers of Hanoi*

Obecně: Pro $n > 1$ nejprve (nějak) přemístíme vrchních $n-1$ disků z tyče A na tyč C, potom přesuneme největší disk z A na B a na závěr přemístíme $n-1$ disků z C na B.



Hanojské věže / *Towers of Hanoi*

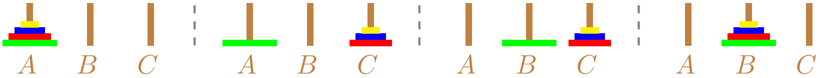
Obecně: Pro $n > 1$ nejprve (nějak) přemístíme vrchních $n-1$ disků z tyče A na tyč C, potom přesuneme největší disk z A na B a na závěr přemístíme $n-1$ disků z C na B.



- Označme minimální počet kroků (přesunů jednotlivých disků) k přesunu věže velikosti n z tyče na tyč jako T_n.

Hanojské věže / *Towers of Hanoi*

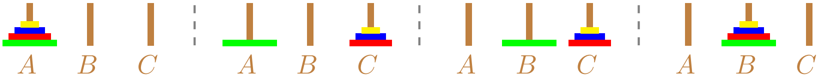
Obecně: Pro $n > 1$ nejprve (nějak) přemístíme vrchních $n-1$ disků z tyče A na tyč C, potom přesuneme největší disk z A na B a na závěr přemístíme $n-1$ disků z C na B.



- Označme minimální počet kroků (přesunů jednotlivých disků) k přesunu věže velikosti n z tyče na tyč jako T_n.
- Už víme: $T_0 = 0$, $T_1 = 1$, $T_2 = 3$.

Hanojské věže / *Towers of Hanoi*

Obecně: Pro $n > 1$ nejprve (nějak) přemístíme vrchních $n-1$ disků z tyče A na tyč C, potom přesuneme největší disk z A na B a na závěr přemístíme $n-1$ disků z C na B.



- Označme minimální počet kroků (přesunů jednotlivých disků) k přesunu věže velikosti n z tyče na tyč jako T_n.
- Už víme: $T_0 = 0$, $T_1 = 1$, $T_2 = 3$.
- Obecný postup implikuje vztah: $T_n = 2 \cdot T_{n-1} + 1$, $n \geq 1$.

Hanojské věže / *Towers of Hanoi*

Určeme další hodnoty T_n:

- $T_0 = 0$, $T_1 = 1$, $T_2 = 3$.
- $T_3 = 2 \cdot T_2 + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$.
- $T_4 = 2 \cdot T_3 + 1 = 2 \cdot 7 + 1 = 15$.
- $T_5 = 2 \cdot T_4 + 1 = 2 \cdot 15 + 1 = 31$.
- ...

Aha! Zkušené oko vidí vztah $T_n = 2^n - 1$, $n \geq 0$.

Je tato intuice správná? Ano, jak se snadno přesvědčíte matematickou indukcí, nebo využitím látky těchto přednášek.

Nelineární rekurence

Rekurence

$$T_n = 2 \cdot T_{n-1} + 1$$

byla „lineární“ ve smyslu: výrazy T_j se v ní vyskytují pouze v součtu násobené číselnými faktory (přesná definice již zanedlouho).

Nelineární rekurence

Rekurence

$$T_n = 2 \cdot T_{n-1} + 1$$

byla „lineární“ ve smyslu: výrazy T_j se v ní vyskytují pouze v součtu násobené číselnými faktory (přesná definice již zanedlouho).

Jakmile opustíme „linearitu,“ tak se situace může velmi komplikovat, vzpomeňte na tento příklad z BI-MA1:

Příklad.

Posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ zadaná rekurentně vztahem

$$a_n = 4 \cdot a_{n-1} \cdot (1 - a_{n-1}), \quad n \in \mathbb{N},\ a_0 \in \langle 0, 1 \rangle,$$

a známá pod názvem „logistické zobrazení“ se chová *chaoticky*.

O nelineárních rekurentních rovnicích je obecně výrazně složitější něco říct, podrobněji se jim zde věnovat nebudeme.

