Matematická analýza 2

Funkce více proměnných

Pavel Hrabák[1], Tomáš Kalvoda[2], Ivo Petr[3]

[1]pavel.hrabak@fit.cvut.cz, [2]tomas.kalvoda@fit.cvut.cz, [3]ivo.petr@fit.cvut.cz

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze

22. prosince 2024
ZS 2024/2025

Hlavní body

1. Úvod
2. Okolí bodu v $\mathbb{R}^n$
3. Limita posloupností
4. Limita (vektorových) funkcí
5. Spojitost (vektorových) funkcí
6. Diferenciální počet

$$(\nabla^2 f)_{i,j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

$$(\nabla f)_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} f(\mathbf{x})$$

$$\|\mathbf{x}\|$$

Hlavní výsledky této přednášky

- Zobecnění okolí bodů do prostorů vyšších dimenzí.
- Zavedení vektorových posloupností a (vektorových) funkcí více proměnných.
- Limity takovýchto funkcí a posloupností, spojitost (vektorových) funkcí.
- Základní objekty diferenciálního počtu funkcí více proměnných.

Hlavní body

$$(\nabla^2 f)_{i,j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

$$(\nabla f)_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})$$

$$\|\mathbf{x}\|$$

Připomenutí 1/4

V předmětu BI-MA1 jsme studovali

- posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ reálných čísel a jejich *limity*,
- reálné funkce jedné reálné proměnné $f\colon A \to \mathbb{R}$, $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, a jejich *limity*, *spojitost* a *derivaci*.

Nyní se budeme zabývat jejich „vícerozměrnými" analogy. Přechod bude často přímočarý, někdy komplikovanější.

Naším hlavním cílem v této části předmětu jsou kritéria pro hledání extrémů funkcí více proměnných. Nejprve ale musíme zavést základní koncepty.

Připomenutí 2/4

- Nyní se systematicky začneme věnovat **reálným (vektorovým) funkcím více reálných proměnných**, tedy funkcím $f\colon A \to \mathbb{R}^m$, jejichž definiční obor A je neprázdná podmnožina $\mathbb{R}^n$.
- V BI-MA2 o nich budeme zkráceně mluvit jako o **(vektorových) funkcích**.
- Budeme intenzivně využívat látku BI-LA1.
- Proto na následujících několika slidech nejprve stručně shrneme základní poznatky, značení a terminologii.
- *Evergreen*: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ a $A \subset A$ platí pro každou množinu A.

Připomenutí 3/4

- Budeme pracovat ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^n$ n-tic reálných čísel vybavených standardními operacemi sčítání a násobením reálným skalárem (po složkách).
- Prvky $\mathbb{R}^n$ – vektory – budeme značit tučnými malými písmeny, např. $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$,…Složky vektorů jakožto skaláry tučně neznačíme
- Prostor všech matic s m řádky a k sloupci s reálnými prvky značíme $\mathbb{R}^{m,k}$. Matice značíme tučnými velkými písmeny jako $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, či $\mathbf{M}$.
- Vektory $\mathbb{R}^n$ chápeme jako sloupcové vektory, tj. ztotožňujeme $\mathbb{R}^n$ s $\mathbb{R}^{n,1}$, například

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

  Zde horní index T označuje **transpozici**.
- Nulový vektor prostoru $\mathbb{R}^n$ značíme $\theta = (0, 0, \ldots, 0)^T \in \mathbb{R}^n$.

Připomenutí 4/4

- Pro přirozené $n \in \mathbb{N}$ symbolem $\hat{n}$ označujeme množinu $\{1, 2, \ldots, n\}$. Tj. například $\hat{3} = \{1, 2, 3\}$.
- Pro $j \in \hat{n}$ vektor $\mathbf{e}_j$ představuje j-tý vektor standardní báze $\mathbb{R}^n$. Tedy $(\mathbf{e}_j)_k = \delta_{jk}$ pro $j, k \in \hat{n}$, kde pro Kroneckerovo δ platí

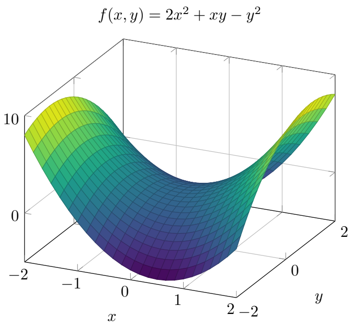
$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k, \end{cases} \quad j, k \in \hat{n}.$$

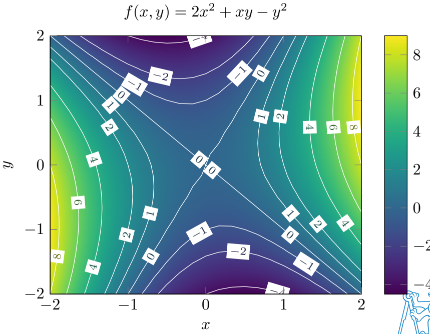
- Například v prostoru $\mathbb{R}^3$ pro vektory standardní báze $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ tohoto prostoru platí

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (1, 0, 0)^T, \\ \mathbf{e}_2 &= (0, 1, 0)^T, \\ \mathbf{e}_3 &= (0, 0, 1)^T. \end{aligned}$$

Vizualizace

- Reálnou funkci jedné reálné proměnné $f\colon D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subset \mathbb{R}$, lze snadno vizualizovat pomocí jejího grafu, který je podmnožinou $\mathbb{R}^2$.
- Vizualizace funkcí více proměnných je již komplikovanější. „Rozumně" to lze provést více méně jen pro reálné funkce dvou proměnných $f\colon D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subset \mathbb{R}^2$, jejichž graf je podmnožinou $\mathbb{R}^3$.





Hlavní body

$$(\nabla^2 f)_{i,j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

$$(\nabla f)_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})$$

$$\|\mathbf{x}\|$$

Délka vektoru a vzdálenost bodů 1/2

- Vzpomeňte si, jak v BI-MA1 celá řada pojmů *vycházela* z pojmu okolí bodu na reálné ose.
- Rozšiřme proto pojem okolí i do vektorového prostoru $\mathbb{R}^n$. Na prvky $\mathbb{R}^n$ se budeme dívat také jako na body, jejich „vektorovost“ pro naše úvahy často není podstatná.
- Nejprve zaveďme **Euklidovskou normu vektoru** $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ představující *délku* tohoto vektoru,

$$\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}.$$

- Euklidovská norma je indukována **standardním skalárním součinem**[1]

$$\langle \mathbf{x} \,|\, \mathbf{y} \rangle := \sum_{j=1}^{n} x_j y_j = \mathbf{x}^T \mathbf{y},$$

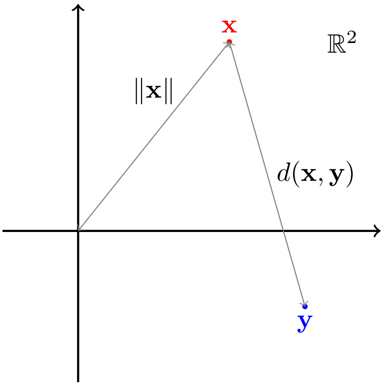
tj. $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x} \,|\, \mathbf{x} \rangle}$.

[1] Ve značení jsme kompatibilní s BI-LA2.

Délka vektoru a vzdálenost bodů 2/2

- **Euklidovskou vzdálenost dvou bodů** $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ pak představuje číslo

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}(x_j - y_j)^2}.$$



- Prostor $\mathbb{R}^n$ od tohoto okamžiku považujeme za vybavený Euklidovskou normou $\|\mathbf{x}\|$ a vzdáleností $d(\mathbf{x},\mathbf{y})$.

- Jiné normy a vzdálenosti nebudeme uvažovat (i když bychom mohli).

Vlastnosti normy

Euklidovská norma a skalární součin mají následující vlastnosti:

- **Schwarzova nerovnost**: pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$|\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|.$$

Důkaz: Skutečně, pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ a $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ platí (rozepište!)

$$0 \leq \|\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}\|^2 = \langle \mathbf{x} + \alpha\mathbf{y} \mid \mathbf{x} + \alpha\mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\|^2 + 2\alpha\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle + \alpha^2\|\mathbf{y}\|^2.$$

A pro diskriminant D tohoto kvadratického polynomu (v α) pak nutně platí

$$0 \geq D = \big(2\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle\big)^2 - 4\|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2.$$

- **Trojúhelníková nerovnost**: pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|.$$

Důkaz: plyne ze Schwarzovy nerovnosti:

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + 2\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle + \|\mathbf{y}\|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 = \big(\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|\big)^2.$$

Okolí bodu $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ 1/2

Vybaveni konceptem vzdálenosti dvou bodů v prostoru $\mathbb{R}^n$ nám nyní nic nebrání zadefinovat okolí bodu v $\mathbb{R}^n$:

Definice (Okolí bodu $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$):

Mějme bod $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ a $\varepsilon > 0$. Potom **okolím bodu $\mathbf{a}$ o poloměru** ε nazýváme množinu všech bodů $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, jejichž vzdálenost od bodu $\mathbf{a}$ je menší než ε a značíme ho $U_{\mathbf{a}}(\varepsilon)$. Tj.

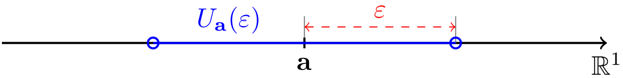
$$U_{\mathbf{a}}(\varepsilon) := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < \varepsilon \right\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Podobně jako dříve v BI-MA1 budeme občas specifikaci poloměru ε vynechávat: $U_{\mathbf{a}}$ představuje nějaké okolí bodu $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$.

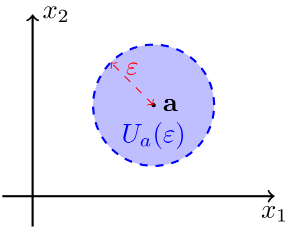
Úmluva: budeme přirozeně ztotožňovat $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^1$.

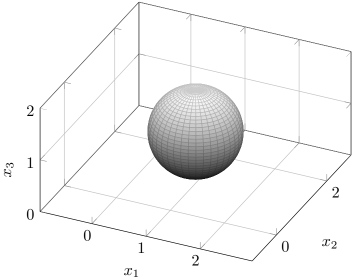
Okolí bodu $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ 2/2

- V případě $n = 1$, tedy $\mathbb{R}^1$, jsme nezískali nic nového (vzpomeňte na vztah $\sqrt{x^2} = |x|$). Okolí jsou stále známé **otevřené intervaly**.



- V rovině $\mathbb{R}^2$ (prostoru $\mathbb{R}^3$) jsou okolí představována **kruhy** (**koulemi**), vždy bez „hranice“ (kružnice, resp. sféry).





Hromadný bod množiny 1/2

Vybaveni pojmem okolí můžeme ihned rozšířit důležitý (viz BI-MA1) pojem *hromadného bodu* i na množiny $M \subset \mathbb{R}^n$:

Definice (Hromadný bod množiny $M \subset \mathbb{R}^n$):

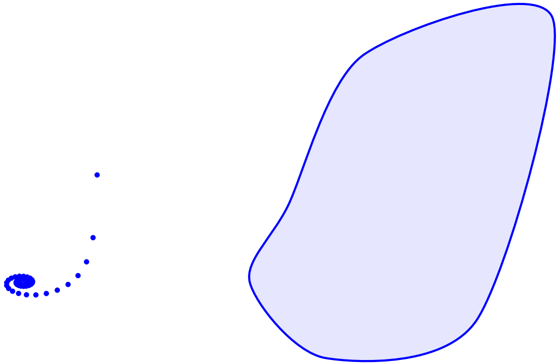
Bod $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ nazýváme **hromadným bodem množiny** $M \subset \mathbb{R}^n$, právě když v každém okolí bodu $\mathbf{a}$ leží bod množiny M různý od $\mathbf{a}$.

Příklad.

- θ je hromadným bodem množiny $\{\frac{1}{t}(\cos(t), \sin(t)) \mid t > 0\}$ (rozmyslete!).
- Podmnožina $\mathbb{R}^n$ s konečným počtem prvků nemá žádný hromadný bod.
- Je-li $\mathbf{a}$ hromadný bod množiny M, pak v každém jeho okolí leží nekonečně mnoho bodů množiny M různých od $\mathbf{a}$.

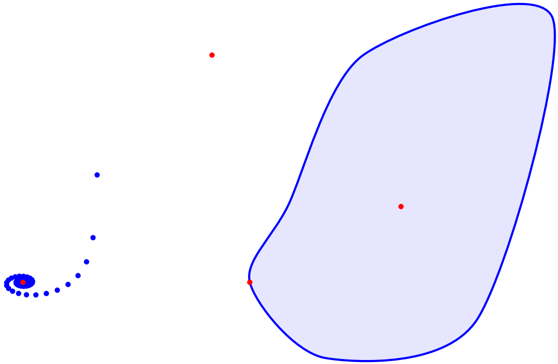
Hromadný bod množiny 2/2

Představme si následující množinu M, tvořenou modrými body, modrou křivkou a plochou vyplněnou bledě modrou barvou. Diskutujme hromadnost uvedených červeně zvýrazněných bodů.



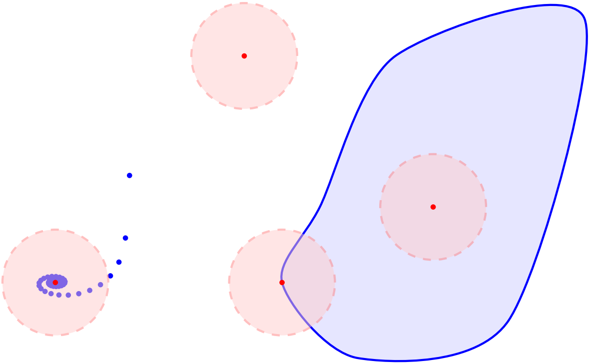
Hromadný bod množiny 2/2

Představme si následující množinu M, tvořenou modrými body, modrou křivkou a plochou vyplněnou bledě modrou barvou. Diskutujme hromadnost uvedených červeně zvýrazněných bodů.



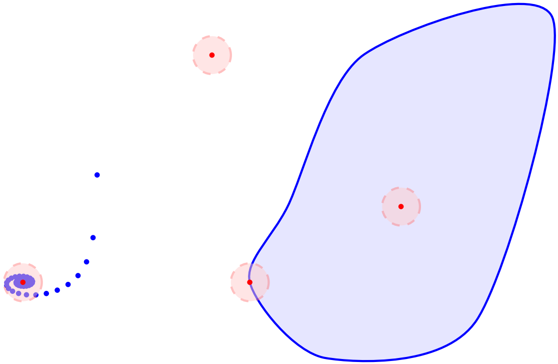
Hromadný bod množiny 2/2

Představme si následující množinu M, tvořenou modrými body, modrou křivkou a plochou vyplněnou bledě modrou barvou. Diskutujme hromadnost uvedených červeně zvýrazněných bodů.



Hromadný bod množiny 2/2

Představme si následující množinu M, tvořenou modrými body, modrou křivkou a plochou vyplněnou bledě modrou barvou. Diskutujme hromadnost uvedených červeně zvýrazněných bodů.



Otevřená množina a vnitřní body množiny 1/2

V BI-MA1 hrály důležitou roli otevřené intervaly. V případě vícerozměrných prostorů tuto roli budou hrát otevřené množiny.

Definice (Vnitřní bod množiny / *inner point of a set*):

O bodu $\mathbf{a} \in M \subset \mathbb{R}^n$ řekneme, že je **vnitřním bodem množiny** M, právě když existuje okolí $U_{\mathbf{a}}$ bodu $\mathbf{a}$ takové, že $U_{\mathbf{a}} \subset M$.

Definice (Otevřená množina / *open set*):

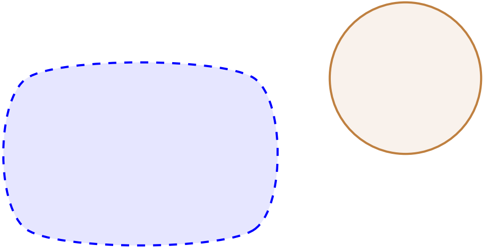
O množině $M \subset \mathbb{R}^n$ řekneme, že je **otevřená**, právě když pro každý bod $\mathbf{a} \in M$ existuje okolí $U_{\mathbf{a}}$ bodu $\mathbf{a}$ takové, že $U_{\mathbf{a}} \subset M$.

Poznámka:

- Množina M je otevřená, právě když každý její prvek je vnitřním bodem množiny M.
- Otevřené intervaly $(a, b) \subset \mathbb{R}$ jsou otevřené množiny.

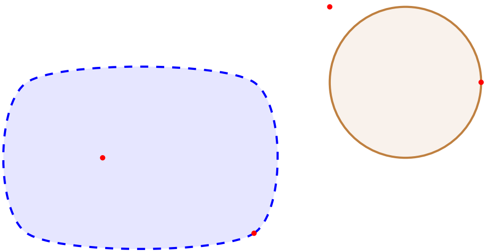
Otevřená množina a vnitřní body množiny 2/2

Jak je to s otevřeností následujících dvou množin a vnitřností zvýrazněných bodů?



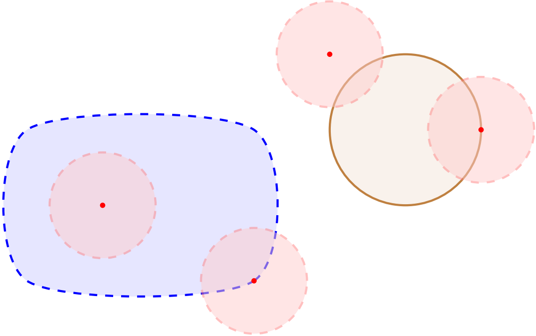
Otevřená množina a vnitřní body množiny 2/2

Jak je to s otevřeností následujících dvou množin a vnitřností zvýrazněných bodů?



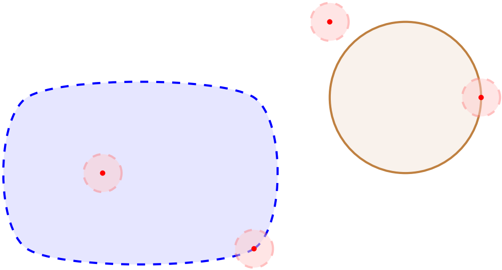
Otevřená množina a vnitřní body množiny 2/2

Jak je to s otevřeností následujících dvou množin a vnitřností zvýrazněných bodů?



Otevřená množina a vnitřní body množiny 2/2

Jak je to s otevřeností následujících dvou množin a vnitřností zvýrazněných bodů?

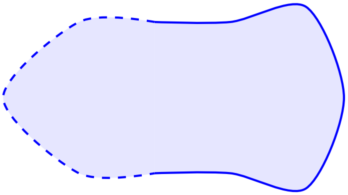


Hraniční bod množiny 1/2

Následující pojem je také užitečný a intuitivně pochopitelný. Pravděpodobně ho přednášející už neformálně použil při diskuzi předchozích situací.

Definice (Hraniční bod množiny / *boundary point of a set*):

Bod $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ nazveme **hraničním bodem množiny** M, právě když v každém okolí $U_{\mathbf{a}}$ bodu $\mathbf{a}$ existují $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U_{\mathbf{a}}$ takové, že $\mathbf{x} \in M$ a $\mathbf{y} \notin M$. **Hranicí množiny** M nazýváme množinu všech jejích hraničních bodů.



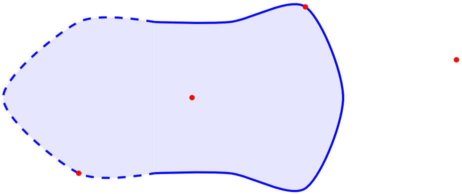
V další sekci se vrátíme k pojmům z BI-MA1 (posloupnosti, limity, derivace, …) a zavedeme jejich „vícerozměrné“ analogy.

Hraniční bod množiny 1/2

Následující pojem je také užitečný a intuitivně pochopitelný. Pravděpodobně ho přednášející už neformálně použil při diskuzi předchozích situací.

Definice (Hraniční bod množiny / *boundary point of a set*):

Bod $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ nazveme **hraničním bodem množiny** M, právě když v každém okolí $U_\mathbf{a}$ bodu $\mathbf{a}$ existují $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U_\mathbf{a}$ takové, že $\mathbf{x} \in M$ a $\mathbf{y} \notin M$. **Hranicí množiny** M nazýváme množinu všech jejích hraničních bodů.



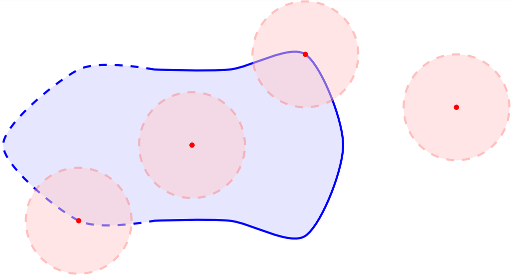
V další sekci se vrátíme k pojmům z BI-MA1 (posloupnosti, limity, derivace, …) a zavedeme jejich „vícerozměrné“ analogy.

Hraniční bod množiny 1/2

Následující pojem je také užitečný a intuitivně pochopitelný. Pravděpodobně ho přednášející už neformálně použil při diskuzi předchozích situací.

Definice (Hraniční bod množiny / *boundary point of a set*):

Bod $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ nazveme **hraničním bodem množiny** M, právě když v každém okolí $U_{\mathbf{a}}$ bodu $\mathbf{a}$ existují $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U_{\mathbf{a}}$ takové, že $\mathbf{x} \in M$ a $\mathbf{y} \notin M$. **Hranicí množiny** M nazýváme množinu všech jejích hraničních bodů.



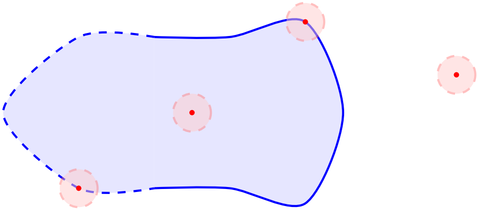
V další sekci se vrátíme k pojmům z BI-MA1 (posloupnosti, limity, derivace, …) a zavedeme jejich „vícerozměrné“ analogy.

Hraniční bod množiny 1/2

Následující pojem je také užitečný a intuitivně pochopitelný. Pravděpodobně ho přednášející už neformálně použil při diskuzi předchozích situací.

Definice (Hraniční bod množiny / *boundary point of a set*):

Bod $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ nazveme **hraničním bodem množiny** M, právě když v každém okolí $U_{\mathbf{a}}$ bodu $\mathbf{a}$ existují $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U_{\mathbf{a}}$ takové, že $\mathbf{x} \in M$ a $\mathbf{y} \notin M$. **Hranicí množiny** M nazýváme množinu všech jejích hraničních bodů.



V další sekci se vrátíme k pojmům z BI-MA1 (posloupnosti, limity, derivace, …) a zavedeme jejich „vícerozměrné“ analogy.

Hlavní body

1. Úvod
2. Okolí bodu v $\mathbb{R}^n$
3. Limita posloupností
4. Limita (vektorových) funkcí
5. Spojitost (vektorových) funkcí
6. Diferenciální počet

$$(\nabla^2 f)_{i,j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

$$(\nabla f)_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})$$

$$\|\mathbf{x}\|$$

Limita posloupnosti

Nyní můžeme uvažovat i posloupnosti vektorů, tj. zobrazení $\mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$, které stále značíme $(\mathbf{x}_k)_{k=1}^{\infty}$, ovšem nyní $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$.

Definice (Limita vektorové posloupnosti):

Řekneme, že posloupnost $(\mathbf{x}_k)_{k=1}^{\infty}$ vektorů $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ **má limitu** (případně **konverguje k**) $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, právě když pro každé okolí $U_{\mathbf{a}}$ bodu $\mathbf{a}$ existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé přirozené $k > N$ platí $\mathbf{x}_k \in U_{\mathbf{a}}$.
Tento fakt značíme $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{a}$.

Věta:

Pro vektorovou posloupnost $(\mathbf{x}_k)_{k=1}^{\infty}$ platí $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{a}$, právě když $\lim\limits_{k\to\infty} \|\mathbf{x}_k - \mathbf{a}\| = 0$ (tato druhá limita je obyčejná limita z BI-MA1).

Důkaz.

Přímočarý (proveďte!). Stačí si vzpomenout na definici limity číselné posloupnosti z BI-MA1 a na definic okolí bodu v $\mathbb{R}^n$. $\square$

Limita posloupnosti

Věta (Konvergence po složkách):

Uvažme posloupnost $(\mathbf{x}_k)_{k=1}^{\infty}$. Potom platí následující ekvivalence: $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{a}$, právě když pro každé $j \in \hat{n}$ platí $\lim\limits_{k\to\infty} (\mathbf{x}_k)_j = \mathbf{a}_j$.

Důkaz.

$\Leftarrow$: Nechť $\varepsilon > 0$. Potom pro každé $j \in \hat{n}$ existují $N_j > 0$ taková, že $\left|(\mathbf{x}_k)_j - \mathbf{a}_j\right| < \varepsilon/\sqrt{n}$. Zvolíme-li $N := \max\{N_1, \ldots, N_n\}$, pak pro přirozené $k > N$ platí

$$\|\mathbf{x}_k - \mathbf{a}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \big((\mathbf{x}_k)_j - \mathbf{a}_j\big)^2} < \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \frac{\varepsilon^2}{n}} = \varepsilon.$$

$\Rightarrow$: Stačí vzít do úvahy nerovnost

$$0 \leq \left|(\mathbf{x}_k)_j - \mathbf{a}_j\right| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \big((\mathbf{x}_k)_j - \mathbf{a}_j\big)^2} = \|\mathbf{x}_k - \mathbf{a}\|.$$

□

Limita posloupnosti

Předchozí dva slidy v podstatě říkají následující:

- Posloupnost vektorů $(\mathbf{x}_k)_{k=1}^{\infty}$ konverguje k $\mathbf{a}$, právě když vzdálenost $\mathbf{x}_k$ od $\mathbf{a}$ konverguje k nule.
- Konvergence vektorové posloupnosti je ekvivalentní konvergenci ve všech složkách (více „obyčejných" číselných posloupností).

Využijeme-li nyní naše znalosti vlastností číselných limit (BI-MA1) a předchozí ekvivalenci, pak ihned dostáváme následující užitečné tvrzení.

Věta (Limita součtu a skalárního násobku posloupností):

Mějme dvě vektorové posloupnosti $(\mathbf{x}_k)_{k=1}^{\infty}$ a $(\mathbf{y}_k)_{k=1}^{\infty}$ splňující $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{a}$ a $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{y}_k = \mathbf{b}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom

$$\lim_{k\to\infty} \left(\mathbf{x}_k + \mathbf{y}_k\right) = \mathbf{a} + \mathbf{b},$$

$$\lim_{k\to\infty} \left(\alpha \mathbf{x}_k\right) = \alpha \mathbf{a}.$$

Limita posloupnosti: Příklad

Příklad.

Mějme posloupnost $(\mathbf{x}_k)_{k=1}^{\infty}$ danou předpisem

$$\mathbf{x}_k = \left(\frac{\cos k}{k}, \frac{\sin k}{k} \right)^T, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Určete její limitu.

Složky této vektorové posloupnosti jsou

$$(\mathbf{x}_k)_1 = \frac{\cos k}{k} \text{ a } (\mathbf{x}_k)_2 = \frac{\sin k}{k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Protože (obyčejné BI-MA1 limity posloupností)

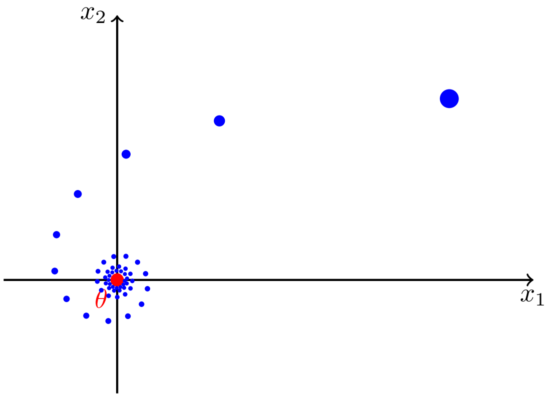
$$\lim_{k\to\infty} (\mathbf{x}_k)_1 = \lim_{k\to\infty} \frac{\cos k}{k} = 0, \qquad \lim_{k\to\infty} (\mathbf{x}_k)_2 = \lim_{k\to\infty} \frac{\sin k}{k} = 0,$$

dostáváme výsledek

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = (0,0)^T = \theta.$$

Limita posloupnosti: Příklad

Vizualizace vektorových posloupností pomocí „grafu“ není praktická. Vhodnější je právě pohled pomocí bodů v daném prostoru:



Poznámky

S vektorovými posloupnostmi se setkáme například v různých numerických metodách, které konstruují posloupnosti aproximací řešení jisté úlohy:

- numerické řešení soustav lineárních rovnic (v BI-MA2 neprobíráme).
- numerické hledání vlastních čísel matic (v BI-MA2 neprobíráme).
- numerické hledání lokálních extrémů funkcí více proměnných (uvidíme již brzy).

Hlavní body

1. Úvod
2. Okolí bodu v $\mathbb{R}^n$
3. Limita posloupností
4. Limita (vektorových) funkcí
5. Spojitost (vektorových) funkcí
6. Diferenciální počet

$$(\nabla^2 f)_{i,j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

$$(\nabla f)_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})$$

$$\|\mathbf{x}\|$$

Funkce a vektorové funkce

V této a následujících kapitolách budeme pracovat s dvěma typy zobrazení:

1. **funkce**: zobrazení nějaké neprázdné $A \subset \mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$.
2. **vektorové funkce**: zobrazení nějaké neprázdné $A \subset \mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$.

Poznámky:

- Zavádíme značení $f(x_1, \ldots, x_n) := f(\mathbf{x})$.
- Pro $m = 1$ je první případ speciálním případem druhého, ztotožňujeme přirozeně $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^1$. Následující tvrzení formulovaná pro vektorové funkce tak přirozeně platí i pro funkce.
- Vektorovou funkci $F\colon A \to \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n$, lze popsat pomocí jejích „složek“, tj. m funkcí $F_j : A \to \mathbb{R}$, $j \in \hat{m}$, splňujících

$$F(\mathbf{x}) = \big(F_1(\mathbf{x}), F_2(\mathbf{x}), \ldots, F_m(\mathbf{x})\big)^T, \quad \mathbf{x} \in A.$$

  Například lineární zobrazení $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zapsané po složkách

$$F(\mathbf{x}) = F(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + x_2, x_3 - x_1, 2x_1)^T.$$

Limita (vektorové) funkce

Vzpomeňte si na definici limity v BI-MA1! Její struktura se výrazně odráží i v následující definici.

Definice (Limita (vektorové) funkce více proměnných):

Mějme funkci n reálných proměnných $F\colon D_F \to \mathbb{R}^m$, $D_F \subset \mathbb{R}^n$, a hromadný bod $\mathbf{a}$ množiny D_F.

Potom **funkce F má v bodě $\mathbf{a}$ limitu $\mathbf{b}$** $\in \mathbb{R}^m$, právě když pro každé okolí $U_\mathbf{b}$ bodu $\mathbf{b}$ existuje okolí $U_\mathbf{a}$ bodu $\mathbf{a}$ takové, že kdykoliv $\mathbf{x} \in (U_\mathbf{a} \cap D_F) \smallsetminus \{\mathbf{a}\}$ pak platí $F(\mathbf{x}) \in U_\mathbf{b}$.

Symbolicky toto tvrzení zapisujeme opět

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} F(\mathbf{x}) = \mathbf{b}.$$

Pokud $m = 1$, pak ještě pro $\alpha \in \{+\infty, -\infty\}$ klademe $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} F(\mathbf{x}) = \alpha$ kdykoliv

$$(\forall U_\alpha)(\exists U_\mathbf{a})(\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n)(\mathbf{x} \in (U_\mathbf{a} \cap D_F) \smallsetminus \{\mathbf{a}\} \Rightarrow F(\mathbf{x}) \in U_\alpha).$$

Vlastnosti limity

Podobně jako dříve přímo z definice dostáváme následující užitečné tvrzení:

Věta (Limita zúžení):

Mějme vektorovou funkci $F\colon D_F \to \mathbb{R}^m$, $D_F \subset \mathbb{R}^n$ a hromadný bod $\mathbf{a}$ definičního oboru funkce F v němž existuje limita

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} F(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m.$$

Potom i pro $F|_M$ zúžení funkce F na množinu M, která má $\mathbf{a}$ jako hromadný bod, platí

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} (F|_M)(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m.$$

Speciálně, je-li $(\mathbf{x}_k)_{k=1}^{\infty}$ posloupnost bodů z D_F různých od $\mathbf{a}$, ale s limitou rovnou $\mathbf{a}$, pak

$$\lim_{k\to\infty} F(\mathbf{x}_k) = \mathbf{b}.$$

Vlastnosti limity

V podstatě stejně jako u posloupností můžeme dokázat následující tvrzení, důkaz na přednášce proto vynecháváme.

Věta:

Mějme (vektorovou) funkci $F\colon D_F \to \mathbb{R}^m$, $D_F \subset \mathbb{R}^n$, hromadný bod $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ množiny D_F a bod $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Potom platí

- $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} F(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$, právě když $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \|F(\mathbf{x}) - \mathbf{b}\| = 0$.
- Označme složky F jako $F(\mathbf{x}) = \big(F_1(\mathbf{x}), \cdots, F_m(\mathbf{x})\big)^T$, $\mathbf{x} \in D_F$. Pak $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} F(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$, právě když $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} F_j(\mathbf{x}) = b_j$ pro každé $j \in \hat{m}$.

Tvrzení tedy opět ukazuje vztah limity (vektorové) funkce, vzdálenosti a limit složek.

Vlastnosti limity

Spousta vlastností limit zůstává zachována. Například platí následující důležité analogie z BI-MA1 důvěrně známých tvrzení.

Věta (O limitě součtu, násobku):

Mějme dvě vektorové funkce $F\colon D_F \to \mathbb{R}^m$, $D_F \subset \mathbb{R}^n$, $G\colon D_G \to \mathbb{R}^m$, $D_G \subset \mathbb{R}^n$, bod $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, který je hromadným bodem množiny $D_F \cap D_G$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom pokud existují limity $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} F(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ a $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} G(\mathbf{x}) = \mathbf{c} \in \mathbb{R}^m$, potom platí

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \big(F(\mathbf{x}) + G(\mathbf{x})\big) = \mathbf{b} + \mathbf{c} \quad \text{a} \quad \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \alpha F(\mathbf{x}) = \alpha\mathbf{b}.$$

Věta (O limitě součinu a podílu):

Mějme dvě funkce $f\colon D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subset \mathbb{R}^n$, $g\colon D_g \to \mathbb{R}$, $D_g \subset \mathbb{R}^n$, bod $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, který je hromadným bodem množiny $D_f \cap D_g$. Potom pokud existují limity $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = b \in \mathbb{R}$ a $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = c \in \mathbb{R}$, potom platí

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x}) = b \cdot c \quad \text{a} \quad \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} = \frac{b}{c}, \ \text{pokud } c \neq 0.$$

Vlastnosti limity

Důkaz tvrzení o limitě součtu.

Mějme dvě vektorové funkce $F\colon D_F \to \mathbb{R}^m$, $D_F \subset \mathbb{R}^n$, $G\colon D_G \to \mathbb{R}^m$, $D_G \subset \mathbb{R}^n$, bod $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, který je hromadným bodem množiny $D_F \cap D_G$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Nechť dále existují limity $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} F(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ a $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} G(\mathbf{x}) = \mathbf{c} \in \mathbb{R}^m$.

Buď $U_{\mathbf{b}+\mathbf{c}}(\varepsilon)$ okolí bodu $\mathbf{b}+\mathbf{c}$. Dle předpokladů existují okolí $U_{\mathbf{a}}(\delta_1)$ bodu $U_{\mathbf{a}}(\delta_2)$ bodu $\mathbf{a}$ taková, že

$$\begin{aligned}
\forall \mathbf{x} \in (U_{\mathbf{a}}(\delta_1) \cap D_F) \smallsetminus \{\mathbf{a}\} &: \; F(\mathbf{x}) \in U_{\mathbf{b}}(\varepsilon/2),\\
\forall \mathbf{x} \in (U_{\mathbf{a}}(\delta_2) \cap D_G) \smallsetminus \{\mathbf{a}\} &: \; G(\mathbf{x}) \in U_{\mathbf{c}}(\varepsilon/2).
\end{aligned}$$

Položme $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Potom pro libovolné $\mathbf{x} \in \big(U_{\mathbf{a}}(\delta) \cap D_{F+G}\big) \smallsetminus \{\mathbf{a}\}$ platí (trojúhelníková nerovnost!)

$$\begin{aligned}
\big\|(F+G)(\mathbf{x}) - (\mathbf{b}+\mathbf{c})\big\| &= \big\|(F(\mathbf{x}) - \mathbf{b}) + (G(\mathbf{x}) - \mathbf{c})\big\| \\
&\leq \|F(\mathbf{x}) - \mathbf{b}\| + \|G(\mathbf{x}) - \mathbf{c}\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Tj. $(F+G)(\mathbf{x}) \in U_{\mathbf{b}+\mathbf{c}}(\varepsilon)$. $\square$

Hlavní body

1 Úvod

2 Okolí bodu v $\mathbb{R}^n$

3 Limita posloupností

4 Limita (vektorových) funkcí

5 Spojitost (vektorových) funkcí

6 Diferenciální počet

$$(\nabla^2 f)_{i,j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

$$(\nabla f)_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})$$

$$\|\mathbf{x}\|$$

Spojitost (vektorové) funkce

Spojitost opět vyjadřuje vztah mezi funkční hodnotou a limitou funkce v jistém bodě.

Definice (Spojitost (vektorové) funkce):

Mějme (vektorovou) funkci $F\colon A \to \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n$, a bod $\mathbf{a} \in D_F$, který je hromadným bodem množiny D_F.

Funkce F je spojitá v bodě $\mathbf{a}$, právě když

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{a}).$$

Funkci F nazveme **spojitou** (resp. **spojitou na množině M**), právě když je spojitá v každém bodě svého definičního oboru (resp. v každé bodě množiny M).

Definiční obory spojitých funkcí, na které narazíme, budou většinou nějaké otevřené množiny. Budou tedy definovány dokonce na celém okolí bodu $\mathbf{a}$.

Spojitost (vektorové) funkce

Následující tři věty nám velmi pomohou při rozhodování o spojitosti různých funkcí.

Věta (Spojitost součtu, násobku, součinu a podílu):

Mějme dvě vektorové funkce $F\colon D_F \to \mathbb{R}^m$, $D_F \subset \mathbb{R}^n$, $G\colon D_G \to \mathbb{R}^m$, $D_G \subset \mathbb{R}^n$, bod $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, který je hromadným bodem množiny $D_F \cap D_G$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Předpokládejme, že F i G jsou spojité v bodě $\mathbf{a}$. Potom

- $F + G$ je spojitá v $\mathbf{a}$,
- αF je spojitá v $\mathbf{a}$.

Pokud je $m = 1$, pak

- $F \cdot G$ je spojitá v $\mathbf{a}$,
- $\frac{F}{G}$ je spojitá v $\mathbf{a}$ v případě kdy $G(\mathbf{a}) \neq 0$.

Důkaz.

Sňatek definice spojitosti a věty o limitě součtu, násobku, součinu a podílu. □

Spojitost (vektorové) funkce

Často budeme mít (vektorovou) funkci zadanou pomocí spojitých elementárních funkcí jedné proměnné známých z BI-MA1. Tento případ řeší následující věta:

Věta:

Buďte $f\colon D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subset \mathbb{R}$, reálná funkce jedné reálné proměnné, $n \in \mathbb{N}$ a $k \in \hat{n}$. Definujme funkci (D_f v k-tém faktoru)

$$g(\mathbf{x}) := f(x_k), \text{ pro } \mathbf{x} \in D_g := \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} \times D_f \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}.$$

Je-li f spojitá, pak i g je spojitá.

Důkaz.

Mějme $\mathbf{a} \in D_g$, potom $a_k \in D_f$ je hromadným bodem D_f a tudíž i bod $\mathbf{a}$ je pak hromadným bodem D_g. Dále je f spojitá v a_k a proto platí $\lim_{x \to a_k} f(x) = f(a_k)$.

Tudíž: pro libovolné okolí $U_{f(a_k)}(\varepsilon)$ existuje $U_{a_k}(\delta)$ takové, že kdykoliv $x \in U_{a_k}(\delta) \cap D_f$, pak $f(x) \in U_{f(a_k)}$.

Vezmeme-li $\mathbf{x} \in U_{\mathbf{a}}(\delta)$ se stejným δ jako výše, pak $|x_k - a_k| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$ a proto

$$|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{a})| = |f(x_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

Tedy $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = g(\mathbf{a})$. $\square$

Spojitost (vektorové) složené funkce

Věta (O limitě složené (vektorové) funkce):

Mějme (vektorové) funkce $g\colon D_g \to \mathbb{R}^m$, $D_g \subset \mathbb{R}^n$ a $f\colon D_f \to \mathbb{R}^k$, $D_f \subset \mathbb{R}^m$. Dále předpokládejme, že g je spojitá v $\mathbf{a} \in D_g$ a f je spojitá a definovaná na okolí $g(\mathbf{a})$.

Potom je $f \circ g$ spojitá v bodě $\mathbf{a}$.

Důkaz.

Označme $\mathbf{b} := f(g(\mathbf{a}))$ a uvažme libovolné okolí $U_{\mathbf{b}}(\varepsilon)$ okolí bodu $\mathbf{b}$.

Protože $\lim\limits_{\mathbf{x}\to g(\mathbf{a})} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$, existuje okolí $U_{g(\mathbf{a})}(\delta_1)$ bodu $g(\mathbf{a})$ takové, že $f(\mathbf{x}) \in U_{\mathbf{b}}(\varepsilon)$, kdykoliv $\mathbf{x} \in U_{g(\mathbf{a})}(\delta_1)$.

Protože $\lim\limits_{\mathbf{x}\to \mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = g(\mathbf{a})$, existuje okolí $U_{\mathbf{a}}(\delta_2)$ bodu $\mathbf{a}$ takové, že $g(\mathbf{x}) \in U_{g(\mathbf{a})}(\delta_1)$, kdykoliv $\mathbf{x} \in (U_{\mathbf{a}}(\delta_2) \cap D_g)$.

Celkem tedy pokud vezmeme $\mathbf{x} \in (U_{\mathbf{a}}(\delta_2) \cap D_g) \setminus \{\mathbf{a}\}$, pak $g(\mathbf{x}) \in U_{g(\mathbf{a})}(\delta_1)$ a tedy i $f(g(\mathbf{x})) \in U_{\mathbf{b}}(\varepsilon)$, což jsme měli dokázat. $\square$

Příklady

Předchozí věta nám ihned dává například následující výsledky:

Příklad.

Následující funkce jsou spojité na svých definičních oborech:

- $f(x, y) = \sin(x) + \cos(y)$, $D_f = \mathbb{R}^2$.
- $f(x, y) = \ln(xy)$, $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > 0\}$. (Složená funkce!)
- $g(x, y) = \frac{y}{x^2} + x + y^2$, $D_g = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$.

- Měli bychom být tedy nyní schopní rozeznat spojité funkce zadané tímto způsobem.
- Dále bychom mohli formulovat například větu o limitě složené funkce a větu o spojitosti složené funkce...

Hlavní body

1. Úvod
2. Okolí bodu v $\mathbb{R}^n$
3. Limita posloupností
4. Limita (vektorových) funkcí
5. Spojitost (vektorových) funkcí
6. Diferenciální počet

$$(\nabla^2 f)_{i,j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

$$(\nabla f)_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})$$

$$\|\mathbf{x}\|$$

Parciální derivace

Nejprve se soustřeďme na chování pouze vzhledem k jedné zvolené proměnné.

Definice (Parciální derivace (v bodě) / *partial derivative*):

Mějme reálnou funkci n reálných proměnných $f\colon D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subset \mathbb{R}^n$, definovanou na okolí bodu $\mathbf{a} \in D_f$ a $j \in \hat{n}$.

Existuje-li limita

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{a})}{h} \in \overline{\mathbb{R}}, \tag{1}$$

pak její hodnotu nazýváme **parciální derivací funkce f v bodě $\mathbf{a}$ podle j-té proměnné** a značíme ji $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a})$, případně $\partial_{x_j} f(\mathbf{a})$.

Označme M jako množinu všech vnitřních bodů $\mathbf{a}$ množiny D_f, v kterých existuje konečná limita (1). Potom funkci přiřazující hodnotu $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a})$ každému $\mathbf{a} \in M \subset \mathbb{R}^n$ nazýváme **parciální derivací funkce f podle j-té proměnné** a značíme ji

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}, \quad \text{případně} \quad \partial_{x_j} f.$$

Vztah parciální derivace z derivace z BI-MA1

- Předchozí definice je nápadně podobná definici derivace reálné funkce reálné proměnné.
- Má-li funkce $f\colon D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subset \mathbb{R}^n$, parciální derivaci v bodě $\mathbf{a} \in D_f$ podle j-té proměnné, pak pokud definujeme

$$g(x) := f(\mathbf{a} + x\mathbf{e}_j),$$

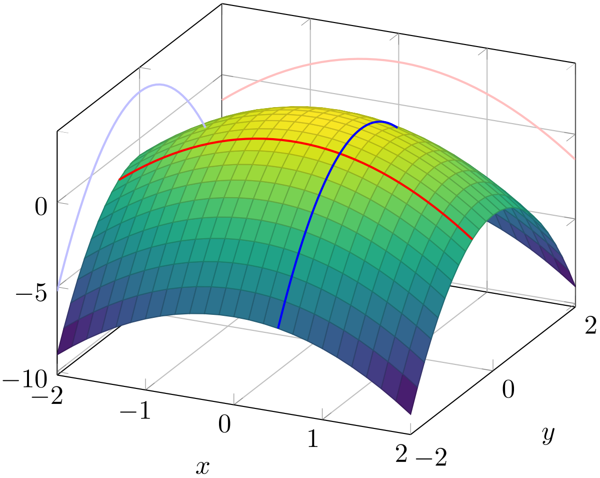
pak je g je reálná funkce jedné reálné proměnné definována na okolí bodu 0 a pro její derivaci v bodě 0 platí

$$g'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a}).$$

- Odtud okamžitě plyne geometrická interpretace parciální derivace: číselná hodnota parciální derivace funkce f v bodě a udává míru růstu/poklesu funkčních hodnot funkce f v bodě $\mathbf{a}$ ve směru rovnoběžném s j-tou souřadnou osou.
- Početní důsledek: Při parciálním derivování podle x_j se na ostatní proměnné díváme jako na konstanty a můžeme používat známá pravidla pro derivování (součet, součin, podíl, složená funkce, …).

Parciální derivace: ilustrace

K parciální derivaci funkce $f(x,y) = 3 - x^2 - 2y^2$ v bodě $(1/2, -1/2)^T$.



Parciální derivace vyššího řádu: značení

- Parciální derivace funkce f podle j-té proměnné je obecně funkce a má proto smysl uvažovat o *její* parciální derivaci podle k-té proměnné. K zjednodušení značení používáme následující zápis (pozor na pořadí)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} := \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) := \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)}{\partial x_k}.$$

- Dále případné opakované derivace podle stejné proměnné zkracujeme takto

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} := \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_k}.$$

- Podobně pro vyšší derivace. Například pod výrazem

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2^2}(1,2,3)$$

máme na mysli parciální derivaci podle x_1 druhé parciální derivace funkce f podle x_2 vypočtenou v bodě $(1,2,3)^T$.

Parciální derivace: výpočet

Z definice a dřívější poznámky je patrné, že při výpočtu parciální derivace uplatníme znalosti z BI-MA1. Derivujeme podle zadané proměnné a na ostatní se díváme jako na konstanty.

Příklad.

Rozmyslete následující výpočty.

- Pro $f(x, y) = x + xy + y$ platí

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 1 + 1 \cdot y + 0 = 1 + y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x \cdot 1 + 1 = x + 1.$$

- Pro $g(x, y, z) = e^y \cdot \sin(x + y) + zy$ platí

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z) = e^y \cdot \sin(x + y) + e^y \cdot \cos(x + y) + z,$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial z \partial y}(x, y, z) = 1.$$

Gradient funkce 1/2

Definice (Gradient funkce / *gradient of a function*):

Mějme reálnou funkci n reálných proměnných $f\colon D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subset \mathbb{R}^n$ mající všechny parciální derivace v bodě $\mathbf{a} \in D_f$. Potom řádkový vektor

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \right) \in \mathbb{R}^{1,n}$$

nazýváme **gradientem funkce f v bodě $\mathbf{a}$** a používáme pro něj značení

$$\nabla f(\mathbf{a}) \quad \text{nebo} \quad \operatorname{grad} f(\mathbf{a}).$$

Podobně jako u parciální derivace se pak na ∇f díváme jako na zobrazení (vektorovou funkci), které bodu přiřazuje hodnotu gradientu f v tomto bodě.

Příklad.

Hned se zamysleme nad jednoduchými příklady:

- Pro $f(x,y) = \pi$ máme $\nabla f(x,y) = (0,0)$.
- Pro $f(x,y) = x - y$ máme $\nabla f(x,y) = (1,-1)$.

Gradient funkce 2/2

Příklad.

Mějme funkci $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_1 x_2$, $D_f = \mathbb{R}^2$.
Potom gradient této funkce existuje v každém bodě jejího definičního obor a platí

$$\nabla f(x_1, x_2) = \big(3x_1^2 + x_2,\, x_1\big).$$

Příklad.

Mějme funkci $f(x, y, z) = \sin(x)\cos(y+z)$, $D_f = \mathbb{R}^2$.
Potom gradient této funkce existuje v každém bodě jejího definičního obor a platí

$$\nabla f(x, y, z) = \big(\cos(x)\cos(y+z),\, -\sin(x)\sin(y+z),\, -\sin(x)\sin(y+z)\big).$$

Derivace

- Parciální derivace zkoumala chování funkce jenom vzhledem k jedné proměnné.
- Motivace k zobecnění „derivace“, bez přívlastku „parciální“, pro funkce více proměnných vychází z role první derivace při lineární aproximaci funkce (viz první Taylorův polynom).

Definice (Derivace (vektorové) funkce):

Mějme zobrazení $F\colon D_f \to \mathbb{R}^m$, $D_f \subset \mathbb{R}^n$, definované na okolí bodu $\mathbf{a}$. Derivací zobrazení F v bodě $\mathbf{a}$ nazýváme matici $DF(\mathbf{a}) \in \mathbb{R}^{m,n}$ splňující

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{\|F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{a}) - DF(\mathbf{a})\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{a})\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|} = 0.$$

Tj. vágně $F(\mathbf{x}) \approx F(\mathbf{a}) + DF(\mathbf{a})\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{a})$, lokální chyba této aproximace je menší než lineární (dle definice).

Derivace

Věta (Složky matice $DF(\mathrm{a})$ a její jednoznačnost):

Pokud má zobrazení $F\colon D_f \to \mathbb{R}^m$, $D_f \subset \mathbb{R}^n$, definované na okolí bodu $\mathbf{a}$, derivaci $DF(\mathbf{a}) \in \mathbb{R}^{m,n}$ v bodě $\mathbf{a}$, potom

$$DF(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial F_m}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{pmatrix}.$$

Důkaz.

Určíme prvek matice $DF(\mathbf{a})$ v i-tém řádku a j-tém sloupci. Z předpokladu plyne (volíme $\mathbf{x} = \mathbf{a} + h\mathbf{e}_j$ a $h \to 0$)

$$0 = \lim_{h\to 0} \frac{\left|F_i(\mathbf{a}+h\mathbf{e}_j) - F_i(\mathbf{a}) - DF(\mathbf{a})_{i,j}h\right|}{|h|} = \lim_{h\to 0}\left|\frac{F_i(\mathbf{a}+h\mathbf{e}_j) - F_i(\mathbf{a})}{h} - DF(\mathbf{a})_{i,j}\right|.$$

$\square$

Gradient jakožto derivace

Na funkci n proměnných $f\colon D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subset \mathbb{R}^n$, lze nahlížet jako na zobrazení $f\colon D_f \to \mathbb{R}^1$ a proto pokud má v bodě $\mathbf{a} \in D_f$ derivaci $Df(\mathbf{a}) \in \mathbb{R}^{1,n}$, pak podle předchozí věty pro ni platí

$$Df(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \right) = \nabla f(\mathbf{a})$$

a není tedy ničím jiným, než gradientem funkce f v bodě $\mathbf{a}$.

