Matematická analýza 2

Vícerozměrná integrace

Pavel Hrabák[1], Tomáš Kalvoda[2], Ivo Petr[3]

[1]pavel.hrabak@fit.cvut.cz, [2]tomas.kalvoda@fit.cvut.cz, [3]ivo.petr@fit.cvut.cz

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze

22. prosince 2024
ZS 2024/2025

Hlavní body

$$\int_{\langle a_1,b_1\rangle\times\langle a_2,b_2\rangle} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

1. Riemannova konstrukce integrálu
2. Vlastnosti Riemannova integrálu
3. Fubiniho věta
4. Příklady

$$\int_D f+\alpha g = \int_D f + \alpha\int_D g$$

$$\mathrm{Vol}_n(K) = \int_K 1$$

Hlavní výsledky této přednášky

- Riemannova konstrukce integrálu funkce více proměnných.
- Základní vlastnosti Riemannova integrálu a jeho interpretace.
- Fubiniho věta a vícenásobný integrál.
- Poznámka: tato přednáška je více „početně“ zaměřená. Do důkazů se příliš nepouštíme. Pro vícerozměrnou teorii integrace by bylo daleko výhodnější využít **Lebesgueovy konstrukce integrálu**, kterou se na tomto místě zabývat nebudeme.

Hlavní body

$$\int_{\langle a_1,b_1\rangle\times\langle a_2,b_2\rangle} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

1. Riemannova konstrukce integrálu

2. Vlastnosti Riemannova integrálu

$$\int_D f+\alpha g = \int_D f + \alpha\int_D g$$

3. Fubiniho věta

4. Příklady

$$\mathrm{Vol}_n(K) = \int_K 1$$

Od jedné proměnné k více proměnným

- Na začátku semestru jsme v BI-MA2 zkonstruovali Riemannův integrál reálné funkce jedné reálné proměnné na intervalu $\langle a, b\rangle$.
- Analogem intervalu v $\mathbb{R}^2$ je obdélník, tedy kartézský součin dvou intervalů $\langle a_1, b_1\rangle \times \langle a_2, b_2\rangle$.
- Analogem intervalu v $\mathbb{R}^3$ je kvádr, tedy kartézský součin tří intervalů $\langle a_1, b_1\rangle \times \langle a_2, b_2\rangle \times \langle a_3, b_3\rangle$.
- Obecně, v $\mathbb{R}^n$ se nejprve zabýváme integrací funkcí na množinách tvaru

$$\bigtimes_{j=1}^{n} \langle a_j, b_j\rangle,$$

tedy přes tzv. **hyperkvádr** (*hypercuboid*).

Riemannův integrál

Pro jednoduchost a snazší představitelnost se při stručném popisu Riemannovy konstrukce integrálu omezíme na dvě proměnné.

1. Mějme funkci dvou proměnných f definovanou a omezenou na obdélníku $D := \langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle$.
2. Pro dělení $\sigma_x = \{x_0 = a_1 < x_1 < \cdots < x_n = b_1\}$ intervalu $\langle a_1, b_1 \rangle$ a $\sigma_y = \{y_0 = a_2 < y_1 < \cdots < y_m = b_2\}$ intervalu $\langle a_2, b_2 \rangle$ definujme
$$m_{i,j} := \inf\{f(x,y) \mid (x,y) \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle \times \langle y_{j-1}, y_j \rangle\},$$
$$M_{i,j} := \sup\{f(x,y) \mid (x,y) \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle \times \langle y_{j-1}, y_j \rangle\}, \quad i \in \hat{n},\ j \in \hat{m}.$$
Množinu $\sigma = \sigma_x \times \sigma_y$ nazveme **dělením obdélníku** D.
3. Dále definujme **dolní a horní součty funkce f na obdélníku D při dělení** σ předpisy
$$s(f,\sigma) := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} m_{i,j}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}),$$
$$S(f,\sigma) := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} M_{i,j}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}).$$

