

# Matematická analýza 2

Pavel Hrabák<sup>1</sup>

Tomáš Kalvoda<sup>2</sup>

Ivo Petr<sup>3</sup>



**FAKULTA  
INFORMAČNÍCH  
TECHNOLOGIÍ  
ČVUT V PRAZE**

Zimní semestr 2024/2025, 6. března 2025

---

<sup>1</sup>KAM FIT ČVUT, [pavel.hrabak@fit.cvut.cz](mailto:pavel.hrabak@fit.cvut.cz)

<sup>2</sup>KAM FIT ČVUT, [tomas.kalvoda@fit.cvut.cz](mailto:tomas.kalvoda@fit.cvut.cz)

<sup>3</sup>KAM FIT ČVUT, [ivo.petr@fit.cvut.cz](mailto:ivo.petr@fit.cvut.cz)



Vysázeno pomocí  $\LaTeX$

Zdroj připraven pomocí WooWoo verze 0.4.4 a FIT PDF Template  
v0.2.7

[zdrojový kód a hlášení chyb](#)

[katalog pojmů a tvrzení](#)

Tomáš Kalvoda, KAM FIT ČVUT, 2017–2024

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Primitivní funkce a neurčitý integrál</b>	<b>2</b>
2.1	Primitivní funkce . . . . .	2
2.2	Neurčitý integrál . . . . .	3
2.3	Integrace per partes . . . . .	9
2.4	Substituce v neurčitém integrálu . . . . .	11
2.5	Integrace racionálních funkcí . . . . .	15
2.6	Poznámky k integraci . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Riemannův určitý integrál</b>	<b>20</b>
3.1	Konstrukce Riemannova integrálu . . . . .	20
3.2	Vlastnosti Riemannova integrálu . . . . .	29
3.3	Per partes a substituce pro určitý integrál . . . . .	32
3.4	Výpočet obsahů plošných útvarů . . . . .	35
3.5	Zobecněný Riemannův integrál . . . . .	38
3.6	Numerická integrace . . . . .	41
<b>4</b>	<b>Číselné řady</b>	<b>48</b>
4.1	Definice číselné řady . . . . .	48
4.2	Kritéria konvergence číselných řad . . . . .	52
4.3	Odhadování asymptotického chování součtů . . . . .	62
4.4	Exponenciální funkce a Eulerovo číslo . . . . .	69
<b>5</b>	<b>Taylorovy polynomy</b>	<b>78</b>
5.1	Aproximace funkcí pomocí polynomů . . . . .	78
5.2	Taylorův polynom . . . . .	78

5.3	Chyba aproximace . . . . .	83
5.4	Mocninné a Taylorovy řady . . . . .	88
5.5	Příklady . . . . .	94
<b>6</b>	<b>Lineární rekurentní rovnice</b>	<b>98</b>
6.1	Úvod . . . . .	99
6.2	Lineární rekurentní rovnice . . . . .	102
6.3	Vlastnosti množiny řešení LRR . . . . .	104
6.4	Řešení homogenní LRR s konstantními koeficienty . . . . .	111
6.5	Partikulární řešení LRR s konst. koeficienty . . . . .	119
6.6	Příklady . . . . .	121
6.7	Asymptotické chování řešení LRR . . . . .	125
6.8	Iterační metoda . . . . .	126
6.9	Mistrovská metoda . . . . .	128
6.10	Substituční metoda . . . . .	132
6.11	Příklad . . . . .	134
<b>7</b>	<b>Funkce více proměnných</b>	<b>136</b>
7.1	Úvodní poznámky . . . . .	136
7.2	Okolí bodu v $\mathbb{R}^n$ . . . . .	140
7.3	Limita vektorové posloupnosti . . . . .	146
7.4	Limita (vektorových) funkcí . . . . .	150
7.5	Spojitosť (vektorových) funkcí . . . . .	153
7.6	Diferenciální počet funkcí více proměnných . . . . .	155
<b>8</b>	<b>Kvadratické formy</b>	<b>166</b>
8.1	Definitnost kvadratických forem . . . . .	168
8.2	Určování definitností forem . . . . .	170
8.3	Dodatek . . . . .	177
<b>9</b>	<b>Extrémy funkcí více proměnných</b>	<b>179</b>
9.1	Definice pojmů . . . . .	180
9.2	Nutné podmínky . . . . .	181
9.3	Postačující podmínka . . . . .	188
9.4	Příklady . . . . .	192
9.5	Spádové metody . . . . .	197

---

9.6	Gradientová metoda / Gradientní sestup . . . . .	202
9.7	Newtonova metoda . . . . .	203
<b>10</b>	<b>Vícerozměrná integrace</b>	<b>206</b>
10.1	Riemannova konstrukce integrálu . . . . .	206
10.2	Vlastnosti Riemannova integrálu . . . . .	209
10.3	Fubiniho věta . . . . .	211
10.4	Příklady . . . . .	216
<b>11</b>	<b>Přehled použitého značení</b>	<b>217</b>
	<b>Odpovědi na některé otázky</b>	<b>221</b>
	<b>Literatura</b>	<b>222</b>
	<b>Index</b>	<b>223</b>

# 1 Úvod

Předmět [BI-MA2](#) úzce navazuje na předmět [BI-MA1](#) a to se odráží i v tomto studijním textu. Na řadu pojmů nebo tvrzení z předmětu [BI-MA1](#) vedou z tohoto textu odkazy přímo na webovou verzi studijního textu [BI-MA1](#) a čtenář tak snadno může látku dohledat.

Tento text, podobně jako tomu bylo v [BI-MA1](#), vychází z předmětu staré akreditace [BI-ZMA](#). Na mnoha místech je ale doplněn, či přepracován. Poslední dvě velké kapitoly o rekurentních rovnicích a funkcích více proměnných jsou nové a v [BI-ZMA](#) je nenaleznete.

Jako doplňující literaturu studenti mohou využít knížky [\[1\]](#) a [\[2\]](#). Značením a koncepčním přístupem je výklad v těchto knížkách velmi blízký tomu našemu.

**Varování 1.1:** Studijní text je ve fázi vzniku, může být během semestru měněn s cílem zlepšení prezentace a obsahu. Pokud v textu narazíte na chyby nebo problematická místa, velmi oceníme nahlášení *issue* ve fakulním Gitlabu.

# 2 Primitivní funkce a neurčitý integrál

V této kapitole se od diferenciálního počtu reálných funkcí jedné reálné proměnné, probíraného v letním semestru v předmětu [BI-MA1](#), přesuneme k integrálnímu počtu. Jak dále uvidíme, „integrace“ je v jistém smyslu inverzní procedurou k „derivaci“. Na začátku kapitoly o derivování (podkapitola [Rychlost a hledání tečny](#)) jsme uváděli jednoduchou fyzikálně motivovanou ukázkou: známe-li závislost polohy objektu na čase, jsme pomocí *derivování* schopni odvodit okamžitou rychlost objektu v daném čase. *Integrace* nám naopak umožní ze známé závislosti okamžité rychlosti na čase (a z počáteční polohy) získat závislost polohy objektu na čase.

Vedle toho lze integraci také motivovat geometricky jakožto nástroj na výpočet obsahu plochy ohraničené grafem funkce a osou  $x$ . Podrobněji se k této úloze dostaneme v kapitole 3. V našem případě ji dále využijeme k odhadování asymptotického chování posloupností částečných součtů číselných řad, což bude obsahem kapitoly 4.

## 2.1 Primitivní funkce

Nejprve zavedeme pojem primitivní funkce.

**Definice 2.1** (Primitivní funkce / *Antiderivative*): Nechť  $f$  je funkce definovaná na intervalu  $(a, b)$ , kde  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ . Funkci  $F$  splňující podmínku

$$F'(x) = f(x) \text{ pro každé } x \in (a, b)$$

nazýváme **primitivní funkcí** k funkci  $f$  na intervalu  $(a, b)$ .

Ihned z definice plyne, že takováto funkce  $F$  je diferencovatelná v každém bodě intervalu  $(a, b)$  a tedy je i spojitá na  $(a, b)$ . K nahlédnutí tohoto faktu si stačí vzpomenout na větu [O vztahu diferencovatelnosti a spojitosti](#).

**Příklad 2.1:** Funkce  $F(x) = x^3$  je primitivní funkcí k funkci  $f(x) = 3x^2$  na libovolném intervalu  $(a, b)$ . Skutečně, rovnost  $(x^3)' = 3x^2$  platí na celém  $\mathbb{R}$ .

**Příklad 2.2:** Funkce  $F(x) = \ln(x)$  je primitivní funkcí k funkci  $f(x) = \frac{1}{x}$  na libovolném intervalu  $(a, b) \subset (0, +\infty)$ .

**Příklad 2.3:** Funkce  $F(x) = \arctg x$  je primitivní funkcí k funkci  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  na libovolném intervalu  $(a, b)$ .

Než se pustíme do hledání, resp. počítání, primitivních funkcí, tak je dobré vyřešit dvě jednoduché otázky. Kolik primitivních funkcí k zadané funkci  $f$  může existovat? Jak se od sebe případně liší? Odpovědi na tyto otázky se zabývá následující věta.

**Věta 2.1** (O jednoznačnosti primitivní funkce): Nechť  $F$  je [primitivní funkcí](#) k funkci  $f$  na intervalu  $(a, b)$ . Pak  $G$  je primitivní funkcí k funkci  $f$  na intervalu  $(a, b)$  právě tehdy, když existuje konstanta  $C \in \mathbb{R}$  taková, že

$$G(x) = F(x) + C, \quad \text{pro každé } x \in (a, b).$$

*Důkaz.* Pokud jsou funkce  $F$  a  $G$  primitivní k  $f$  na intervalu  $(a, b)$ , potom

$$(F - G)'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0, \quad \text{pro všechna } x \in (a, b).$$

Funkce  $F - G$  je proto podle věty [O vztahu první derivace a monotonie funkce](#) konstantní na intervalu  $(a, b)$ . Naopak, je-li  $G(x) = F(x) + C$ , pro libovolné  $x \in (a, b)$ , pak  $G'(x) = F'(x)$ . □

**Otázka 2.1:** Aditivní konstanta ve větě O jednoznačnosti primitivní funkce nemusí být na pouhý pohled patrná. Které dvě z následujících tří funkcí jsou primitivní ke stejné funkci?

$$F(x) = \cos^2(x), \quad G(x) = \sin^2(x), \quad H(x) = -\sin^2(x).$$

## 2.2 Neurčitý integrál

Vzhledem k předchozí větě (Věta 2.1) je přirozené zavést značení pro množinu všech primitivních funkcí k zadané funkci  $f$ .



**Definice 2.2** (Neurčitý integrál / *Indefinite integral*): Nechť k funkci  $f$  existuje **primitivní funkce** na intervalu  $(a, b)$ . Množinu všech primitivních funkcí k funkci  $f$  na  $(a, b)$  nazýváme **neurčitým integrálem** a značíme jej  $\int f$  nebo  $\int f(x) dx$ .

**Poznámka 2.1** (Terminologie): Najdeme-li k  $f$  primitivní funkci  $F$  na intervalu  $(a, b)$ , zapisujeme tento fakt obvykle

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

místo kostrbatého, ale formálně správného, zápisu

$$\int f(x) dx = \{F(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\}.$$

Funkci  $f$  nazýváme **integrovanou funkcí (integrandem)**,  $x$  **integrační proměnnou** a  $C$  **integrační konstantou** (někdy se používá i malé  $c$  nebo jiný symbol pro konstantu). Úkolu určit

$$\int f(x) dx$$

říkáme „vypočítat integrál z  $f$ “, nebo „integrovat  $f$ “.

Důvod pro tuto notaci bude odhalen v následujících kapitolách. Zde alespoň poznamenejme, že symbol  $\int$  je stylizované S.

**Poznámka 2.2** (Mathematica): K hledání primitivní funkce pomocí Mathematica lze použít příkaz `Integrate[f, x]`, kde  $f$  je integrovaná funkce (výraz) a  $x$  je integrační proměnná. Výsledkem, pokud se ho podaří nalézt, je nějaká primitivní funkce k zadané funkci. Například:

- V Příkladu 2.1 jsme hledali primitivní funkci k funkci  $3x^2$ . Výsledkem odpovídajícího příkazu `Integrate[3*x^2, x]` je očekávané  $x^3$ .
- Bohužel Mathematica nedává vždy správné výsledky, resp. občas za uživatele činí rozhodnutí, která vědomně neučinil. Výsledkem příkazu `Integrate[1/x, x]` je `Log[x]`, což je přirozený logaritmus a primitivní funkci jsme tak dostali pouze na intervalu  $(0, +\infty)$ .

Slibovaný inverzní vztah mezi derivací a neurčitým integrálem (primitivní funkcí) můžeme vyjádřit následovně. Je-li funkce  $g$  diferencovatelná na intervalu  $(a, b)$ , pak

přímo z definice 2.1 plyne

$$\int g'(x) \, dx = g(x) + C, \quad x \in (a, b).$$

Má-li funkce  $f$  primitivní funkci na intervalu  $(a, b)$ , potom opět přímo z Definice 2.1 plyne

$$\left( \int f \right)'(x) = f(x), \quad x \in (a, b). \quad (2.1)$$

Tuto rovnici chápeme tak, že ať z  $\int f$  vybereme libovolnou funkci a dosadíme ji do závorek na levé straně, tak po zderivování dostaneme funkční hodnotu funkce  $f$ .

**Poznámka 2.3:** V předchozím Příkladě 2.1 jsme viděli, že pokud v integrandu „odhalíme“ derivaci jisté funkce, tak je výpočet neurčitěho integrálu triviální. Občas lze s úspěchem využít následujícího analogického postřehu založeném na znalosti **derivace složené funkce**: je-li  $\varphi$  kladná funkce se spojitou derivací na jistém otevřeném intervalu  $J$ , pak

$$(\ln \varphi(x))' = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}, \quad x \in J$$

a proto přímo dle definice neurčitěho integrálu platí vztah

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \, dx = \ln \varphi(x) + C.$$

Touto cestou se můžeme vydat, pokud v integrandu uvidíme (případně jsme ho schopni na tento tvar převést) podíl, kde čítec je derivací jmenovatele. Například tedy platí (nic nepočítáme, rovnou píšeme výsledek)

$$\int \frac{2x}{1+x^2} \, dx = \ln(1+x^2) + C$$

nebo

$$\int \frac{\sin(x)}{2+\cos(x)} \, dx = -\ln(2+\cos(x)) + C.$$

Podrobněji tuto myšlenku rozvineme v podkapitole 2.4.

Zatím jsme neodpověděli na otázku, zda k zadané funkci  $f$  vůbec primitivní funkce existuje. Nemusí tomu tak být vždy. Postačující podmínka pro existenci primitivní funkce je obsažena v následující větě.

vzorec	interval, parametry
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_0$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{Z}, n \leq -2$
$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$x \in (0, +\infty), \alpha \notin \mathbb{Z}$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x  + C$	$x \in (-\infty, 0), x \in (0, +\infty)$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$x \in \mathbb{R}, a > 0$ a $a \neq 1$
$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$	$x \in \mathbb{R}$
$\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$	$x \in \mathbb{R}$
$\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \operatorname{tg}(x) + C$	$x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi), k \in \mathbb{Z}$
$\int \frac{1}{\sin^2(x)} dx = -\operatorname{cotg}(x) + C$	$x \in (k\pi, \pi + k\pi), k \in \mathbb{Z}$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + C$	$x \in (-1, 1)$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg}(x) + C$	$x \in \mathbb{R}$

Tabulka 2.2: Tabulka primitivních funkcí k některým elementárním funkcím odvoditelná čistě ze známých derivací těchto funkcí.

**Věta 2.2** (Postačující podmínka pro existenci primitivní funkce): Nechť funkce  $f$  je spojitá na intervalu  $(a, b)$ . Pak má funkce  $f$  na tomto intervalu primitivní funkci.

*Důkaz.* Vynecháváme. □

Protože umíme derivovat celou řadu elementárních funkcí (připomeňte si [tuto tabulku derivací elementárních funkcí](#)) známe i primitivní funkce k některým elementárním funkcím. Ze znalosti derivací můžeme ihned sestavit Tabulku 2.2 primitivních funkcí.

K výpočtu primitivních funkcí „komplikovanějších“ funkcí potřebujeme využít vlastností neurčitého integrálu, které odvodíme v následujících odstavcích. Začneme nejprve tou jednodušší vlastností, chováním vzhledem k sčítání funkcí a konstantním násobkům.

**Věta 2.3** (Primitivní funkce a linearita): Nechť  $F$ , resp.  $G$ , je primitivní funkce k funkci  $f$ , resp.  $g$ , na intervalu  $(a, b)$  a nechť  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Pak

- $F + G$  je primitivní funkcí k funkci  $f + g$  na intervalu  $(a, b)$ ,
- $\alpha F$  je primitivní funkcí k funkci  $\alpha f$  na intervalu  $(a, b)$ .

*Důkaz.* Stačí si uvědomit, že derivace součtu funkcí je součet derivací funkcí a že derivace konstantního násobku funkce je ten samý konstantní násobek derivace funkce. Podrobněji viz [větu o derivaci součtu a součinu funkcí](#).  $\square$

Tvrzení předchozí věty symbolicky zapisujeme takto,

$$\int (f + g) = \int f + \int g \quad \text{a} \quad \int (\alpha f) = \alpha \int f,$$

a mluvíme o **linearitě neurčitého integrálu**.

**Příklad 2.4:** Vypočtete

$$\int \left( 4x^2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \right) dx.$$

Dle předchozí věty pro kladná  $x$  (Věta 2.3) ihned dostáváme

$$\begin{aligned} \int \left( 4x^2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \right) dx &= 4 \int x^2 dx - \int \frac{1}{x} dx + \int x^{-\frac{2}{3}} dx = \\ &= 4 \cdot \frac{x^3}{3} - \ln(x) + \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + C = \frac{4}{3}x^3 - \ln(x) + 3x^{\frac{1}{3}} + C. \end{aligned}$$

Nalezli jsme tak primitivní funkci na intervalu  $(0, +\infty)$ .

Integrand má ale smysl i pro záporná  $x$ , kde  $\sqrt[3]{x^2} = (-x)^{2/3}$ . Prakticky stejným výpočtem jako výše (provedte) získáme vztah

$$\int \left( 4x^2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \right) dx = \frac{4}{3}x^3 - \ln(-x) + 3\sqrt[3]{x} + C$$

platný na  $(-\infty, 0)$ .

Jako závěr můžeme shrnout, že vztah

$$\int \left( 4x^2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \right) dx = \frac{4}{3}x^3 - \ln|x| + 3\sqrt[3]{x} + C$$

platí na libovolném otevřeném intervalu, který je podmnožinou  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

**Příklad 2.5:** Vypočtete

$$\int (2^x + 3^x)^2 dx.$$

Nejprve provedeme jednoduchou algebraickou úpravu integrandu a následně využijeme předchozí větu, čímž se dostaneme k výsledku,

$$\begin{aligned} \int (2^x + 3^x)^2 dx &= \int (2^{2x} + 2 \cdot 2^x \cdot 3^x + 3^{2x}) dx = \\ &= \int 4^x dx + 2 \int 6^x dx + \int 9^x dx = \\ &= \frac{4^x}{\ln 4} + 2 \cdot \frac{6^x}{\ln 6} + \frac{9^x}{\ln 9} + C. \end{aligned}$$

**Příklad 2.6:** V Tabulce 2.2 stojí za zmínku primitivní funkce  $k \frac{1}{x}$ . Víme, že derivace funkce  $\ln(x)$  je rovna  $\frac{1}{x}$  na intervalu  $(0, \infty)$ . Pro záporná  $x$  ale platí

$$(\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}.$$

Dohromady proto můžeme tvrdit, že funkce  $\ln|x|$  je primitivní k  $\frac{1}{x}$  na libovolném intervalu neobsahujícím 0.

**Poznámka 2.4:** Algoritmy pro výčet primitivních funkcí, resp. neurčitých integrálů, existují. Jako příklad zmiňme **Rischův algoritmus** (1968). Tyto algoritmy jsou ale většinou nevhodné pro použití lidmi, zvláště v prvních stádiích studia této problematiky (kompletní popis Rischova algoritmu zabírá více než 100 stránek textu).

