Matematická analýza 2

Kvadratické formy

Pavel Hrabák[1], Tomáš Kalvoda[2], Ivo Petr[3]

[1]pavel.hrabak@fit.cvut.cz, [2]tomas.kalvoda@fit.cvut.cz, [3]ivo.petr@fit.cvut.cz

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze

1. listopadu 2024
ZS 2024/2025

Hlavní body

1. Kvadratické formy
2. Definitnost kvadratických forem
3. Určování definitnosti forem

$$q(\mathbf{x}) \geq 0$$

$$\sum_{j,k=1}^{n} \mathbf{M}_{j,k}\mathbf{x}_j\mathbf{x}_k$$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{M}\mathbf{x} \rangle$$

$$\mathbf{x}^T\mathbf{M}\mathbf{x}$$

Hlavní výsledky této přednášky

- Motivace pro zavedení kvadratických forem.
- Zavedení různých typů definitností kvadratických forem.
- Kritéria pro určování definitností kvadratických forem.

Hlavní body

1. Kvadratické formy
2. Definitnost kvadratických forem
3. Určování definitnosti forem

$$q(\mathbf{x}) \geq 0$$

$$\sum_{j,k=1}^{n} \mathbf{M}_{j,k}\mathbf{x}_j\mathbf{x}_k$$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{M}\mathbf{x} \rangle$$

$$\mathbf{x}^T\mathbf{M}\mathbf{x}$$

Motivace a úvahy

Naším cílem v další části přednášky bude hledání extrémů funkcí více proměnných. Připomeňme si několik znalostí z předchozího studia.

Mějme funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mající spojitou třetí derivaci na celém $\mathbb{R}$ a bod $a \in \mathbb{R}$. Potom dle Taylorovy věty platí

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + o\big((x-a)^2\big), \quad \text{pro } x \to a.$$

V tomto výrazu bychom nyní měli vidět další důvod pro z BI-MA1 známé kritérium (pro maximum podobně):

Pokud $f'(a) = 0$ a $f''(a) > 0$, potom f má v bodě a ostré lokální minimum.

Můžeme podobnou úvahu učinit i pro funkce více proměnných? Co je v tomto případě analogem lineárního a kvadratického členu?

Kvadratická forma

Definice (Kvadratická forma / *quadratic form*):

Funkci $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nazýváme kvadratickou formou, právě když existuje symetrická matice $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n,n}$ splňující

$$q(\mathbf{x}) = \sum_{j,k=1}^{n} \mathbf{M}_{j,k} \mathbf{x}_j \mathbf{x}_k, \quad \text{pro každé } \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n.$$

- Pokud $n = 1$, pak máme $q(\mathbf{x}) = \alpha x_1^2$ pro nějaké $\alpha \in \mathbb{R}$.
- Připomenutí: matice $\mathbf{M}$ je symetrická, právě když $\mathbf{M}^T = \mathbf{M}$.
- Pomocí standardního skalárního součinu a násobení matic můžeme výraz výše vyjádřit alternativně i takto

$$q(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x} \,|\, \mathbf{M}\mathbf{x} \rangle = \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x}.$$

- Předpoklad symetričnosti není omezující. Pro každou matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ a vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ platí $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \frac{1}{2}\left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\right) \mathbf{x}$, kde $\frac{1}{2}\left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\right)$ je symetrická matice.

Kvadratická forma

Příklad.

Jako explicitní příklad uvažme kvadratickou formu

$$q(\mathbf{x}) = 2x_1^2 - 5x_2^2 + 3x_1x_2.$$

Pro ni máme matici

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 3/2 \\ 3/2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Skutečně,

$$\mathbf{x}^T\mathbf{M}\mathbf{x} = (x_1, x_2)\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3/2 \\ 3/2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}} = (x_1, x_2)\underbrace{\begin{pmatrix} 2x_1 + \frac{3}{2}x_2 \\ \frac{3}{2}x_1 - 5x_2 \end{pmatrix}} =$$

$$= 2x_1^2 + \frac{3}{2}x_1x_2 + \frac{3}{2}x_2x_1 - 5x_2^2 = \boxed{2x_1^2 + 3x_1x_2 - 5x_2^2}.$$

Kvadratická forma

- Kvadratická forma představuje zobecnění *pouze* kvadratického členu αx^2 pro funkce více proměnných.
- Zobecněním známých kvadratických funkcí $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jsou **kvadriky**. Přesněji funkce tvaru $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ splňující

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + \gamma,$$

kde $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n,n}$ je symetrická matice, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ je vektor a $\gamma \in \mathbb{R}$.