Riemannův integrál

4. Nyní pro funkci f a obdélník D definujeme **horní a dolní integrál funkce f na obdélníku D** následujícím předpisem

$$\overline{\int_D} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y := \inf\{S(f,\sigma) \mid \sigma \text{ dělení obdélníku } D\},$$
$$\underline{\int_D} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y := \sup\{s(f,\sigma) \mid \sigma \text{ dělení obdélníku } D\}.$$

5. Omezenou funkci f nazveme **Riemannovsky integrabilní na obdélníku D**, právě když

$$\overline{\int_D} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \underline{\int_D} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Tuto společnou reálnou hodnotu potom nazýváme **Riemannovým integrálem funkce f na obdélníku D** a značíme ji

$$\int_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad \text{nebo} \quad \int_D f.$$

Riemannův integrál

- Pokud bychom měli funkci f definovanou na hyperkvádru $K \subset \mathbb{R}^n$, pak příslušný Riemannův integrál značíme

$$\int_K f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n \quad \text{nebo} \quad \int_K f.$$

  Jeho konstrukce probíhá analogicky.

- Někdy se „vícerozměrnost“ integrálu zdůrazňuje použitím více symbolů $\int$, tj. například integrál přes obdélník $D \subset \mathbb{R}^2$ nebo kvádr $K \subset \mathbb{R}^3$ bychom označili

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad \iiint_K f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

  Pro větší počet rozměrů než tři to není moc praktické.

- Než se pustíme do diskuze vlastností Riemannova integrálu, tak musíme zvětšit množinu množin, přes které má smysl integrovat. S integrací přes hyperkvádry bychom si nevystačili.

Integrace přes „obecnější“ množiny

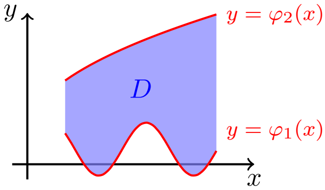
Omezíme se opět na dvourozměrný případ $D \subset \mathbb{R}^2$ a zavedeme dva typy množiny:

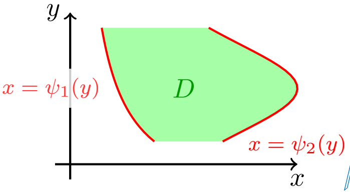
1. **Typ 1**: existuje interval $J = \langle a, b \rangle$ a dvě *spojité* funkce φ_1 a φ_2 definované na J a splňující $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ pro všechna $x \in J$ tak, že

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in J \ \land \ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}.$$

2. **Typ 2**: existuje interval $J = \langle a, b \rangle$ a dvě *spojité* funkce ψ_1 a ψ_2 definované na J a splňující $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$ pro všechna $y \in J$ tak, že

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in J \ \land \ \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}.$$





Integrace přes „obecnější“ množiny

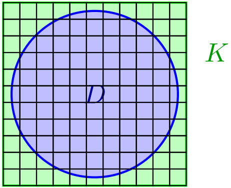
- Máme-li nyní množinu $D \subset \mathbb{R}^2$ typu 1 nebo 2, pak Riemannův integrál definujeme takto: množinu D vnoříme do vhodného obdélníku K, tj. $D \subset K$, a funkci vně D dodefinujeme/předefinujeme nulou.
- Na obdélníku $K \supset D$ definujme funkci

$$g(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in D, \\ 0, & (x,y) \notin D. \end{cases}$$

- A klademe

$$\int_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y := \int_K g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde integrál na pravé straně je definován na předchozích slidech.



Hlavní body

$$\int_{\langle a_1,b_1\rangle\times\langle a_2,b_2\rangle} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

1. Riemannova konstrukce integrálu
2. **Vlastnosti Riemannova integrálu**
3. Fubiniho věta
4. Příklady

$$\int_D f+\alpha g = \int_D f + \alpha\int_D g$$

$$\mathrm{Vol}_n(K) = \int_K 1$$

Vlastnosti Riemannova integrálu

Věta (Postačující podmínka existence vícerozměrného integrálu):

Nechť D je hyperkvádr nebo množina typu 1 nebo 2 a f spojitá funkce na D. Potom je funkce f Riemannovsky integrabilní na množině D.

