Matematická analýza 2

Lineární rekurentní rovnice s konstantními koeficienty

Pavel Hrabák[1], Tomáš Kalvoda[2], Ivo Petr[3]

[1]pavel.hrabak@fit.cvut.cz, [2]tomas.kalvoda@fit.cvut.cz, [3]ivo.petr@fit.cvut.cz

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze

18. listopadu 2024
ZS 2024/2025

Hlavní body

$$x_{n+k} + c_{k-1} \cdot x_{n+k-1} + \cdots + c_1 \cdot x_{n+1} + c_0 \cdot x_n = b_n$$

1. LRR s konstantními koeficienty
2. Řešení homogenní LRR s konstantními koeficienty
3. Partikulární řešení LRR s konstantními koeficienty
4. Příklady

$$P(n)\lambda^n$$

$$p(\lambda) = \lambda^k + c_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0$$

Hlavní výsledky této přednášky

- Představení LRR s konstantními koeficienty.
- Systematická konstrukce všech řešení homogenních LRR s konstantními koeficienty.
- Hledání partikulárních řešení LRR s konstantními koeficienty.

Hlavní body

$$x_{n+k} + c_{k-1} \cdot x_{n+k-1} + \cdots + c_1 \cdot x_{n+1} + c_0 \cdot x_n = b_n$$

1. LRR s konstantními koeficienty
2. Řešení homogenní LRR s konstantními koeficienty
3. Partikulární řešení LRR s konstantními koeficienty
4. Příklady

$$P(n)\lambda^n$$

$$p(\lambda) = \lambda^k + c_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0$$

LRR s konstantními koeficienty

LRR zkoumané v předchozí přednášce jsou stále ještě příliš obecné, jejich řešení nemusí být snadno vyjádřitelné v uzavřeném tvaru. Provedeme ještě jedno omezení.

Definice (LRR s konstantními koeficienty):

Lineární rekurentní rovnice řádu $k \in \mathbb{N}$ s konstantními koeficienty je rovnice tvaru

$$x_{n+k} + c_{k-1} \cdot x_{n+k-1} + \cdots + c_1 \cdot x_{n+1} + c_0 \cdot x_n = b_n, \quad n \in \mathbb{Z},\ n \geq n_0, \qquad (\dagger)$$

kde $n_0 \in \mathbb{Z}$ a $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$, (tzv. **koeficienty rovnice**), $c_0 \neq 0$, jsou zadané konstanty a $(b_n)_{n=n_0}^{\infty}$ je zadaná posloupnost (tzv. **pravá strana rovnice**).

Jestliže $b_n = 0$ pro každé $n \geq n_0$, pak se příslušná rovnice nazývá **homogenní**.

Jako **neznámou** v této rovnici chápeme posloupnost $(x_n)_{n=n_0}^{\infty}$.

Přidruženou homogenní rovnicí k rovnici $(\dagger)$ nazýváme LRR se stejnými koeficienty a nulovou pravou stranou ($b_n = 0$ pro každé $n \geq n_0$).

Charakteristický polynom LRR s konstantními koeficienty

Pokusme se najít řešení přidružené homogenní rovnice (†) ve tvaru $x_n = \lambda^n$, kde λ je zatím neznámý nenulový parametr. Po dosazení a pokrácení dostaneme rovnice

$$\lambda^{n+k} + \sum_{i=0}^{k-1} c_i \lambda^{n+i} = 0,\ n \geq n_0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^k + \sum_{i=0}^{k-1} c_i \lambda^i = 0.$$

Tím jsme se zcela zbavili závislosti na n a pokud najdeme kořeny tohoto polynomu stupně k, pak najdeme i řešení naší homogenní LRR!

Charakteristický polynom LRR s konstantními koeficienty

Pokusme se najít řešení přidružené homogenní rovnice (†) ve tvaru $x_n = \lambda^n$, kde λ je zatím neznámý nenulový parametr. Po dosazení a pokrácení dostaneme rovnice

$$\lambda^{n+k} + \sum_{i=0}^{k-1} c_i \lambda^{n+i} = 0,\ n \geq n_0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^k + \sum_{i=0}^{k-1} c_i \lambda^i = 0.$$

Tím jsme se zcela zbavili závislosti na n a pokud najdeme kořeny tohoto polynomu stupně k, pak najdeme i řešení naší homogenní LRR!

Definice (Charakteristický polynom LRR s konstantními koeficienty):

Charakteristickým polynomem rovnice (†) nazýváme polynom stupně k tvaru

$$p(\lambda) = \lambda^k + c_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0.$$

Kořeny[a] tohoto polynomu se nazývají **charakteristická (nebo vlastní) čísla rovnice (†)**.

[a] Obecně komplexní čísla!

Příklad

Příklad.

Následuje výčet ukázkových dvojic LRR s konstantními koeficienty a jejích charakteristických polynomů:

$$\begin{aligned} x_{n+2} - 2x_{n+1} + 7x_n &= 0, & p(\lambda) &= \lambda^2 - 2\lambda + 7, \\ x_{n+3} + \pi x_n - 1 &= 0, & p(\lambda) &= \lambda^3 + \pi, \\ x_{n+7} + x_{n+3} - 42x_n &= n^2, & p(\lambda) &= \lambda^7 + \lambda^3 - 42. \end{aligned}$$

Všimněte si, že v případě LRR s *nekonstantními koeficienty* tento přístup aplikovat nemůžeme: koeficienty by stále závisely na n, neměli bychom *jeden* polynom pro danou LRR.

Hlavní body

$$x_{n+k} + c_{k-1} \cdot x_{n+k-1} + \cdots + c_1 \cdot x_{n+1} + c_0 \cdot x_n = b_n$$

1. LRR s konstantními koeficienty
2. Řešení homogenní LRR s konstantními koeficienty
3. Partikulární řešení LRR s konstantními koeficienty
4. Příklady

$$P(n)\lambda^n$$

$$p(\lambda) = \lambda^k + c_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0$$

Řešení LRR s konstantními koeficienty

Nejprve zformulujme pozorování učiněné před definicí charakteristického polynomu.

Věta (Konstrukce řešení pomocí charakteristického čísla):

Jestliže λ je charakteristickým číslem homogenní LRR řádu $k \in \mathbb{N}$ s konstantními koeficienty

$$x_{n+k} + c_{k-1}x_{n+k-1} + \cdots + c_1 x_{n+1} + c_0 x_n = 0, \quad n \geq n_0,$$

pak posloupnost $(\lambda^n)_{n=n_0}^{\infty}$ je jejím řešením.

Řešení LRR s konstantními koeficienty

Nejprve zformulujme pozorování učiněné před definicí charakteristického polynomu.