Příklad.

Konkrétně pro

$$Q(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x + 3y + 4$$

bychom měli

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}^T = (-2, 3), \quad \text{a} \quad \gamma = 4.$$

Hlavní body

$$q(\mathbf{x}) \geq 0$$

1 Kvadratické formy

$$\sum_{j,k=1}^{n} \mathbf{M}_{j,k}\mathbf{x}_j\mathbf{x}_k$$

2 Definitnost kvadratických forem

3 Určování definitnosti forem

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{M}\mathbf{x} \rangle$$

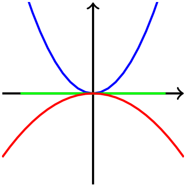
$$\mathbf{x}^T\mathbf{M}\mathbf{x}$$

Definitnost kvadratických forem

Z předchozí motivace je zřejmé, že nás zajímá **znaménko** hodnot kvadratické formy: nabývá pouze nezáporných hodnot? Nabývá kladných i záporných hodnot? Atd.

V případě $n = 1$ je situace jednoduchá, pro $q(\mathbf{x}) = \alpha x_1^2$ platí následující implikace:

- $\alpha = 0 \Rightarrow q(\mathbf{x}) = 0$ pro všechna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,
- $\alpha > 0 \Rightarrow q(\mathbf{x}) > 0$ pro všechna nenulová $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,
- $\alpha < 0 \Rightarrow q(\mathbf{x}) < 0$ pro všechna nenulová $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.



Vše se ale komplikuje už i v případě $n = 2$. Například pro $q(\mathbf{x}) = x_1^2 - x_2^2$ platí $q(\mathbf{e}_1) = 1$ a současně $q(\mathbf{e}_2) = -1$.

Definitnost kvadratických forem

Všechny možné situace související se znaménkem kvadratické formy vystihují různé typy *definitnosti* kvadratických forem:

Definice (Typy definitnosti kvadratických forem):

Kvadratickou formu $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nazveme...

- ...**pozitivně definitní** (PD), právě když $q(\mathbf{x}) > 0$ pro každé nenulové $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
- ...**pozitivně semidefinitní** (PSD), právě když $q(\mathbf{x}) \geq 0$ pro každé $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
- ...**indefinitní** (ID), právě když existují vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ splňující $q(\mathbf{x}) > 0$ a $q(\mathbf{y}) < 0$.
- ...**negativně semidefinitní** (NSD), právě když $q(\mathbf{x}) \leq 0$ pro každé $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
- ...**negativně definitní** (ND), právě když $q(\mathbf{x}) < 0$ pro každé nenulové $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Stejnou terminologii budeme používat i pro symetrické matice $\mathbf{M}$: $\mathbf{M}$ je typu T, právě když forma $\mathbf{x}^T\mathbf{M}\mathbf{x}$ je typu T.

Definitnost kvadratických forem

Pozor! Terminologie napříč různými zdroji (literatura, web) není zcela ustálená, existují dva přístupy. V tomto kurzu se striktně držíme předchozí definice, v které každá PD kvadratická forma je i PSD (analogicky pro ND a NSD).

Alternativní terminologie u „PSD“ forem vyžaduje existenci nenulového vektoru s nulovou hodnotou. V takovém případě (ne v našem!) jsou množiny PSD a PD forem disjunktní.

Příklad (Případ jedné proměnné, $n = 1$).