V dalších částech této kapitoly budeme studovat i sofistikovanější metody výpočtu, než v podstatě uhodnutí prezentované v této podkapitole. Konkrétně metody integrace pomocí *substituce a per partes*. I tak ale tyto metody vyžadují jistý vhled, myšlenku, nejsou čistě mechanické, jako tomu je u derivování.

## 2.3 Integrace per partes

V předchozí podkapitole jsme zjistili jak hledat primitivní funkci k součtu dvou funkcí a konstantnímu násobku funkce. Nyní se pokusíme hledat primitivní funkci k součinu dvou funkcí. Vyjdeme z věty o [derivaci součinu dvou funkcí](#).

**Věta 2.4** (Metoda per partes (neurčitý integrál) / *Integration by parts*): Nechť funkce  $f$  je diferencovatelná na intervalu  $(a, b)$  a  $G$  je [primitivní funkce](#) k funkci  $g$  na intervalu  $(a, b)$  a konečně nechte existuje primitivní funkce k funkci  $f'G$ . Potom existuje primitivní funkce k funkci  $fg$  a platí

$$\int fg = fG - \int f'G. \quad (2.2)$$

*Důkaz.* Tvzení věty můžeme přímo ověřit derivováním. Podle rovnice (2.1) platí

$$\left( fG - \int f'G \right)' = (fG)' - f'G = f'G + fG' - f'G = fG' = fg.$$

Ve výpočtu jsme dále použili známého Leibnizova pravidla pro derivování součinu funkcí. □

**Poznámka 2.5:** V některých materiálech naleznete předchozí větu formulovanou pro integrand tvaru součinu funkce a součinu derivace druhé funkce, tj.

$$\int uv' = uv - \int u'v.$$

Samozřejmě s vhodnými předpoklady pro funkce  $u$  a  $v'$  (doplňte!). Naše formulace ve Větě 2.4 je „symetričtější“ vůči funkcím v prvním integrandu. Obě verze jsou ale ekvivalentní a je spíš otázka vkusu a zvyku, kterou použijete.

Poznamenejme, že metoda integrace per partes může být úspěšná pouze pokud budeme schopni dále pracovat s novým integrálem na pravé straně rovnice (2.2), který je obecně stále ve tvaru součinu. Nejedná se o metodu, která „zabere“ na libovolný součin, k tomuto tématu se vrátíme později v podkapitole 2.6. Latinský výraz „per partes“ v češtině znamená „po částech“. Ukažme si použití této metody podrobně na jednoduchých příkladech.

**Příklad 2.7:** Vypočtete neurčitý integrál  $\int x \sin x \, dx$ .

Pomocí integrace per partes (věta 2.4) dostáváme

$$\begin{aligned} \int x \sin x \, dx &= -x \cos x + \int \cos x \, dx = \\ &= -x \cos x + \sin x + C. \end{aligned}$$

Na tomto místě je dobré si uvědomit, že správnost výsledku výpočtu můžeme vždy snadno ověřit pomocí Definice 2.1, tedy derivováním:

$$(-x \cos x + \sin x + C)' = -\cos x + x \sin x + \cos x + 0 = x \sin x.$$

**Příklad 2.8:** Vypočtete neurčitý integrál  $\int x^2 e^x \, dx$ .

Nyní je potřeba per partes (Věta 2.4) použít dvakrát. Dostáváme

$$\begin{aligned} \int x^2 e^x \, dx &= x^2 e^x - \int 2x e^x \, dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x \, dx = \\ &= x^2 e^x - 2 \left( x e^x - \int e^x \, dx \right) = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C = \\ &= (x^2 - 2x + 2)e^x + C. \end{aligned}$$

V každém použití metody per partes jsme integrovali exponenciální funkci a derivovali zbytek v integrandu.

**Příklad 2.9:** Vypočtete neurčitý integrál  $\int \operatorname{arctg} x \, dx$ . Integrand sice na první pohled není ve tvaru součinu, ale můžeme postupovat následovně (vzpomeňte si, že  $(x)' = 1$ ):

$$\begin{aligned} \int \operatorname{arctg} x \, dx &= \int 1 \cdot \operatorname{arctg} x \, dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx = \\ &= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \underbrace{\frac{2x}{1+x^2}}_{(\ln(1+x^2))'} \, dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C. \end{aligned}$$

Při výpočtu jsme dále využili Poznámku 2.3.

**Otázka 2.2:** Pomocí metody integrace per partes nalezněte primitivní funkci k funkci  $\ln(x)$ .

**Otázka 2.3:** Předpokládejme, že po (i několikrát) integraci per partes dojdeme v novém integrálu k tomu, s kterým jsme začali, tedy dostaneme vztah

$$\int f(x)g(x) dx = h(x) + \alpha \int f(x)g(x) dx,$$

kde  $h$  je jistá funkce a  $\alpha$  konstanta. Za jakého předpokladu o  $\alpha$  můžeme rovnou učinit závěr o hodnotě hledaného integrálu? A jaký tento závěr je?

## 2.4 Věty o substituci v neurčitém integrálu

Metoda integrace per partes byla založena na znalosti derivace součinu dvou funkcí. Ze znalosti **derivace složené funkce** nyní odvodíme metodu integrace pomocí substituce.

**Věta 2.5** (O substituci I (neurčitý integrál)): Nechť pro funkce  $f$  a  $\varphi$  platí

1.  $f$  má primitivní funkci  $F$  na intervalu  $(a, b)$ ,
2.  $\varphi$  je na intervalu  $(\alpha, \beta)$  diferencovatelná,
3.  $\varphi((\alpha, \beta)) \subset (a, b)$ .

Pak funkce  $f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$  má primitivní funkci na intervalu  $(\alpha, \beta)$  a platí

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = F(\varphi(x)) + C,$$

kde  $C$  je integrační konstanta.

*Důkaz.*  $F$  je primitivní funkcí k funkci  $f$ , tj.  $F'(x) = f(x)$  pro každé  $x \in (a, b)$ . Podle věty o derivaci složené funkce dostaneme

$$(F \circ \varphi)'(x) = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x),$$

pro každé  $x \in (\alpha, \beta)$ . □



**Příklad 2.10:** Vypočtěte

$$\int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx.$$

Použijeme substituci  $y = \varphi(x) = \frac{1}{x}$ . Potom  $\varphi'(x) = -\frac{1}{x^2}$ . Proto

$$\int \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{-\varphi'(x)} \sin \underbrace{\frac{1}{x}}_{\varphi(x)} dx = - \int \sin y dy = \cos y + C = \cos \frac{1}{x} + C.$$

Čímž je výpočet dokončen. Výsledek platí na libovolném otevřeném intervalu ležícím v  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

**Příklad 2.11:** Vypočtěte neurčitý integrál

$$\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx.$$

Výpočet provedeme na intervalu  $(0, +\infty)$  což je největší interval, na kterém je integrand definován. Pro substituci použijeme  $y = \varphi(x) = \sqrt{x}$ , pro jejíž derivaci platí  $\varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ . Tudíž,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx &= 2 \int \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = 2 \int \frac{1}{1+y^2} dy = \\ &= 2 \operatorname{arctg} y + C = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C. \end{aligned}$$

Výsledek platí na intervalu  $(0, +\infty)$ , protože funkce  $\operatorname{arctg} y$  je primitivní funkcí k  $\frac{1}{1+y^2}$  na  $\varphi((0, +\infty)) = (0, +\infty)$ .

**Příklad 2.12:** Nalezněte primitivní funkci k funkci  $f(x) = \operatorname{tg}(x)$  na intervalu  $J = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ .

Funkce  $f$  je na intervalu  $J$  spojitá a má zde tedy primitivní funkci. Nejprve upravme integrand

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx = - \int \frac{1}{\cos(x)} \cdot (-\sin(x)) dx.$$

Použijeme větu o substituci (2.5), kde zvolíme  $f(y) = \frac{1}{y}$  a  $y = \varphi(x) = \cos(x)$ . Funkce  $\varphi$  zobrazuje interval  $J$  na interval  $(-1, 0)$  kde má  $f$  primitivní funkci  $F(y) = \ln(-y)$ .

Navíc  $\varphi'(x) = -\sin(x)$ . Větu lze tudíž použít a dostáváme

$$\int \operatorname{tg}(x) \, dx = -\ln(-\cos(x)) + C, \quad x \in J.$$

Často se též substituce zapisuje jako  $y = \cos x$ ,  $dy = -\sin x \, dx$  a

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = -\int \frac{1}{y} \, dy = -\ln|y| + C = -\ln(-\cos(x)) + C.$$

V předchozí Větě 2.5 (O substituci I) byla stará integrační proměnná  $x$  s novou integrační proměnnou  $y$  svázána předpisem tvaru  $y = \varphi(x)$ . V následující větě naopak klademe  $x = \varphi(y)$ , čili  $y = \varphi^{-1}(x)$ . Tato varianta substituce bude tedy zřejmě založena na schopnosti derivovat inverzní funkci (viz větu [O derivaci inverzní funkce](#)).

**Věta 2.6** (O substituci II (neurčitý integrál)): Nechť  $f$  je definována na intervalu  $(a, b)$  a nechť  $\varphi$  je bijekce intervalu  $(\alpha, \beta)$  na  $(a, b)$  s nenulovou konečnou derivací. Pak platí

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) \, dt = G(t) + C \quad \Longrightarrow \quad \int f(x) \, dx = G(\varphi^{-1}(x)) + C,$$

kde  $C$  je integrační konstanta.

*Důkaz.* Pomocí věty [o derivaci složené funkce](#) a [věty o derivaci inverzní funkce](#) ověříme správnost tvrzení. Platí

$$\begin{aligned} \left(G(\varphi^{-1}(x))\right)' &= G'(\varphi^{-1}(x)) \cdot \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = \\ &= f(\varphi(\varphi^{-1}(x))) \cdot \varphi'(\varphi^{-1}(x)) \cdot \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = f(x). \end{aligned}$$

Rozmyslete splnění předpokladů uvedených vět plynoucích z předpokladů právě dokazované věty. □

**Příklad 2.13:** Pomocí předchozí věty vypočtete (již známý) integrál

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + C.$$

Integrand

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

je definován na intervalu  $(a, b) = (-1, 1)$ . Abychom se zbavili odmocniny ve jmenovateli položíme

$$x = \varphi(t) = \sin(t), \quad t \in (\alpha, \beta) := \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Funkce  $\sin$  je na intervalu  $(\alpha, \beta)$  rostoucí s nenulovou derivací  $\varphi'(t) = \cos t$ . Dále

$$\begin{aligned} G(t) &= \int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \cos t dt = \\ &= \int \frac{\cos t}{\cos t} dt = \int 1 dt = t + C. \end{aligned}$$

Protože  $t = \varphi^{-1}(x) = \arcsin(x)$  uzavíráme,

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + C.$$

**Příklad 2.14:** Vypočtěte

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

Podobně jako v předchozím případě se lze zbavit odmocniny. Nyní je však integrand definován na  $\mathbb{R}$ . Zvolíme-li

$$x = \varphi(t) = \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2},$$

pak

$$\begin{aligned} 1 + \varphi(t)^2 &= 1 + \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 = 1 + \frac{e^{2t} - 2 + e^{-2t}}{4} = \\ &= \frac{e^{2t} + 2 + e^{-2t}}{4} = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Protože  $\varphi'(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$  dostáváme

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1+\varphi(t)^2}} \varphi'(t) dt = \int 1 dt = t + C$$

Funkce  $\varphi$  zobrazuje  $\mathbb{R}$  na  $\mathbb{R}$  a je monotónně rostoucí s nenulovou derivací. K dokončení příkladu je nutné nalézt její inverzi. Pokud  $x = \varphi(t)$ , pak

$$e^{2t} - 2xe^t - 1 = 0.$$

Odtud

$$e^t = \frac{1}{2} \left( 2x \pm \sqrt{4x^2 + 4} \right) = x \pm \sqrt{x^2 + 1}.$$

Smysl v našem případě má pouze znaménko plus, protože  $e^t > 0$ . Tudíž,

$$t = \ln \left( x + \sqrt{x^2 + 1} \right).$$

Uzavíráme

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \ln \left( x + \sqrt{x^2 + 1} \right) + C.$$

## 2.5 Integrace racionálních funkcí

V této části textu si stručně rozebereme, jak integrovat

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx,$$

kde  $p$  je libovolný polynom a  $q$  je polynom stupně nejvýše dvě. Základní kroky postupu lze popsat následovně:

1. Pokud to lze, vyděl polynom  $p$  polynomem  $q$ , pak  $\frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$ , kde stupeň polynomu  $r$  je nejvýše 1. Polynom  $s$  integrujeme snadno.
2. Pokud je stupeň polynomu  $q$  roven 1, pak použijeme  $\int \frac{b}{x-a} dx = b \ln |x-a| + C$ .
3. Pokud má polynom  $q$  jeden dvojnásobný kořen, pak  $\int \frac{bx+c}{(x-a)^2} dx = \int \frac{b}{(x-a)} + \frac{ab+c}{(x-a)^2} dx = b \ln |x-a| - \frac{ab+c}{x-a} + C$ .
4. Pokud je stupeň polynomu  $q$  roven 2 a jeho diskriminant je kladný, pak  $\frac{r}{q}$  převedeme na tvar  $\frac{b_1}{x-a_1} + \frac{b_2}{x-a_2}$  a použijeme bod 2.

5. Pokud je stupeň polynomu  $q$  roven 2 a jeho diskriminat je záporný, pak použijeme *doplnění jmenovatele na čtverec*, integrál pak vede na arctg. Případného polynomu stupně jedna v čitateli se zbavíme úpravou čitatele na derivaci jmenovatele.

**Poznámka 2.6** (Jednoduchý rozklad na parciální zlomky): K úspěšnému provedení kroku 4. je potřeba provést rozklad na tzv. parciální zlomky (nejjednodušší verze):

$$\frac{ax + b}{(x - c)(x - d)} = \frac{A}{x - c} + \frac{B}{x - d}.$$

Konstanty  $a, b, c, d$  jsou zadány, neznámé  $A, B$  hledáme. Převedeme-li pravou stranu na společný jmenovatel a upravíme čitatele dostaneme

$$\frac{A}{x - c} + \frac{B}{x - d} = \frac{(A + B)x - Ad - Bc}{(x - c)(x - d)}.$$

Neznámé proto řeší soustavu

$$\begin{aligned} a &= A + B, \\ b &= -Ad - Bc, \end{aligned}$$

kteřou snadno vyřešíme (v konkrétním příkladě). Často lze u jednoduchých příkladů rozklad i uhodnout. Například

$$\frac{1}{(x - 1)(x + 2)} = \frac{\frac{1}{3}}{x - 1} + \frac{-\frac{1}{3}}{x + 2}.$$

**Varování 2.1:** Obecnou mašinerii rozkladu na parciální zlomky zde neřešíme. V příkladech vyžadujících integraci tímto způsobem si opravdu vystačíme s nejdříve kvadratickými polynomy ve jmenovateli. Nemá proto pro vás smysl z „internetů“ studovat obecnou metodu a související látku, jako například „zakrývací pravidla“.

**Příklad 2.15:** Ukázky použití metody na postupně se komplikujících se příkladech.

- Polynom stupně jedna ve jmenovateli:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{x + 1} dx &= \int x - 1 + \frac{1}{x + 1} dx = \\ &= \frac{x^2}{2} - x + \ln|x + 1| + C. \end{aligned}$$

- Polynom stupně dva s vzájemně různými reálnými kořeny ve jmenovateli:

$$\begin{aligned}\int \frac{3x - 3}{(x - 2)(x + 1)} dx &= \int \frac{1}{x - 2} + \frac{2}{x + 1} dx = \\ &= \ln |x - 2| + 2 \ln |x + 1| + C.\end{aligned}$$

- Polynom stupně dva se záporným diskriminantem, tedy bez reálných kořenů, ve jmenovateli a s konstantním polynomem v čitateli:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2 - 2x + 2} dx &= \int \frac{1}{1 + (x - 1)^2} dx = \int \frac{1}{1 + y^2} dy = \\ &= \operatorname{arctg} y + C = \operatorname{arctg}(x - 1) + C.\end{aligned}$$

Ve výpočtu jsme použili substituci  $y = x - 1$ .

- Polynom stupně dva se záporným diskriminantem, tedy bez reálných kořenů, ve jmenovateli a s polynomem stupně jedna v čitateli:

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^2 - 2x + 2} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x - 2 + 2}{1 + (x - 1)^2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{((x - 1)^2)'}{1 + (x - 1)^2} dx + \int \frac{1}{1 + (x - 1)^2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \ln(1 + (x - 1)^2) + \int \frac{1}{1 + (x - 1)^2} dx,\end{aligned}$$

a na druhý integrál použijeme předchozí bod.

Tuto metodu lze rozšířit i na polynomy vyšších stupňů. Ruční počítání se pak ale značně komplikuje. Je očividně potřeba hledat kořeny polynomu ve jmenovateli, což pro polynomy stupně pět a výše není analyticky řešitelná úloha. I kdybychom tyto kořeny našli, tak budeme muset řešit lineární soustavu o mnoha neznámých. To už ovšem umíme pomocí **Gaussovy eliminační metody**.

**Poznámka 2.7** (Mathematica): K rozkladu na parciální zlomky lze pro kontrolu použít i počítačový algebraický systém Mathematica, kde k tomuto účelu slouží metoda `Apart`. Vždy ale svůj výpočet můžete ověřit zpětným převedením na společný jmenovatel!

Například

```
Apart[(2*x - 1) / ((x + 2)*(x - 1))]
```

vrací

```
1 / (3*(x - 1)) + 5 / (3*(x + 2))
```

Naopak tento výraz bychom mohli Mathematica donutit převést zpět na jeden zlomek pomocí Simplify.

## 2.6 Poznámky k integraci

Jenom malá část elementárních funkcí má primitivní funkci, která by byla elementární. Víme jen, že **primitivní funkce** existuje, ale nelze ji vyjádřit pomocí konečně mnoha operací (součet, součin, podíl, skládání a invertování) z elementárních funkcí. Jako příklad uveďme<sup>1</sup>

$$\int e^{-x^2} dx, \quad \int \frac{\sin(x)}{x} dx, \quad \int \frac{1}{\ln(x)} dx.$$

Důkaz tohoto tvrzení v této přednášce nebude podán. Uvidíme však, jak vyjádřit a použít libovolnou primitivní funkci (Věta 3.6).

Rozpoznat, kdy funkce má „rozumnou“ primitivní funkci, je často složité. Obecný návod „jak integrovat“ lze dát například v případě racionálních funkcí a funkcí, které lze na racionální vhodnou substitucí převést.

Integrace, na rozdíl od rutinního derivování, vyžaduje *cvik a zkušenost*. Stará anekdota praví, že „derivování je jako mačkat pastu z tuby a integrování je naopak jako cpaní pasty zpět do tuby“. U školních příkladů lze ale vždy pomocí rutinního derivování ověřit, zda jsme ve výpočtu neudělali chybu!

**Příklad 2.16:** Vypočítejte  $\int x e^{x^2} dx$  a ověřte správnost výsledku.

Pomocí substituce  $y = x^2$ ,

$$\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^y dy = \frac{1}{2} e^y + C = \frac{1}{2} e^{x^2} + C.$$

<sup>1</sup>Nejde o nepodstatné funkce. Například primitivní funkce k  $e^{-x^2}$  se vyskytuje v praktických aplikacích. V pravděpodobnostních a statistických tabulkách byste ji našli pod jménem Error function (Erf).

Ověření,

$$\left(\frac{1}{2}e^{x^2} + C\right)' = \frac{1}{2}(e^{x^2})' + 0 = \frac{1}{2} \cdot 2xe^{x^2} = xe^{x^2}.$$



# 3 Riemannův určitý integrál

**Varování 3.1:** Než se pustíte do studia této látky, tak si připomeňte pojmy minima, maxima, infima a suprema funkce. Může k tomu posloužit [příslušná kapitola z BI-MA1](#).