Také je z tohoto pozorovaní patrné, proč jsme gradient striktně definovali jako *řádkový* vektor.

Poznámka:

- Pokud má f v bodě $\mathbf{a}$ derivaci $Df(\mathbf{a})$, pak má v tomto bodě i všechny parciální derivace (ukázali jsme).
- Toto tvrzení nelze obrátit, k existenci derivace $Df(\mathbf{a})$ už ale stačí např. spojitost všech parciálních derivací na okolí bodu $\mathbf{a}$ (nedokazujeme).

Druhá derivace – Hesseova matice

Definice (Hesseova matice):

Na derivaci, resp. gradient, funkce $f\colon D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subset \mathbb{R}^n$, lze nahlížet jako na zobrazení $Df\colon A \to \mathbb{R}^n$, $A \subset D_f$, jeho derivací v bodě $\mathbf{a} \in A$ je pak matice typu $\mathbb{R}^{n,n}$, kterou nazýváme **Hesseovou maticí** a značíme $\nabla^2 f(\mathbf{a})$. Pokud existuje, pak platí

$$\nabla^2 f(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\mathbf{a}) \end{pmatrix}.$$

Poznámka:

- Pořadí derivování nelze obecně zaměnit. Pokud ale například jsou všechny druhé parciální derivace spojité na okolí bodu $\mathbf{a}$, pak bude Hesseova matice symetrická (typicky náš případ).
- Ludwig Otto Hesse, německý matematik, 1811 – 1874.

Derivace složené funkce

Věta (Derivace složené funkce):

Mějme zobrazení $F\colon D_F \to \mathbb{R}^k$, $D_F \subset \mathbb{R}^m$ a $G\colon D_G \to \mathbb{R}^m$, $D_G \subset \mathbb{R}^n$ a bod $\mathbf{a} \in D_G$ takové, že existují $DG(\mathbf{a})$ a $DF\big(G(\mathbf{a})\big)$. Potom existuje i derivace složeného zobrazení $F \circ G$ v bodě $\mathbf{a}$ a platí

$$D\big(F \circ G\big)(\mathbf{a}) = DF\big(G(\mathbf{a})\big) \cdot DG(\mathbf{a}).$$

Doceňte kompaktní zápis pomocí matic a jejich násobení! Rozepsán explicitně pro $F = (F_1, \ldots, F_k)^T$ a $G = (G_1, \ldots, G_m)^T$ tento vztah po složkách říká (tzv. **řetězové pravidlo**)

$$\frac{\partial (F \circ G)_i}{\partial x_\ell}(\mathbf{a}) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(G(\mathbf{a})) \cdot \frac{\partial G_j}{\partial x_\ell}(\mathbf{a}), \quad i \in \hat{k},\ \ell \in \hat{n}.$$

Důkaz na přednášce vynecháváme.

Gradient funkce: geometrický význam

Věta (Derivace ve směru):

Nechť $f\colon D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subset \mathbb{R}^n$ má derivaci v bodě $\mathbf{a} \in D_f$. Buď $\mathbf{s}$ vektor délky 1. Potom existuje limita (tzv. **derivace funkce f ve směru $\mathbf{s}$ v bodě $\mathbf{a}$**)

$$\partial_{\mathbf{s}} f(\mathbf{a}) := \lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{a}+h\mathbf{s}) - f(\mathbf{a})}{h}$$

a je rovna $\langle \nabla f(\mathbf{a}) \mid \mathbf{s}\rangle$.

Důkaz.

Použijte větu o derivaci složené funkce na $g(h) = f(\mathbf{a}+h\mathbf{s})$. □

Důsledek (Gradient jakožto směr největšího růstu):

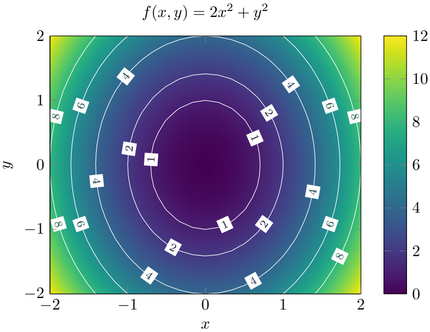
Nechť $f\colon D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subset \mathbb{R}^n$ má nenulovou derivaci v bodě $\mathbf{a} \in D_f$. Buď $\mathbf{s}$ vektor délky 1. Potom $\partial_{\mathbf{s}} f(\mathbf{a})$ nabývá největší hodnoty pro $\mathbf{s} = \nabla f(\mathbf{a})^T / \|\nabla f(\mathbf{a})\|$.

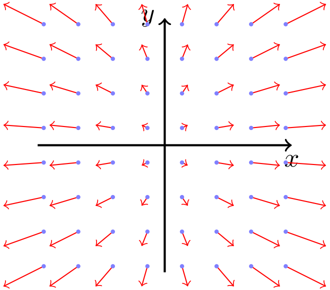
Důkaz.

Platí $|\langle \nabla f(\mathbf{a})^T \mid \mathbf{s}\rangle| \leq \|\nabla f(\mathbf{a})\|$ a současně $\langle \nabla f(\mathbf{a})^T \mid \pm\nabla f(\mathbf{a})^T\rangle = \pm\|\nabla f(\mathbf{a})\|^2$. □

Gradient funkce: geometrický význam

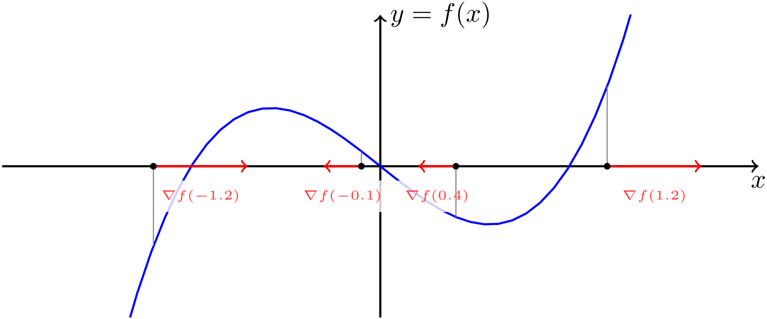
Ukázka funkce $f(x,y) = 2x^2 + y^2$ (levý graf) a jejího gradientu $\nabla f(x,y) = (4x, 2y)$ vizualizovaného pomocí vektorového pole (pravý graf).





Gradient funkce: 1D případ

V případě diferencovatelné funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a bodu $a \in D_f$ je gradient řádkový vektor $\nabla f(a) = (f'(a)) \in \mathbb{R}^{1,1}$.



Hlavní body

$$(\nabla^2 f)_{i,j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

$$(\nabla f)_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

7 Dodatek

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} f(\mathbf{x})$$

$$\|\mathbf{x}\|$$

Komentář

- Vedle vnitřního bodu množiny, resp. otevřené množiny, hromadného bodu množiny a hraničního bodu množiny lze pomocí pojmu okolí ještě zavést **vnější bod množiny** (bod mající okolí disjunktní s danou množinou), **uzávěr množiny** (sjednocení množiny s její hranicí) a **uzavřenou množinu** (množina, která je shodná se svým uzávěrem). Těmito pojmy a axiomatizací pojmu okolí se zabývá partie matematiky nazývaná **Topologie**. V našem výkladu do těchto partií příliš zabíhat nebudeme, ale základní pojmy jako otevřená množina a hromadný bod budeme využívat.

- Pro derivaci vektorové funkce F v bodě, ozn. DF, se také používá termín **totální derivace**.