- Důkaz vynecháváme.
- Podstatné je, že funkce f je pěkná (tj. spojitá) a integrujeme ji na pěkné množině („uzavřená“).
- Pouze poznamenejme, že Riemannova konstrukce opět dává návod, jak případnou hodnotu Riemannova integrálu hledat numericky.

Vlastnosti Riemannova integrálu

Nechť $D \subset \mathbb{R}^2$ je množina typu 1 nebo 2 (obsahuje případ obdélníku) a funkce f a g jsou spojité na D. Potom platí:

- Linearita: pro konstantu c platí

$$\int_D (f + cg) = \int_D f + c \int_D g.$$

- Nerovnosti: pokud $f(x, y) \leq g(x, y)$ pro každé $(x, y)^T \in D$, pak

$$\int_D f \leq \int_D g.$$

- Obsah množiny D, ozn. $\mathrm{Vol}_2(D)$, lze spočítat jako $\mathrm{Vol}_2(D) = \int_D 1$.
- Chování v „mezích“: je-li C další množina typu 1 nebo 2 mající s množinou D v průniku pouze část „hranice,“ pak

$$\int_{C \cup D} f = \int_C f + \int_D f.$$

Analogická tvrzení platí i pro hyperkvádry $K \subset \mathbb{R}^n$ a funkce spojité na K.

Různé interpretace vícerozměrného integrálu

Na vícerozměrnou integraci narazíme v řadě různorodých situací:

- Popisuje-li $\rho(x,y)$ **hustotu desky** (zobecnění do více rozměrů je přirozené) D, pak její hmotnost M a souřadnice jejího těžiště (X,Y) spočteme jako
$$M = \int_D \rho(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\; X = \frac{1}{M}\int_D x\rho(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\; Y = \frac{1}{M}\int_D y\rho(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$
- **Hustota pravděpodobnosti** $f(x,y)$ na množině D je funkce splňující
$$\int_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1.$$
- Je-li $f(x,y) \geq 0$ pro $(x,y) \in D$, pak
$$\int_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
vyjadřuje **objem tělesa** ohraničeného množinou D a grafem funkce f.
- **Obsah plochy** $z = f(x,y)$, kde $(x,y) \in D$, se vypočte dle vzorce
$$\int_D \sqrt{1 + \big(\partial_x f(x,y)\big)^2 + \big(\partial_y f(x,y)\big)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$
- Fyzika...

Hlavní body

$$\int_{\langle a_1,b_1\rangle\times\langle a_2,b_2\rangle} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

1. Riemannova konstrukce integrálu

2. Vlastnosti Riemannova integrálu

$$\int_D f+\alpha g = \int_D f + \alpha\int_D g$$

3. Fubiniho věta

4. Příklady

$$\mathrm{Vol}_n(K) = \int_K 1$$

Integrace přes hyperkvádr

Věta (Fubini pro hyperkvádr):

Buď f Riemannovsky integrabilní na obdélníku $D = \langle a_1, b_1\rangle \times \langle a_2, b_2\rangle$. Pokud existuje jeden z integrálů

$$\int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \quad \text{nebo} \quad \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

potom je roven Riemannově integrálu

$$\int_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

- K výpočtu tedy lze použít *opakovanou* integraci funkce jedné proměnné probíranou na začátku semestru. Pro tyto účely máme celou řadu nástrojů (substituce, per partes, Newtonova formule...)
- Analogickou větu lze zformulovat i pro více než dvě proměnné a hyperkrychli.

Poznámka

Důsledkem předchozí věty je následující užitečné tvrzení:

Důsledek (Integrace funkcí se separovanými proměnnými):

Pokud integrujeme spojitou funkci tvaru $f(x,y) = g(x)h(y)$ na obdélníku $D = \langle a_1, b_1\rangle \times \langle a_2, b_2\rangle$, pak

$$\int_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{a_1}^{b_1} g(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_{a_2}^{b_2} h(y)\,\mathrm{d}y.$$

Příklad

Příklad.

Vypočtěte integrál

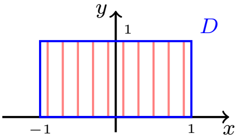
$$\int_D (x+2y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

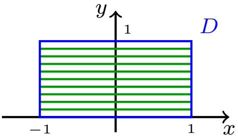
kde $D = \langle -1, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle$.