## 3.1 Konstrukce Riemannova integrálu

Nejjednodušší geometrickou motivací určitého integrálu (zde použijeme tzv. Riemannovu konstrukci určitého integrálu; [Bernhard Riemann](#), německý matematik, 1826 – 1866) je výpočet obsahu plochy ohraničené grafem funkce a osou nezávisle proměnné. Na [Obrázku 3.1](#) je tato plocha znázorněna světle modrou barvou. Podle významu funkční závislosti má pak daná plocha jistý (ne geometrický) význam. Zajímavým a možná překvapivým výsledkem bude Newtonova formule ([Věta 3.6](#)) odhalující vztah mezi touto geometrickou konstrukcí a primitivní funkcí.

Celá konstrukce Riemannova integrálu vychází ze znalosti obsahu obdélníka. Danou plochu pod grafem funkce budeme co nejlépe aproximovat plochou sestavenou z mnoha obdélníků. Ukazuje se, že pro spojitou funkci tento limitní proces dává dobrý výsledek. Nejprve definujeme základní pojmy.

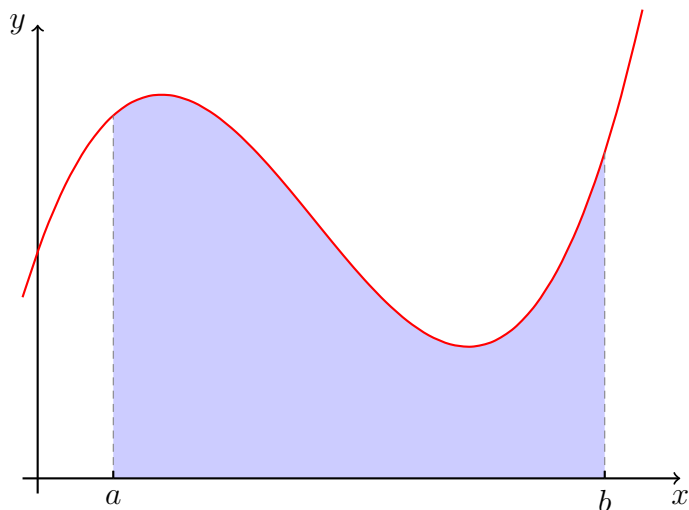
**Definice 3.1** (Dělení intervalu / *Partition of an interval*): Buď dán interval  $\langle a, b \rangle$ . Konečnou množinu

$$\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}, \quad \text{kde } n \in \mathbb{N}, n \geq 2,$$

takovou, že

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

nazýváme **dělením intervalu**  $\langle a, b \rangle$ . Bodům  $x_k$ ,  $k \in \widehat{n-1}$ , říkáme **dělicí body intervalu**  $\langle a, b \rangle$ . Interval  $\langle x_{k-1}, x_k \rangle$ ,  $k \in \hat{n}$ , nazýváme  **$k$ -tý částečný interval**



Obrázek 3.1: Plocha mezi grafem jisté funkce a osou  $x$  nad intervalem  $\langle a, b \rangle$ .

intervalu  $\langle a, b \rangle$  při dělení  $\sigma$ . Číslo

$$\nu(\sigma) := \max\{\Delta_k \mid k = 1, 2, \dots, n\}, \quad \text{kde} \quad \Delta_k := x_k - x_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

nazýváme **normou dělení**  $\sigma$ .

Užitečným speciálním příkladem dělení intervalu je jeho ekvidistantní dělení, tj. dělení mající stejně dlouhé částečné intervaly.

**Definice 3.2** (Ekvidistantní dělení): Pro interval  $\langle a, b \rangle$  a  $n \in \mathbb{N}$  položme  $\Delta := \frac{b-a}{n}$  a

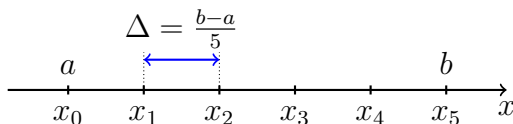
$$x_i := a + i \cdot \Delta, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Tedy

$$\sigma = \{a, a + \Delta, a + 2\Delta, \dots, a + (n-1)\Delta, b\}.$$

Všimněte si, že  $a + n\Delta = a + b - a = b$ . V případě  $n = 5$  si lze ekvidistantní dělení intervalu  $\langle a, b \rangle$  představit jako na následujícím Obrázku 3.2.

Vybavení funkcí a dělením intervalu dále přistoupíme ke konstrukci aproximace plochy mezi grafem funkce a osou  $x$  pomocí mnoha obdélníků.



Obrázek 3.2: Příklad ekvidistantního dělení intervalu  $\langle a, b \rangle$  na pět stejně dlouhých intervalů.

**Definice 3.3** (Dolní a horní součet funkce při dělení  $\sigma$ ): Buďte funkce  $f$  definovaná a omezená na intervalu  $J = \langle a, b \rangle$  a  $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  **dělení** intervalu  $J$ . Součty

$$S(\sigma, f) := \sum_{i=1}^n \Delta_i \sup_{\langle x_{i-1}, x_i \rangle} f,$$

$$s(\sigma, f) := \sum_{i=1}^n \Delta_i \inf_{\langle x_{i-1}, x_i \rangle} f$$

nazýváme **horním součtem funkce** a **dolním součtem funkce  $f$  při dělení  $\sigma$** .

Dolní, resp. horní, součty představují obsah plochy<sup>1</sup> tvořené obdélníky pod, resp. nad, grafem funkce s podstavami tvořenými částečnými dělicími intervaly. Následující Obrázky 3.3 a 3.4 ilustrují dolní a horní součty vzhledem k jednomu konkrétně zvolenému dělení.

Třetím bodem konstrukce je prozkoumání hodnot všech možných dolních a horních součtů dané funkce přes všechna možná dělení zadaného intervalu.

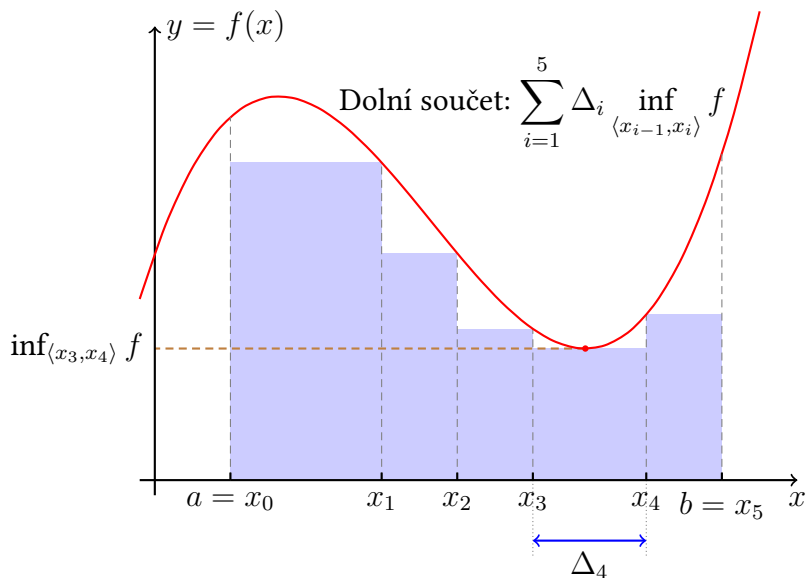
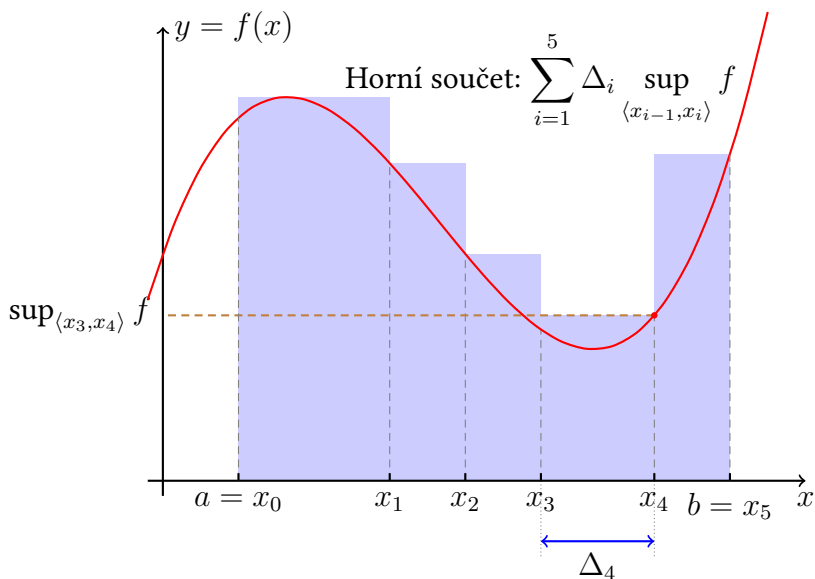
**Definice 3.4** (Dolní a horní integrál): Pro funkci  $f$  definovanou a omezenou na uzavřeném intervalu  $J = \langle a, b \rangle$  pomocí **dolních a horních součtů** definujeme čísla

$$\int_a^b f(x) dx := \inf\{S(\sigma, f) \mid \sigma \text{ libovolné dělení intervalu } J\},$$

$$\int_a^b f(x) dx := \sup\{s(\sigma, f) \mid \sigma \text{ libovolné dělení intervalu } J\}.$$

a nazýváme je **horním integrálem**, resp. **dolním integrálem**, funkce  $f$  na intervalu  $J$ .

<sup>1</sup>Pozor, včetně znaménka.

Obrázek 3.3: Jeden konkrétní dolní součet funkce  $f$  při dělení  $\sigma$ .Obrázek 3.4: Jeden konkrétní horní součet funkce  $f$  při dělení  $\sigma$ .

Ze způsobu, jakým je horní (resp. dolní) integrál konstruován, je zřejmé, že představuje jakýsi horní (resp. dolní) odhad obsahu hledané plochy. Dále si všimněte, že díky předpokladům omezenosti funkce  $f$  a uzavřenosti (a tedy i konečné délce) intervalu  $J$  v Definicí 3.4, jsou příslušný dolní i horní integrál nějaká reálná čísla (nehrozí hodnoty  $+\infty$  nebo  $-\infty$ ).

Posledním krokem konstrukce je samotná definice Riemannova integrálu. Pokud horní i dolní integrál mají stejnou hodnotu, tak má dobrý smysl mluvit o obsahu plochy pod grafem funkce  $f$ . Proto Riemannův integrál definujeme následovně.

**Definice 3.5** (Riemannův určitý integrál): Mějme funkci  $f$  definovanou a omezenou na uzavřeném intervalu  $J$ . Pokud pro její **dolní a horní integrál na intervalu  $J$**  platí

$$\overline{\int_a^b f(x) \, dx} = \underline{\int_a^b f(x) \, dx} \in \mathbb{R},$$

pak jejich společnou hodnotu nazýváme **Riemannovým integrálem funkce  $f$  na intervalu  $J$**  a toto číslo značíme symboly

$$\int_a^b f, \quad \text{případně} \quad \int_a^b f(x) \, dx.$$

V definici horního a dolního integrálu potřebujeme počítat suprema a infima jistých množin, resp. funkcí na částečných intervalech. To nemusí být jednoduchá úloha. Naštěstí ji ve většině případů můžeme nahradit počítáním limity jisté číselné posloupnosti. Nejprve zavedme posloupnost postupně se zjemňujících dělení.

**Definice 3.6** (Normální posloupnost dělení): Posloupnost **dělení**  $\sigma_n$  nazveme **normální**, pokud pro její normy platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu(\sigma_n) = 0.$$

Pokud je funkce „hezká“, tak lze očekávat, že „plocha mezi jejím grafem a osou  $x$ “ bude mít dobrý smysl a Riemannova konstrukce bude úspěšná. Kritériem „hezkosti“ je třeba spojitost, jak ukazuje hned následující věta. Ukázka „nehezké“ funkce, tedy funkce nemající Riemannův integrál, je uvedena v Příkladu 3.3.

**Věta 3.1** (Postačující podmínka pro existenci Riemannova integrálu): Buď  $f$  spojitá funkce na intervalu  $\langle a, b \rangle$ . Potom existuje její **Riemannův integrál** na intervalu  $\langle a, b \rangle$ .

Pokud je navíc  $(\sigma_n)$  **normální posloupnost dělení** intervalu  $\langle a, b \rangle$ , potom limity

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s(\sigma_n, f) \quad \text{a} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S(\sigma_n, f)$$

existují, a jsou rovny Riemannově integrálu funkce  $f$  na intervalu  $\langle a, b \rangle$ .

*Důkaz.* Vynecháváme. □

Výpočet lze ale ještě dále zjednodušit. Při výpočtu horního a dolního součtu musíme hledat infima a suprema integrované funkce na dělicích intervalech. Tomu se lze také vyhnout, jak ukazuje následující věta.

**Definice 3.7** (Integrální součet): Pro funkci  $f$  spojitou na uzavřeném intervalu  $\langle a, b \rangle$  a **dělení**  $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ , kde  $x_0 = a$  a  $x_n = b$ , tohoto intervalu definujeme **integrální součet funkce  $f$  při dělení  $\sigma$**  předpisem

$$\mathcal{J}(\sigma, f) = \sum_{i=1}^n f(\alpha_i) \Delta_i,$$

kde  $\alpha_i$  patří do intervalu  $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Vztah mezi dolním a horním součtem a integrálním součtem funkce  $f$  při dělení  $\sigma$  je dán nerovnostmi

$$s(\sigma, f) \leq \mathcal{J}(\sigma, f) \leq S(\sigma, f).$$

Riemannův integrál funkce  $f$  spojitě na intervalu  $\langle a, b \rangle$  lze tedy počítat i jako limitu z integrálních součtů

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{J}(\sigma_n, f), \quad (3.1)$$

kde  $(\sigma_n)_{n=1}^\infty$  je libovolná normální posloupnost dělení.

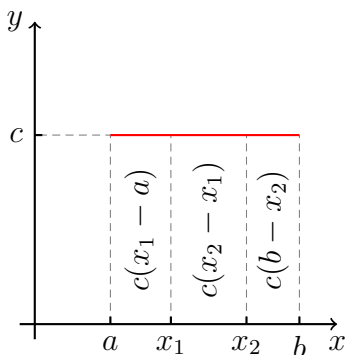
**Příklad 3.1:** Vypočítejte integrál z konstantní funkce  $f(x) = c$  na intervalu  $\langle a, b \rangle$ .

Pro libovolné dělení  $\sigma$  intervalu  $\langle a, b \rangle$  platí (případně viz Obrázek 3.5)

$$s(\sigma, f) = S(\sigma, f) = \mathcal{J}(\sigma, f) = c(b - a).$$

Takže pro libovolnou normální posloupnost  $(\sigma_n)$  dělení intervalu  $\langle a, b \rangle$  dostáváme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s(\sigma_n, f) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(\sigma_n, f) = c(b - a).$$



Obrázek 3.5: Riemannův integrál konstantní funkce na intervalu  $(a, b)$ .

Riemannův integrál funkce  $f$  na intervalu  $\langle a, b \rangle$  je pak

$$\int_a^b f = c(b - a).$$

Viz Obrázek 3.5.

**Příklad 3.2:** Pomocí definice vypočtete Riemannův integrál funkce  $f(x) = x$  na intervalu  $J = \langle 0, 1 \rangle$ .

Zvolme normální posloupnost  $(\sigma_n)_{n=1}^{\infty}$  ekvidistantních dělení intervalu  $J$ .

$$\sigma_n = \left\{ 0 = x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)} = 1 \right\}, \quad x_i^{(n)} = i \cdot \frac{1}{n}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Pro dolní součet při dělení  $\sigma_n$  dostáváme

$$s(\sigma_n, f) = \sum_{i=1}^n x_{i-1}^{(n)} \cdot \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{i-1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2}.$$

Tudíž

$$\int_0^1 x \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} s(\sigma_n, f) = \frac{1}{2}.$$

Podobně pro horní součet při dělení  $\sigma_n$  platí

$$S(\sigma_n, f) = \sum_{i=1}^n x_i^{(n)} \cdot \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

a opět (nepřekvapivě)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(\sigma_n, f) = \frac{1}{2}.$$

Pro ilustraci tohoto výpočtu uvádíme Obrázek 3.6.

**Příklad 3.3:** Ukažme si jednoduchý příklad funkce, která nemá Riemannův integrál. Definujme **Dirichletovu funkci**

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

s definičním oborem  $\mathbb{R}$ . Zkuste si představit její graf!

Vezměme nyní libovolné dělení  $\sigma$  intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$ . Zřejmě platí  $S(\sigma, f) = 1$  a  $s(\sigma, f) = 0$  a proto

$$\overline{\int_0^1 f} = 1 \quad \text{a} \quad \underline{\int_0^1 f} = 0.$$

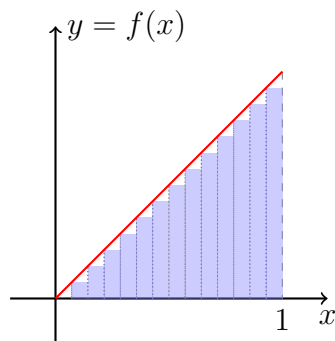
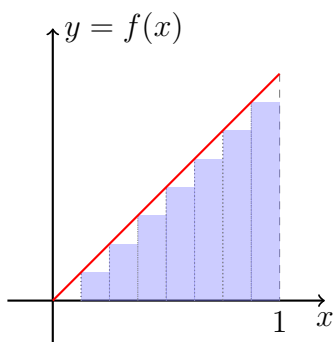
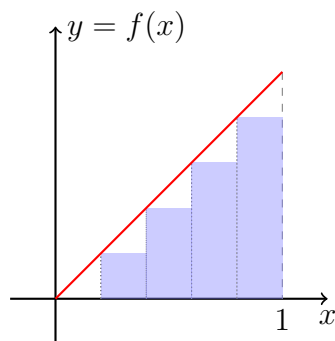
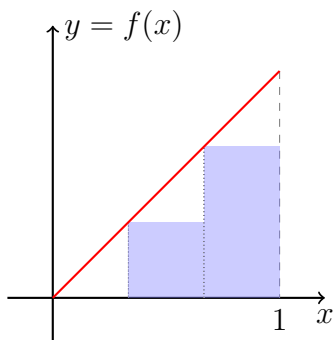
Tato funkce tedy nemá Riemannův integrál na intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$  ani na libovolném jiném uzavřeném intervalu.

**Otázka 3.1:** Rozmyslete si, jaký vliv by na Riemannovu konstrukci uvedenou v této kapitole měla drobná změna infima a suprema v definici horního a dolního integrálu (Definice 3.4) na minimum a maximum. Jaké funkce by pak ne/měly „Riemannův integrál“?

**Poznámka 3.1:** Riemannova konstrukce integrálu prezentovaná v této sekci není jediná možná. Pro první kontakt s problematikou je však asi nejpřístupnější, nejnázornější. Historicky spadá do 19. století. Moderní teorie integrace vychází z Lebesgueovy konstrukce (začátek 20. století). Úzce souvisí s teorií pravděpodobnosti a částečně na ní narazíte v předmětu **BI-PST**.

**Poznámka 3.2 (Mathematica):** Určitý integrál lze v počítačovém algebraickém systému Mathematica počítat pomocí příkazu `Integrate[f, {x, a, b}]`, kde  $f$  je integrovaná funkce (výraz),  $x$  integrační proměnná a  $a$  dolní a  $b$  horní mez. Například výsledek Příkladu 3.2 získáme příkazem `Integrate[x, {x, 0, 1}]`, který skutečně vrátí  $1/2$ .



Obrázek 3.6: K výpočtu Riemannova integrálu funkce  $f(x) = x$ .

## 3.2 Vlastnosti Riemannova integrálu

V dalším textu se pro jednoduchost omezíme na spojitě omezené funkce, pro něž Riemannův integrál existuje. Následující vlastnosti lze odvodit přímo z definice Riemannova integrálu (resp. pomocí integrálních součtů a normálních posloupností dělení). První dvě věty velmi zjednodušují praktické výpočty.