- Pokud $\alpha > 0$, pak $q(x) = \alpha x^2$ je PD (i PSD).
- Pokud $\alpha < 0$, pak $q(x) = \alpha x^2$ je ND (i NSD).
- Pokud $\alpha = 0$, pak $q(x) = 0$ je PSD i NSD současně.
- Indefinitní kvadratické formy v jedné dimenzi neexistují!

Definitnost kvadratických forem

Příklad (Případ dvou proměnných, $n = 2$).

Nejprve jednoduché příklady:

- $q(x, y) = x^2 + y^2$ je PD (a tedy i PSD): pro každý vektor $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ platí $q(x, y) \geq 0$, rovnost nule nastává právě když oba kvadráty jsou nulové, tj. právě když $(x, y) = \theta$.
- $q(x, y) = -x^2$ je NSD, ale není ND: pro každý vektor $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ platí $q(x, y) \leq 0$, nulovou hodnotu dostaneme i pro nenulový vektor $(0, 1) \neq \theta$: $q(0, 1) = 0$.
- $q(x, y) = xy$ je ID: máme například $q(1, 1) = 1$ a současně $q(1, -1) = -1$.

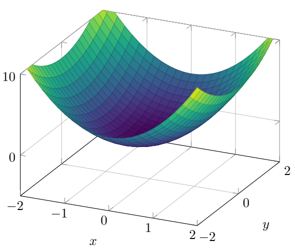
Rozeznat znaménko hodnot kvadratických forem ale *nemusí být ihned očividné*. Uvažte například

- $q(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2$ je PD,
- $q(x, y) = x^2 + 4xy + y^2$ je ID.

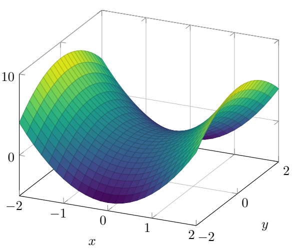
Jak jsme se k tomuto výsledku dostali? Ve zbytku přednášky se tímto problémem budeme zabývat.

Definitnost kvadratických forem: dvě proměnné

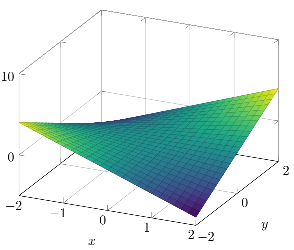
PD & PSD: $f(x,y) = 2x^2 + y^2$



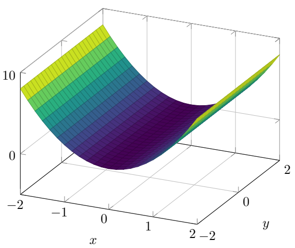
ID: $f(x,y) = x^2 - y^2$



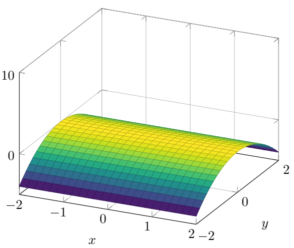
ID: $f(x,y) = xy$



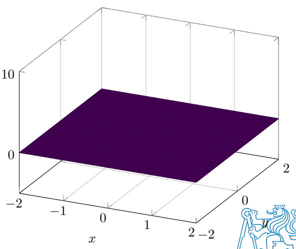
PSD: $f(x,y) = 2x^2$



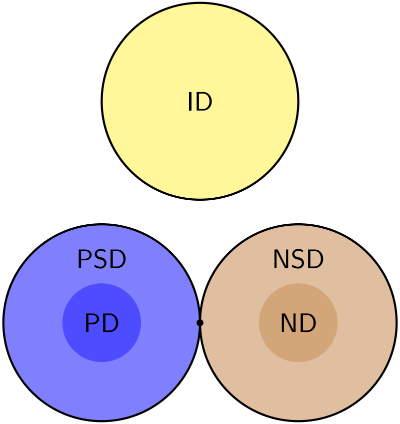
NSD: $f(x,y) = -y^2$



PSD & NSD: $f(x,y) = 0$



Definitnost kvadratických forem



Znázornění vztahů mezi různými typy definitností pomocí Vennova diagramu. Jediná forma, která je současně NSD a PSD je nulová kvadradtická forma (znázorněna puntíkem •).