Věta (Konstrukce řešení pomocí charakteristického čísla):

Jestliže λ je charakteristickým číslem homogenní LRR řádu $k \in \mathbb{N}$ s konstantními koeficienty

$$x_{n+k} + c_{k-1}x_{n+k-1} + \cdots + c_1 x_{n+1} + c_0 x_n = 0, \quad n \geq n_0,$$

pak posloupnost $(\lambda^n)_{n=n_0}^{\infty}$ je jejím řešením.

Důkaz.

Číslo λ splňuje $p(\lambda) = \lambda^k + c_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0 = 0$ a proto

$$\lambda^{n+k} + \sum_{i=0}^{k-1} c_i \lambda^{n+i} = \lambda^n \cdot p(\lambda) = \lambda^n \cdot 0 = 0$$

pro každé $n \geq n_0$. $\square$

Báze prostoru S_0: charakteristická čísla násobnosti 1

Pomocí charakteristických čísel můžeme zkonstruovat bázi S_0. Nejprve jednoduchý případ, kdy všechna mají násobnost[1] 1.

Věta:

Uvažujme homogenní LRR řádu $k \in \mathbb{N}$ s konstantními koeficienty

$$x_{n+k} + c_{k-1}x_{n+k-1} + \cdots + c_1 x_{n+1} + c_0 x_n = 0, \quad n \geq n_0.$$

Jestliže má k vzájemně různých charakteristických čísel λ_i, $i \in \hat{k}$, pak soubor posloupností $(\lambda_i^n)_{n=n_0}^{\infty}$, $i \in \hat{k}$, tvoří bázi S_0, tedy libovolné řešení $(x_n)_{n=n_0}^{\infty} \in S_0$ je tvaru

$$x_n = \alpha_1 \lambda_1^n + \cdots + \alpha_k \lambda_k^n, \quad n \geq n_0,$$

pro nějaké konstanty $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$.

Notace: $\hat{n} = \{1, 2, \ldots, n\}$ pro $n \in \mathbb{N}$.

[1] Jakožto kořeny charakteristického polynomu.

Báze prostoru S_0: charakteristická čísla násobnosti 1

V důkazu budeme potřebovat následující lineárně–algebraické pomocné tvrzení.

Lemma (Vandermonde):

Mějme vzájemně různá čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ a označme (tzv. Vandermondův determinant)

$$V(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) := \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_{k-1} & \lambda_k \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \cdots & \lambda_{k-1}^2 & \lambda_k^2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 & \cdots & \lambda_{k-1}^3 & \lambda_k^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{k-2} & \lambda_2^{k-2} & \lambda_3^{k-2} & \cdots & \lambda_{k-1}^{k-2} & \lambda_k^{k-2} \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \lambda_3^{k-1} & \cdots & \lambda_{k-1}^{k-1} & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix}.$$

Potom $V(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) = \prod_{1 \le i < j \le k} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0.$

Báze prostoru S_0: charakteristická čísla násobnosti 1

Důkaz Lemmatu (Vandermonde).

Postupně učiňme následující pozorování:

- Z vlastností determinantu plyne, že funkce $\lambda \mapsto V(\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}, \lambda)$ je polynom stupně $k-1$ v proměnné λ a má kořeny $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}$. Platí proto

$$V(\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}, \lambda) = \alpha(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_{k-1}),$$

kde α je zatím neznámá konstanta.

Báze prostoru S_0: charakteristická čísla násobnosti 1

Důkaz Lemmatu (Vandermonde).

Postupně učiňme následující pozorování:

- Z vlastností determinantu plyne, že funkce $\lambda \mapsto V(\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}, \lambda)$ je polynom stupně $k-1$ v proměnné λ a má kořeny $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}$. Platí proto

$$V(\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}, \lambda) = \alpha(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_{k-1}),$$

  kde α je zatím neznámá konstanta.
- Rozvojem podle posledního sloupce ihned vidíme, že koeficient α u nejvyšší mocniny (tj. λ^{k-1}) splňuje $\alpha = V(\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1})$.

Báze prostoru S_0: charakteristická čísla násobnosti 1

Důkaz Lemmatu (Vandermonde).

Postupně učiňme následující pozorování:

- Z vlastností determinantu plyne, že funkce $\lambda \mapsto V(\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, \lambda)$ je polynom stupně $k-1$ v proměnné λ a má kořeny $\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}$. Platí proto

$$V(\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, \lambda) = \alpha(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_{k-1}),$$

  kde α je zatím neznámá konstanta.

- Rozvojem podle posledního sloupce ihned vidíme, že koeficient α u nejvyšší mocniny (tj. λ^{k-1}) splňuje $\alpha = V(\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1})$.
- Hledaný determinant proto splňuje rekurenci

$$V(\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, \lambda_k) = V(\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}) \prod_{i=1}^{k-1} (\lambda_k - \lambda_i),$$

  a počáteční podmínku $V(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_2 - \lambda_1$.

Báze prostoru S_0: charakteristická čísla násobnosti 1

Důkaz Lemmatu (Vandermonde).

Postupně učiňme následující pozorování:

- Z vlastností determinantu plyne, že funkce $\lambda \mapsto V(\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, \lambda)$ je polynom stupně $k-1$ v proměnné λ a má kořeny $\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}$. Platí proto

$$V(\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, \lambda) = \alpha(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_{k-1}),$$

  kde α je zatím neznámá konstanta.
- Rozvojem podle posledního sloupce ihned vidíme, že koeficient α u nejvyšší mocniny (tj. λ^{k-1}) splňuje $\alpha = V(\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1})$.
- Hledaný determinant proto splňuje rekurenci

$$V(\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, \lambda_k) = V(\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}) \prod_{i=1}^{k-1} (\lambda_k - \lambda_i),$$

  a počáteční podmínku $V(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_2 - \lambda_1$.
- Odtud už vidíme dokazované tvrzení, resp. ho ověříme indukcí. $\square$

Báze prostoru S_0: charakteristická čísla násobnosti 1

Důkaz.

Již víme: každá z posloupností $(\lambda_i^n)_{n=n_0}^{\infty}$, $i = \hat{k}$, patří do S_0. Všechna λ_i jsou nenulová, protože $c_0 \neq 0$. Tvoří těchto k posloupností LN soubor?

Báze prostoru S_0: charakteristická čísla násobnosti 1

Důkaz.

Již víme: každá z posloupností $(\lambda_i^n)_{n=n_0}^\infty$, $i = \hat{k}$, patří do S_0. Všechna λ_i jsou nenulová, protože $c_0 \neq 0$. Tvoří těchto k posloupností LN soubor?