**Věta 3.2** (Aditivita integrálu): Nechť  $f$  a  $g$  jsou spojitě funkce na intervalu  $\langle a, b \rangle$ . Potom pro Riemannův integrál funkce  $f + g$ , která je také automaticky spojitá na intervalu  $\langle a, b \rangle$ , platí

$$\int_a^b (f + g)(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx.$$

**Věta 3.3** (Multiplikativita integrálu): Nechť  $f$  je spojitá na intervalu  $\langle a, b \rangle$  a  $c \in \mathbb{R}$  je konstanta. Potom pro Riemannův integrál funkce  $cf$  platí

$$\int_a^b (cf)(x) \, dx = c \int_a^b f(x) \, dx.$$

Předchozí dvě věty často vyjadřujeme konstatováním, že Riemannův (určitý) integrál je lineární. Riemannův integrál je aditivní i vůči mezím, platí totiž:

**Věta 3.4** (Aditivita integrálu v mezích): Riemannův integrál funkce  $f$  na intervalu  $\langle a, b \rangle$  existuje, právě když existuje  $c \in (a, b)$  pro které existují Riemannovy integrály funkce  $f$  na intervalech  $\langle a, c \rangle$  a  $\langle c, b \rangle$ . V takovém případě navíc platí

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx.$$

Konečně z nerovností mezi funkcemi lze usuzovat na nerovnost mezi jejich určitými integrály. Tuto vlastnost lze často využít při odhadování integrálů (např. při výpočtu rychlosti růstu, k této problematice se dostaneme později).

**Věta 3.5** (Nerovnosti mezi integrály): Nechť jsou  $f$  a  $g$  spojitě funkce na intervalu  $\langle a, b \rangle$  a necht' platí nerovnost  $f(x) \leq g(x)$  pro všechna  $x \in \langle a, b \rangle$ . Potom pro jejich Riemannovy integrály platí

$$\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx.$$

Následující věta odhaluje vztah mezi určitým (Riemannovým) a neurčitým (primitivní funkce) integrálem. Umožňuje nám počítat Riemannův integrál bez explicitního použití limitní definice.

**Věta 3.6** (Newtonova formule): Nechť  $f$  je funkce spojitá na intervalu  $\langle a, b \rangle$  s **primitivní funkcí**  $F$ . Pak pro **Riemannův integrál** funkce  $f$  na intervalu  $\langle a, b \rangle$  platí rovnost

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a) =: \left[ F(x) \right]_a^b.$$

*Důkaz.* Uvažme  $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  dělení intervalu  $\langle a, b \rangle$ . Použijeme **Lagrangeovu větu o přírůstku funkce** na funkci  $F$  a intervaly  $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$  postupně pro  $i = 1, 2, \dots, n$ ,

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \sum_{i=1}^n \left( F(x_i) - F(x_{i-1}) \right) = \sum_{i=1}^n F'(\alpha_i)(x_i - x_{i-1}) = \\ &= \sum_{i=1}^n f(\alpha_i) \Delta_i, \end{aligned}$$

kde  $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, n$ , jsou takové prvky intervalu  $(x_{i-1}, x_i)$ , pro které platí  $F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\alpha_i)(x_i - x_{i-1})$ . Existence takových  $\alpha_i$  plyne právě z Lagrangeovy věty o přírůstku funkce. Takže platí

$$F(b) - F(a) = \mathcal{J}(\sigma, f),$$

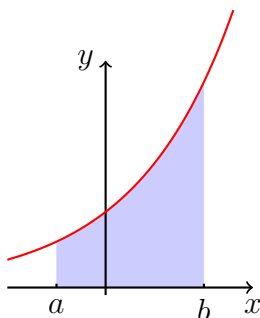
kde  $\mathcal{J}(\sigma, f)$  je nějaký integrální součet funkce  $f$  vzhledem k rozdělení  $\sigma$ . Uvážíme-li nyní libovolnou normální posloupnost dělení  $(\sigma_n)_{n=1}^\infty$  pak

$$F(b) - F(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{J}(\sigma_n, f) = \int_a^b f(x) \, dx.$$

Zde jsme využili rovnici (3.1). □

**Příklad 3.4:** Vypočtete integrál

$$\int_0^1 x \, dx.$$



Obrázek 3.7: Plocha pod grafem exponenciální funkce na intervalu  $\langle a, b \rangle$ .

Podle předchozí věty platí

$$\int_0^1 x \, dx = \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

Srovnajte tento kraťoučkový výpočet s postupem v Příkladu 3.2.

**Příklad 3.5:** Pro  $a < b$  vypočítejte integrál

$$\int_a^b e^x \, dx.$$

Primitivní funkcí k  $e^x$  je funkce  $e^x$ . Pak podle **Newtonovy věty**

$$\int_a^b e^x \, dx = \left[ e^x \right]_a^b = e^b - e^a.$$

Pro ilustraci viz Obrázek 3.7.

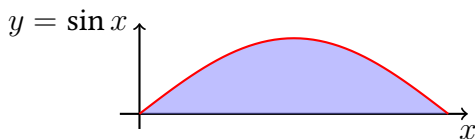
**Příklad 3.6:** Spočítejte integrál

$$\int_0^\pi \sin x \, dx.$$

Primitivní funkcí k funkci  $\sin x$  je funkce  $-\cos x$ . Proto podle **Newtonovy věty**

$$\int_0^\pi \sin x \, dx = \left[ -\cos x \right]_0^\pi = -\cos \pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2.$$

Plocha jednoho „hrbu“ grafu funkce  $\sin$  je tedy 2 (v daných jednotkách plochy). Pro ilustraci viz Obrázek 3.8.

Obrázek 3.8: Plocha pod grafem funkce  $\sin$  na intervalu  $(0, \pi)$ .

### 3.3 Per partes a substitute pro určitý integrál

Díky Newtonově formuli (Věta 3.6) můžeme nyní relativně snadno přeformulovat metodu integrace pomocí per partes a substitute i pro určitý integrál.

**Věta 3.7** (Metoda per partes (určitý integrál)): Nechť  $f$  a  $g$  jsou funkce spojité na  $\langle a, b \rangle$ ,  $f$  má spojitou derivaci na intervalu  $\langle a, b \rangle$  a nechť  $G$  je **primitivní funkce** k funkci  $g$  na intervalu  $\langle a, b \rangle$ . Potom

$$\int_a^b f(x)g(x) \, dx = [f(x)G(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x) \, dx.$$

*Důkaz.* Funkce  $fG$  je primitivní funkcí k funkci  $f'G + fg$  na intervalu  $(a, b)$  a spojitá na  $\langle a, b \rangle$ . Předpoklady spojitosti na intervalu  $\langle a, b \rangle$  zaručují existenci integrálů  $\int_a^b f'G$  a  $\int_a^b fg$ . Použijeme-li linearitu integrálu a **Newtonovu formuli** dostáváme

$$\int_a^b f'(x)G(x) \, dx + \int_a^b f(x)g(x) \, dx = \int_a^b (fG)'(x) \, dx = [f(x)G(x)]_a^b$$

Čímž je důkaz dokončen. □

**Příklad 3.7:** Vypočtete

$$\int_0^1 \ln(1+x) \, dx.$$

Derivujeme  $\ln(1+x)$  a integrujeme 1,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln(1+x) \, dx &= \left[ x \ln(1+x) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x} \, dx = \\ &= \ln(2) - \int_0^1 1 - \frac{1}{1+x} \, dx = \\ &= \ln(2) - \left[ x - \ln|1+x| \right]_0^1 = 2 \ln(2) - 1. \end{aligned}$$

### 3. RIEMANNŮV URČITÝ INTEGRÁL PER PARTES A SUBSTITUCE PRO URČITÝ INTEGRÁL

Než se pustíme do formulace substituce v určitém integrálu, tak je vhodné zavést následující značení:

- $\int_a^a f := 0$ ,
- pro  $a > b$  klademe  $\int_a^b f := -\int_b^a f$ .

Dále si připomeňte Větu 2.5, jejímž zkombinováním s Větou 3.6 dostaneme následující tvrzení.

**Věta 3.8** (O substituci (určitý integrál)): Nechť pro funkce  $f$  a  $\varphi$  platí

1.  $\varphi$  a její derivace  $\varphi'$  jsou spojité na  $\langle \alpha, \beta \rangle$ ,
2.  $f$  je spojitá na  $\varphi(\langle \alpha, \beta \rangle)$ .

Potom pro Riemannův integrál platí

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx.$$

Podobně lze formulovat i druhou větu o substituci pro určitý integrál.

**Příklad 3.8:** Vypočtete integrál

$$\int_0^{\ln(2)} \frac{e^{-x}}{\frac{1}{2} + e^{-x}} dx.$$

Použijeme substituci  $y = \varphi(x) = \frac{1}{2} + e^{-x}$ . Potom

$$\int_0^{\ln(2)} \frac{e^{-x}}{\frac{1}{2} + e^{-x}} dx = -\int_{\frac{3}{2}}^1 \frac{1}{y} dy = \left[ \ln |y| \right]_1^{\frac{3}{2}} = \ln \frac{3}{2}.$$

**Příklad 3.9:** Vypočtete integrál

$$\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^8} dx.$$

Pomocí substituce  $y = x^4$ ,  $dy = 4x^3 dx$ , ihned dostáváme

$$\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^8} dx = \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{1}{1+y^2} dy = \frac{1}{4} \left[ \arctg y \right]_0^1 = \frac{\pi}{16}.$$

Při integraci lze často využít symetrie integrované funkce. Následující věta mluví o integraci sudých či lichých funkcí na symetrických intervalech a o integraci periodických funkcí.

**Věta 3.9** (Integrace na symetrickém intervalu): Nechť  $f$  je funkce spojitá na uvažovaných intervalech.

1. Je-li  $f$  sudá funkce na  $\langle -a, a \rangle$ , pak  $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ .

2. Je-li  $f$  lichá funkce na  $\langle -a, a \rangle$ , pak  $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ .

3. Je-li  $f$  periodická na  $\mathbb{R}$  s periodou  $T$ , pak pro každé  $a, b \in \mathbb{R}$  platí  $\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_b^{b+T} f(x) dx$ .

*Důkaz.* Příklad 1. Pomocí substituce  $y = -x$  dostáváme

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_a^0 f(-y)(-1) dy = \int_0^a f(y) dy.$$

Příklad 2. Stejným způsobem jako v prvním bodě odvodíme

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = - \int_0^a f(x) dx.$$

Příklad 3. Pomocí substituce  $y = x + T$  a periodicity  $f$  nahlédneme, že

$$\begin{aligned} \int_a^{a+T} f(x) dx &= \int_a^b f(x) dx + \int_b^{a+T} f(x) dx = \int_{a+T}^{b+T} f(x) dx + \int_b^{a+T} f(x) dx = \\ &= \int_b^{a+T} f(x) dx + \int_{a+T}^{b+T} f(x) dx = \int_b^{b+T} f(x) dx. \end{aligned}$$

Tím jsme dokázali i poslední bod tvrzení a důkaz je tak dokončen. □

**Příklad 3.10:** Vypočítejte integrály

$$\int_{-2}^2 (x^3 + 3x^2 - x) dx, \quad \int_{-1}^1 x e^{-x^2} dx, \quad \int_0^{2\pi} |\sin x| dx.$$

Postupně vypočteme všechny integrály a použijeme předchozí větu.

$$\int_{-2}^2 (x^3 + 3x^2 - x) dx = 3 \cdot 2 \int_0^2 x^2 dx = 3 \cdot 2 \cdot \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = 16.$$

Pro druhý integrál můžeme psát

$$\int_{-1}^1 x e^{-x^2} dx = 0.$$

V posledním případě je integrand funkce periodická s periodou  $\pi$  a navíc sudá, proto

$$\int_0^{2\pi} |\sin x| dx = \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| dx = 2 \int_0^{\pi} \sin x dx = 2 \left[ -\cos x \right]_0^{\pi} = 4.$$

### 3.4 Výpočet obsahů plošných útvarů

Z geometrické interpretace Riemannova integrálu přímo plyne následující tvrzení umožňující počítat obsahy různých zakřivených rovinných útvarů. Pro ilustraci uvádíme i Obrázek 3.10.

**Poznámka 3.3:** Určitý integrál interpretujeme jako obsah plochy mezi grafem funkce a osou  $x$ . Ovšem tento obsah se počítá i se znaménkem:

$$\int_0^{\pi} \sin(x) dx = 2, \quad \int_0^{2\pi} \sin(x) dx = 0, \quad \int_{\pi}^{2\pi} \sin(x) dx = -2.$$

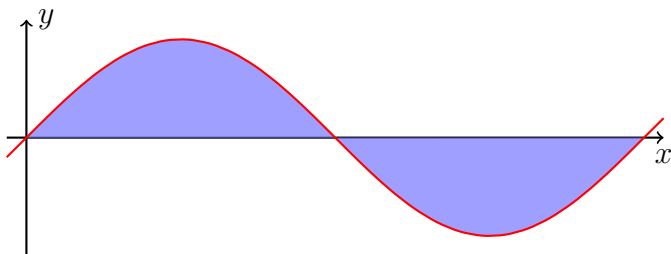
Viz Obrázek 3.9.

Snadno ale můžeme počítat i obsah plochy ohraničené dvěma grafy (vhodně odečteme plochy pod příslušnými grafy).

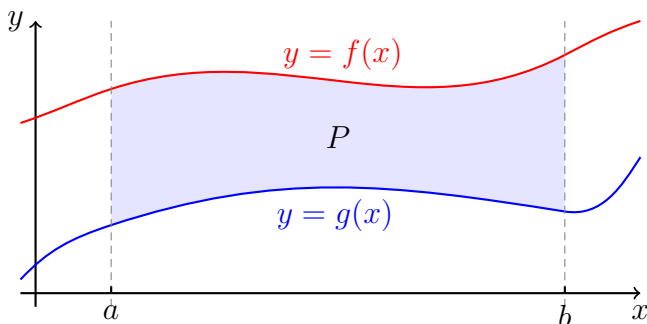
**Pozorování 3.1** (O obsahu plochy ohraničené grafy funkcí): Nechť  $f$  a  $g$  jsou funkce spojité na  $\langle a, b \rangle$  takové, že  $f(x) \geq g(x)$  pro každé  $x \in \langle a, b \rangle$ . Pak obsah plochy  $P$  ohraničené přímkami  $x = a$  a  $x = b$  a grafy funkcí  $f$  a  $g$  je roven

$$P = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$





Obrázek 3.9: Určitý integrál funkce  $\sin$  na intervalu  $\langle 0, 2\pi \rangle$  je roven nule!



Obrázek 3.10: Obsah plochy ohraničené dvěma grafy funkcí.

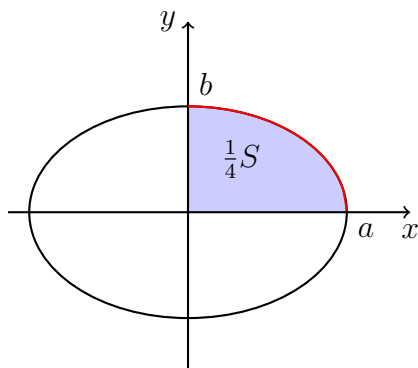
**Příklad 3.11:** Vypočítejte obsah  $S$  elipsy s hlavní poloosou  $a$  a vedlejší poloosou  $b$ .

Rovnice elipsy je  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Vzhledem k osovým symetriím stačí spočítat čtvrtinu obsahu (viz Obrázek 3.11). Vrchní oblouk elipsy patřící do prvního kvadrantu je popsán funkcí  $f(x) = b\sqrt{1 - x^2/a^2}$ ,  $D_f = \langle 0, a \rangle$ . Tudiž, použijeme-li substituci  $x = a \sin t$ ,

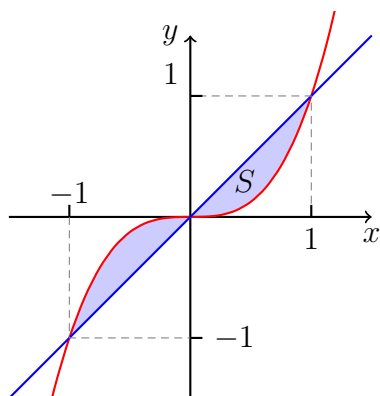
$$\begin{aligned} \frac{1}{4}S &= \int_0^a f(x) \, dx = b \int_0^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \, dx = b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2(t)} \cdot a \cos(t) \, dt = \\ &= ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) \, dt = \frac{\pi}{4}ab. \end{aligned}$$

Pro celkovou plochu tak dostáváme  $S = \pi ab$ .

**Příklad 3.12:** Spočítejte obsah plochy ohraničené křivkami  $y = x^3$  a  $y = x$ . Tato plocha je vyobrazena na Obrázku 3.12.



Obrázek 3.11: K výpočtu plošného obsahu elipsy.

Obrázek 3.12: Plocha ohraničená křivkami  $y = x^3$  a  $y = x$ .

Nejprve nalezneme průsečíky grafů. Řešením rovnice  $x^3 = x$  jsou  $x = -1$ ,  $x = 1$  a  $x = 0$ . Dostáváme proto průsečíky

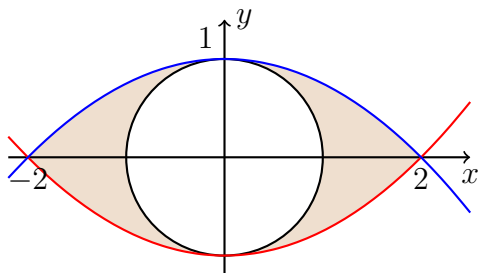
$$(-1, -1), (1, 1) \text{ a } (0, 0).$$

Z náčrtku (resp. průběhu) je pak patrné, že obsah plochy je

$$S = 2 \int_0^1 (x - x^3) dx = 2 \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = 2 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2}.$$

**Příklad 3.13:** Nalezněte obsah plochy ohraničené křivkami

$$y = \frac{1}{4}x^2 - 1, \quad y = 1 - \frac{1}{4}x^2, \quad x^2 + y^2 = 1,$$



Obrázek 3.13: Sauronovo oko. Červená křivka představuje graf funkce  $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$ , modrá křivka graf funkce  $y = 1 - \frac{1}{4}x^2$ .

která je vyobrazena na Obrázku 3.13.

Obsah útvaru bez vyjmuté kružnice je

$$\int_{-2}^2 \left(1 - \frac{1}{4}x^2\right) - \left(\frac{1}{4}x^2 - 1\right) dx = 2 \int_0^2 2 - \frac{1}{2}x^2 dx = 2 \left[2x - \frac{x^3}{6}\right]_0^2 = \frac{16}{3}.$$

Takže plocha našeho útvaru je

$$S = \frac{16}{3} - \pi.$$

## 3.5 Zobecněný Riemannův integrál

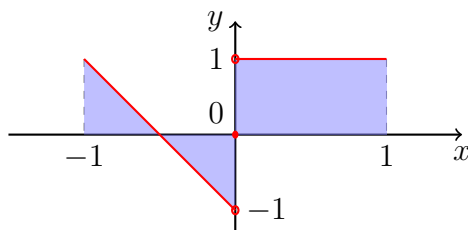
V této podkapitole se budeme zabývat zobecněním Riemannova integrálu pro případy některých nespojitých funkcí, neomezených funkcí, či neomezených intervalů.

**Poznámka 3.4:** Pokud je funkce  $f$  definována na intervalu  $\langle a, b \rangle$ , avšak není na něm spojitá, stále může mít Riemannův integrál. Nejjednodušším případem je situace s jedním bodem skokové nespojitosti:

- existuje  $c \in (a, b)$  tak, že  $f$  je spojitá na  $\langle a, c \rangle$  a  $\langle c, b \rangle$ ,
- existují konečné jednostranné limity funkce  $f$  v bodě  $c$ .

Potom platí

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Obrázek 3.14: Graf funkce  $f(x) = |x| - x + \operatorname{sgn}(x)$ .

Integrály na pravé straně rovnosti jsou již ze spojitých funkcí na uzavřených intervalech. Podobně lze postupovat, má-li příslušná funkce konečný počet bodů nespojitosti tohoto typu (s konečnými jednostrannými limitami).