K výpočtu můžeme použít dvou postupů, které lze i geometricky intepretovat.

$$\int_D (x+2y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} \left(\int_0^1 (x+2y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \left[xy + y^2 \right]_{y=0}^{y=1} \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} (x+1)\,\mathrm{d}x = 2.$$

$$\int_D (x+2y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_{-1}^{1} (x+2y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} + 2xy \right]_{x=-1}^{x=1} \mathrm{d}y = \int_0^1 4y\,\mathrm{d}y = 2.$$





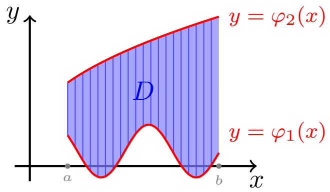
Integrace přes množiny typu 1 nebo 2

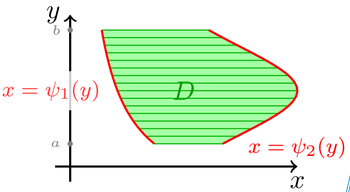
Pokud naše množina není obdélník, pak se situace malinko komplikuje:

Věta (Fubini pro množiny typu 1 nebo 2):

Buď f spojitá na množině D typu 1 nebo 2. Potom

1. Typ 1: $\displaystyle\int_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$
2. Typ 2: $\displaystyle\int_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$





Hlavní body

$$\int_{\langle a_1,b_1\rangle\times\langle a_2,b_2\rangle} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

1. Riemannova konstrukce integrálu
2. Vlastnosti Riemannova integrálu

$$\int_D f+\alpha g = \int_D f + \alpha\int_D g$$

3. Fubiniho věta
4. **Příklady**

$$\mathrm{Vol}_n(K) = \int_K 1$$

Integrace přes trojúhelník

Příklad.

Vypočtěte integrál

$$\int_D xy \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

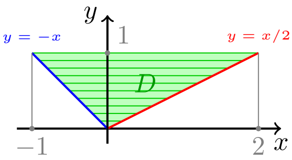
kde $D \subset \mathbb{R}^2$ je trojúhelník s vrcholy $(0,0)$, $(-1,1)$ a $(2,1)$.

$$\int_D xy \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_{-y}^{2y} xy \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} y \right]_{x=-y}^{x=2y} \mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 2y^3 - \frac{y^3}{2} \mathrm{d}y = \left[\frac{3y^4}{8} \right]_0^1 = \frac{3}{8}.$$

Jde o množinu typu 2:



Alternativně jsme D mohli brát jako disjunktní sjednocení dvou množin typu 1 (zkuste)!

Výpočet objemu elipsoidu: Ochutnávka integrace v $\mathbb{R}^3$

Příklad.

Mějme parametry $a, b, c > 0$. Vypočtěte objem elipsoidu s poloosami a, b, c, přesněji množiny

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$$

Provedeme-li řez elipsoidu rovinou $z = \alpha \in (-c, c)$, pak dostaneme elipsu $E(\alpha)$

$$\frac{x^2}{a^2(1 - \alpha^2/c^2)} + \frac{y^2}{b^2(1 - \alpha^2/c^2)} = 1,$$

jejíž obsah již známe: $\mathrm{Vol}_2(E(\alpha)) = \pi ab \left(1 - \frac{\alpha^2}{c^2}\right)$.

Tudíž:

$$\mathrm{Vol}_3(E) = \int_E 1 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{-c}^{c} \left(\int_{E(z)} 1 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z = \pi ab \int_{-c}^{c} \left(1 - \frac{z^2}{c^2} \right) \mathrm{d}z =$$

$$= \pi ab \cdot 2 \left[z - \frac{z^3}{3c^2} \right]_0^c = 2\pi ab \left(c - \frac{c}{3} \right) = \frac{4}{3}\pi abc.$$

Hlavní body

$$\int_{\langle a_1,b_1\rangle\times\langle a_2,b_2\rangle} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

5 Dodatek

$$\int_D f+\alpha g = \int_D f + \alpha\int_D g$$

$$\mathrm{Vol}_n(K) = \int_K 1$$

Komentář

TBA