Nechť lineární kombinace $(x_n)_{n=n_0}^\infty = \left(\sum_{i=1}^k \alpha_i \lambda_i^n\right)_{n=n_0}^\infty$ je nulová posloupnost.

Zapíšeme-li rovnosti $x_{n_0} = 0$, $x_{n_0+1} = 0$, ..., $x_{n_0+k-1} = 0$ vzhledem k neznámým $\alpha_1\lambda_1^{n_0}, \ldots, \alpha_k\lambda_k^{n_0}$, dostaneme homogenní lineární soustavu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_{k-1} & \lambda_k \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \cdots & \lambda_{k-1}^2 & \lambda_k^2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 & \cdots & \lambda_{k-1}^3 & \lambda_k^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{k-2} & \lambda_2^{k-2} & \lambda_3^{k-2} & \cdots & \lambda_{k-1}^{k-2} & \lambda_k^{k-2} \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \lambda_3^{k-1} & \cdots & \lambda_{k-1}^{k-1} & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1\lambda_1^{n_0} \\ \alpha_2\lambda_2^{n_0} \\ \alpha_3\lambda_3^{n_0} \\ \vdots \\ \alpha_{k-1}\lambda_{k-1}^{n_0} \\ \alpha_k\lambda_k^{n_0} \end{pmatrix} = \theta.$$

kde matice soustavy je regulární (Vandermonde) a proto řešením je pouze $\alpha_i\lambda_i^{n_0} = 0$, $i \in \hat{k}$, a díky nenulovosti λ_i pak i $\alpha_i = 0$ pro $i \in \hat{k}$. $\square$

Báze prostoru S_0: charakteristická čísla násobnosti 1

Příklad.

Uvažme homogenní LRR druhého řádu s konstantními koeficienty

$$x_{n+2} + 3x_{n+1} + 2x_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Báze prostoru S_0: charakteristická čísla násobnosti 1

Příklad.

Uvažme homogenní LRR druhého řádu s konstantními koeficienty

$$x_{n+2} + 3x_{n+1} + 2x_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Pro její charakteristický polynom platí

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2).$$

A má proto dva vzájemně různé kořeny $\lambda_1 = -1$ a $\lambda_2 = -2$, každý násobnosti 1.

Báze prostoru S_0: charakteristická čísla násobnosti 1

Příklad.

Uvažme homogenní LRR druhého řádu s konstantními koeficienty

$$x_{n+2} + 3x_{n+1} + 2x_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Pro její charakteristický polynom platí

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2).$$

A má proto dva vzájemně různé kořeny $\lambda_1 = -1$ a $\lambda_2 = -2$, každý násobnosti 1.

Množina S_0 všech řešení výše uvedené LRR má proto tvar

$$S_0 = \left\langle ((-1)^n)_{n=0}^{\infty},\ ((-2)^n)_{n=0}^{\infty} \right\rangle.$$

Tj. každé řešení $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ z S_0 je tvaru $x_n = \alpha(-1)^n + \beta(-2)^n$, $n \in \mathbb{N}_0$, kde α, β jsou nějaké konstanty.

Báze prostoru S_0: charakteristická čísla vyšší násobnosti

Charakteristický polynom může mít přirozeně kořeny vyšší násobnosti, než je 1.

Věta:

Jestliže λ je charakteristickým číslem homogenní LRR řádu $k \in \mathbb{N}$ s konstantními koeficienty

$$x_{n+k} + c_{k-1}x_{n+k-1} + \cdots + c_1 x_{n+1} + c_0 x_n = 0, \quad n \geq n_0,$$

a jeho násobnost je m, pak posloupnosti $(\lambda^n)_{n=n_0}^{\infty}$, $(n\lambda^n)_{n=n_0}^{\infty}$, ..., $(n^{m-1}\lambda^n)_{n=n_0}^{\infty}$ jsou jejím řešením a tvoří LN soubor.

Na tomto místě důkaz v plné podrobnosti dělat nebudeme:

Báze prostoru S_0: charakteristická čísla vyšší násobnosti

Charakteristický polynom může mít přirozeně kořeny vyšší násobnosti, než je 1.

Věta:

Jestliže λ je charakteristickým číslem homogenní LRR řádu $k \in \mathbb{N}$ s konstantními koeficienty

$$x_{n+k} + c_{k-1}x_{n+k-1} + \cdots + c_1 x_{n+1} + c_0 x_n = 0, \quad n \geq n_0,$$

a jeho násobnost je m, pak posloupnosti $(\lambda^n)_{n=n_0}^{\infty}$, $(n\lambda^n)_{n=n_0}^{\infty}$, ..., $(n^{m-1}\lambda^n)_{n=n_0}^{\infty}$ jsou jejím řešením a tvoří LN soubor.

Na tomto místě důkaz v plné podrobnosti dělat nebudeme:

- Abychom ukázali, že násobky mocnin jsou také řešení, musíme využít vyšších derivací charakteristického polynomu. Na následujícím slide si to ukážeme pro případ $m = 2$.
- Důkaz lineární nezávislosti povede na podobné lineárně–algebraické úvahy jako dříve, ovšem techničtějšího charakteru, zde ho vynecháváme.

Báze prostoru S_0: charakteristická čísla vyšší násobnosti

Řešení pro násobnost $m = 2$.

- Mějme λ dvojnásobný kořen charakteristického polynomu $p(z) = z^k + \sum_{i=0}^{k-1} c_i z^i$. Protože $c_0 \neq 0$, je i $\lambda \neq 0$
- Ve faktorizaci polynomu $p(z)$ se kořenový činitel $(z - \lambda)$ vyskytuje v druhé mocnině a proto nutně platí i $p'(\lambda) = 0$ (představte si derivování součinu kořenových činitelů, v každém sčítanci zbude alespoň jedna mocnina $(z - \lambda)$).
- Proto platí $p(\lambda) = 0$ a i $p'(\lambda) = 0$.
- Z dřívější diskuze již víme, že $(\lambda^n)_{n=n_0}^{\infty}$ je řešení. Nyní ověřme to samé pro $(n\lambda^n)_{n=n_0}^{\infty}$.
- Dosazením do levé strany rekurence a využitím nenulovosti λ dostáváme

$$(n+k)\lambda^{n+k} + \sum_{i=0}^{k-1} c_i (n+i)\lambda^{n+i} = \lambda \left((n+k)\lambda^{n+k-1} + \sum_{i=0}^{k-1} c_i (n+i)\lambda^{n+i-1} \right) =$$

$$= \lambda \cdot \left(z^n \cdot p(z) \right)' \Big|_{z=\lambda} = 0.$$

□

Báze prostoru S_0: charakteristická čísla vyšší násobnosti

Řešení pro násobnost $m = 2$.