**Příklad 3.14:** Vypočtete integrál  $\int_{-1}^1 f(x) \, dx$ , kde  $f(x) = |x| - x + \operatorname{sgn}(x)$ .

Funkce  $f$  není spojitá v bodě 0:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1.$$

Pro podrobnější představu viz Obrázek 3.14. Takže

$$\int_{-1}^1 f(x) \, dx = \int_{-1}^0 (-2x - 1) \, dx + \int_0^1 1 \, dx = -\left[x^2 + x\right]_{-1}^0 + 1 = 1.$$

Riemannův integrál jsme konstruovali pro funkce omezené na omezených uzavřených intervalech. Často je však potřeba integrovat funkce na neomezených množinách případně integrovat neomezené funkce (například  $e^{-x^2}$  na  $\mathbb{R}$  v BI-PST). Zavádíme proto pojem zobecněného Riemannova integrálu. V následujícím textu nastíníme způsob jeho konstrukce.

**Definice 3.8** (Zobecněný Riemannův integrál): Nechť  $f$  je funkce definovaná na intervalu  $\langle a, b \rangle$  pro nějaké  $a \in \mathbb{R}$  a  $b \in (a, +\infty) \cup \{+\infty\}$ , která má Riemannův integrál na intervalu  $\langle a, c \rangle$  pro každé  $c \in (a, b)$ . Pokud existuje konečná limita

$$\lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) \, dx,$$

pak její hodnotu značíme

$$\int_a^b f(x) \, dx,$$

nazýváme **zobecněným Riemannovým integrálem** funkce  $f$  na intervalu  $\langle a, b \rangle$  a říkáme, že integrál  $\int_a^b f(x) dx$  konverguje.

**Poznámka 3.5:** Pokud  $\int_a^b |f(x)| dx$  konverguje, tak lze ukázat, že i  $\int_a^b f(x) dx$  konverguje. V takovém případě říkáme, že  $f$  má **absolutně konvergentní zobecněný Riemannův integrál** na  $\langle a, b \rangle$ .

**Poznámka 3.6:** Analogicky definujeme předchozí pojmy pro interval  $\langle a, b \rangle$  a pro  $\langle a, +\infty \rangle$ .

Uvedená definice zobecněného Riemannova integrálu tedy řeší zajímavou situaci, když  $b = +\infty$ , nebo když funkci v bodě  $b$  nejde spojitě dodefinovat.

**Příklad 3.15:** Například

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_1^c \frac{1}{x^2} dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{c} + \frac{1}{1} \right) = 1$$

**Příklad 3.16:** Například

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} (2 - 2\sqrt{c}) = 2.$$

Dále se můžeme zabývat situací, kdy chceme dát smysl integrálu  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ . Zde se omezíme pouze na absolutně konvergentní případy pro spojitě funkce.

**Definice 3.9** (Absolutně konvergentní zobecněný Riemannův integrál na  $\mathbb{R}$ ): Buď  $f$  spojitá funkce definovaná na  $\mathbb{R}$ . Pokud existuje konečná limita

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} \int_{-c}^c |f(x)| dx,$$

pak tuto její hodnotu značíme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$$

a o  $f$  říkáme, že má **absolutně konvergentní zobecněný Riemannův integrál na  $\mathbb{R}$** . Pokud má funkce absolutně konvergentní zobecněný Riemannův integrál na  $\mathbb{R}$ , pak i limita

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} \int_{-c}^c f(x) dx$$

existuje a značíme ji

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx.$$

Tuto hodnotu pak nazýváme **zobecněným Riemannovým integrálem**  $f$  na  $\mathbb{R}$ .

Absolutní konvergence zajišťuje, že hodnota zobecněného Riemannova integrálu nezávisí na způsobu, jakým meze „posíláme“ do nekonečna.

**Příklad 3.17:** Vypočtete

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx.$$

Integrand je zjevně kladnou spojitou funkcí. Dále platí

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_{-c}^c \frac{1}{1+x^2} dx &= \lim_{c \rightarrow +\infty} [\operatorname{arctg} x]_{-c}^c = \lim_{c \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg}(c) - \operatorname{arctg}(-c) \\ &= \lim_{c \rightarrow +\infty} 2 \operatorname{arctg}(c) = \pi. \end{aligned}$$

Funkce  $\frac{1}{1+x^2}$  má tedy absolutně konvergentní zobecněný Riemannův integrál na  $\mathbb{R}$  a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi.$$

## 3.6 Numerická integrace

V této podkapitole si ukážeme, jak v některých případech lze počítat Riemannův integrál numericky. Na tomto místě je ale vhodné poznamenat, že Riemannova konstrukce uvedená v předchozích částech této kapitoly přímo nabádá k numerickému výpočtu pomocí počítače. Nejvhodnější k tomuto účelu použít integrálních součtů, viz rovnici (3.1).

Téma numerické integrace zde jenom „nakousneme“, pro zvědavé čtenáře a čtenářky může představovat zajímavé doplnění hlavního textu. Postupně si zde ukážeme tři metody.

## Středové pravidlo

Buď  $f$  spojitá na intervalu  $\langle a, b \rangle$ . Pro  $n \in \mathbb{N}$  a  $\Delta := \frac{b-a}{n}$  použijeme ekvidistantní dělení  $x_i := a + i \cdot \Delta$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , tedy

$$\sigma = \{a, a + \Delta, a + 2\Delta, \dots, a + (n-1)\Delta, a + n\Delta = b\}.$$

Zde  $\alpha_i$  v integrálním součtu volíme jako středy dělicích intervalů, tedy

$$\alpha_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}.$$

Odtud je i patrné, proč mluvíme o *středovém* pravidlu. Hodnotu integrálu  $\int_a^b f(x)dx$  pak aproximujeme pomocí integrálního součtu

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\sigma) &= \sum_{i=1}^n f(\alpha_i) \Delta = \sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) \cdot \Delta = \\ &= \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right). \end{aligned}$$

Pro dané  $a, b \in \mathbb{R}$  a  $n \in \mathbb{N}$  označme aproximaci integrálu  $\int_a^b f(x)dx$  jako

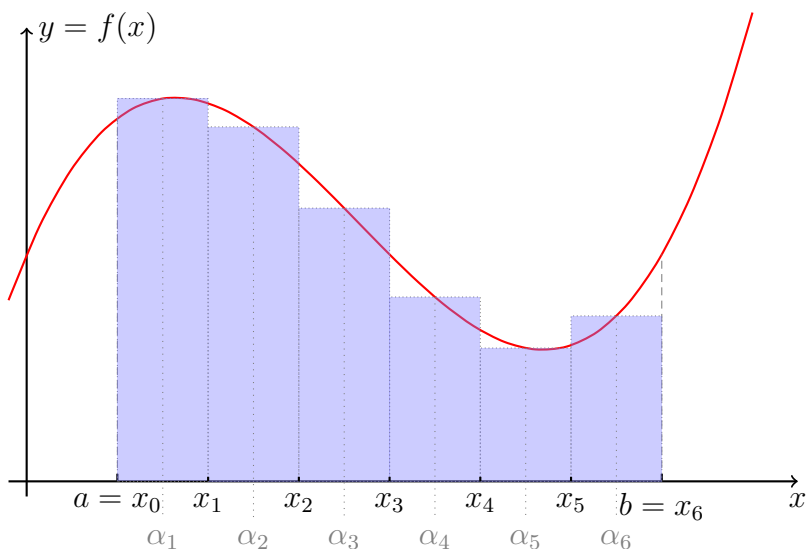
$$\mathcal{J}_{\text{midpoint}} = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right).$$

Následující věta nám předem umožňuje při zadané přesnosti určit potřebný počet dělicích bodů.

**Věta 3.10** (Odhad chyby ve středovém pravidlu): Nechť funkce  $f$  má na intervalu  $\langle a, b \rangle$  druhou derivaci a existuje  $M \in \mathbb{R}$  takové, že  $|f''(x)| \leq M$  pro všechna  $x \in \langle a, b \rangle$ . Potom

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \mathcal{J}_{\text{midpoint}} \right| \leq \frac{M(b-a)^3}{24n^2}.$$

Důkaz nyní vynecháváme (potřebujeme k němu Taylorovy polynomy, které ještě nemáme probrané).



Obrázek 3.15: Ilustrace k středovému pravidlu.

## Lichoběžníkové pravidlo

Na dílčích intervalech se můžeme pokusit integrovanou funkci aproximovat lineární funkcí, která prochází body  $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$  a  $(x_i, f(x_i))$ . „Obsah“ plochy pod grafem funkce, resp.  $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx$ , pak lze aproximovat obsahem lichoběžníku

$$S = \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

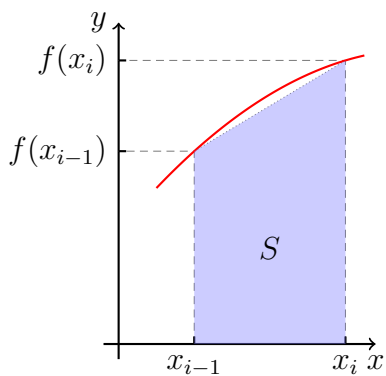
Buď  $f$  spojitá na intervalu  $\langle a, b \rangle$ . Pro  $n \in \mathbb{N}$  a  $\Delta := \frac{b-a}{n}$  použijeme ekvidistantní dělení  $x_i := a + i \cdot \Delta$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , tedy

$$\sigma = \{a, a + \Delta, a + 2\Delta, \dots, a + (n-1)\Delta, a + n\Delta = b\}.$$

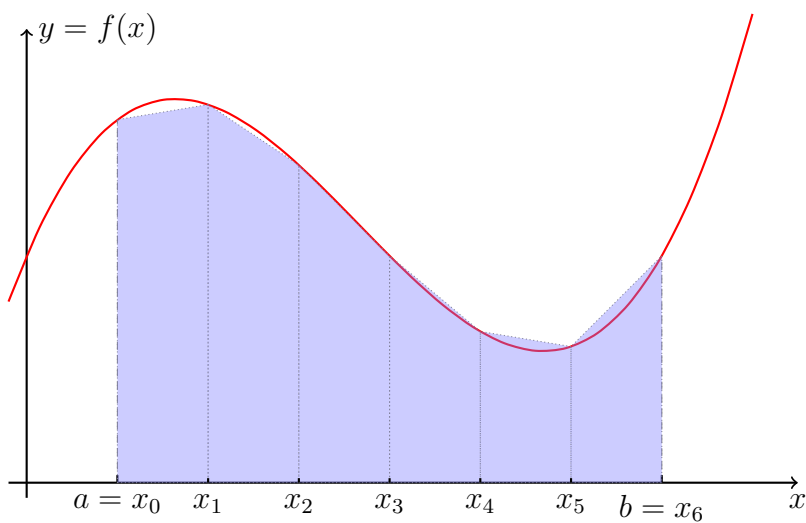
Hodnotu integrálu  $\int_a^b f(x) dx$  aproximujeme pomocí součtu obsahů lichoběžníků

$$\sum_{i=1}^n \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \cdot \Delta = \frac{b-a}{2n} \cdot \left( f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b) \right).$$





Obrázek 3.16: Ilustrace k lichoběžníkovému pravidlu.



Obrázek 3.17: Ilustrace k lichoběžníkovému pravidlu.

Pro dané  $a, b \in \mathbb{R}$  a  $n \in \mathbb{N}$  označme aproximaci integrálu  $\int_a^b f(x)dx$  jako

$$\mathcal{J}_{\text{trapezoid}} = \frac{b-a}{2n} \cdot \left( f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b) \right).$$

**Věta 3.11** (Odhad chyby v lichoběžníkovém pravidlu): Nechť funkce  $f$  má na intervalu  $\langle a, b \rangle$  druhou derivaci a existuje  $M \in \mathbb{R}$  takové, že  $|f''(x)| \leq M$  pro všechna  $x \in \langle a, b \rangle$ . Potom

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \mathcal{J}_{\text{trapezoid}} \right| \leq \frac{M(b-a)^3}{12n^2}.$$

Porovnejte tento výsledek s Větou 3.10. I když se z konstrukce zdá, že jsme od po částech konstantních funkcí přešli k „lepší“ po částech lineárním funkcím, tak odhad chyby je horší!

## Simpsonovo pravidlo

Na tomto místě zmiňme aspoň jeden sofistikovanější způsob známý jako **Simpsonovo pravidlo**. Jeho myšlenka opět spočívá v konstrukci dělení  $\{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$  intervalu  $\langle a, b \rangle$ . Nyní nahradíme funkci  $f$  nad intervalem  $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$  její kvadratickou interpolací procházející body  $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ ,  $(x_i, f(x_i))$  a  $((x_{i-1} + x_i)/2, f((x_{i-1} + x_i)/2))$ . Hledáme proto kvadratickou funkci  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$  splňující

$$\begin{aligned} \alpha x_{i-1}^2 + \beta x_{i-1} + \gamma &= f(x_{i-1}), \\ \alpha x_i^2 + \beta x_i + \gamma &= f(x_i), \\ \alpha \left( \frac{x_i + x_{i-1}}{2} \right)^2 + \beta \frac{x_i + x_{i-1}}{2} + \gamma &= f\left( \frac{x_i + x_{i-1}}{2} \right). \end{aligned}$$

Tyto tři lineární rovnice pro tři neznámé  $\alpha, \beta, \gamma$  lze vyřešit (explicitní vzorečky pro ně lze nalézt v [bi-ma2-m-integrace.nb](#) notebooku na oficiálních stránkách předmětu [BI-MA2](#)). Příspěvek k integrálu na intervalu  $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$  pak nahradíme skutečným integrálem z této kvadratické funkce (viz Newtonovu formuli 3.6 dále),

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \alpha x^2 + \beta x + \gamma dx = \frac{1}{6}(x_i - x_{i-1}) \left( f(x_{i-1}) + f(x_i) + 4f\left( \frac{x_{i-1} + x_i}{2} \right) \right).$$

Tudíž podle Simpsonova pravidla je přibližnou hodnotou integrálu

$$\int_a^b f(x) dx$$

hodnota součtu

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{6}(x_i - x_{i-1}) \left( f(x_{i-1}) + f(x_i) + 4f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) \right),$$

kde  $\sigma = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$  je dělení intervalu  $\langle a, b \rangle$ .

Pro sudý počet dílčích intervalů ( $n$ ) lze pro odhad integrálu  $\int_a^b f(x) dx$  použít výraz

$$\mathcal{J}_{\text{Simpson}} = \frac{b-a}{3n} \cdot \sum_{i=1}^{n/2} (f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})).$$

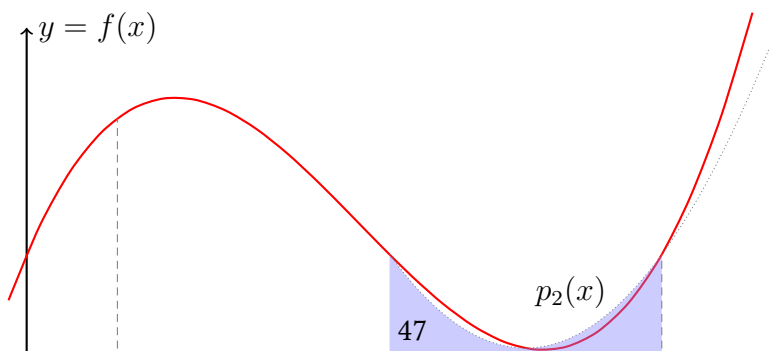
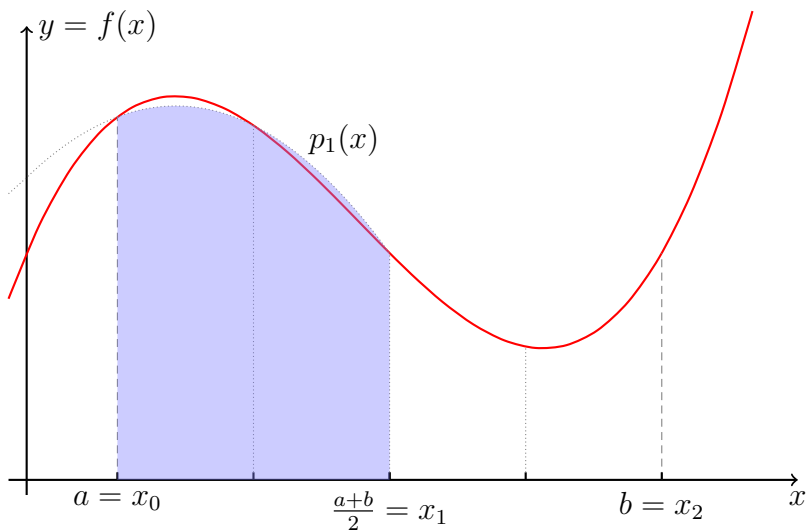
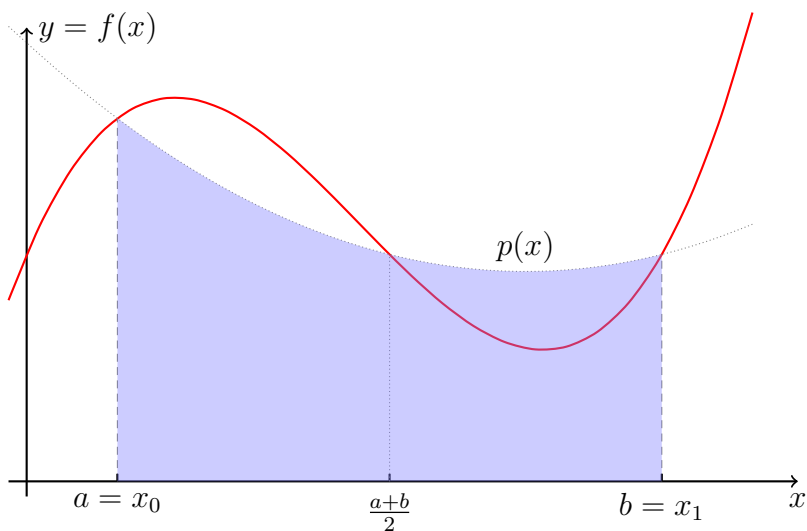
Odhad chyby nyní skutečně dostaneme lepší než v předchozích případech.

**Věta 3.12** (Odhad chyby Simpsonova pravidla): Nechť funkce  $f$  má na intervalu  $\langle a, b \rangle$  čtvrtou derivaci a existuje  $M \in \mathbb{R}$  takové, že  $|f^{(4)}(x)| \leq M$  pro všechna  $x \in \langle a, b \rangle$ . Potom

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \mathcal{J}_{\text{Simpson}} \right| \leq \frac{M(b-a)^5}{180n^4}.$$

Thomas Simpson byl britský matematik žijící v osmnáctém století (1710 – 1761). Přesnost numerických aproximací lze dále vylepšovat použitím interpolací pomocí polynomů vyšších stupňů. My jsme zde použili stupeň 0 (*midpoint*), 1 (*trapezoid*) a 2 (*Simpson*).

Dále lze využívat *adaptivní dělení*, ne jen ekvidistantní. Tj. snažit se mít více dělicích bodů v oblasti, kde se funkce více „mění“.



# 4 Číselné řady

## 4.1 Definice číselné řady

V této části se budeme snažit dát dobrý smysl „součtu všech členů posloupnosti“. Tento proces sčítání bude přesně reprezentovat pojem „číselné řady“, korektně zavedený v definici 4.1. Později v textu (podkapitola 5.4) nám řady umožní počítat funkční hodnoty některých elementárních funkcí jako  $\sin$ , či  $\cos$ , které doteď máme ze středních škol zavedené pouze pomocí geometrické konstrukce.

**Definice 4.1** (Číselná řada / *number series*): Formální výraz tvaru

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k = a_{n_0} + a_{n_0+1} + a_{n_0+2} + \dots,$$

kde  $(a_k)_{k=n_0}^{\infty}$  je zadaná číselná posloupnost, nazýváme **číselnou řadou**. Pokud je **posloupnost částečných součtů**  $(s_n)_{n=n_0}^{\infty}$  definovaná předpisem

$$s_n := \sum_{k=n_0}^n a_k, \quad n \in \mathbb{N}_0, n \geq n_0,$$

konvergentní, nazýváme příslušnou řadu také **konvergentní**. V opačném případě o ní mluvíme jako o **divergentní** číselné řadě. **Součtem** konvergentní řady  $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$  nazýváme hodnotu limity  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ .

V tomto textu se ale bez újmy na obecnosti omezíme na řady indexované od  $n_0 = 0$ , tedy na řady tvaru

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \dots$$

Vždy můžeme index vhodně posunout, např.

$$\sum_{k=42}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{42+k}.$$

**Konvergence** i divergence řady se navíc zachová, změníme-li konečný počet členů řady. Speciálně konvergence řady  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  je ekvivalentní konvergenci řady  $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$  pro libovolně zvolené  $n_0 \in \mathbb{N}$ . Skutečně, posloupnosti částečných součtů řady  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  a řady  $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$  se liší o konstantu (jakou?).

**Poznámka 4.1:** Je důležité rozlišovat mezi pojmy „posloupnost“ a „řada“. Častou studentskou chybou je vzájemné pletení a nepochopení těchto pojmů. Například posloupnost  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ , kde  $a_n = n^2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , je dobré si představovat jako po sobě jdoucí čísla

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots$$

a řadu  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  pro stejnou posloupnost  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  jako po sobě jdoucí čísla

$$1, 5, 14, 30, 55, 91, \dots,$$

tedy členy posloupnosti jejich částečných součtů.

**Příklad 4.1:** Řada

$$\sum_{k=0}^{\infty} k$$

je divergentní.

Skutečně, pro členy posloupnosti jejich částečných součtů platí

$$s_n = \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

a triviálně tedy  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty$ . Příslušná řada je proto podle **definice** divergentní.

**Příklad 4.2** (Geometrická řada): Pro  $|q| < 1$  řada

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k \tag{4.1}$$

konverguje a její součet je

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

Skutečně, členy posloupnosti částečných součtů lze přímo sečíst. Vzpomeňme si opět na známý vzorec

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b) \sum_{k=0}^n a^{n-k} b^k$$

a položme  $a = 1$  a  $b = q$ , po jednoduché úpravě pak získáváme hledaný součet

$$s_n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}. \quad (4.2)$$

Takže s využitím **známé limity** posloupnosti  $(a^n)_{n=0}^{\infty}$  dostáváme  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{1-q}$ .

V závislosti na  $q$  proto součet můžeme vyjádřit následovně

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}, \quad |q| < 1.$$

Poznamenejme, že z rovnice (4.2) také plyne divergence řady (4.1) pro  $q > 1$  nebo  $q \leq -1$ . Pokud  $q = 1$ , pak lze také snadno ověřit, že diverguje.

**Poznámka 4.2:** Součet v rovnici (4.2) lze odvodit více způsoby. Vedle výše uvedeného postupu si můžeme uvědomit, jak se chová  $s_n$  vůči násobení kvocientem  $q$ . Konkrétně

$$q s_n = s_{n+1} - 1 = s_n + q^{n+1} - 1.$$

Vyjádríme-li odtud  $s_n$ , tak opět získáváme (4.2).

Speciálně z předchozího příkladu plyne tvrzení

$$\sum_{k=0}^{\infty} c q^k = \frac{c}{1-q}$$

platné pro  $|q| < 1$  a libovolné  $c$ .

**Příklad 4.3:** Uvažujme číselnou řadu  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , kde  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  je aritmetická posloupnost s diferencí  $d$ . Snadno spočteme částečné součty jako

$$s_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} = n \cdot \frac{2a_1 + (n-1)d}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Řada je tedy konvergentní, právě když  $a_1 = d = 0$ .

**Pozorování 4.1:** Uvažujme konvergentní řady  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  a  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  se součty  $S_a, S_b \in \mathbb{R}$  a  $c \in \mathbb{R}$ . Potom

1. řada  $\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k)$  konverguje a její součet je  $S_a + S_b$ ,
2. řada  $\sum_{k=0}^{\infty} (c \cdot a_k)$  také konverguje a její součet je  $c \cdot S_a$ .

Formálně za uvedených předpokladů píšeme

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} (c \cdot a_k) = c \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Důkaz uvedeného pozorování je jinak přímočarý. Použitím věty o limitě součtu na posloupnost částečných součtů dostaneme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (a_k + b_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=0}^n a_k + \sum_{k=0}^n b_k \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n b_k$$

**Příklad 4.4:** Řada  $\sum_{k=0}^{\infty} (2^{-k} + 3^{-k})$  konverguje a její součet je

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2},$$

neboť konvergují řady  $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}$  a  $\sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k}$  a jejich součet umíme najít, viz Příklad 4.2.

Konvergence sčítaných řad je zásadní. Uvažte triviální příklad  $\sum_{k=0}^{\infty} (k + (-k))$ .



**Poznámka 4.3:** Je-li  $c \neq 0$ , pak divergence řady  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  implikuje divergenci řady  $\sum_{k=0}^{\infty} (c \cdot a_k)$ , protože divergence posloupnosti  $(s_n)_{n=0}^{\infty}$  implikuje divergenci posloupnosti  $(c \cdot s_n)_{n=0}^{\infty}$ . Rozmyslete!

**Poznámka 4.4** (Mathematica): K sčítání konečného počtu prvků nebo i řad slouží v Mathematica příkaz `Sum`, jehož syntaxe je jednoduchá: `Sum[expr, {k, k1, k2}]`, kde `expr` je výraz závisející na sčítacím indexu `k`, který běží od `k1` do `k2`. Horní mez může být  $\infty$  a pak se Mathematica snaží nalézt součet takovéto řady.

Např. pro `Sum[1 / k^2, {k, 1, Infinity}]` dostaneme správný výsledek  $\pi^2/6$ . Pro divergentní řady dostaneme chybovou hlášku, např. `Sum[1 / k, {k, 1, Infinity}` má za následek výpis `Sum does not converge`. V některých případech Mathematica pouze vrátí symbolickou reprezentaci vstupu, typicky když nedokáže v daném případě o ničem rozhodnout.

## 4.2 Kritéria konvergence číselných řad

V této podkapitole rozebereme několik základních nástrojů, které nám umožní rozhodnout o konvergenci, resp. divergenci, číselných řad.

### Nutná podmínka konvergence číselné řady

O některých řadách můžeme rovnou rozhodnout, že divergují, aniž bychom složité zkoumali jejich částečné součty. Zamysleme-li se nad [definicí konvergence řady](#), pak by intuitivně mělo být jasné, že k tomu, aby bylo možné řadu sečíst, tak posloupnost sčítaných čísel musí mít nulovou limitu. Přesněji tuto myšlenku vystihuje následující věta a její důsledek.

**Věta 4.1** (Nutná podmínka konvergence): Pokud řada  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  konverguje, potom pro limitu jejích sčítanců platí  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ .

*Důkaz.* Označme  $S \in \mathbb{R}$  součet naší konvergentní řady a  $(s_n)_{n=0}^{\infty}$  posloupnost jejích částečných součtů. Pro libovolné kladné celé  $n$  platí

$$0 \leq |a_n| = |s_n - s_{n-1}| = |s_n - S + S - s_{n-1}| \leq |s_n - S| + |S - s_{n-1}|.$$

Protože  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  dostáváme z věty o limitě sevržené posloupnosti (BI-MA1, Důsledek)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . □

Nejčastěji předchozí větu používáme v následujícím tvaru.

**Důsledek 4.1** (Vyvrácení konvergence řady): Pokud limita posloupnosti  $(a_k)_{k=0}^{\infty}$  je nenulová nebo neexistuje, *potom řada*  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  není konvergentní.

**Příklad 4.5:** O řadách

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+2}{k+3},$$

můžeme ihned díky důsledku 4.1 tvrdit, že divergují, protože (poporadě)

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt{k} = +\infty, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} (-1)^k \text{ neexistuje,} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k+2}{k+3} = 1.$$

Odvodit takovéto tvrzení přímo z definice konvergence řady není triviální. Zkuste to!

Podmínka ve Větě 4.1 je pouze nutná. Pokud posloupnost sčítanců konverguje k nule, tak nemůžeme tvrdit, že řada konverguje. Následující příklad ukazuje řadu jejíž členy konvergují k nule a zároveň není konvergentní.

**Příklad 4.6:** Uvažme řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}, \tag{4.3}$$

tedy  $a_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$ , pro  $k = 1, 2, \dots$ . Víme již, že platí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0.$$

Ale pro částečné součty  $(s_n)_{n=0}^{\infty}$  platí

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

Proto  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty$ . Zkoumaná řada z rovnice (4.3) proto diverguje.

## Bolzano–Cauchyovo kritérium pro řady

K odvození dalších kritérií pro testování konvergence řad budeme potřebovat Bolzano–Cauchyovo kritérium, tentokrát pro řady.

**Věta 4.2** (Bolzano–Cauchy): Řada  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  konverguje právě tehdy, když pro každé  $\varepsilon > 0$  existuje  $n_0 \in \mathbb{R}$  tak, že pro každé přirozené  $n \geq n_0$  a  $p \in \mathbb{N}$  platí

$$|a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

*Důkaz.* Jedná se pouze o použití **Bolzano–Cauchyova kritéria konvergence posloupnosti** na posloupnost částečných součtů příslušné řady a přeznačení některých symbolů.  $\square$

## Absolutní konvergence

Všimněte si, že má-li řada  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  nezáporné členy, pak je posloupnost jejich částečných součtů monotónní (vzpomeňte na větu o **limitě monotónní posloupnosti**). Víme tedy, že tato řada buď konverguje, nebo je limita jejich částečných součtů rovna  $+\infty$ . Máme-li řadu  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  s členy různých znamének, pak je přirozené ptát se, v jakém vztahu je její konvergence vzhledem k řadě  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ , která už má nezáporné členy.

**Definice 4.2:** Číselnou řadu  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  nazýváme **absolutně konvergentní**, pokud číselná řada  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$  konverguje.

Absolutní konvergence řady implikuje konvergenci řady. Skutečně, platí následující věta.

**Věta 4.3** (O vztahu absolutní konvergence a konvergence): Pokud řada **absolutně konverguje**, *potom* tato řada **konverguje**.

*Důkaz.* Použijeme **Bolzano–Cauchyova kritéria pro konvergenci řady**. Buď  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  absolutně konvergentní řada. Potom pro  $\varepsilon > 0$  existuje  $n_0 \in \mathbb{N}$  tak, že pro každé  $n \geq n_0$  a  $p \in \mathbb{N}$  je

$$|a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| \leq |a_n| + |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Řada  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  tedy konverguje.  $\square$

Poznamenejme, že řady, které jsou konvergentní, ale nejsou absolutně konvergentní, jsou citlivé na změnu pořadí sčítání členů. Jinak řečeno, u absolutně konvergentní řady nezáleží na pořadí, v jakém členy sčítáme, výsledek bude vždy stejný. Tak tomu ale není u řad, které konvergují neabsolutně. Blíže se této problematice na tomto místě věnovat nebudeme.

**Poznámka 4.5** (Černá magie): Obecně je nutné být opatrný při čistě formálních (a neplatných) operacích, mohli bychom tak získat na první pohled neuvěřitelné výsledky. Uvažme třeba následující řadu,

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k,$$

o které víme, že je divergentní a nemá součet. Formálně ovšem

$$S = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} = 1 - S$$

a tedy  $S = 1/2$ . V které části „výpočtu“ jsme se dopustili podvodu?

## Leibnizovo kritérium

Pro řady, jejichž členy střídají „znaménko“, je užitečné následující kritérium.

**Věta 4.4** (Leibnizovo kritérium): Buď  $(a_k)_{k=0}^{\infty}$  monotónní posloupnost konvergující k nule. Potom je řada

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k \tag{4.4}$$

konvergentní.

*Důkaz.* Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že posloupnost  $(a_k)_{k=0}^{\infty}$  je klesající a tedy i tvořená kladnými členy. Označme opět  $(s_n)_{n=0}^{\infty}$  posloupnost částečných součtů naší řady (4.4), tj.  $s_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k$ . Ukažme nejprve, že vybraná posloupnost  $(s_{2n+1})_{n=0}^{\infty}$  je konvergentní. Posloupnost  $(a_k)_{k=0}^{\infty}$  je klesající a proto pro  $n \in \mathbb{N}$  platí nerovnosti

$$s_{2n+1} = (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_{2n} - a_{2n+1}) \geq 0 + 0 + \cdots + 0 = 0$$

a

$$\begin{aligned} s_{2n+1} &= a_0 + (a_2 - a_1) + (a_4 - a_3) + \cdots + (a_{2n} - a_{2n-1}) - a_{2n+1} \leq \\ &\leq a_0 + 0 + 0 + \cdots + 0 + 0 = a_0. \end{aligned}$$

Jinak řečeno, posloupnost  $(s_{2n+1})_{n=0}^{\infty}$  je omezená (ukázali jsme, že všechny její členy leží v intervalu  $\langle 0, a_0 \rangle$ ). Tato posloupnost je ale navíc i rostoucí

$$s_{2n+3} = s_{2n+1} + \underbrace{a_{2n+2} - a_{2n+3}}_{\geq 0} \geq s_{2n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Podle věty o **limitě monotonní posloupnosti** proto existuje její konečná limita, označme ji jako  $s_* = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n+1} \in \mathbb{R}$ .

Protože ale<sup>1</sup>  $s_{2n} = s_{2n+1} + a_{2n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , a dle jednoho z předpokladů dokazované věty je  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = 0$ , platí  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} = s_* + 0 = s_*$ .

Přímo z definice limity posloupnosti nyní ihned plyne  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s_* \in \mathbb{R}$  a řada (4.4) je proto konvergentní.  $\square$

**Poznámka 4.6:** **Leibnizovo kritérium** tedy má smysl aplikovat na řady tvaru

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k,$$

kde  $(a_k)_{k=0}^{\infty}$  je rostoucí posloupnost nekladných čísel, nebo klesající posloupnost nezáporných čísel. O takových řadách mluvíme jako o řadách „se střídavými znaménky“.

**Příklad 4.7:** Příkladem konvergentní řady, která ale není absolutně konvergentní, je řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}.$$

Skutečně, tato řada konverguje podle Leibnizova kritéria, protože posloupnost  $(1/k)_{k=1}^{\infty}$  má kladné členy a monotónně konverguje k nule. Řada z absolutních hodnot členů je  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ , o které již z **BI-MA1** víme, že diverguje.

<sup>1</sup>Pozor, nezapomeňte na extra znaménko, které je u lichého členu záporné!

**Příklad 4.8:** Předpoklad monotonie v **Leibnizově kritériu** je důležitý, nelze ho vypustit. Pro ukázkou uvažme řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k, \quad (4.5)$$

kde členy posloupnosti  $(a_k)_{k=0}^{\infty}$  jsou dány předpisem

$$a_{2k} = \frac{1}{k+1},$$

$$a_{2k+1} = \frac{2}{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Očividně jsou všechny členy posloupnosti  $(a_k)_{k=1}^{\infty}$  kladné, limita této posloupnosti je rovna nule, ale tato posloupnost není monotonní. Skutečně, pro prvních pár členů platí  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 2$  a  $a_2 = 1/2$ , tj.  $a_0 < a_1 > a_2$  (podrobněji,  $a_{2k} < a_{2k+1}$  a  $a_{2k+1} > a_{2k+2}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ).

Pojďme prozkoumat chování posloupnosti částečných součtů této řady, vycházíme tedy přímo Definice 4.1. Pro libovolné  $n \in \mathbb{N}_0$  platí

$$\begin{aligned} s_{2n+1} &= \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k a_k = \\ &= \sum_{\ell=0}^n (-1)^{2\ell} a_{2\ell} + \sum_{\ell=0}^n (-1)^{2\ell+1} a_{2\ell+1} = \\ &= \sum_{\ell=0}^n \left( \underbrace{a_{2\ell} - a_{2\ell+1}}_{\frac{1}{\ell+1} - \frac{2}{\ell+1}} \right) = \\ &= - \sum_{\ell=0}^n \frac{1}{\ell+1}. \end{aligned}$$

Podobně, pro sudé členy platí

$$\begin{aligned}
 s_{2n} &= \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k = \\
 &= \sum_{\ell=0}^n (-1)^{2\ell} a_{2\ell} + \sum_{\ell=0}^{n-1} (-1)^{2\ell+1} a_{2\ell+1} = \\
 &= \sum_{\ell=0}^{n-1} \underbrace{(a_{2\ell} - a_{2\ell+1})}_{\frac{1}{\ell+1} - \frac{2}{\ell+1}} + a_{2n} = \\
 &= - \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{\ell+1} + \frac{1}{n+1} = - \sum_{\ell=0}^n \frac{1}{\ell+1} + \frac{2}{n+1},
 \end{aligned}$$

pro libovolné  $n \in \mathbb{N}_0$ . Dohromady můžeme tyto dva výpočty shrnout kompaktně v asymptotickém vyjádření

$$s_n = - \sum_{\ell=0}^n \frac{1}{\ell+1} + o(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

Pro limitu posloupnosti částečných součtů  $(s_n)_{n=0}^{\infty}$  uvažované řady pak platí (využijeme znalosti limity posloupnosti harmonických čísel)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = -\infty + 0 = -\infty.$$

Řada (4.5) je proto divergentní.

**Poznámka 4.7:** Předchozí příklad nelze interpretovat tak, že porušení monotonie posloupnosti  $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ , při zachování kladnosti členů a nulové limity, má za následek divergenci řady  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ . Leibnizovo kritérium je pouze postačující podmínka, implikace jedním směrem.

Jako příklad lze uvážit drobnou modifikaci předchozího příkladu:

$$\begin{aligned}
 a_{2k} &= \frac{1}{2^k}, \\
 a_{2k+1} &= \frac{2}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

Takto zadaná posloupnost  $(a_k)_{k=0}^{\infty}$  má nulovou limitu, je tvořena kladnými členy, ale není monotonní ( $1 < 2 > 1/2 < 1 > 1/4 < 1/2$  atd.) Pro posloupnost jejích částečných součtů platí

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k = \\ &= \sum_{\ell=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{2^\ell} - \sum_{\ell=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{2^{\ell-1}} + o(1) = \\ &= \frac{1 - \frac{1}{2^{1+\lfloor n/2 \rfloor}}}{1 - \frac{1}{2}} - 2 \frac{1 - \frac{1}{2^{1+\lfloor n/2 \rfloor}}}{1 - \frac{1}{2}} + o(1) \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{1}{\frac{1}{2}} - 2 \frac{1}{\frac{1}{2}} = -2. \end{aligned}$$

Máme zde tedy co dočinění s konvergentní řadou mající součet roven  $-2$ . Konvergenci této řady (bez určení součtu) by šlo i snadněji ukázat pomocí Srovnávacího kritéria (Věta 4.5), které probereme v následující části textu.

## Srovnávací kritérium

Následující kritérium nám umožňuje rozhodovat o konvergenci a divergenci řady porovnáním s vhodně zvolenou řadou, o které víme, jestli konverguje či diverguje.

**Věta 4.5** (Srovnávací kritérium): Budte  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  a  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  číselné řady. Potom platí následující dvě tvrzení.

- Nechť existuje  $k_0 \in \mathbb{N}$  takové, že pro každé  $k \in \mathbb{N}$  větší než  $k_0$  platí nerovnosti  $0 \leq |a_k| \leq b_k$  a nechť řada  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  konverguje. Potom řada  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  **absolutně konverguje**.
- Nechť existuje  $k_0 \in \mathbb{N}$  takové, že pro každé  $k \in \mathbb{N}$  větší nebo rovno  $k_0$  platí nerovnosti  $0 \leq a_k \leq b_k$  a  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  diverguje. Potom i řada  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  diverguje.

*Důkaz bodu a.* Opět použijeme Bolzanova–Cauchyova kritéria. Lze postupovat shodně jako v důkazu věty 4.3. Tvrzení opět plyne z následujícího odhadu,

$$\left| |a_n| + |a_{n+1}| + \dots + |a_{n+p}| \right| = |a_n| + |a_{n+1}| + \dots + |a_{n+p}| \leq b_n + b_{n+1} + \dots + b_{n+p}. \quad \square$$



*Důkaz bodu b.* Dle předpokladu víme, že

$$\sum_{k=k_0}^n a_k \leq \sum_{k=k_0}^n b_k$$

a limita levé strany je  $+\infty$ . Odtud ihned plyne (v podstatě definice limity posloupnosti), že i posloupnost částečných součtů řady  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  diverguje.  $\square$

## D'Alembertovo kritérium

Již víme, že řada  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$  konverguje pro  $|q| < 1$ . Tohoto faktu s výhodou využijeme v důkazu následující věty, která nese jméno po [Jeanu d'Alembertovi](#) (francouzský matematik, 1717 – 1783).