Hlavní body

$$x_{n+k} + \sum_{i=0}^{k-1} c_{i,n} x_{n+i} = b_n, \quad n \in \mathbb{Z},\ n \geq n_0$$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

$$S = (\tilde{x}_n)_{n=n_0}^{\infty} + S_0$$

Lineární rekurentní rovnice (LRR)

Definice (Lineární rekurentní rovnice / *Linear recurrence equation*):

Lineární rekurentní rovnice řádu $k \in \mathbb{N}$ je rovnice tvaru

$$x_{n+k} + c_{k-1,n} \cdot x_{n+k-1} + \cdots + c_{1,n} \cdot x_{n+1} + c_{0,n} \cdot x_n = b_n, \quad n \in \mathbb{Z},\ n \geq n_0, \ (\star)$$

kde $n_0 \in \mathbb{Z}$ a $(c_{i,n})_{n=n_0}^{\infty}$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$, (tzv. **koeficienty rovnice**) a $(b_n)_{n=n_0}^{\infty}$ (tzv. **pravá strana rovnice**) jsou zadané posloupnosti a posloupnost $(c_{0,n})_{n=n_0}^{\infty}$ není nulová posloupnost.

Jestliže $b_n = 0$ pro každé $n \geq n_0$, pak se příslušná rovnice nazývá **homogenní**.

Jako **neznámou** v této rovnici chápeme posloupnost $(x_n)_{n=n_0}^{\infty}$.

Přidruženou homogenní rovnicí k rovnici $(\star)$ nazýváme LRR se stejnými koeficienty a nulovou pravou stranou ($b_n = 0$ pro každé $n \geq n_0$).

Zkráceně bychom rovnici $(\star)$ mohli zapsat ve tvaru

$$x_{n+k} + \sum_{i=0}^{k-1} c_{i,n} x_{n+i} = b_n, \quad n \in \mathbb{Z},\ n \geq n_0.$$

Řešení LRR

Definice (Řešení LRR):

Nechť je dána lineární rekurentní rovnice řádu $k \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+k} + c_{k-1,n} x_{n+k-1} + \cdots + c_{1,n} x_{n+1} + c_{0,n} x_n = b_n, \quad n \in \mathbb{Z},\ n \geq n_0. \qquad (\star)$$

Jejím **řešením** nazveme libovolnou posloupnost $(x_n)_{n=n_0}^{\infty}$ takovou, že dosazením jejích členů do $(\star)$ dostaneme pravdivé rovnosti pro každé celočíselné $n \geq n_0$.

Řešení LRR

Definice (Řešení LRR):

Nechť je dána lineární rekurentní rovnice řádu $k \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+k} + c_{k-1,n} x_{n+k-1} + \cdots + c_{1,n} x_{n+1} + c_{0,n} x_n = b_n, \quad n \in \mathbb{Z},\ n \geq n_0. \qquad (\star)$$

Jejím **řešením** nazveme libovolnou posloupnost $(x_n)_{n=n_0}^{\infty}$ takovou, že dosazením jejích členů do $(\star)$ dostaneme pravdivé rovnosti pro každé celočíselné $n \geq n_0$.

Příklad (Geometrická posloupnost).

Mějme zadané $q \in \mathbb{R}$ a uvažme homogenní LRR prvního řádu

$$x_{n+1} - q x_n = 0, \quad n \geq 0.$$

Tj. v předchozí definici máme $n_0 = 0$, $k = 1$, $b_n = 0$ a $c_{0,n} = -q$ pro každé $n \in \mathbb{N}_0$.

Řešením této rovnice je libovolná posloupnost tvaru $x_n = \alpha \cdot q^n$, $n \in \mathbb{N}_0$, pro libovolnou konstantu $\alpha \in \mathbb{R}$.

Další příklad LRR a jejího řešení

Příklad.

Uvažme rovnici

$$x_{n+1} - nx_n = 0, \quad n \geq 1.$$

Řešením této rovnice (dosaďte!) je posloupnost $x_n = A \cdot (n-1)!$, $n \in \mathbb{N}$, pro libovolné $A \in \mathbb{R}$.

Pro zajímavost vypišme jednotlivé vztahy, všimněte si měnícího se multiplikativního faktoru:

1. $n = 1$: $x_2 - 1 \cdot x_1 = 0$,
2. $n = 2$: $x_3 - 2 \cdot x_2 = 0$,
3. $n = 3$: $x_4 - 3 \cdot x_3 = 0$,
4. $n = 4$: $x_5 - 4 \cdot x_4 = 0$.
5. ...