- Mějme λ dvojnásobný kořen charakteristického polynomu $p(z) = z^k + \sum_{i=0}^{k-1} c_i z^i$. Protože $c_0 \neq 0$, je i $\lambda \neq 0$
- Ve faktorizaci polynomu $p(z)$ se kořenový činitel $(z - \lambda)$ vyskytuje v druhé mocnině a proto nutně platí i $p'(\lambda) = 0$ (představte si derivování součinu kořenových činitelů, v každém sčítanci zbude alespoň jedna mocnina $(z - \lambda)$).
- Proto platí $p(\lambda) = 0$ a i $p'(\lambda) = 0$.
- Z dřívější diskuze již víme, že $(\lambda^n)_{n=n_0}^{\infty}$ je řešení. Nyní ověřme to samé pro $(n\lambda^n)_{n=n_0}^{\infty}$.
- Dosazením do levé strany rekurence a využitím nenulovosti λ dostáváme

$$(n+k)\lambda^{n+k} + \sum_{i=0}^{k-1} c_i (n+i)\lambda^{n+i} = \lambda \left((n+k)\lambda^{n+k-1} + \sum_{i=0}^{k-1} c_i (n+i)\lambda^{n+i-1} \right) =$$
$$= \lambda \cdot \left(z^n \cdot p(z) \right)' \Big|_{z=\lambda} = 0. \qquad \square$$

- LN: Platí-li $\alpha\lambda^n + \beta n\lambda^n = 0$, $n \geq n_0$ a $\lambda \neq 0$ pak nutně $\alpha = \beta = 0$ (rozmyslete!).

Poznámka: Pro vyšší násobnosti bude potřeba vyšších derivací.

Báze prostoru S_0: Obecná věta

Věta:

Uvažujme homogenní LRR řádu $k \in \mathbb{N}$ s konstantními koeficienty

$$x_{n+k} + c_{k-1}x_{n+k-1} + \cdots + c_1 x_{n+1} + c_0 x_n = 0, \quad n \geq n_0.$$

Jestliže má K vzájemně různých charakteristických čísel λ_i, $i \in \hat{K}$, každé s násobností $m_i \in \hat{k}$, pak soubor posloupností

$$\Big((\lambda_1^n)_{n=n_0}^{\infty},\ (n\lambda_1^n)_{n=n_0}^{\infty},\ \ldots, (n^{m_1-1}\lambda_1^n)_{n=n_0}^{\infty},\ \ldots,$$
$$(\lambda_K^n)_{n=n_0}^{\infty},\ (n\lambda_K^n)_{n=n_0}^{\infty},\ \ldots, (n^{m_K-1}\lambda_K^n)_{n=n_0}^{\infty} \Big)$$

tvoří bázi S_0.

Důkaz.

Využíváme dřívějších tvrzení. Ověření LN vynecháváme. $\square$

Báze prostoru S_0: charakteristická čísla vyšší násobnosti

Příklad.

Uvažme homogenní LRR třetího řádu s konstantními koeficienty

$$x_{n+3} + 2x_{n+2} - 4x_{n+1} - 8x_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Báze prostoru S_0: charakteristická čísla vyšší násobnosti

Příklad.

Uvažme homogenní LRR třetího řádu s konstantními koeficienty

$$x_{n+3} + 2x_{n+2} - 4x_{n+1} - 8x_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Pro její charakteristický polynom platí

$$p(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 - 4\lambda - 8 = (\lambda - 2)(\lambda + 2)^2.$$

A má proto dva vzájemně různé kořeny $\lambda_1 = -2$ (dvojnásobný) a $\lambda_2 = 2$ (jednoduchý).

Báze prostoru S_0: charakteristická čísla vyšší násobnosti

Příklad.

Uvažme homogenní LRR třetího řádu s konstantními koeficienty

$$x_{n+3} + 2x_{n+2} - 4x_{n+1} - 8x_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Pro její charakteristický polynom platí

$$p(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 - 4\lambda - 8 = (\lambda - 2)(\lambda + 2)^2.$$

A má proto dva vzájemně různé kořeny $\lambda_1 = -2$ (dvojnásobný) a $\lambda_2 = 2$ (jednoduchý).

Množina S_0 všech řešení výše uvedené LRR má proto tvar

$$S_0 = \left\langle (2^n)_{n=0}^{\infty},\ ((-2)^n)_{n=0}^{\infty},\ (n(-2)^n)_{n=0}^{\infty} \right\rangle.$$

Tj. každé řešení $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ z S_0 je tvaru $x_n = \alpha 2^n + \beta(-2)^n + \gamma n(-2)^n$, $n \in \mathbb{N}_0$, kde α, β, γ jsou nějaké konstanty.

Případ komplexních čísel

Příklad.

Nalezněte všechna řešení homogenní LRR druhého řádu s konstantními koeficienty

$$x_{n+2} + x_n = 0, \quad n \geq 0.$$

Případ komplexních čísel

Příklad.

Nalezněte všechna řešení homogenní LRR druhého řádu s konstantními koeficienty

$$x_{n+2} + x_n = 0, \quad n \geq 0.$$

Charakteristickým polynomem je v tomto případě

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 1,$$

a má dva čistě imaginární (komplexní) kořeny $\lambda_{\pm} = \pm i$.

Případ komplexních čísel

Příklad.

Nalezněte všechna řešení homogenní LRR druhého řádu s konstantními koeficienty

$$x_{n+2} + x_n = 0, \quad n \geq 0.$$

Charakteristickým polynomem je v tomto případě

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 1,$$

a má dva čistě imaginární (komplexní) kořeny $\lambda_{\pm} = \pm i$.

Dříve zmíněná tvrzení stále platí (komplexnost kořenů nehraje roli). Libovolné řešení této LRR je tvaru

$$x_n = \alpha \cdot i^n + \beta \cdot (-i)^n, \quad n \geq 0.$$

Případ komplexních čísel

Příklad.

Nalezněte všechna řešení homogenní LRR druhého řádu s konstantními koeficienty

$$x_{n+2} + x_n = 0, \quad n \geq 0.$$

Charakteristickým polynomem je v tomto případě

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 1,$$

a má dva čistě imaginární (komplexní) kořeny $\lambda_\pm = \pm i$.

Dříve zmíněná tvrzení stále platí (komplexnost kořenů nehraje roli). Libovolné řešení této LRR je tvaru

$$x_n = \alpha \cdot i^n + \beta \cdot (-i)^n, \quad n \geq 0.$$

To ale není pěkné! Začneme-li s reálnými počátečními podmínkami, tak původní „reálný“ problém bude mít i reálné řešení!

Případ komplexních čísel

Použijme Moivreovu větu:

$$(\pm i)^n = \left(\cos\frac{\pi}{2} \pm i\sin\frac{\pi}{2}\right)^n = \cos\frac{\pi n}{2} \pm i\sin\frac{\pi n}{2}$$

a vyjádřeme tak řešení ve tvaru

$$x_n = (\alpha+\beta)\cos\frac{\pi n}{2} + i(\alpha-\beta)\sin\frac{\pi n}{2}, \quad n \geq 0.$$

Případ komplexních čísel

Použijme Moivreovu větu:

$$(\pm i)^n = \left(\cos\frac{\pi}{2} \pm i\sin\frac{\pi}{2}\right)^n = \cos\frac{\pi n}{2} \pm i\sin\frac{\pi n}{2}$$

a vyjádřeme tak řešení ve tvaru

$$x_n = (\alpha+\beta)\cos\frac{\pi n}{2} + i(\alpha-\beta)\sin\frac{\pi n}{2}, \quad n \geq 0.$$

Závěr: Místo (i^n) a $((-i)^n)$ proto v této situaci použijeme lineární kombinaci $(\sin\frac{\pi n}{2})$ a $(\cos\frac{\pi n}{2})$ k vyjádření obecného řešení ve tvaru

$$x_n = \tilde{\alpha}\cos\frac{\pi n}{2} + \tilde{\beta}\sin\frac{\pi n}{2}, \quad n \geq 0.$$

Případ komplexních čísel

Lze postup v předchozím příkladu zobecnit? Ano!

- Mějme LRR s konstantními koeficienty a buď $p(\lambda)$ jeho charakteristický polynom (mající reálné koeficienty, viz definice LRR).

Případ komplexních čísel

Lze postup v předchozím příkladu zobecnit? Ano!

- Mějme LRR s konstantními koeficienty a buď $p(\lambda)$ jeho charakteristický polynom (mající reálné koeficienty, viz definice LRR).
- Je-li λ charakteristické číslo, které je komplexní a není reálné, pak i $\bar{\lambda}$ je charakteristické číslo naší LRR.

Případ komplexních čísel

Lze postup v předchozím příkladu zobecnit? Ano!

- Mějme LRR s konstantními koeficienty a buď $p(\lambda)$ jeho charakteristický polynom (mající reálné koeficienty, viz definice LRR).
- Je-li λ charakteristické číslo, které je komplexní a není reálné, pak i $\bar{\lambda}$ je charakteristické číslo naší LRR.
- Vyjádřeme toto λ v polárním tvaru jako

$$\lambda = r \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

kde $r > 0$ a $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$. Potom $\bar{\lambda} = r \cdot (\cos\varphi - i\sin\varphi)$.

Případ komplexních čísel

Lze postup v předchozím příkladu zobecnit? Ano!

- Mějme LRR s konstantními koeficienty a buď $p(\lambda)$ jeho charakteristický polynom (mající reálné koeficienty, viz definice LRR).
- Je-li λ charakteristické číslo, které je komplexní a není reálné, pak i $\bar{\lambda}$ je charakteristické číslo naší LRR.
- Vyjádřeme toto λ v polárním tvaru jako

$$\lambda = r \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

  kde $r > 0$ a $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$. Potom $\bar{\lambda} = r \cdot (\cos\varphi - i\sin\varphi)$.
- Použijeme-li opět Moivreovu větu, pak vidíme, že při konstrukci S_0 můžeme místo (λ^n) a $(\bar{\lambda}^n)$ použít dvojici

$$\left(r^n \sin\varphi n\right)_{n=n_0}^{\infty} \quad \text{a} \quad \left(r^n \cos\varphi n\right)_{n=n_0}^{\infty}.$$

Případ komplexních čísel

Lze postup v předchozím příkladu zobecnit? Ano!

- Mějme LRR s konstantními koeficienty a buď $p(\lambda)$ jeho charakteristický polynom (mající reálné koeficienty, viz definice LRR).
- Je-li λ charakteristické číslo, které je komplexní a není reálné, pak i $\bar{\lambda}$ je charakteristické číslo naší LRR.
- Vyjádřeme toto λ v polárním tvaru jako

$$\lambda = r \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi),$$

kde $r > 0$ a $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$. Potom $\bar{\lambda} = r \cdot (\cos\varphi - i \sin\varphi)$.

- Použijeme-li opět Moivreovu větu, pak vidíme, že při konstrukci S_0 můžeme místo (λ^n) a $(\bar{\lambda}^n)$ použít dvojici

$$\left(r^n \sin\varphi n\right)_{n=n_0}^{\infty} \quad \text{a} \quad \left(r^n \cos\varphi n\right)_{n=n_0}^{\infty}.$$

- V případě vyšších násobností stačí vše navíc ještě vynásobit příslušnými mocninami n.

Shrnutí konstrukce S_0

Uvažme LRR k-tého řádu s konstantními koeficienty a nulovou pravou stranou. Bázi $\mathcal{B}$ podprostoru S_0 konstruujeme v následujících krocích:

Shrnutí konstrukce S_0

Uvažme LRR k-tého řádu s konstantními koeficienty a nulovou pravou stranou. Bázi $\mathcal{B}$ podprostoru S_0 konstruujeme v následujících krocích:

1. Sestavme charakteristický polynom $p(\lambda)$ a nalezněme jeho kořeny.

Shrnutí konstrukce S_0

Uvažme LRR k-tého řádu s konstantními koeficienty a nulovou pravou stranou. Bázi $\mathcal{B}$ podprostoru S_0 konstruujeme v následujících krocích:

1. Sestavme charakteristický polynom $p(\lambda)$ a nalezněme jeho kořeny.
2. Za každé reálné charakteristické číslo λ přidáme do $\mathcal{B}$ posloupnost $(\lambda^n)_{n=n_0}^{\infty}$.

Shrnutí konstrukce S_0

Uvažme LRR k-tého řádu s konstantními koeficienty a nulovou pravou stranou. Bázi $\mathcal{B}$ podprostoru S_0 konstruujeme v následujících krocích:

1. Sestavme charakteristický polynom $p(\lambda)$ a nalezněme jeho kořeny.
2. Za každé reálné charakteristické číslo λ přidáme do $\mathcal{B}$ posloupnost $(\lambda^n)_{n=n_0}^{\infty}$.
3. Za každé reálné charakteristické číslo λ násobnosti $m > 1$ přidáme do $\mathcal{B}$ posloupnosti $(n\lambda^n)_{n=n_0}^{\infty}$, ..., $n^{m-1}(\lambda^n)_{n=n_0}^{\infty}$.