**Věta 4.6** (d'Alembertovo kritérium): Nechť  $a_k > 0$  pro každé  $k \in \mathbb{N}_0$ . Pokud

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} > 1,$$

potom řada  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  diverguje. Pokud ovšem

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1,$$

potom řada  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  konverguje.

*Důkaz prvního tvrzení.* Za uvedeného předpokladu z [podílového kritéria pro posloupnost](#)  $(a_k)_{k=1}^{\infty}$  plyne

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = +\infty.$$

Není tedy splněna nutná podmínka konvergence řady  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  (Věta 4.1) a tato je proto divergentní.  $\square$

*Důkaz druhého tvrzení.* Označme

$$\tilde{q} := \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}.$$

Dle našich předpokladů platí  $0 \leq \tilde{q} < 1$ . Uvažme libovolné  $q$  splňující  $\tilde{q} < q < 1$ . Definice limity posloupnosti (vezme dost malé okolí  $\tilde{q}$ ) implikuje existenci  $k_0 \in \mathbb{N}$  takového, že je-li  $k \geq k_0$  pak platí nerovnost  $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq q < 1$ . Odtud nahlédneme, že pro každé  $k \geq k_0$  platí

$$a_k \leq q^{k-k_0} a_{k_0}.$$

Už ale víme, že řada  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$  konverguje pro  $|q| < 1$ . Podle srovnávacího kritéria (Věta 4.5) tedy konverguje i řada  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ .  $\square$

Poznamenejme, že d'Alembertovo kritérium zdaleka není všemocné. Například o řadě  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$  víme z BI-MA1, že diverguje. Ovšem pro limitu podílů platí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{k}} = 1.$$

D'Alembertovo kritérium tedy o konvergenci, resp. divergenci, této konkrétní řady *nerozhodne*. Dokonce nerozhodne ani o řadě  $\sum_{k=1}^{\infty} k$ . Tato situace je podobná jako u **podílového kritéria pro posloupnosti**.

Existují další kritéria pro vyšetřování konvergence číselných řad (Cauchyovo, Gaussovo, Dirichletovo, Abelovo, aj.). V další části textu odvodíme ještě integrální kritérium (Věta 4.8).

**Příklad 4.9:** Zkoumejme konvergenci řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{1000}}{2^k}.$$

Řada má kladné sčítance, můžeme se proto pokusit použít d'Alembertovo kritérium. Musíme vypočítat hodnotu následující limity

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{(k+1)^{1000}}{2^{k+1}}}{\frac{k^{1000}}{2^k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{k+1}{k} \right)^{1000} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{k} \right)^{1000} = \frac{1}{2} \cdot (1+0)^{1000} = \frac{1}{2}.$$

Protože  $\frac{1}{2} < 1$  a řada má kladné členy **d'Alembertovo kritérium** nám umožňuje tvrdit, že zadaná řada je (absolutně) konvergentní.

Přistupme nyní k první jednoduché aplikaci číselných řad. Pomocí číselné řady můžeme dát přirozený význam nekonečnému desetinnému číselnému rozvoji. Číselné řady budou hrát důležitou roli i v následující podkapitole o Eulerově čísle (podkapitola 4.4) a i později při výkladu o Taylorových řadách (kapitola 5).

**Příklad 4.10** (Desetinný rozvoj): Buď  $(a_k)_{k=1}^{\infty}$  číselná posloupnost jejíž členy nabývají hodnot pouze z množiny  $\{0, 1, \dots, 8, 9\}$ . Potom klademe

$$0.a_1a_2a_3\cdots := \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot 10^{-k}.$$

Řada na pravé straně definiční rovnosti konverguje a její součet jednoznačně (viz [větu o jednoznačnosti limity](#)) definuje jisté reálné číslo. Konvergence řady plyne ze [srovnávacího kritéria](#), zřejmě

$$0 \leq a_k \cdot 10^{-k} \leq 9 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^k$$

a řada  $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k$  konverguje protože jde o součet geometrické posloupnosti s kvocientem  $\frac{1}{10}$ , který je v absolutní hodnotě menší než 1.

### 4.3 Odhadování asymptotického chování součtů

Vzpomeňme si na příklad řady harmonických čísel, tj. na divergentní číselnou řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

Její divergenci jsme prokázali zkoumáním její posloupnosti částečných součtů, tedy posloupností  $(s_n)_{n=1}^{\infty}$  se členy

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

Tento částečný součet nelze vyjádřit explicitně, nelze ho sečíst a zbavit se symbolu sumy (na rozdíl od geometrické či aritmetické posloupnosti). Můžeme ale tento součet geometricky interpretovat jako jistou plochu a její obsah porovnat s obsahem plochy pod jistou křivkou, kterou umíme vypočítat pomocí integrálu. Konkrétně platí následující věta.

**Věta 4.7** (O odhadu posloupnosti částečných součtů): Nechť  $f$  je spojitá funkce na  $\langle 1, +\infty \rangle$  a  $n \in \mathbb{N}$ . Je-li  $f$  klesající, pak platí

$$f(n) + \int_1^n f(x) \, dx \leq \sum_{k=1}^n f(k) \leq f(1) + \int_1^n f(x) \, dx.$$

Je-li  $f$  rostoucí, pak platí

$$f(1) + \int_1^n f(x) \, dx \leq \sum_{k=1}^n f(k) \leq f(n) + \int_1^n f(x) \, dx.$$

Nerovnosti uvedené v předchozí větě je vhodné interpretovat geometricky. Geometrický význam integrálu již známe. Podobně součet  $\sum_{k=1}^n a_k$  lze interpretovat jako obsah  $n$  obdélníků šířky 1 a výšky  $a_k$ , viz Obrázek 4.1.

*Důkaz pro klesající funkci.* Buď  $k \in \mathbb{N}$ , pak pro každé  $x \in \langle k, k+1 \rangle$  platí  $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$ .

Z věty o nerovnosti mezi integrály (Věta 3.5) dostaneme nerovnost

$$f(k+1) = \int_k^{k+1} f(k+1) \, dx \leq \int_k^{k+1} f(x) \, dx \leq \int_k^{k+1} f(k) \, dx = f(k).$$

Sečtením nerovností pro  $k = 1, 2, \dots, n-1$  dostaneme

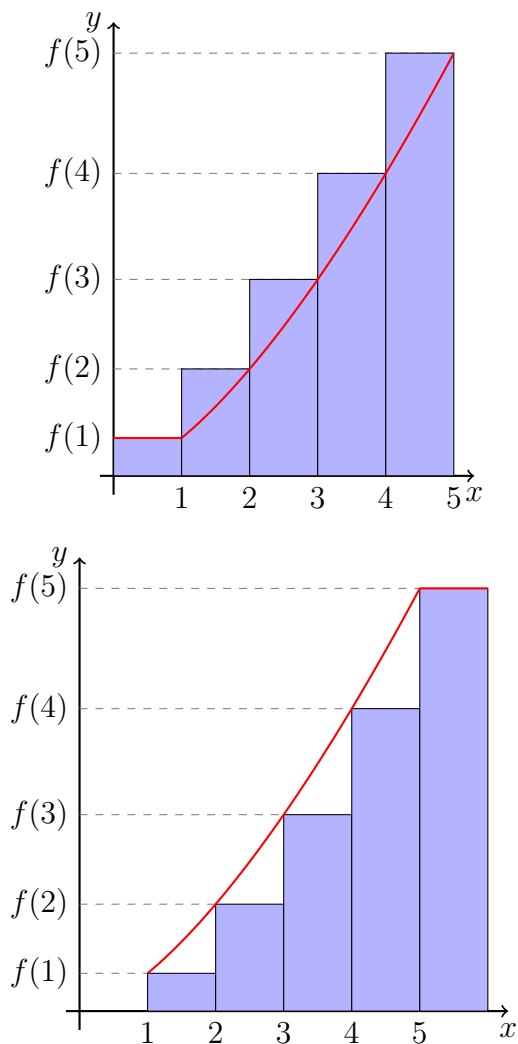
$$\sum_{k=2}^n f(k) \leq \int_1^n f(x) \, dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k).$$

Odtud

$$f(n) + \int_1^n f(x) \, dx \leq \sum_{k=1}^n f(k) \leq f(1) + \int_1^n f(x) \, dx. \quad \square$$

**Příklad 4.11:** Pomocí odhadu z Věty 4.7, tj. aniž bychom součet počítali explicitně, zjistíme rychlost růstu (víme, že má za limitu  $+\infty$ ) posloupnosti  $(s_n)_{n=1}^{\infty}$  s členy

$$s_n = \sum_{k=1}^n k^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$



Obrázek 4.1: Geometrická interpretace nerovností ve Větě 4.7.

Nyní  $f(x) = x^2$  je rostoucí na  $\langle 1, +\infty \rangle$  a proto pro každé  $n \in \mathbb{N}$  platí

$$1 + \int_1^n x^2 dx \leq \sum_{k=1}^n k^2 \leq n^2 + \int_1^n x^2 dx.$$

Tudíž

$$\frac{1}{3}n^3 + \frac{2}{3} \leq s_n \leq \frac{1}{3}n^3 + n^2 - \frac{1}{3}.$$

Pro velká  $n$  je největším členem  $\frac{1}{3}n^3$ , přesněji, z věty o limitě sevřené posloupnosti plyne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{\frac{1}{3}n^3} = 1.$$

**Příklad 4.12:** Odhadněte rychlost růstu posloupnosti  $(n!)_{n=1}^{\infty}$  bez využití faktoriálu. Využijme šikovní úpravy

$$\ln n! = \sum_{k=1}^n \ln k.$$

Funkce  $f(x) = \ln x$  je rostoucí na  $\langle 1, +\infty \rangle$  a proto

$$0 + \int_1^n \ln(x) dx \leq \sum_{k=1}^n \ln(k) \leq \ln(n) + \int_1^n \ln(x) dx.$$

Primitivní funkcí  $F$  k funkci  $f$  je funkce  $F(x) = x \ln(x) - x + C$ , tudíž

$$n \ln(n) - n + 1 \leq \sum_{k=1}^n \ln(k) \leq \ln(n) + n \ln(n) - n + 1.$$

Odlogaritmováním (monotonie  $e^x$ ) poslední nerovnosti pak dostáváme

$$e^{n \ln(n) - n + 1} \leq n! \leq e^{\ln(n) + n \ln(n) - n + 1}$$

a po úpravě

$$e \cdot \frac{n^n}{e^n} \leq n! \leq en \cdot \frac{n^n}{e^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

**Poznámka 4.8:** Tento odhad už je pro většinu aplikací dostatečný. Lze ho však ještě dále zlepšovat. Všimněte, že na rozdíl od předchozího příkladu nám tento nyní nedává posloupnost  $(b_n)_{n=1}^\infty$  takovou, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{b_n} = 1.$$

Získání takovéto posloupnosti  $(b_n)_{n=1}^\infty$  vyžaduje další práci. Pro úplnost uveďme, že tuto vlastnost má například (tzv. **Stirlingův vzorec**)

$$b_n = \sqrt{2\pi n} \cdot \frac{n^n}{e^n}$$

Nyní se vrátíme k příkladu, který jsme připomínali na začátku této podkapitoly.

**Příklad 4.13:** Již víme, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = +\infty.$$

Odhadněme nyní *jak rychle* se  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  blíží k nekonečnu s rostoucími  $n$ .

Podle předchozí věty pro  $f(x) = \frac{1}{x}$  klesající na  $\langle 1, +\infty \rangle$  dostáváme odhad

$$\frac{1}{n} + \int_1^n \frac{1}{x} dx \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x} dx.$$

Po integraci

$$\frac{1}{n} + \ln(n) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Odtud

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln(n), \quad \text{nebo} \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \mathcal{O}(\ln(n)), \quad \text{nebo} \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \mathcal{O}(n).$$

Opět tedy máme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}{\ln(n)} = 1.$$

Dále si povšimněte, že

$$\frac{1}{n} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \leq 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

O posloupnosti  $\left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right)$  lze ukázat, že je klesající a tudíž má limitu. Tato limita se označuje  $\gamma$  a nazývá se **Eulerova–Mascheroniova konstanta**. Její přibližná hodnota je  $\gamma = 0.577218\dots$

Z těchto příkladů je zřejmé, že Věta 4.7 nám dává nástroj na odhadování částečných součtů některých číselných řad a lze ji proto využít k vyšetřování konvergence číselných řad.

**Věta 4.8** (Integrální kritérium): Buď  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  číselná řada s kladnými členy taková, že existuje spojitá a monotónní funkce definovaná na  $\langle 1, +\infty \rangle$  taková, že  $f(n) = a_n$  pro každé  $n$ . Potom

- Pokud (zobecněný Riemannův) integrál  $\int_1^{\infty} f(x) dx$  konverguje, pak číselná řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konverguje.
- Pokud integrál  $\int_1^{\infty} f(x) dx$  diverguje, pak číselná řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  diverguje.

*Důkaz.* Přímočaré použití věty 4.7. □

**Příklad 4.14:** Řada  $\sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha}$  konverguje pro  $\alpha < -1$  a diverguje pro  $\alpha \geq -1$ .

Protože

$$\int_1^n x^{\alpha} dx = \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1}, \quad \alpha \neq -1, \quad \text{a} \quad \int_1^n x^{-1} dx = \ln n$$



platí

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n x^\alpha dx = \frac{1}{-1 - \alpha}, \quad \alpha < -1,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n x^\alpha dx = +\infty, \quad \alpha \geq -1.$$

**Příklad 4.15:** V předchozím textu jsme se setkali s několika kritérii pro vyšetřování (absolutní) konvergence a divergence číselných řad. I když je každé z těchto kritérií zaměřeno na trochu jinou skupinu řad, existuje mezi nimi překryv. Na různé příklady lze tak aplikovat hned několik různých správných postupů. Jako ilustraci tohoto jevu uvažme číselnou řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{k}}. \quad (4.6)$$

Posloupnost jejích sčítanců  $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{k}}\right)_{k=1}^{\infty}$  je sice konvergentní posloupnost s limitou 0 a nutná podmínka konvergence (Věta 4.1) je splněna, ale následující tři způsoby argumentace ukazují, že jde o divergentní číselnou řadu.

1. Funkce  $f(x) = x^{-1/3}$  je spojitá a ostře klesající na intervalu  $\langle 1, +\infty \rangle$  a platí

$$\int_1^{+\infty} x^{-1/3} dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x^{2/3}}{2/3} \right]_1^c = \frac{3}{2} \lim_{c \rightarrow +\infty} (c^{2/3} - 1) = \frac{3}{2} (+\infty) = +\infty.$$

Podle Integrálního kritéria (Věta 4.8) tak řada (4.6) diverguje.

2. Pro všechna přirozená  $k$  platí nerovnost

$$\frac{1}{\sqrt[3]{k}} \geq \frac{1}{k} \geq 0$$

a řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

je známá divergentní harmonická řada (to víme již z BI-MA1 (BI-MA1, Příklad), alternativně to nyní umíme také snadno dokázat pomocí Integrálního kritéria). Srovnávací kritérium (Věta 4.5) nyní implikuje divergenci naší řady (4.6).

3. V neposlední řadě zde můžeme zcela elementárními prostředky ověřit samotnou definici divergentní číselné řady (Definice 4.1). Pro  $n$ -tý částečný součet  $s_n$  řady (4.6) hrubým odhadem<sup>2</sup> dostáváme

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt[3]{k}} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = n \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = n^{2/3} \rightarrow +\infty, \quad \text{pro } n \rightarrow \infty.$$

Odtud plyne (dle (BI-MA1, Věta))  $s_n \rightarrow +\infty$  pro  $n \rightarrow \infty$  a naše řada (4.6) je proto divergentní.

Každý z postupů využívá jiných nástrojů. Poslední uvedený je v jistém smyslu nejjednodušší, protože používá pouze elementární tvrzení. To je samozřejmě jiný typ „jednoduchosti“, než jaký mívají na mysli studenti.

## 4.4 Exponenciální funkce a Eulerovo číslo

V této podkapitole se budeme podrobně věnovat exponenciální funkci, která představuje jednu z nejdůležitějších matematických funkcí. Dále zavedeme Eulerovo číslo (Leonhard Euler, švýcarský matematik, 1707 – 1783). Jak uvidíme, oba tyto matematické objekty stojí na pojmu **číselné řady**, který jsme zavedli v předcházející sekci.

Pro každé reálné  $x$  uvažme **číselnou řadu**<sup>3</sup>

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (4.7)$$

Pomocí **d'Alembertova kritéria** se snadno přesvědčíme o absolutní konvergenci této řady. Pro  $x = 0$  řada (4.7) očividně absolutně konverguje. Pro  $x \neq 0$  pro limitu podílů platí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \right|}{\left| \frac{x^k}{k!} \right|} = |x| \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k+1} = 0 < 1.$$

<sup>2</sup>Každý ze sčítanců v tomto součtu zmenšíme náhradou za nejmenší ze sčítanců

<sup>3</sup>Používáme algebraickou konvenci  $0^0 = 1$ .

Podle d'Alembertova kritéria proto řada  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!}$  konverguje, a tudíž řada (4.7) konverguje absolutně pro libovolné  $x \in \mathbb{R}$ . Výraz (4.7) má tedy pro každé  $x \in \mathbb{R}$  jednoznačný smysl jakožto reálné číslo.

Po těchto počátečních úvahách můžeme přejít k formální definici exponenciální funkce.

**Definice 4.3:** Zobrazení, které každému  $x \in \mathbb{R}$  přiřazuje **součet konvergentní řady**

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},$$

nazýváme **exponenciální funkcí**. Její funkční hodnotu v bodě  $x$  značíme symbolem  $e^x$ . Platí tedy

$$e^x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4.8)$$

Nyní se budeme zabývat vlastnostmi funkce definované vztahem (4.8). Ukážeme, že takováto funkce splňuje všechny vztahy, které bychom od exponenciální funkce očekávali.

**Věta 4.9** (Základní vlastnosti exponenciální funkce): Exponenciální funkce oplývá následujícími vlastnostmi:

- $e^0 = 1$ ,
- pro všechna  $x, y \in \mathbb{R}$  platí  $e^{x+y} = e^x e^y$ ,
- pro všechna  $x \in \mathbb{R}$  platí  $e^x > 0$  a dále  $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ ,
- exponenciála je ostře rostoucí funkce, pro všechna  $x, y \in \mathbb{R}$  splňující nerovnost  $x < y$  platí nerovnost  $e^x < e^y$ .

*Důkaz.* a. Plyne přímo z dosazení<sup>4</sup>  $x = 0$  do definičního vztahu (4.8),

$$e^0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{0^k}{k!} = 1 + 0 + 0 + \dots = 1.$$

<sup>4</sup>Všimněte si, že teď využíváme konvenci  $0^0 = 1$ .

b. Uvažme  $x, y \in \mathbb{R}$ . Potom<sup>5</sup>

$$\begin{aligned} e^x \cdot e^y &= \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right) \cdot \left( \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{y^\ell}{\ell!} \right) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^k \frac{x^\ell}{\ell!} \frac{y^{k-\ell}}{(k-\ell)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} x^\ell y^{k-\ell} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+y)^k}{k!} = e^{x+y}. \end{aligned}$$

c. Z předchozích, již dokázaných, bodů a. a b. plyne rovnost

$$e^x e^{-x} = e^{x-x} = e^0 = 1 \quad (4.9)$$

platná pro libovolné  $x \in \mathbb{R}$ . Tato rovnost implikuje nenulovost  $e^x$  pro libovolné  $x \in \mathbb{R}$  (můžeme argumentovat sporem: kdyby  $e^x = 0$  pro jisté  $x \in \mathbb{R}$ , pak z odvozené rovnosti dostáváme  $0 = 1$ , což je spor). Z rovnosti (4.9) pak ihned dostáváme  $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ .

Buď dále  $x \geq 0$ . Potom přímo z definice exponenciály dostáváme

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \geq 1.$$

Předpoklad  $x \geq 0$  je zde podstatný, díky němu víme, že posloupnost částečných součtů konvergentní řady  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$  je rostoucí a její součet proto můžeme zdola odhadnout prvním členem posloupnosti částečných součtů, což je číslo 1.