Počáteční podmínky pro LRR

Definice (Počáteční podmínky / *Initial conditions*):

Nechť je dána lineární rekurentní rovnice řádu $k \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+k} + c_{k-1,n}x_{n+k-1} + \cdots + c_{1,n}x_{n+1} + c_{0,n}x_n = b_n, \quad n \in \mathbb{Z},\ n \geq n_0.$$

Počátečními podmínkami pro tuto rovnici nazveme libovolnou soustavu rovností $x_{n_0} = A_0$, $x_{n_0+1} = A_1$, ..., $x_{n_0+k-1} = A_{k-1}$, pro zadané hodnoty $A_0, \ldots, A_{k-1} \in \mathbb{R}$.

Počáteční podmínky pro LRR

Definice (Počáteční podmínky / *Initial conditions*):

Nechť je dána lineární rekurentní rovnice řádu $k \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+k} + c_{k-1,n}x_{n+k-1} + \cdots + c_{1,n}x_{n+1} + c_{0,n}x_n = b_n, \quad n \in \mathbb{Z},\ n \geq n_0.$$

Počátečními podmínkami pro tuto rovnici nazveme libovolnou soustavu rovností $x_{n_0} = A_0$, $x_{n_0+1} = A_1$, ..., $x_{n_0+k-1} = A_{k-1}$, pro zadané hodnoty $A_0, \ldots, A_{k-1} \in \mathbb{R}$.

Příklad (Geometrická posloupnost).

Pro dané $q \in \mathbb{R}$ je řešením rovnice

$$x_{n+1} - qx_n = 0, \quad n \geq 0.$$

posloupnost tvaru $x_n = \alpha \cdot q^n$, $n \in \mathbb{N}_0$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$ je nějaká konstanta.

Předepsáním počáteční podmínky pro x_0 hodnotu této konstanty vynutíme (zde jednoduše $x_0 = \alpha$) a dostaneme tak už *jednu konkrétní* posloupnost.

Příklady

Příklad (Posloupnost částečných součtů číselné řady).

Mějme číselnou řadu $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Potom posloupnost jejích částečných součtů $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ je řešením lineární rekurentní rovnice prvního řádu

$$x_{n+1} - x_n = a_{n+1}, \quad n \geq 0$$

s počáteční podmínkou $x_0 = a_0$.

Příklady

Příklad (Posloupnost částečných součtů číselné řady).

Mějme číselnou řadu $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Potom posloupnost jejích částečných součtů $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ je řešením lineární rekurentní rovnice prvního řádu

$$x_{n+1} - x_n = a_{n+1}, \quad n \geq 0$$

s počáteční podmínkou $x_0 = a_0$.

Příklad (Fibonacciho posloupnost).

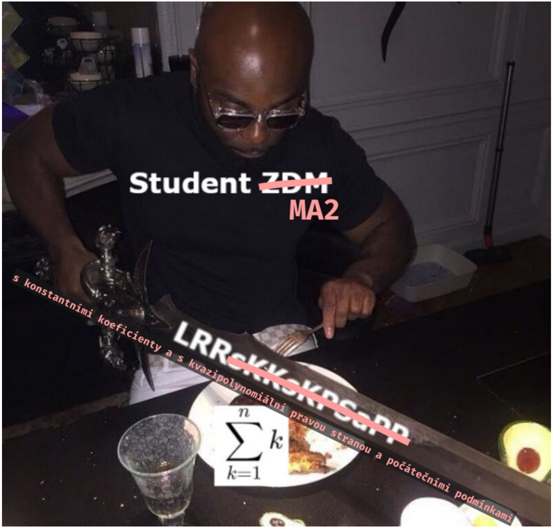
Mějme zadané $n_0 = 0$ a uvažme homogenní LRR druhého řádu

$$x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0, \quad n \geq n_0.$$

Tj. v předchozí definici klademe $b_n = 0$ a $c_{1,n} = c_{0,n} = -1$ pro každé $n \in \mathbb{N}_0$

Řešení této rovnice vyhovující počátečním podmínkám $x_0 = 1$ a $x_1 = 1$ je známá **Fibonacciho posloupnost**.

Příklady


Student ~~ZDM~~
MA2
LRR~~sKKsKPSaPP~~
s konstantními koeficienty a s kvazipolynomiální pravou stranou a počátečními podmínkami
$\sum_{k=1}^{n} k$

Hlavní body

$$x_{n+k} + \sum_{i=0}^{k-1} c_{i,n} x_{n+i} = b_n, \quad n \in \mathbb{Z},\ n \geq n_0$$

1. Úvod

2. Lineární rekurentní rovnice (LRR)

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

3. Vlastnosti množiny řešení lineárních rekurentních rovnic

$$S = (\tilde{x}_n)_{n=n_0}^{\infty} + S_0$$

Existence a jednoznačnost řešení LRR

Začneme velmi pozitivním a základním pozorováním:

Věta (O existenci a jednoznačnosti řešení LRR):

1. Každá lineární rekurentní rovnice má nějaké řešení.
2. Je-li dána lineární rekurentní rovnice řádu $k \in \mathbb{N}$ s předepsanými počátečními podmínkami, pak existuje právě jedno řešení této rovnice splňující tyto počáteční podmínky.

Existence a jednoznačnost řešení LRR

Začneme velmi pozitivním a základním pozorováním:

Věta (O existenci a jednoznačnosti řešení LRR):

1. Každá lineární rekurentní rovnice má nějaké řešení.
2. Je-li dána lineární rekurentní rovnice řádu $k \in \mathbb{N}$ s předepsanými počátečními podmínkami, pak existuje právě jedno řešení této rovnice splňující tyto počáteční podmínky.

- Dle druhého bodu je každé řešení LRR řádu k jednoznačně zadáno počátečními podmínkami (kterých je k): shoduje-li se prvních k prvků dvou řešení jedné LRR, pak jsou tato řešení shodná.

Existence a jednoznačnost řešení LRR

Začneme velmi pozitivním a základním pozorováním:

Věta (O existenci a jednoznačnosti řešení LRR):

1. Každá lineární rekurentní rovnice má nějaké řešení.
2. Je-li dána lineární rekurentní rovnice řádu $k \in \mathbb{N}$ s předepsanými počátečními podmínkami, pak existuje právě jedno řešení této rovnice splňující tyto počáteční podmínky.

- Dle druhého bodu je každé řešení LRR řádu k jednoznačně zadáno počátečními podmínkami (kterých je k): shoduje-li se prvních k prvků dvou řešení jedné LRR, pak jsou tato řešení shodná.
- Kolik řešení existuje? Jak velká je množina *všech* řešení zadané LRR? Těmito otázkami se budeme zabývat zanedlouho.

Existence a jednoznačnost řešení LRR

Důkaz.

1. Mějme LRR řádu $k \in \mathbb{N}$ tvaru

$$x_{n+k} + \sum_{i=0}^{k-1} c_{i,n} x_{n+i} = b_n, \quad n \in \mathbb{Z},\ n \geq n_0.$$

Zvolme $A_0, \ldots, A_{k-1}$ libovolně a položme $X_{n_0} := A_0$, …, $X_{n_0+k-1} := A_{k-1}$. Poté postupně vypočtěme X_{n_0+k}, X_{n_0+k+1}, … pomocí předpisu

$$X_{n+k} := b_n - \sum_{i=0}^{k-1} c_{i,n} X_{n+i}, \quad n \in \mathbb{Z},\ n \geq n_0.$$

Takto zkonstruovaná posloupnost $(X_n)_{n=n_0}^{\infty}$ je řešením naší LRR.

Existence a jednoznačnost řešení LRR

Důkaz.

1. Mějme LRR řádu $k \in \mathbb{N}$ tvaru

$$x_{n+k} + \sum_{i=0}^{k-1} c_{i,n} x_{n+i} = b_n, \quad n \in \mathbb{Z},\ n \geq n_0.$$

Zvolme $A_0, \ldots, A_{k-1}$ libovolně a položme $X_{n_0} := A_0$, …, $X_{n_0+k-1} := A_{k-1}$. Poté postupně vypočtěme X_{n_0+k}, X_{n_0+k+1}, … pomocí předpisu

$$X_{n+k} := b_n - \sum_{i=0}^{k-1} c_{i,n} X_{n+i}, \quad n \in \mathbb{Z},\ n \geq n_0.$$

Takto zkonstruovaná posloupnost $(X_n)_{n=n_0}^{\infty}$ je řešením naší LRR.

2. Jsou-li počáteční podmínky $A_0, \ldots, A_{k-1}$ předepsány, pak z předchozího bodu vidíme, že už jednoznačně udávají hodnoty řešení X_n pro $n \geq n_0 + k$ a tedy jednoznačně udávají i celé řešení (jakožto posloupnost). $\square$

Princip superpozice

Věta (Princip superpozice):

Uvažme dvě LRR k-tého řádu s ne nutně shodnými pravými stranami,

$$x_{n+k} + \sum_{i=0}^{k-1} c_{i,n} x_{n+i} = b_n, \tag{1}$$

$$x_{n+k} + \sum_{i=0}^{k-1} c_{i,n} x_{n+i} = \tilde{b}_n, \tag{2}$$

pro $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq n_0$.

Je-li $(X_n)_{n=n_0}^{\infty}$ řešení (1) a $(Y_n)_{n=n_0}^{\infty}$ řešení (2), potom pro libovolnou konstantu α je posloupnost $(X_n + \alpha Y_n)_{n=n_0}^{\infty}$ řešením LRR

$$x_{n+k} + \sum_{i=0}^{k-1} c_{i,n} x_{n+i} = b_n + \alpha \tilde{b}_n, \quad n \geq n_0.$$

Důkaz: Přímočaré dosazení.

Poznámka: Vektorový prostor posloupností

Uvažme celočíselné n_0 a množinu všech reálných posloupností $(x_n)_{n=n_0}^{\infty}$, tuto neprázdnou množinu označme $\mathbb{R}^\infty$ (závislost na n_0 ve značení potlačujeme, musí být vždy dáno pevně).

Poznámka: Vektorový prostor posloupností

Uvažme celočíselné n_0 a množinu všech reálných posloupností $(x_n)_{n=n_0}^{\infty}$, tuto neprázdnou množinu označme $\mathbb{R}^\infty$ (závislost na n_0 ve značení potlačujeme, musí být vždy dáno pevně).

- **Součet dvou posloupností** $(x_n)_{n=n_0}^{\infty}, (y_n)_{n=n_0}^{\infty} \in \mathbb{R}^\infty$ definujeme jako posloupnost

$$(x_n)_{n=n_0}^{\infty} + (y_n)_{n=n_0}^{\infty} := (x_n + y_n)_{n=n_0}^{\infty} \in \mathbb{R}^\infty.$$

- **Skalární násobek posloupnosti** $(x_n)_{n=n_0}^{\infty} \in \mathbb{R}^\infty$ číslem $\alpha \in \mathbb{R}$ definujeme jako posloupnost

$$\alpha \cdot (x_n)_{n=n_0}^{\infty} := (\alpha x_n)_{n=n_0}^{\infty} \in \mathbb{R}^\infty.$$

Poznámka: Vektorový prostor posloupností

Uvažme celočíselné n_0 a množinu všech reálných posloupností $(x_n)_{n=n_0}^{\infty}$, tuto neprázdnou množinu označme $\mathbb{R}^{\infty}$ (závislost na n_0 ve značení potlačujeme, musí být vždy dáno pevně).

- **Součet dvou posloupností** $(x_n)_{n=n_0}^{\infty}, (y_n)_{n=n_0}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\infty}$ definujeme jako posloupnost
$$(x_n)_{n=n_0}^{\infty} + (y_n)_{n=n_0}^{\infty} := (x_n + y_n)_{n=n_0}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\infty}.$$
- **Skalární násobek posloupnosti** $(x_n)_{n=n_0}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\infty}$ číslem $\alpha \in \mathbb{R}$ definujeme jako posloupnost
$$\alpha \cdot (x_n)_{n=n_0}^{\infty} := (\alpha x_n)_{n=n_0}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\infty}.$$

Množina $\mathbb{R}^{\infty}$ vybavená těmito operacemi tvoří vektorový prostor nekonečné dimenze (ověření axiomů: zamyšlení), množina
$$\{(\delta_{i,n})_{n=n_0}^{\infty} \mid i = n_0, n_0+1, \ldots\} \subset \mathbb{R}^{\infty}$$
je LN množina mající nekonečně mnoho členů.

Poznámka: Vektorový prostor posloupností

Uvažme celočíselné n_0 a množinu všech reálných posloupností $(x_n)_{n=n_0}^{\infty}$, tuto neprázdnou množinu označme $\mathbb{R}^{\infty}$ (závislost na n_0 ve značení potlačujeme, musí být vždy dáno pevně).

- **Součet dvou posloupností** $(x_n)_{n=n_0}^{\infty}, (y_n)_{n=n_0}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\infty}$ definujeme jako posloupnost

$$(x_n)_{n=n_0}^{\infty} + (y_n)_{n=n_0}^{\infty} := (x_n + y_n)_{n=n_0}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\infty}.$$

- **Skalární násobek posloupnosti** $(x_n)_{n=n_0}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\infty}$ číslem $\alpha \in \mathbb{R}$ definujeme jako posloupnost

$$\alpha \cdot (x_n)_{n=n_0}^{\infty} := (\alpha x_n)_{n=n_0}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\infty}.$$

Množina $\mathbb{R}^{\infty}$ vybavená těmito operacemi tvoří vektorový prostor nekonečné dimenze (ověření axiomů: zamyšlení), množina

$$\{(\delta_{i,n})_{n=n_0}^{\infty} \mid i = n_0, n_0+1, \ldots\} \subset \mathbb{R}^{\infty}$$

je LN množina mající nekonečně mnoho členů.
Nulovým prvkem v tomto prostoru je nulová posloupnost $\theta = (0)_{n=n_0}^{\infty}$.

Struktura množiny všech řešení LRR

Nyní se dostáváme k ústřední větě, která by vám měla být povědomá z BI-LA1.

Věta (O struktuře množiny řešení LRR):

Mějme LRR řádu $k \in \mathbb{N}$ tvaru

$$x_{n+k} + \sum_{i=0}^{k-1} c_{i,n} x_{n+i} = b_n, \quad n \in \mathbb{Z},\ n \geq n_0, \tag{$\star$}$$

a označme množinu všech jejích řešení symbolem S a množinu všech řešení přidružené homogenní rovnice symbolem S_0.

Potom platí následující tvrzení:

1. Množina S_0 je vektorový prostor dimenze k.
2. Množina S je tvaru $S = (\tilde{x}_n)_{n=n_0}^{\infty} + S_0$, kde $(\tilde{x}_n)_{n=n_0}^{\infty}$ je (partikulární) řešení rovnice ($\star$).

Struktura množiny všech řešení LRR

Než se pustíme do důkazu, tak vypíchněme důležité důsledky přímočaře plynoucí z předchozí věty:

- Pokud máme dvě řešení homogenní LRR, pak i jejich součet je řešení té samé homogenní LRR.
- Pokud máme jedno řešení homogenní LRR, pak i jeho konstantní násobek je řešením té samé homogenní LRR.
- Při hledání všech řešení zadané LRR je potřeba umět hledat *všechna* řešení přidružené homogenní rovnice a *nějaká* partikulární řešení.

Struktura množiny všech řešení LRR: Důkaz bodu 1

Již víme, že množina S_0 je neprázdná.

Struktura množiny všech řešení LRR: Důkaz bodu 1

Již víme, že množina S_0 je neprázdná.

Uzavřenost: Uvažme dvě řešení $(x_n)_{n=n_0}^{\infty}$ a $(y_n)_{n=n_0}^{\infty}$ přidružené homogenní rovnice ($\star$), tedy dva prvky S_0, a libovolné $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom pro prvky posloupnosti $(x_n + \alpha y_n)_{n=n_0}^{\infty}$ platí

$$(x_{n+k} + \alpha y_{n+k}) + \sum_{i=0}^{k-1} c_{i,n}(x_{n+i} + \alpha y_{n+i}) =$$

$$= \left(x_{n+k} + \sum_{i=0}^{k-1} c_{i,n} x_{n+i} \right) + \alpha \left(y_{n+k} + \sum_{i=0}^{k-1} c_{i,n} y_{n+i} \right) = 0 + \alpha \cdot 0 = 0, \quad n \geq n_0.$$

Tudíž i $(x_n + \alpha y_n)_{n=n_0}^{\infty} \in S_0$.

Struktura množiny všech řešení LRR: Důkaz bodu 1

Již víme, že množina S_0 je neprázdná.

Uzavřenost: Uvažme dvě řešení $(x_n)_{n=n_0}^{\infty}$ a $(y_n)_{n=n_0}^{\infty}$ přidružené homogenní rovnice ($\star$), tedy dva prvky S_0, a libovolné $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom pro prvky posloupnosti $(x_n + \alpha y_n)_{n=n_0}^{\infty}$ platí

$$(x_{n+k} + \alpha y_{n+k}) + \sum_{i=0}^{k-1} c_{i,n}(x_{n+i} + \alpha y_{n+i}) =$$

$$= \left(x_{n+k} + \sum_{i=0}^{k-1} c_{i,n} x_{n+i} \right) + \alpha \left(y_{n+k} + \sum_{i=0}^{k-1} c_{i,n} y_{n+i} \right) = 0 + \alpha \cdot 0 = 0, \quad n \geq n_0.$$

Tudíž i $(x_n + \alpha y_n)_{n=n_0}^{\infty} \in S_0$.

Báze: Označme jako $(X_n^{(i)})_{n=n_0}^{\infty}$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$, prvek S_0 s počátečními podmínkami $X_{n_0+j}^{(i)} = \delta_{ij}$, $i, j = 0, 1, \ldots, k-1$. Těchto vektorů je tedy k.

Struktura množiny všech řešení LRR: Důkaz bodu 1

Již víme, že množina S_0 je neprázdná.

Uzavřenost: Uvažme dvě řešení $(x_n)_{n=n_0}^\infty$ a $(y_n)_{n=n_0}^\infty$ přidružené homogenní rovnice ($\star$), tedy dva prvky S_0, a libovolné $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom pro prvky posloupnosti $(x_n + \alpha y_n)_{n=n_0}^\infty$ platí

$$(x_{n+k} + \alpha y_{n+k}) + \sum_{i=0}^{k-1} c_{i,n}(x_{n+i} + \alpha y_{n+i}) =$$

$$= \left(x_{n+k} + \sum_{i=0}^{k-1} c_{i,n} x_{n+i} \right) + \alpha \left(y_{n+k} + \sum_{i=0}^{k-1} c_{i,n} y_{n+i} \right) = 0 + \alpha \cdot 0 = 0, \quad n \geq n_0.$$

Tudíž i $(x_n + \alpha y_n)_{n=n_0}^\infty \in S_0$.

Báze: Označme jako $(X_n^{(i)})_{n=n_0}^\infty$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$, prvek S_0 s počátečními podmínkami $X_{n_0+j}^{(i)} = \delta_{ij}$, $i, j = 0, 1, \ldots, k-1$. Těchto vektorů je tedy k.

Generuje: Je-li $(x_n)_{n=n_0}^\infty$ libovolné řešení z S_0, pak díky linearitě jistě platí

$$(x_n)_{n=n_0}^\infty = \sum_{i=0}^{k-1} x_{n_0+i} \cdot (X_n^{(i)})_{n=n_0}^\infty.$$

LN: dává-li lineární kombinace výše nulovou posloupnost, pak pro koeficienty lineární kombinace nutně platí $x_{n_0+i} = 0$ pro $i = 0, 1, \ldots, k-1$.

Struktura množiny všech řešení LRR: Důkaz bodu 2

Mějme partikulární řešení $(\tilde{x}_n)_{n=n_0}^{\infty}$ LRR $(\star)$. Chceme ukázat rovnost

$$S = (\tilde{x}_n)_{n=n_0}^{\infty} + S_0.$$

Struktura množiny všech řešení LRR: Důkaz bodu 2

Mějme partikulární řešení $(\tilde{x}_n)_{n=n_0}^{\infty}$ LRR $(\star)$. Chceme ukázat rovnost

$$S = (\tilde{x}_n)_{n=n_0}^{\infty} + S_0.$$

$\subset$: Uvažme $(x_n)_{n=n_0}^{\infty} \in S$ a položme $y_n := x_n - \tilde{x}_n$, $n \geq n_0$. Potom platí

$$(x_n)_{n=n_0}^{\infty} = (\tilde{x}_n)_{n=n_0}^{\infty} + (y_n)_{n=n_0}^{\infty}$$

a

$$y_{n+k} + \sum_{i=0}^{k-1} c_{i,n} y_{n+i} = \left(x_{n+k} + \sum_{i=0}^{k-1} c_{i,n} x_{n+i} \right) - \left(\tilde{x}_{n+k} + \sum_{i=0}^{k-1} c_{i,n} \tilde{x}_{n+i} \right) = b_n - b_n = 0.$$

Tudíž, $(y_n)_{n=n_0}^{\infty} \in S_0$.

Struktura množiny všech řešení LRR: Důkaz bodu 2

Mějme partikulární řešení $(\tilde{x}_n)_{n=n_0}^{\infty}$ LRR $(\star)$. Chceme ukázat rovnost

$$S = (\tilde{x}_n)_{n=n_0}^{\infty} + S_0.$$

$\subset$: Uvažme $(x_n)_{n=n_0}^{\infty} \in S$ a položme $y_n := x_n - \tilde{x}_n$, $n \geq n_0$. Potom platí

$$(x_n)_{n=n_0}^{\infty} = (\tilde{x}_n)_{n=n_0}^{\infty} + (y_n)_{n=n_0}^{\infty}$$

a

$$y_{n+k} + \sum_{i=0}^{k-1} c_{i,n} y_{n+i} = \left(x_{n+k} + \sum_{i=0}^{k-1} c_{i,n} x_{n+i} \right) - \left(\tilde{x}_{n+k} + \sum_{i=0}^{k-1} c_{i,n} \tilde{x}_{n+i} \right) = b_n - b_n = 0.$$

Tudíž, $(y_n)_{n=n_0}^{\infty} \in S_0$.

$\supset$: Je-li $(x_n)_{n=n_0}^{\infty} = (\tilde{x}_n)_{n=n_0}^{\infty} + (y_n)_{n=n_0}^{\infty}$ pro nějaké $(y_n)_{n=n_0}^{\infty} \in S_0$, pak

$$x_{n+k} + \sum_{i=0}^{k-1} c_{i,n} x_{n+i} = \left(\tilde{x}_{n+k} + \sum_{i=0}^{k-1} c_{i,n} \tilde{x}_{n+i} \right) + \left(y_{n+k} + \sum_{i=0}^{k-1} c_{i,n} y_{n+i} \right) = b_n + 0$$

a proto $(x_n)_{n=n_0}^{\infty} \in S$.

Příklad

Demonstrujme předchozí větu na případě geometrické posloupnosti.

Příklad (Geometrická posloupnost).

Pro dané $q \in \mathbb{R}$ je řešením LRR prvního řádu

$$x_{n+1} - qx_n = 0, \quad n \geq 0.$$

posloupnost tvaru $x_n = \alpha \cdot q^n$, $n \in \mathbb{N}_0$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$ je nějaká konstanta.

V tomto případě proto

$$S_0 = \left\langle (q^n)_{n=0}^{\infty} \right\rangle$$

je jednodimenzionální podprostor $\mathbb{R}^\infty$.

Řadu dalších příkladů si ukážeme v další části tohoto tématu, až vybudujeme nástroje pro systematické řešení LRR *s konstantními koeficienty*.

Hlavní body

$$x_{n+k} + \sum_{i=0}^{k-1} c_{i,n} x_{n+i} = b_n, \quad n \in \mathbb{Z},\ n \geq n_0$$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

$$S = (\tilde{x}_n)_{n=n_0}^{\infty} + S_0$$

Komentář

- V této kapitole by měl být velmi blízký kontakt s lineární algebrou. Samotnou LRR

$$x_{n+k} + \sum_{i=0}^{k-1} c_{i,n} x_{n+i} = b_n, \quad n \in \mathbb{Z},\ n \geq n_0.$$

lze formulovat pomocí tzv. **matice přechodu** v následujícím tvaru

$$\begin{pmatrix} x_{n+k} \\ x_{n+k-1} \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \mathbf{A}_n \begin{pmatrix} x_{n+k-1} \\ x_{n+k-2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

pro $n \geq n_0$, kde

$$\mathbf{A}_n = \begin{pmatrix} -c_{k-1,n} & -c_{k-2,n} & -c_{k-3,n} & \cdots & -c_{1,n} & -c_{0,n} \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$