Shrnutí konstrukce S_0

Uvažme LRR k-tého řádu s konstantními koeficienty a nulovou pravou stranou. Bázi $\mathcal{B}$ podprostoru S_0 konstruujeme v následujících krocích:

1. Sestavme charakteristický polynom $p(\lambda)$ a nalezněme jeho kořeny.
2. Za každé reálné charakteristické číslo λ přidáme do $\mathcal{B}$ posloupnost $(\lambda^n)_{n=n_0}^{\infty}$.
3. Za každé reálné charakteristické číslo λ násobnosti $m > 1$ přidáme do $\mathcal{B}$ posloupnosti $(n\lambda^n)_{n=n_0}^{\infty}$, …, $n^{m-1}(\lambda^n)_{n=n_0}^{\infty}$.
4. Za každá dvě komplexně sdružená charakteristická čísla $\lambda = r(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)$, která nejsou reálná, přidáme do $\mathcal{B}$ dvě posloupnosti $(r^n \cos n\varphi)_{n=n_0}^{\infty}$ a $(r^n \sin n\varphi)_{n=n_0}^{\infty}$.

Shrnutí konstrukce S_0

Uvažme LRR k-tého řádu s konstantními koeficienty a nulovou pravou stranou. Bázi $\mathcal{B}$ podprostoru S_0 konstruujeme v následujících krocích:

1. Sestavme charakteristický polynom $p(\lambda)$ a nalezněme jeho kořeny.
2. Za každé reálné charakteristické číslo λ přidáme do $\mathcal{B}$ posloupnost $(\lambda^n)_{n=n_0}^{\infty}$.
3. Za každé reálné charakteristické číslo λ násobnosti $m > 1$ přidáme do $\mathcal{B}$ posloupnosti $(n\lambda^n)_{n=n_0}^{\infty}$, ..., $n^{m-1}(\lambda^n)_{n=n_0}^{\infty}$.
4. Za každá dvě komplexně sdružená charakteristická čísla $\lambda = r(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)$, která nejsou reálná, přidáme do $\mathcal{B}$ dvě posloupnosti $(r^n \cos n\varphi)_{n=n_0}^{\infty}$ a $(r^n \sin n\varphi)_{n=n_0}^{\infty}$.
5. Za každá dvě komplexně sdružená charakteristická čísla $\lambda = r(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)$, která nejsou reálná a mají násobnost $m > 1$, přidáme do $\mathcal{B}$ posloupnosti $(nr^n \cos n\varphi)_{n=n_0}^{\infty}$, ..., $(n^{m-1}r^n \cos n\varphi)_{n=n_0}^{\infty}$ a $(nr^n \sin n\varphi)_{n=n_0}^{\infty}$, ..., $(n^{m-1}r^n \sin n\varphi)_{n=n_0}^{\infty}$.

Fibonacciho posloupnost

Příklad (Fibonacciho posloupnost).

Uvažme homogenní LRR druhého řádu s konstantními koeficienty

$$x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

s počátečními podmínkami $x_0 = x_1 = 1$. Tj. Fibonacciho posloupnost.

- Charakteristickým polynomem této LRR je polynom $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$, který má dva vzájemně různé reálné kořeny $\lambda_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.
- Libovolné řešení naší homogenní LRR je tedy tvaru

$$x_n = \alpha_+ \lambda_+^n + \alpha_- \lambda_-^n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

- Vhodnou volbou konstant $\alpha_\pm$ nyní splníme počáteční podmínky. Soustava dvou rovnic o dvou neznámých $\alpha_\pm$

$$x_0 = \alpha_+ + \alpha_- \stackrel{!}{=} 1 \quad \text{a} \quad x_1 = \alpha_+ \lambda_+ + \alpha_- \lambda_- \stackrel{!}{=} 1$$

má právě jedno řešení $\alpha_+ = \frac{\lambda_+}{\sqrt{5}}$ a $\alpha_- = -\frac{\lambda_-}{\sqrt{5}}$.

Fibonacciho posloupnost

Závěr: Pro n-tý člen Fibonacciho posloupnosti platí

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Poznámky:

- Pro hodnoty $\lambda_\pm$ platí

$$\begin{aligned} \lambda_+ &\approx 1{,}618\,033\,988\,749\,895, \\ \lambda_- &\approx -0{,}618\,033\,988\,749\,895. \end{aligned}$$

  Hodnota λ_+ je také známá jako tzv. **zlatý řez** a označuje se často symbolem φ.
- Povedlo se nám od rekurentní definice Fibonacciho posloupnosti přejít k jejímu vyjádření v uzavřeném tvaru. Vedle toho máme i přesnou informaci o jejím asymptotickém chování, konkrétně

$$x_n \sim \frac{1}{\sqrt{5}} \varphi^{n+1} \quad \text{nebo} \quad x_n = \Theta(\varphi^n) \quad \text{pro } n \to \infty.$$

Hlavní body

$$x_{n+k} + c_{k-1} \cdot x_{n+k-1} + \cdots + c_1 \cdot x_{n+1} + c_0 \cdot x_n = b_n$$

1. LRR s konstantními koeficienty
2. Řešení homogenní LRR s konstantními koeficienty
3. **Partikulární řešení LRR s konstantními koeficienty**
4. Příklady

$$P(n)\lambda^n$$

$$p(\lambda) = \lambda^k + c_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0$$

Hledání partikulárních řešení

Připomenutí: Máme-li LRR (s konstantními koeficienty), pak všechna její řešení jsou prvky množiny $(\tilde{x}_n)_{n=n_0}^{\infty} + S_0$, kde

- S_0 je množina všech řešení přidružené homogenní soustavy (umíme konstruovat),
- $(\tilde{x}_n)_{n=n_0}^{\infty}$ je nějaké partikulární řešení rovnice s pravou stranou.

Hledání partikulárních řešení

Připomenutí: Máme-li LRR (s konstantními koeficienty), pak všechna její řešení jsou prvky množiny $(\tilde{x}_n)_{n=n_0}^{\infty} + S_0$, kde

- S_0 je množina všech řešení přidružené homogenní soustavy (umíme konstruovat),
- $(\tilde{x}_n)_{n=n_0}^{\infty}$ je nějaké partikulární řešení rovnice s pravou stranou.

Partikulární řešení již nelze hledat tak systematicky jako v případě konstrukce S_0. Typicky toto řešení uhodneme pomocí několika šikovných pozorování (obsah této sekce).

Vzhledem k výše uvedenému nám ale opravdu stačí nějaké uhodnout! Případně můžeme využít principu superpozice!

Hledání partikulárních řešení

Při hledání partikulárního řešení se řídíme tvarem pravé strany LRR. Nejprve definujme následující pojem.

Definice (Kvazipolynom / *Quasipolynomial*):

Řekneme, že posloupnost $(b_n)_{n=n_0}^{\infty}$ je **kvazipolynom**, jestliže existuje $\lambda \in \mathbb{R}$ a polynom $P(x)$ takový, že $b_n = P(n)\lambda^n$ pro všechna přirozená $n \geq n_0$.

Příklad.

Kvazipolynomy jsou například:

$$(2n-3)3^n, \quad (n^2+1)\left(\sqrt{2}\right)^n, \quad {\color{red}4n+2}, \quad {\color{red}42^n}, \quad n \geq n_0.$$

Hledání partikulárních řešení

Věta (Partikulární řešení LRR s kvazipolynomiální pravou stranou):

Uvažujme homogenní LRR řádu $k \in \mathbb{N}$ s konstantními koeficienty

$$x_{n+k} + c_{k-1}x_{n+k-1} + \cdots + c_1 x_{n+1} + c_0 x_n = b_n, \quad n \geq n_0,$$

a nechť $(b_n)_{n=n_0}^{\infty}$ je kvazipolynom, tj. $b_n = P(n)\lambda^n$, $n \geq n_0$, pro nějaký polynom $P(x)$ a číslo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Definujme $m \in \mathbb{N}_0$ následujícím způsobem:

- pokud je λ charakteristické číslo uvažované LRR, pak nechť m je jeho násobnost,
- jinak nechť m je nula.

Potom existuje polynom $Q(x)$ stupně stejného jako $P(x)$ takový, že posloupnost

$$\Big(n^m Q(n)\lambda^n\Big)_{n=n_0}^{\infty}$$

je řešením uvažované LRR.

Hledání partikulárních řešení

Důkaz.

Důkaz vynecháváme. Věta samotná zaručuje existenci polynomu Q, ale nic neříká o jeho koeficientech. V konkrétním případě vždy tento polynom musíme explicitně najít a tvrzení věty tak vlastně v každém konkrétním příkladě znovu ověřit. $\square$

Následující tabulka ukazuje různé LRR, pravé strany a tvar hledaných partikulárních řešení.

Hledání partikulárních řešení

Důkaz.

Důkaz vynecháváme. Věta samotná zaručuje existenci polynomu Q, ale nic neříká o jeho koeficientech. V konkrétním případě vždy tento polynom musíme explicitně najít a tvrzení věty tak vlastně v každém konkrétním příkladě znovu ověřit. $\square$

Následující tabulka ukazuje různé LRR, pravé strany a tvar hledaných partikulárních řešení.

b_n	$x_{n+2} - 9x_n = b_n$ $\lambda = -3, 3$	$x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = b_n$ $\lambda = 1, 2$	$x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = b_n$ $\lambda = 2, 2$
$n \cdot 2^n$	$(An + B)2^n$	$n(An + B)2^n$	$n^2(An + B)2^n$
$n^2(-1)^n$	$(An^2 + Bn + C)(-1)^n$	$(An^2 + Bn + C)(-1)^n$	$(An^2 + Bn + C)(-1)^n$
$2n - 5$	$An + B$	$n(An + B)$	$An + B$
$(-3)^n$	$n \cdot A(-3)^n$	$A(-3)^n$	$A(-3)^n$

Příklad

Příklad.

Uvažme LRR prvního řádu s konstantními koeficienty

$$x_{n+1} - x_n = (n+1)^2, \quad n \geq 1$$

s počáteční podmínkou $x_1 = 1$.

Alternativně, hledáme součet $x_n = \sum_{\ell=1}^{n} \ell^2$.

Příklad

Příklad.

Uvažme LRR prvního řádu s konstantními koeficienty

$$x_{n+1} - x_n = (n+1)^2, \quad n \geq 1$$

s počáteční podmínkou $x_1 = 1$.

Alternativně, hledáme součet $x_n = \sum_{\ell=1}^{n} \ell^2$.

Charakteristickým polynomem této rovnice je polynom prvního stupně

$$p(\lambda) = \lambda - 1,$$

který má právě jeden reálný kořen $\lambda_1 = 1$ (tj. s násobností 1).

Příklad

Příklad.

Uvažme LRR prvního řádu s konstantními koeficienty

$$x_{n+1} - x_n = (n+1)^2, \quad n \geq 1$$

s počáteční podmínkou $x_1 = 1$.

Alternativně, hledáme součet $x_n = \sum_{\ell=1}^{n} \ell^2$.

Charakteristickým polynomem této rovnice je polynom prvního stupně

$$p(\lambda) = \lambda - 1,$$

který má právě jeden reálný kořen $\lambda_1 = 1$ (tj. s násobností 1).
Libovolné řešení homogenní rovnice je proto tvaru $x_n = \alpha \cdot 1^n = \alpha$ pro nějakou konstantu α.

Příklad

Příklad.

Uvažme LRR prvního řádu s konstantními koeficienty

$$x_{n+1} - x_n = (n+1)^2, \quad n \geq 1$$

s počáteční podmínkou $x_1 = 1$.

Alternativně, hledáme součet $x_n = \sum_{\ell=1}^{n} \ell^2$.

Charakteristickým polynomem této rovnice je polynom prvního stupně

$$p(\lambda) = \lambda - 1,$$

který má právě jeden reálný kořen $\lambda_1 = 1$ (tj. s násobností 1).

Libovolné řešení homogenní rovnice je proto tvaru $x_n = \alpha \cdot 1^n = \alpha$ pro nějakou konstantu α.

Pravá strana je kvazipolynom tvaru $(n+1)^2 \cdot 1^n$. Partikulární řešení proto hledáme ve tvaru $\tilde{x}_n = n^1 \cdot (An^2 + Bn + C) \cdot 1^n$, $n \geq 1$.

Příklad

Dosazením tohoto „odhadu“ dostaneme rovnici

$$\underbrace{(n+1)\big(A(n+1)^2+B(n+1)+C\big)}_{\tilde{x}_{n+1}}-\underbrace{n(An^2+Bn+C)}_{\tilde{x}_n}=(n+1)^2, \quad n\geq 1,$$

a po roznásobení a upravení dostaneme rovnici

$$(3A-1)n^2+(3A+2B-2)n+A+B+C-1=0,$$

která má být platná pro všechna $n\geq 1$.

Příklad

Dosazením tohoto „odhadu“ dostaneme rovnici

$$\underbrace{(n+1)\big(A(n+1)^2+B(n+1)+C\big)}_{\tilde{x}_{n+1}}-\underbrace{n(An^2+Bn+C)}_{\tilde{x}_n}=(n+1)^2,\quad n\geq 1,$$

a po roznásobení a upravení dostaneme rovnici

$$(3A-1)n^2+(3A+2B-2)n+A+B+C-1=0,$$

která má být platná pro všechna $n\geq 1$.
To je možné pouze pokud platí (na levé straně máme nulový polynom)

$$3A=1,\quad 3A+2B=2,\quad A+B+C=1.$$

Řešením této soustavy je $A=\frac{1}{3}$, $B=\frac{1}{2}$ a $C=\frac{1}{6}$.

Příklad

Dosazením tohoto „odhadu“ dostaneme rovnici

$$\underbrace{(n+1)\big(A(n+1)^2+B(n+1)+C\big)}_{\tilde{x}_{n+1}}-\underbrace{n(An^2+Bn+C)}_{\tilde{x}_n}=(n+1)^2, \quad n\geq 1,$$

a po roznásobení a upravení dostaneme rovnici

$$(3A-1)n^2+(3A+2B-2)n+A+B+C-1=0,$$

která má být platná pro všechna $n\geq 1$.
To je možné pouze pokud platí (na levé straně máme nulový polynom)

$$3A=1, \quad 3A+2B=2, \quad A+B+C=1.$$

Řešením této soustavy je $A=\frac{1}{3}$, $B=\frac{1}{2}$ a $C=\frac{1}{6}$.
Libovolné řešení naší původní rekurence má proto tvar

$$x_n=\alpha+n\cdot\frac{2n^2+3n+1}{6}, \quad n\geq 1.$$

Konečně počáteční podmínka $x_1 \stackrel{!}{=} 1$ implikuje $\alpha=0$. Závěr:
$\sum_{\ell=1}^{n}\ell^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Hlavní body

$$x_{n+k} + c_{k-1} \cdot x_{n+k-1} + \cdots + c_1 \cdot x_{n+1} + c_0 \cdot x_n = b_n$$

1. LRR s konstantními koeficienty
2. Řešení homogenní LRR s konstantními koeficienty
3. Partikulární řešení LRR s konstantními koeficienty
4. Příklady

$$P(n)\lambda^n$$

$$p(\lambda) = \lambda^k + c_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0$$

Příklad

Příklad.

Nalezněte řešení rekurence $a_n = 2a_{n-1} + 3 \cdot 2^n$ pro $n \geq 1$ s počáteční podmínkou $a_0 = 13$.

Po přepsání do našeho tvaru pomocí substituce $a_n = x_{n+1}$ vidíme, že řešíme LRR prvního řádu s konstantními koeficienty a nenulovou pravou stranu

$$x_{n+1} - 2x_n = 3 \cdot 2^n \quad \text{pro } n \geq 1,$$

s počáteční podmínkou $x_1 = 13$.

Kořen charakteristického polynomu $p(\lambda) = \lambda - 2$ je právě jeden, $\lambda = 2$. Řešení homogenní rovnice je proto tvaru $(\alpha 2^n)_{n=1}^{\infty}$, kde α je zatím neurčená konstanta.

Kvazipolynom na pravé straně je tvaru $3 \cdot 2^n$ a proto hledáme partikulární řešení ve tvaru $\tilde{x}_n = n^1 \cdot A \cdot 2^n$, $n \geq 1$.

Příklad

Po dosazení do rovnice dostáváme

$$A(n+1)2^{n+1} - 2 \cdot An2^n = 3 \cdot 2^n, \quad n \geq 1,$$

což po jednoduchých úpravách je ekvivalentní podmínce

$$2A = 3,$$

kterou snadno splníme pomocí $A = \frac{3}{2}$.
Zbývá využít volnosti ve volbě α ke splnění počáteční podmínky. Obecné řešení naší LRR je tvaru

$$x_n = \alpha 2^n + 3n2^{n-1}, \quad n \geq 1.$$

A proto je požadavek $x_1 = 13$ ekvivalentní požadavku $\alpha = 5$.
Závěr: Hledaným řešením je

$$x_n = \left(5 + \frac{3n}{2}\right) \cdot 2^n, \quad n \geq 1$$

resp.

$$a_n = x_{n+1} = (13 + 3n) \cdot 2^n, \quad n \geq 0.$$

Příklad

Příklad.

Pro[a] $q \neq 0, 1$ sečtěte

$$\sum_{k=1}^{n} kq^k,$$

tedy vyřešte LRR

$$x_{n+1} - x_n = (n+1)q^{n+1}, \quad n \geq 1,$$

s počáteční podmínkou $x_1 = q$.

[a] Případy $q = 0, 1$ jsou triviální.

Charakteristický polynom $p(\lambda) = \lambda - 1$ má právě jeden kořen $\lambda = 1$. Řešení homogenní LRR je tedy tvaru $(\alpha \cdot 1^n)_{n=1}^{\infty} = (\alpha)_{n=1}^{\infty}$, pro libovolnou konstantu α. Kvazipolynom na pravé straně je tvaru $P(n) \cdot q^n$, kde q není kořenem charakteristického polynomu a polynom P má stupeň 1. Partikulární řešení proto hledáme ve tvaru

$$\tilde{x}_n = n^0 \cdot (An + B) \cdot q^n.$$

Příklad

Dosazením tohoto tvaru do rekurence dostaneme podmínku

$$(A(n+1)+B)q^{n+1} - (An+B)q^n = (n+1)q^{n+1}, \quad n \geq 1.$$

Po jednoduchých úpravách dostáváme ekvivalentní podmínku

$$(Aq - A - q)n + (A+B)q - B - q = 0, \quad n \geq 1.$$

Tuto podmínku splníme vynulováním koeficientů polynomu (v proměnné n), tedy vyřešením soustavy

$$(q-1)A = q \quad \text{a} \quad Aq + (q-1)B = q,$$

pro neznámé A a B.

Tato soustava má řešení

$$A = \frac{q}{q-1} \quad \text{a} \quad B = -\frac{q}{(q-1)^2}.$$

Příklad

Obecné řešení naší nehomogenní LRR proto je tvaru

$$x_n = \alpha + \left(n - \frac{1}{q-1}\right)\frac{q^{n+1}}{q-1}, \quad n \geq 1.$$

Počáteční podmínku $x_1 = q$ splní[2] $\alpha = \frac{q}{(q-1)^2}$.

Závěr:

$$\sum_{k=1}^{n} kq^k = \frac{q}{(q-1)^2} + \left(n - \frac{1}{q-1}\right)\frac{q^{n+1}}{q-1}.$$

[2] Po chvilce počítání...

Hlavní body

$$x_{n+k} + c_{k-1} \cdot x_{n+k-1} + \cdots + c_1 \cdot x_{n+1} + c_0 \cdot x_n = b_n$$

5 Dodatek

$$P(n)\lambda^n$$

$$p(\lambda) = \lambda^k + c_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0$$

Komentář

- TBA

- TBA