Máme-li nyní  $x < 0$ , pak z předchozího odstavce a (4.9) plyne

$$e^x = \frac{1}{e^{-x}} > 0.$$

Celkem proto nerovnost  $e^x > 0$  platí pro každé  $x \in \mathbb{R}$ .

d. Uvažujme  $z > 0$ . Nerovnost  $e^z > 1$  odvozená v důkazu předchozího bodu dále implikuje, že pro *záporné*  $z$  platí

$$e^z = \frac{1}{e^{-z}} < 1.$$

Je-li nyní  $x < y$ , pak  $e^y = e^{y-x} e^x > 1 \cdot e^x = e^x$ , protože  $y - x > 0$ . □

<sup>5</sup>Pozor, zde jsme se dopustili kroku, který by bylo vhodné podrobněji okomentovat. Konkrétně jsme vynásobili dvě absolutně konvergentní číselné řady. Správnost tohoto kroku nedokážeme.

V BI-MA1 jsme využívali ještě jednu zásadní limitní vlastnost exponenciály, z které například plynula spojitost a vztah pro derivaci exponenciály. Tato vlastnost je obsahem následujícího lemmatu.

**Lemma 4.1** (Důležitý limitní vztah pro exponenciální funkci): Platí

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

*Důkaz.* Uvažme  $x \in (-1, 1)$ ,  $x \neq 0$ , a  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ . Potom

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} - 1}{x} - 1 &= \frac{\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!}}{x} - 1 = \sum_{k=1}^n \frac{x^{k-1}}{k!} - 1 = \\ &= \sum_{k=2}^n \frac{x^{k-1}}{k!} = x \sum_{k=2}^n \frac{x^{k-2}}{k!}. \end{aligned}$$

Z těchto rovností plyne odhad

$$\begin{aligned} 0 \leq \left| \frac{\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} - 1}{x} - 1 \right| &\leq |x| \sum_{k=2}^n \frac{|x|^{k-2}}{k!} \leq |x| \sum_{k=2}^n \frac{|x|^{k-2}}{2^{k-1}} = \\ &= \frac{|x|}{2} \sum_{k=2}^n \left( \frac{|x|}{2} \right)^{k-2} \leq \frac{|x|}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \left( \frac{|x|}{2} \right)^{k-2} = \\ &= \frac{|x|}{2} \frac{1}{1 - |x|/2} \leq \frac{|x|}{2} \frac{1}{1 - 1/2} = |x| \end{aligned}$$

platný pro všechna přirozená  $n$ . Odtud ihned plyne nerovnost

$$0 \leq \left| \frac{e^x - 1}{x} - 1 \right| \leq |x|$$

pro každé  $x \in (-1, 1)$ ,  $x \neq 0$ . Konečně věta [O limitě sevřené funkce](#) implikuje

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{e^x - 1}{x} - 1 \right| = 0$$

čili

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1. \quad \square$$

**Poznámka 4.9:** Limity exponenciály v  $+\infty$ , resp.  $-\infty$ , je nyní také snadné odvodit. Neboť pro  $z > 0$  platí  $e^z > 1 + z$ , plyne z věty [O vytlačení do nekonečna](#)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty.$$

Což dále použitím věty o limitě složené funkce

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Pomocí exponenciální funkce můžeme přirozeně definovat Eulerovo číslo jakožto funkční hodnotu exponenciální funkce v bodě 1.

**Definice 4.4** (Eulerovo číslo): **Eulerovo číslo** definujeme pomocí [exponenciální funkce](#) předpisem

$$e := e^1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}. \quad (4.10)$$

Nyní, vybaveni skutečnou definicí Eulerova čísla, se můžeme pustit do prozkoumávání jeho vlastností. Odhadneme jeho hodnotu, jen velmi přibližně, a poté ukážeme jeho iracionalitu.

**Poznámka 4.10:** V této poznámce provedeme první hrubý odhad hodnoty Eulerova čísla. Označme  $(s_n)_{n=1}^{\infty}$  posloupnost částečných součtů řady (4.10), tedy

$$s_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tato posloupnost je očividně rostoucí a omezená. Skutečně,

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n} \leq \\ &\leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} < 3. \end{aligned}$$

Součet řady (4.10), tedy Eulerovo číslo, leží mezi čísly 2.5 (součet prvních tří členů řady) a 3 (horní odhad provedený výše).

**Tvrzení 4.1** (Iracionalita Eulerova čísla): Eulerovo číslo je iracionální.

*Důkaz.* Uvedeme důkaz sporem připisovaný **Josephu Fourierovi** (francouzský matematik a fyzik, 1768–1830) z roku 1815.

Předpokládejme, že Eulerovo číslo je racionální, tj. platí rovnost  $e = \frac{m}{n}$  pro nějaká přirozená  $m$  a  $n > 1$  (už víme, že  $e$  je kladné). Potom  $e \cdot n! = m \cdot (n-1)!$  je přirozené číslo, stejně jako

$$n! \cdot \left( 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right).$$

Rozdíl těchto dvou přirozených čísel je nezáporné celé číslo a pro jeho hodnotu (ozn.  $R$ ) s využitím definiční rovnosti (4.10) dostáváme

$$R = n! \cdot e - n! \left( 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n!}{k!} > 0$$

a dále pak

$$R = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2) \cdots (n+j)} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^j} = \frac{1}{n+1} \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n} < 1.$$

Tj.  $R$  je celé číslo ležící v intervalu  $(0, 1)$ . Takové číslo neexistuje, dosáhli jsme sporu.  $\square$

## Přirozený logaritmus

Připomeňme si výsledek předchozí sekce. **Exponenciální funkce**  $x \mapsto e^x$  je ostře rostoucí (a tedy i prostá). Z bodu c. Věty 4.9 dále víme, že  $e^x$  je kladné pro každé reálné  $x$ . Platí ale víc, oborem hodnot exponenciální funkce je množina  $(0, +\infty)$ .

**Definice 4.5:** Existuje tedy inverzní funkce k exponenciále, která je také ostře rostoucí a zobrazuje  $(0, +\infty)$  na  $\mathbb{R}$ . Tuto funkci nazýváme **přirozeným logaritmem** a značíme symbolem  $\ln$ .

**Věta 4.10** (Vlastnosti přirozeného logaritmu): Přirozený logaritmus  $\ln$  oplývá následujícími vlastnostmi:

- pro každé  $x \in \mathbb{R}$  platí  $\ln e^x = x$  a pro každé  $x \in (0, +\infty)$  platí  $e^{\ln x} = x$ ,
- $\ln e = 1$  a  $\ln 1 = 0$ ,

c. pro  $x, y \in (0, +\infty)$  platí  $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ .

*Důkaz.* a. Plyne přímo z definice inverzní funkce (připomeňte si [definici inverzního zobrazení](#)).

b. Plyne přímo z definice inverzní funkce a vztahů  $e^1 = e$  a  $e^0 = 1$ .

c. Uvažme  $x, y \in (0, +\infty)$  a označme  $x' := \ln x$  a  $y' := \ln y$ , čili  $e^{x'} = x$  a  $e^{y'} = y$ . Dle bodu b. věty 4.9 platí  $xy = e^{x'+y'}$ , neboli  $\ln(xy) = x' + y' = \ln x + \ln y$ .  $\square$

## Obecná mocnina

Pomocí exponenciální a logaritmické funkce zavedené v předchozí sekci nyní definujeme obecnou mocninu (definice 4.6). Jinak řečeno, cílem této sekce je dát korektní význam symbolu  $a^x$ , kde  $a > 0$  a  $x \in \mathbb{R}$ .

Připomeňme, že pro  $a \in \mathbb{R}$  a kladné  $n \in \mathbb{N}$  definujeme

$$a^n := \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{-krát}}. \quad (4.11)$$

Pro záporné celé  $n$  a nenulové  $a$  pak klademe

$$a^n := \frac{1}{a^{-n}}.$$

Tato definice má smysl neboť ve jmenovateli je  $-n$  kladné a můžeme proto použít vztah (4.11). Konečně položíme<sup>6</sup>  $a^0 := 1$

Symbol  $a^n$  má tedy dobrý smysl pro libovolné  $n \in \mathbb{Z}$  a nenulové  $a \in \mathbb{R}$ . Čtenář jistě snadno nahlédne, že při uvedené definici platí rovnosti

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad \text{a} \quad (a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

pro libovolná  $n, m \in \mathbb{N}_0$  a  $a \in \mathbb{R}$  (resp.  $n, m \in \mathbb{Z}$  a  $0 \neq a$ ).

Nyní se zbavíme požadavku na celočíselnost exponentu. Klíčem k úspěchu je následující definice.

**Definice 4.6** (Obecná mocnina): Pro  $a \in (0, +\infty)$  a  $x \in \mathbb{R}$  definujeme

$$a^x := e^{x \ln a}.$$

<sup>6</sup>I pro  $a = 0$ , pozor na toto časté nedorozumnění!



Poznamenejme, že tato definice není v kolizi s dříve zavedenou exponenciální funkcí. Pro  $a = e$  totiž máme

$$e^x = e^{x \ln e} = e^{x \cdot 1} = e^x.$$

Na levé straně symbol  $e^x$  chápeme jako obecnou mocninu a na pravé straně jako exponenciální funkci.

Pojďme si nyní rozmyslet, jaké vlastnosti má námi zavedená obecná mocnina a zda-li rozšiřuje celočíselnou mocninu zmíněnou na začátku této sekce.

**Věta 4.11** (Vlastnosti obecné mocniny): Pro  $a, b > 0$  platí

$$1. a^{x+y} = a^x a^y,$$

$$2. (a^x)^y = a^{xy},$$

$$3. (ab)^x = a^x b^x.$$

pro libovolná  $x, y \in \mathbb{R}$ .

*Důkaz.* Uvažme tedy  $a, b > 0$  a  $x, y \in \mathbb{R}$ . Potom dle definice 4.6 platí

$$a^{x+y} = e^{(x+y) \ln a} = e^{x \ln a + y \ln a} = e^{x \ln a} e^{y \ln a} = a^x a^y.$$

Podobně

$$(a^x)^y = e^{y \ln a^x} = e^{y \ln e^{x \ln a}} = e^{yx \ln a} = a^{yx} = a^{xy}.$$

Na konec s využitím věty 4.10

$$(ab)^x = e^{x \ln(ab)} = e^{x(\ln a + \ln b)} = e^{x \ln a} e^{x \ln b} = a^x b^x. \quad \square$$

Obdobně jako u exponenciální funkce se můžeme na obecnou mocninu dívat jako na funkci  $x \mapsto a^x$ . V tomto případě její vlastnosti závisí na konkrétní hodnotě  $a$ .

**Věta 4.12:** Funkce definovaná předpisem  $a^x$  je:

- ostře rostoucí pokud  $a > 1$ ,
- konstantní pokud  $a = 1$ ,
- ostře klesající pokud  $0 < a < 1$ .

Obor hodnot funkce  $a^x$  je interval  $(0, +\infty)$  pro  $a \neq 1$  a  $\{1\}$  pro  $a = 1$ .

*Důkaz.* Pokud je  $a = 1$ , pak  $a^x = e^{x \ln a} = e^{x \ln 1} = e^0 = 1$ . Uvažme  $a > 1$ . Z definice logaritmu víme, že  $\ln a > 0$ . Je-li  $x < y$  pak  $x \ln a < y \ln a$  a růst exponenciální funkce implikuje

$$a^x = e^{x \ln a} < e^{y \ln a} = a^y.$$

Zbývající případ  $0 < a < 1$  lze vyšetřit analogicky. Pokud  $a = 1$  pak je oborem hodnot množina  $\{1\}$ . V ostatních případech má  $a^x$  stejný obor hodnot jako exponenciála, tedy  $(0, +\infty)$ .  $\square$

**Definice 4.7:** Funkce  $a^x$  je tedy pro  $0 < a \neq 1$  ryze monotonní a tudíž prostá. Její inverzní funkci nazýváme *logaritmem o základu  $a$*  a značíme  $\log_a$ .

**Poznámka 4.11:** Pro každé  $a, x > 0$  dostáváme

$$e^{\log_a x} = e^{\log_a x \cdot \frac{\ln a}{\ln a}} = e^{(\log_a x \cdot \ln a) \frac{1}{\ln a}} = \left(a^{\log_a x}\right)^{\frac{1}{\ln a}} = x^{\frac{1}{\ln a}} = e^{\frac{\ln x}{\ln a}}.$$

Z prostoty exponenciální funkce tudíž dostáváme  $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ . Z tohoto vztahu již plynou všechny ostatní notoricky známé vlastnosti logaritmu. Podobným způsobem (viz cvičení) lze dokázat známou rovnost

$$\log_a b^x = x \log_a b$$

platnou pro libovolné  $0 < a \neq 1, b > 0$  a  $x \in \mathbb{R}$ .

# 5 Taylorovy polynomy

## 5.1 Aproximace funkcí pomocí polynomů

Tečna funkce  $f$  v bodě  $a$  představuje tzv. lineární aproximaci funkce  $f$  v bodě  $a$ . V blízkosti bodu  $a$  dobře vystihuje chování funkce  $f$ . Ilustrativní graf funkce a její tečny je uveden na obrázku 5.1.

Pokud chceme funkce aproximovat i na větších intervalech, zřejmě nevystačíme pouze s přímkami, viz obrázek 5.2. Nabízí se uvažovat místo polynomů prvního stupně (přímky) polynomy vyšších stupňů (kvadratické, kubické, atd.). V této kapitole se budeme zabývat problémem, jak tyto aproximační polynomy zkonstruovat. S pomocí derivací vyšších stupňů se naučíme sestavit tzv. Taylorovy polynomy, které představují v jistém smyslu nejlepší možnou aproximaci k dané funkci.

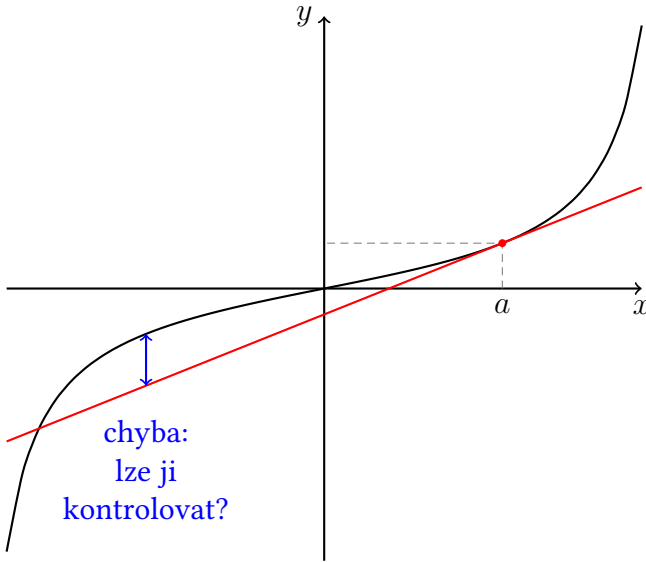
Typickým využitím Taylorových polynomů je úloha vypočítat hodnotu dané funkce s předem zadanou přesností pouze pomocí algebraických operací sčítání a násobení (dělení). Tedy například: Jak numericky určit hodnotu  $\sin(37^\circ)$ ?

Podle známé geometrické definice funkce  $\sin$  k odpovědi na tuto otázku potřebyjeme použít pravítko, kružítko a úhломěr. Přesnost „výpočtu“ je pak dána přesností našich nástrojů. Viz obrázek 5.3.

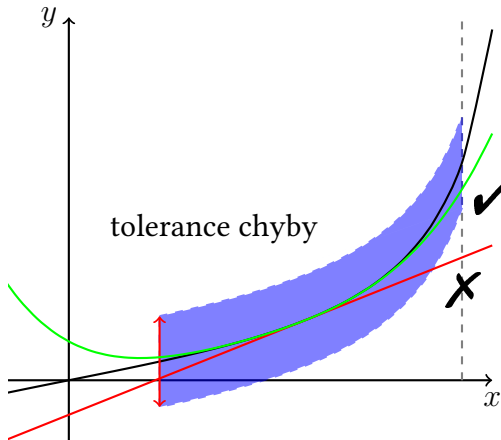
## 5.2 Taylorův polynom

Nejprve si připomeňme pojem polynomu, který bude v celé této kapitole hrát centrální roli.

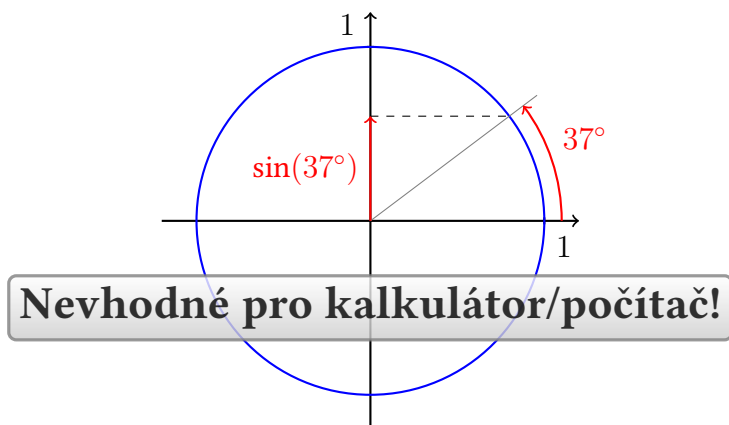
**Definice 5.1** (Polynom / *polynomial*): Reálnou funkci reálné proměnné  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  nazveme **polynomem**, právě když existuje nezáporné celé číslo  $n \in \mathbb{N}_0$  a reálná



Obrázek 5.1: Tečna jakožto lineární aproximace funkce. Lze očekávat, že souhlas je dobrý na malém okolí bodu, kde uvažujeme tečnu. Jak odhadnout chybu mezi funkcí a aproximací?



Obrázek 5.2: Aproximace zadané funkce (černá křivka) pomocí polynomu na zadaném intervalu se zadanou přesností.



Obrázek 5.3: Geometrická definice funkce  $\sin$  pomocí jednotkové kružnice je nevhodná pro výpočetní aplikace.

čísla  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  taková, že rovnost

$$p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

platí pro všechna reálná  $x \in \mathbb{R}$ .

Pro připomenutí uvádíme i základní terminologii spojenou s polynomy. Je-li  $a_n \neq 0$ , nazýváme číslo  $n$  **stupněm polynomu**  $p$ . Jsou-li všechny koeficienty  $a_k$ ,  $k = 0, \dots, n$  nulové, nazýváme  $p$  **nulovým polynomem** a jeho stupeň nedefinujeme.

Podstatnou výhodou polynomů je fakt, že k vyhodnocení funkční hodnoty polynomu stačí operace sčítání (odčítání) a násobení. Navíc polynom stupně  $n$  je zadán  $n + 1$  konstantami a lze ho proto efektivně reprezentovat v paměti počítače.

Notoricky známými příklady polynomů jsou:

1. **Lineární funkce**  $f(x) = ax + b$  ( $a, b \in \mathbb{R}$  parametry) je polynomem nejvýše prvního stupně<sup>1</sup>.
2. **Kvadratická funkce**  $f(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$  parametry) je polynomem druhého stupně.

<sup>1</sup>Slovíčko „lineární“ výše používáme ke zdůraznění, že grafem dané funkce je přímka, lineární objekt. Nejedná se nutně o lineární zobrazení ve smyslu Lineární algebry.

Pokusme se nyní podívat na tečnu z jiného úhlu. Je-li funkce  $f$  diferencovatelná v bodě  $a \in \mathbb{R}$ , pak rovnice její *tečny v bodě  $a$*  má tvar

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Je to přímka nejvíce „připomínající“ funkci  $f$  v okolí bodu  $a$ . Tečnu také můžeme chápat jako graf lineární funkce

$$g(x) := f(a) + f'(a)(x - a).$$

Pro funkce  $f$  a  $g$  platí

$$g(a) = f(a), \quad g'(a) = f'(a).$$

Tj. *funkce  $f$  a její tečna v bodě  $a$  mají stejnou 0. a 1. derivaci v bodě  $a$ .*

Přirozeně se nabízí otázka proč neuvažovat polynom vyššího stupně s podobnou vlastností? Nechtě funkce  $f$  má derivace v bodě  $a$  až do řádu  $n \in \mathbb{N}$  včetně. