Matematická analýza 2

Rekurence a asymptotické chování jejich řešení

Pavel Hrabák[1], Tomáš Kalvoda[2], Ivo Petr[3]

[1]pavel.hrabak@fit.cvut.cz, [2]tomas.kalvoda@fit.cvut.cz, [3]ivo.petr@fit.cvut.cz

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze

18. listopadu 2024
ZS 2024/2025

Hlavní body

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

$$T(n) = \Theta\left(n^{\log_b(a)}\right)$$

Hlavní výsledky této přednášky

- Analýza rekurencí tvaru $T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$ pomocí
  - Iterační metody,
  - Mistrovské metody,
  - Substituční metody.
- Příklady rekurencí motivované popisem složitosti rekurzivních algoritmů.

Hlavní body

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

$$T(n) = \Theta\left(n^{\log_b(a)}\right)$$

Popis složitosti rekurzivních algoritmů

Motivace: Máme rekurzivní algoritmus, který dělí problém „velikosti“ n na a „částí“ „velikosti“ $\frac{n}{b}$ a „zkombinování“ řešení stojí $f(n)$.

Takovouto situaci popíšeme rekurzivním vztahem

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n),$$

kde $T(n)$ vyjadřuje složitost (operační/paměťovou) vyřešení problému velikosti n.

Poznámky:

- Nyní z praktických důvodů místo posloupností používáme funkce T a f, typicky s kladnými funkčními hodnotami a definované alespoň na $\langle 1, +\infty)$, resp. $\mathbb{N}$.
- Pokud velikost vstupu nemá velikost $n = b^N$, pak musíme ještě řešit případné zaokrouhlování n/b pomocí horní nebo dolní celé části. Za „počáteční podmínku“ považujeme $T(1)$.

Popis složitosti rekurzivních algoritmů

Příklady rekurencí a algoritmů (viz BI-AG1 a jinde):

- FFT: $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n)$
- MergeSort: $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n)$
- Karatsuba (rekurzivní násobení čísel): $T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n)$
- ...

Naším cílem nyní není nalézt řešení v uzavřeném tvaru, ale odhalit nějaké jeho asymptotické vlastnosti. Například nalézt jeho asymptotickou těsnou mez Θ.

K tomuto účelu budeme postupně probírat

- Iterační metodu,
- Mistrovskou metodu a
- Substituční metodu.

Hlavní body

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

$$T(n) = \Theta\left(n^{\log_b(a)}\right)$$

Příklad použití iterační metody

Pod **iterační metodou** chápeme opakované rozepsání rekurence a následné řešení asymptotického chování výsledné sumy. Nejprve si ukážeme konkrétní příklad:

Příklad.

Mějme rekurentní vztah

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + n.$$

Předpokládejme $T(1) = \Theta(1)$. Bez snahy o hledání explicitního řešení nalezněte asymptotickou těsnou mez pro $T(n)$.

Postupně iterujme (dosazujme; *telescoping*), po prvních třech krocích dostaneme

$$\begin{aligned} T(n) &= n + 3T\left(\frac{n}{4}\right) = \\ &= n + 3\frac{n}{4} + 3^2 \cdot T\left(\frac{n}{4^2}\right) = \\ &= n + 3\frac{n}{4} + 3^2\frac{n}{4^2} + 3^3 \cdot T\left(\frac{n}{4^3}\right). \end{aligned}$$

Příklad použití iterační metody

Obecně po k iteracích dostaneme

$$T(n) = n + 3\frac{n}{4} + 3^2\frac{n}{4^2} + \cdots + 3^{k-1}\frac{n}{4^{k-1}} + 3^k \cdot T\left(\frac{n}{4^k}\right).$$

Iterování skončí při dosažení rovnosti $4^k = n$, tj. $k = \log_4 n$. Bereme-li $T(1) = \Theta(1)$, pak dostáváme vztah

$$T(n) = \underbrace{n \cdot \sum_{i=0}^{\log_4(n)-1} \left(\frac{3}{4}\right)^i}_{A(n)} + \underbrace{3^{\log_4(n)} \cdot \Theta(1)}_{B(n)}.$$

- Ve výrazu pro $A(n)$ se vyskytuje součet konvergentní číselné řady (geometrická) a proto $A(n) = n \cdot \Theta(1) = \Theta(n)$.
- Pro druhý člen platí $B(n) = n^{\log_4(3)} \cdot \Theta(1) = \Theta\left(n^{\log_4(3)}\right)$.

Závěr: $T(n) = \Theta(n)$, protože $\log_4(3) < 1$.

Iterační metoda: poznámky

Pokud aplikujeme iterační metodu na rekurenci tvaru

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n),$$

pak je obecně potřeba:

- určit počet iterací nutných k dosažení koncových podmínek,
- sečíst řadu nebo odhadnout její součet, případně rozhodnout o její konvergenci/divergenci, nebo nalézt asymptotické chování posloupnosti částečných součtů divergentní číselné řady,
- následně určit, který z členů $A(n)$ a $B(n)$ kontroluje výsledné chování.

Hlavní body

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

$$T(n) = \Theta\left(n^{\log_b(a)}\right)$$

Mistrovská metoda: příprava

Aplikujme opět iterační metodu na „obecnou“ rekurenci

$$T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n).$$

Prvních několik iterací dává

$$\begin{aligned}
T(n) &= f(n) + a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) \\
&= f(n) + a \cdot f\left(\frac{n}{b}\right) + a^2 \cdot T\left(\frac{n}{b^2}\right) \\
&= f(n) + a \cdot f\left(\frac{n}{b}\right) + a^2 f\left(\frac{n}{b^2}\right) + a^3 \cdot T\left(\frac{n}{b^3}\right).
\end{aligned}$$

Po k iteracích pak dostáváme

$$\begin{aligned}
T(n) &= f(n) + a \cdot f\left(\frac{n}{b}\right) + \cdots + a^{k-1} f\left(\frac{n}{b^{k-1}}\right) + a^k \cdot T\left(\frac{n}{b^k}\right) \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} a^j f\left(\frac{n}{b^j}\right) + a^k \cdot T\left(\frac{n}{b^k}\right).
\end{aligned}$$

Mistrovská metoda: příprava

Ukončovací podmínky: zastavíme pokud $\frac{n}{b^k} = 1$, tedy $k = \log_b n$ iteracích (případně „$\leq$“ místo „$=$“). Pak klademe $T(1) = \Theta(1)$.

Celkem tedy:

$$T(n) = \underbrace{\sum_{j=0}^{\log_b(n)-1} a^j f\left(\frac{n}{b^j}\right)}_{A(n)} + \underbrace{\Theta\left(n^{\log_b(a)}\right)}_{B(n)}.$$

- Abychom vystihli chování $T(n)$, tak je potřeba rozhodnout, který z uzávorkovaných výrazů $A(n)$ a $B(n)$ je asymptoticky významnější.
- To můžeme vždy zkoumat v konkrétním případě (pro konkrétní volbu a, b a f – to přesně dělá iterační metoda), nebo se můžeme omezit na několik kvalitativně odlišných situací, což přesně činí následující věta.

Mistrovská metoda: formulace

Věta (Mistrovská metoda / *Master theorem*):

Nechť $a \geq 1$ a $b > 1$ jsou reálné konstanty, f kladná funkce jedné proměnné. Uvažujme rekurentní rovnici

$$T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n),$$

kde $\frac{n}{b}$ v argumentu může znamenat i $\lceil \frac{n}{b} \rceil$ nebo $\lfloor \frac{n}{b} \rfloor$.

Potom (všechny vztahy myšleny pro $n \to \infty$):

1. Pokud $f(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b(a)-\varepsilon})$ pro nějaké $\varepsilon > 0$, potom $T(n) = \Theta(n^{\log_b(a)})$.
2. Pokud $f(n) = \Theta(n^{\log_b(a)})$, pak $T(n) = \Theta\left(n^{\log_b(a)} \cdot \ln(n)\right)$.
3. Pokud $f(n) = \Omega(n^{\log_b(a)+\varepsilon})$ pro nějaké $\varepsilon > 0$ a pokud existuje $d \in (0,1)$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$af\left(\frac{n}{b}\right) \leq d \cdot f(n), \quad \text{pro každé } n \geq n_0,$$

pak $T(n) = \Theta(f(n))$.

Mistrovská metoda: náčrt důkazu pro bod 2

Pokud $f(n) = \Theta(n^{\log_b(a)})$, pak existují dvě konstanty c_1, c_2 a n_0 takové, že

$$c_1 n^{\log_b(a)} \le f(n) \le c_2 n^{\log_b(a)}, \quad \text{pro všechna } n \ge n_0.$$

Protože

$$\frac{n}{b^j} \ge n_0 \iff j \le \log_b(n/n_0) = \log_b(n) - \log_b(n_0)\,,$$

rozdělíme sumu v $A(n)$ následovně

$$A(n) = \sum_{j=0}^{\log_b(n)-1} a^j f\left(\frac{n}{b^j}\right) = \underbrace{\sum_{j=0}^{\log_b(n/n_0)} a^j f\left(\frac{n}{b^j}\right)}_{S(n)} + \underbrace{\sum_{j=\log_b(n/n_0)+1}^{\log_b(n)-1} a^j f\left(\frac{n}{b^j}\right)}_{C(n)}$$

Suma $C(n)$ obsahuje $\log_b(n_0) - 1$ sčítanců, navíc $1 \le \frac{n}{b^j} < n_0$, proto

$$0 \le C(n) \le \underbrace{(\max_{k \in \widehat{n_0}} f(k))}_{D} \cdot \sum_{j=\log_b(n/n_0)+1}^{\log_b(n)-1} a^{-j} = D a^{\log_b(n)} \sum_{j=1}^{\log_b(n_0)-1} a^{-j} = \Theta\left(n^{\log_b(a)}\right)$$

Celkem $C(n) = \mathcal{O}\left(n^{\log_b(a)}\right)$.

Odhad $S(n)$ shora:

$$S(n) \le c_2 \sum_{j=0}^{\log_b(n/n_0)} a^j \left(\frac{n}{b^j}\right)^{\log_b(a)} = c_2 \sum_{j=0}^{\log_b(n/n_0)} n^{\log_b(a)} =$$
$$= c_2 n^{\log_b(a)} \big(\log_b(n) - \log_b(n_0) + 1\big) = n^{\log_b(a)} \ln(n) \cdot \Theta(1).$$

Analogicky provedeme i spodní odhad, tj. celkem $S(n) = \Theta(n^{\log_b(a)} \ln(n))$.

Protože $B(n) = \Theta(n^{\log_b(a)})$ celkem dostáváme

$$\begin{aligned} T(n) &= S(n) + B(n) + C(n) = \\ &= \Theta\left(n^{\log_b(a)} \ln(n)\right) + \Theta\left(n^{\log_b(a)}\right) + \mathcal{O}\left(n^{\log_b(a)}\right) = \\ &= \Theta\left(n^{\log_b(a)} \ln(n)\right). \end{aligned}$$

Příklady

Příklad.

Aplikujte Mistrovskou metodu na rekurenci

$$T(n) = 6T\left(\frac{n}{4}\right) + n.$$

Máme $a = 6$ a $b = 4$, tudíž

$$n^{\log_b(a)} = n^{\log_4(6)}, \quad \text{přičemž } \log_4(6) > 1.$$

Proto jistě existuje kladné ε (numericky třeba $1/10$, ale jistě např. $(\log_4(6) - 1)/2$) takové, že

$$f(n) = n = n^1 = \mathcal{O}(n^{\log_4(6)-\varepsilon}).$$

V Mistrovské metodě jsme proto v první situaci a dostáváme výsledek

$$T(n) = \Theta(n^{\log_4(6)}).$$

Příklady

Příklad.

Aplikujte Mistrovskou metodu na rekurenci

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n.$$

Máme $a = 2$ a $b = 2$, tudíž

$$n^{\log_b(a)} = n^{\log_2(2)} = n^1.$$

a

$$f(n) = n = n^1 = \Theta(n^1).$$

V Mistrovské metodě jsme proto v druhé situaci a dostáváme výsledek

$$T(n) = \Theta(n^{\log_2(2)} \ln(n)) = \Theta(n \ln(n)).$$

Příklady

Příklad.

Aplikujte Mistrovskou metodu na rekurenci

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + n.$$

Máme $a = 3$ a $b = 4$, tudíž

$$n^{\log_b(a)} = n^{\log_4(3)}, \quad \text{přičemž } 0 < \log_4(3) < 1.$$

Proto existuje kladné $\varepsilon = \frac{1-\log_4(3)}{2}$ takové, že

$$f(n) = n = n^1 = \Omega(n^{\log_4(3)+\varepsilon}).$$

Dále

$$af\left(\frac{n}{b}\right) = 3\frac{n}{4} = \frac{3}{4}n \leq dn,$$

kde za $d \in (0,1)$ volíme například $\frac{3}{4}$.
V Mistrovské metodě jsme proto v třetí situaci a dostáváme výsledek

$$T(n) = \Theta(n).$$

Příklady

Příklad.

Aplikujte Mistrovskou metodu na rekurenci

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + n^2.$$

Máme $a = 3$ a $b = 4$, tudíž

$$n^{\log_b(a)} = n^{\log_4(3)}, \quad \text{přičemž } 0 < \log_4(3) < 1.$$

Proto existuje kladné ε takové, že

$$f(n) = n^2 = \Omega(n^{\log_4(3)+\varepsilon}).$$

Dále

$$af\left(\frac{n}{b}\right) = 3\left(\frac{n}{4}\right)^2 = \frac{3}{4^2}n^2 \leq dn^2,$$

kde za $d \in (0,1)$ volíme například $\frac{3}{4^2}$.
V Mistrovské metodě jsme proto v třetí situaci a dostáváme výsledek

$$T(n) = \Theta(n^2).$$

Hlavní body

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

$$T(n) = \Theta\left(n^{\log_b(a)}\right)$$

„Substituční metoda“

Mějme opět rekurenci

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n).$$

(Případně i jinou rekurenci.)