Hlavní body

1. Kvadratické formy
2. Definitnost kvadratických forem
3. Určování definitnosti forem

$$q(\mathbf{x}) \geq 0$$

$$\sum_{j,k=1}^{n} \mathbf{M}_{j,k}\mathbf{x}_j\mathbf{x}_k$$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{M}\mathbf{x} \rangle$$

$$\mathbf{x}^T\mathbf{M}\mathbf{x}$$

Klíčové pozorování

Začněme nejprve jednoduchými kritérii pro indefinitnost (stačí nalézt dva vektory, pro které dostaneme hodnoty různých znamének).
Pokud máme kvadratickou formu

$$q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x},$$

pak dosazením j-tého standardního bazického $\mathbf{e}_j$ vektoru dostaneme j-tý prvek na diagonále matice $\mathbf{M}$: $q(\mathbf{e}_j) = \mathbf{M}_{jj}$. Tudíž:

Pozorování:

Pokud má symetrická matice $\mathbf{M}$ na diagonále prvky s různým znaménkem (jedno kladné, jedno záporné), *potom* je kvadratická forma $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x}$ indefinitní.

Poznámka:

Toto pozorování dává pouze postačující podmínku pro indefinitnost. Kvadratická forma $q(\mathbf{x}) = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$ je indefinitní (ukážeme později) i když má na diagonále pouze kladná čísla!

Vztah definitností s vlastními čísly

Bez důkazu uvedeme následující klíčové tvrzení z Lineární algebry (studenti z BI-LA2 znají, pro ostatní stačí bez důkazu jako fakt).

Věta (Diagonalizace symetrické reálné matice):

Symetrická reálná matice je diagonalizovatelná a všechna její vlastní čísla jsou reálná. Vlastní vektory příslušející různým vlastním číslům jsou vzájemně ortogonální.

Připomeňme explicitněji *smysl předchozího tvrzení*: máme-li symetrickou reálnou matici $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n,n}$, pak existuje diagonální matice $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n,n}$ a regulární matice $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n,n}$ splňující

$$\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P}, \quad \text{resp.} \quad \mathbf{M} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}.$$

O matici $\mathbf{D}$ dále víme, že má na diagonále vlastní čísla matice $\mathbf{M}$ a v matici $\mathbf{P}$ jsou ve sloupcích vlastní vektory příslušející vlastním číslům v pořadí na diagonále $\mathbf{D}$. Matici $\mathbf{P}$ lze volit tak, aby $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T$.

Vztah definitností s vlastními čísly

Vztah mezi vlastními čísly matice $\mathbf{M}$ a definitností příslušné kvadratické formy je velmi úzký a názorný:

Důsledek:

Kvadratická forma $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{M}\mathbf{x}$ je

- PD, právě když všechna vlastní čísla matice $\mathbf{M}$ jsou kladná. > 0
- PSD, právě když všechna vlastní čísla matice $\mathbf{M}$ jsou nezáporná. ≥ 0
- ID, právě když má matice $\mathbf{M}$ kladné i záporné vlastní číslo. $\lesseqgtr 0$
- NSD, právě když všechna vlastní čísla matice $\mathbf{M}$ jsou nekladná. ≤ 0
- ND, právě když všechna vlastní čísla matice $\mathbf{M}$ jsou záporná. < 0

Vztah s vlastními čísly

Důkaz.

Příprava: Dle předchozí věty pro reálnou symetrickou matici $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n,n}$ existuje diagonální matice $\mathbf{D} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ a ortogonální[a] matice $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n,n}$ splňující $\mathbf{M} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^T$. Potom pro naši formu platí

$$q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{M}\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^T\mathbf{x} = \left(\mathbf{P}^T\mathbf{x}\right)^T\mathbf{D}\left(\mathbf{P}^T\mathbf{x}\right) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left(\mathbf{P}^T\mathbf{x}\right)_j^2. \qquad (\star)$$

PSD: Pokud $\lambda_j \geq 0$ pro každé $j \in \hat{n}$, pak z $(\star)$ plyne $q(\mathbf{x}) \geq 0$ pro každý $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Naopak, pokud $q(\mathbf{x}) \geq 0$ pro každý $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, pak pro $j \in \hat{n}$ zvolme $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{e}_j$ (vl. vektor příslušející λ_j) a dostaneme $\lambda_j = q(\mathbf{x}) \geq 0$.

PD: Vzhledem k předchozímu bodu stačí ukázat ekvivalenci: $q(\mathbf{x}) = 0$ pouze pro $\mathbf{x} = \theta$, právě když $\lambda_j > 0$ pro každé $j \in \hat{n}$. $\Rightarrow$: Opět pro $j \in \hat{n}$ zvolme $x = \mathbf{P}\mathbf{e}_j \neq \theta$, pak $0 < q(\mathbf{x}) = \lambda_j$. $\Leftarrow$: Z $q(\mathbf{x}) = 0$ a $(\star)$ v tomto případě plyne $\mathbf{P}^T\mathbf{x} = \theta$ a tedy i $\mathbf{x} = \theta$.

NSD a **ND**: analogicky.

ID: Důsledek již dokázaného. □

[a] Tj. regulární splňující $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T$.

Úprava na čtverce

Mějme kvadratickou formu $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x}$ a postupně provádějme následující algebraické operace (pokud je to možné, viz další slide):

1. Ve výrazu $q(\mathbf{x})$ zvolme proměnnou x_k, která se v něm vyskytuje v kvadrátu.
2. Vezměme všechny členy obsahující proměnnou x_k, tj. výraz tvaru
$$\alpha x_k^2 + A(x_j,\ j \neq k) \cdot x_k,$$
kde výraz $A := A(x_j,\ j \neq k)$ obsahuje už pouze konstantní násobky proměnných různých od x_k.
3. Tento výraz doplňme na čtverec pomocí standardní úpravy
$$\alpha x_k^2 + A \cdot x_k = \alpha \left(x_k + \frac{A}{2\alpha} \right)^2 - \frac{A^2}{4\alpha}.$$
4. Celkem pak dostáváme rovnost
$$q(\mathbf{x}) = \alpha \left(x_k + \frac{A}{2\alpha} \right)^2 + \tilde{q}(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n),$$
kde nová forma $\tilde{q}$ už nezávisí na k-té proměnné x_k.
5. Opakujme tento postup s $\tilde{q}$.

Pokud tento proces úspěšně proběhne, tak na konci získáme $q(\mathbf{x})$ ve tvaru součtu konstantních násobků nejvýše n čtverců.

Úprava na čtverce

Předpokládejme, že předchozí postup úspěšně proběhl a máme tedy $q(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, vyjádřeno ve tvaru

$$q(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \big((\mathbf{Px})_j\big)^2,$$

kde $1 \leq k \leq n$, $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{k,n}$ má hodnost k (plyne z postupné eliminace proměnných) a $\alpha_j \neq 0$, $j \in \hat{k}$.

Potom platí:

- Pokud $k = n$ a $\alpha_j > 0$ pro všechna $j \in \hat{k}$, potom je q PD.
- Pokud $k = n$ a $\alpha_j < 0$ pro všechna $j \in \hat{k}$, potom je q ND.
- Pokud $k < n$ a $\alpha_j > 0$ pro všechna $j \in \hat{k}$, potom je q PSD (ale ne PD).
- Pokud $k < n$ a $\alpha_j < 0$ pro všechna $j \in \hat{k}$, potom je q NSD (ale ne ND).
- Pokud existují $j, \ell \in \hat{k}$ taková, že $\alpha_j > 0$ a $\alpha_\ell < 0$, potom je q ID.

Úprava na čtverce: záludný detail

- Problém v předchozím postupu nastane v případě, kdy se jistá proměnná ve výrazu nevyskytuje v kvadrátu, ale pouze ve smíšených členech. Například xy.
- V takovém konkrétním případě dvou proměnných můžeme použít úpravu

$$xy = \frac{1}{4}(x+y)^2 - \frac{1}{4}(x-y)^2,$$

  resp. provést substituci $x = u + v$ a $y = u - v$.
- V obecném případě většího počtu smíšených členů (nejhůře matice $\mathbf{M}$ s nulovou diagonálou) se postup více komplikuje, ale výše uvedená substituce pomůže.
- Úpravu na čtverec ale není nutné provádět, pokud lze snadno rozhodnout o ID. Např.:

$$q(x,y,z,u) = (x+y)^2 + yz - 2zu$$

  je ID: vynulujeme kvadrát ($x = -y$) a zbývající volnost využijeme k vytvoření hodnot s různými znaménky: $q(-1,1,1,1) = -1$ a $q(-1,1,-1,1) = 1$.

Úprava na čtverce: příklady

Rozhodněme o definitnosti dvou kvadratických forem, které jsme zmínili dříve během přednášky.

Příklad.

Kvadratická forma $q(x,y) = x^2 + 2xy + 2y^2$ je PD, protože

$$q(x,y) = (x+y)^2 + y^2$$

Dvě proměnné & dva kladné čtverce.

Příklad.

Kvadratická forma $q(x,y) = x^2 + 4xy + y^2$ je ID, protože

$$q(x,y) = (x+2y)^2 - 3y^2.$$

Jeden čtverec kladný, jeden záporný. Odtud také hned vidíme: $q(2,-1) = -3$ (nuluje první čtverec), $q(1,0) = 1$ (nuluje druhý čtverec).

Sylvestrovo kritérium

Pro matici $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n,n}$ definujme $\mathbf{M}_k$ jakožto čtvercovou matici $\mathbf{M}_k = (\mathbf{M}_{ij})_{i,j=1}^{k}$ (tj. „$k \times k$ podmatici v levém horním rohu“).

K určení pozitivní nebo negativní definitnosti máme k dispozici následující kritérium:

Věta (Sylvestrovo kritérium):

Kvadratická forma $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{M}\mathbf{x}$, kde $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n,n}$ je symetrická matice, je

- PD, právě když pro každé $k \in \hat{n}$ platí $\det \mathbf{M}_k > 0$.
- ND, právě když pro každé $k \in \hat{n}$ platí $(-1)^k \det \mathbf{M}_k > 0$.

Toto tvrzení nemluví o semidefinitnosti!

Sylvestrovo kritérium: důkaz

Důkaz stačí provést pro případ PD. Ano, $\mathbf{M}$ je ND, právě když $-\mathbf{M}$ je PD a to je ekvivalentní podmínkám $0 < \det(-\mathbf{M}_k) = (-1)^k \det \mathbf{M}_k$, $k \in \hat{n}$.

PD $\Rightarrow \det \mathbf{M}_k > 0$ pro každé $k \in \hat{n}$.

Nejprve si všimněme, že kvadratická forma definovaná maticí $\mathbf{M}_k$ je PD pro libovolné $k \in \hat{n}$. Skutečně, je-li $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^k$ nenulový vektor, pak vektor $\mathbf{x} := (y_1, \ldots, y_k, 0, \ldots 0) \in \mathbb{R}^n$ je také nenulový a dle předpokladu platí (využijte nul!)

$$\mathbf{y}^T \mathbf{M}_k \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x} > 0.$$

Nyní si stačí uvědomit, že determinant libovolné symetrické reálné PD matice je roven součinu jejích vlastních čísel, která jsou všechna kladná a proto je sám kladný. $\square$

Sylvestrovo kritérium: důkaz

Lemma:

Mějme symetrickou matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ takovou, že $\mathbf{A}_{n-1}$ je regulární a označme $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{n-1} & \mathbf{a} \\ \mathbf{a}^T & \alpha \end{pmatrix}$. Potom existuje regulární matice $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n,n}$ splňující $\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{n-1} & \theta \\ \theta^T & \beta \end{pmatrix}$. Pokud navíc $\det \mathbf{A}_{n-1} > 0$ a $\det \mathbf{A} > 0$, potom $\beta > 0$.

Důkaz.

Díky regularitě matice $\mathbf{A}_{n-1}$ má soustava $\mathbf{A}_{n-1}\mathbf{x} = \mathbf{a}$ právě jedno řešení, ozn. ho $\mathbf{b} = \mathbf{A}_{n-1}^{-1}\mathbf{a}$. Položme $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{n-1} & -\mathbf{b} \\ \theta^T & 1 \end{pmatrix}$. Takováto matice je jistě regulární a platí

$$\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{n-1} & \theta \\ -\mathbf{b}^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{n-1} & \mathbf{a} \\ \mathbf{a}^T & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{n-1} & -\mathbf{b} \\ \theta^T & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{n-1} & \mathbf{a} \\ -\mathbf{b}^T\mathbf{A}_{n-1} + \mathbf{a}^T = \theta^T & -\mathbf{b}^T\mathbf{a} + \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{n-1} & -\mathbf{b} \\ \theta^T & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{n-1} & -\mathbf{A}_{n-1}\mathbf{b} + \mathbf{a} = \theta \\ \theta^T & -\mathbf{b}^T\mathbf{a} + \alpha =: \beta \end{pmatrix}$$

Dodatek plyne z rovnosti $(\det \mathbf{P})^2 \det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}_{n-1} \cdot \beta$. □

Sylvestrovo kritérium: důkaz

Nyní můžeme dokončit důkaz Sylvestrova kritéria.

$\det \mathbf{M}_k > 0$ pro každé $k \in \hat{n} \Rightarrow$ PD.

Tvrzení je pravdivé pro $n = 1$ $\big(\det(a_{11}) = a_{11}\big)$.
Mějme $n \geq 2$ a předpokládejme, že tvrzení platí pro $n - 1$. Z předchozího Lemma aplikovaného na $\mathbf{M}$ plyne existence regulární matice $\mathbf{P}$ takové, že

$$(\mathbf{P}\mathbf{x})^T \mathbf{M} (\mathbf{P}\mathbf{x}) = \mathbf{x}_{n-1} \mathbf{M}_{n-1} \mathbf{x}_{n-1} + \beta x_n^2,$$

kde $\mathbf{x}_{n-1} = (x_1, \ldots, x_{n-1})^T$. Matice $\mathbf{M}_{n-1}$ je PD a β je kladná, takže i $\mathbf{M}$ je PD. $\square$

Sylvestrovo kritérium

Následující příklad vyvrací častý mýtus, který se někdy objevuje i v literatuře: pokud platí $\det \mathbf{M}_k \geq 0$ pro každé $k \in \hat{n}$, tak příslušná kvadratická forma není nutně PSD (analogicky pro NDS).

Příklad.

Uvažme

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Potom $\det \mathbf{M}_1 = 1 \geq 0$, $\det \mathbf{M}_2 = 0 \geq 0$ a $\det \mathbf{M}_3 = 0 \geq 0$. Ale příslušná forma je indefinitní, protože (úprava na čtverce)

$$q_{\mathbf{M}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x} = x_1^2 + 4x_1x_3 + x_3^2 = (x_1 + 2x_3)^2 - 3x_3^2$$

a proto $q_{\mathbf{M}}(2, 0, -1) = -3 < 0$ a $q_{\mathbf{M}}(1, 0, 0) = 1 > 0$.

Hlavní body

$$q(\mathbf{x}) \geq 0$$

$$\sum_{j,k=1}^{n} \mathbf{M}_{j,k}\mathbf{x}_j\mathbf{x}_k$$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{M}\mathbf{x} \rangle$$

$$\mathbf{x}^T\mathbf{M}\mathbf{x}$$

Komentář

- Různé zdroje důkaz Sylvestrova kritéria vynechávají, nebo uvádějí komplikované důkazy. V tomto materiálu vycházíme z S. M. Samuels, *A Simplified Proof of a Sufficient Condition for a Positive Definite Quadratic Form*, The American Mathematical Monthly Vol. **73**, No. 3 (1966), pp. 297-298.