Tato „metoda“ spočívá v následujících dvou krocích:

1. Uhodněte/odhadněte asymptotické chování $T(n)$, vyjádřené pomocí Θ, $\mathcal{O}$, Ω, ...
2. Dokažte jeho platnost pomocí matematické indukce.

Poznámka: Z důvodu zpětné kompatibility s BI-ZDM o tomto přístupu stále mluvíme jako o „substituční metodě“. Ale skutečně nejde o nic jiného, než o důkaz platnosti jistého vztahu pomocí matematické indukce.

Příklad použití substituční metody

Příklad.

Mějme rekurentní rovnici

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n.$$

Pomocí iterační metody po k krocích dostaneme

$$T(n) = kn + 2^k T\left(\frac{n}{2^k}\right).$$

Pokud $n = 2^k$, tj. $k = \log_2(n)$, pak dostáváme

$$T(n) = n\log_2(n) + nT(1).$$

Pomocí matematické indukce dokažte vztah $T(n) = \mathcal{O}(n \ln n)$, pro $n \to \infty$.

Příklad použití substituční metody

Máme dokázat: splňuje-li $T(n)$ rekurentní rovnici $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$, pak

existují $n_0 \in \mathbb{N}$ a $c > 0$ tak, že $0 \le T(n) \le cn\ln(n)$ pro každé $n \ge n_0$.

Indukční krok: Předpokládejme, že pro n platí $T(\frac{n}{2}) \le c\frac{n}{2}\ln\frac{n}{2}$. Potom s využitím rekurentního vztahu dostáváme

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \overset{IP}{\le} 2\left(c\frac{n}{2}\ln\frac{n}{2}\right) + n =$$
$$= cn\ln(n) - cn\ln 2 + n = cn\ln(n) + n(1 - c\ln 2).$$

Pro $c > \frac{1}{\ln 2}$ je poslední výraz záporný a proto platí $T(n) \le cn\ln(n)$. Omezení na n jsme žádná neměli.

Základní krok: dokážeme nalézt $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, aby nerovnost $T(n_0) \le cn_0\ln(n_0)$ platila pro nějaké $c > 1/\ln 2$? Ano, můžeme vzít libovolné $n_0 > 1$, pro které má $T(n_0)$ smysl a pak nerovnost splnit volbou dostatečně velkého c.

Poznámka: Naprosto analogickým způsobem bychom dokázali vztah $T(n) = \Omega(n\ln(n))$, pro $n \to \infty$ a dohromady tedy i $T(n) = \Theta(n\ln(n))$, $n \to \infty$.

Substituční metoda: korekce

Příklad.

Mějme rekurenci

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + 1.$$

Pomocí matematické indukce dokažte, že $T(n) = \mathcal{O}(n)$.

V tomto případě se dostaneme do problémů. Chceme ukázat, že nerovnost

$$0 \leq T(n) \leq cn \tag{1}$$

platí pro nějaké $c > 0$ a všechna dost velká n.
Indukční krok: Předpokládejme platnost vztahu $T\left(\frac{n}{2}\right) \leq c\frac{n}{2}$. Potom

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + 1 \overset{IP}{\leq} 2 \cdot c\frac{n}{2} + 1 = cn + 1.$$

Pravou stranu ovšem nikdy neuděláme menší než požadované cn.
Pozorování: Pokud chceme dokázat, že $T(n) = \mathcal{O}(n)$, pak díky tranzitivitě na pravé straně (1) stačí mít libovolný $\mathcal{O}(n)$ výraz.

Substituční metoda: korekce

Druhý pokus: V předchozím pokusu jsme „přetekli“, zkusme tento problém vyřešit zpřísněním původního požadavku, pokusme se ukázat nerovnost

$$T(n) \leq cn - b$$

pro nějaké konstanty $c, b > 0$ a všechna dost velká n.

Indukční krok: Předpokládejme platnost vztahu $T\left(\frac{n}{2}\right) \leq c\frac{n}{2} - b$. Potom

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + 1 \overset{IP}{\leq} 2 \cdot \left(c\frac{n}{2} - b\right) + 1 = cn + 1 - 2b.$$

Požadujeme $1 - 2b \leq -b$, což je ekvivalentní $b \geq 1$.

Hlavní body

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

$$T(n) = \Theta\left(n^{\log_b(a)}\right)$$

QuickSort

Nechť je dán vstup $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

QuickSort

Nechť je dán vstup $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

- Vyber náhodně prvek ze seznamu (nazývaný *pivot*).

QuickSort

Nechť je dán vstup $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

- Vyber náhodně prvek ze seznamu (nazývaný *pivot*).
- Prvky ze seznamu menší než pivot, dej do jednoho podseznamu a prvky větší do druhého podseznamu.

QuickSort

Nechť je dán vstup $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

- Vyber náhodně prvek ze seznamu (nazývaný *pivot*).
- Prvky ze seznamu menší než pivot, dej do jednoho podseznamu a prvky větší do druhého podseznamu.
- Dva kratší seznamy uspořádej podle velikosti.

QuickSort

Nechť je dán vstup $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

- Vyber náhodně prvek ze seznamu (nazývaný *pivot*).
- Prvky ze seznamu menší než pivot, dej do jednoho podseznamu a prvky větší do druhého podseznamu.
- Dva kratší seznamy uspořádej podle velikosti.
- Vezmi uspořádaný první seznam, za něj dej pivota a připoj uspořádaný druhý seznam.

QuickSort

Nechť je dán vstup $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

- Vyber náhodně prvek ze seznamu (nazývaný *pivot*).
- Prvky ze seznamu menší než pivot, dej do jednoho podseznamu a prvky větší do druhého podseznamu.
- Dva kratší seznamy uspořádej podle velikosti.
- Vezmi uspořádaný první seznam, za něj dej pivota a připoj uspořádaný druhý seznam.

Algoritmus probíhá rekurentně. Uspořádání dvouprvkového seznamu je jednoduché.

QuickSort

Označme T_n *průměrný počet porovnání* pro uspořádání seznamu délky n. Pokud je pivot r-tým prvkem seznamu (co do velikosti), pak dostáváme rekurenci[1]

$$T_n = n - 1 + T_{r-1} + T_{n-r}, \quad \text{kde klademe } T_0 = T_1 = 0.$$

Sečtením těchto vztahů pro $r = 1, 2, \ldots, n$:

$$\sum_{r=1}^{n} T_n = \sum_{r=1}^{n} (n-1) + \sum_{r=1}^{n} \big(T_{r-1} + T_{n-r}\big) \quad \Longrightarrow \quad nT_n = n(n-1) + 2\sum_{r=1}^{n-1} T_r.$$

Poslední rovnost vyjádříme pro $k-1$ místo k a oba vztahy odečtěme (zbavíme se tím součtu vpravo), tj.:

$$kT_k = k(k-1) + 2\sum_{r=1}^{k-1} T_r, \qquad (k-1)T_{k-1} = (k-1)(k-2) + 2\sum_{r=1}^{k-2} T_r,$$

a po odečtení:

$$kT_k - (k-1)T_{k-1} = k(k-1) - (k-1)(k-2) + 2T_{k-1}.$$

[1] Poměrně jiného typu, než dříve.

QuickSort

Odvodili jsme tedy vztah (LRR s nekonstantními koeficienty!)

$$kT_k - (k+1)T_{k-1} = 2k - 2.$$

QuickSort

Odvodili jsme tedy vztah (LRR s nekonstantními koeficienty!)

$$kT_k - (k+1)T_{k-1} = 2k - 2.$$

Vydělením číslem $k(k+1)$ dostáváme

$$\frac{T_k}{k+1} - \frac{T_{k-1}}{k} = \frac{2k-2}{k(k+1)}.$$

QuickSort

Odvodili jsme tedy vztah (LRR s nekonstantními koeficienty!)

$$kT_k - (k+1)T_{k-1} = 2k - 2.$$

Vydělením číslem $k(k+1)$ dostáváme

$$\frac{T_k}{k+1} - \frac{T_{k-1}}{k} = \frac{2k-2}{k(k+1)}.$$

Konečně, sečtením těchto rovností pro $k = 1, 2, \ldots, n$

$$\frac{T_n}{n+1} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{k+1} \cdot \frac{1}{k} \leq 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq$$

$$\leq 2\left(1 + \int_1^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\right) = 2\bigl(1 + \ln(n)\bigr).$$

Uzavíráme

$$T_n = \mathcal{O}\bigl(n\,\ln(n)\bigr).$$

Hlavní body

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

6 Dodatek

$$T(n) = \Theta\left(n^{\log_b(a)}\right)$$

Komentář

- TBA

- TBA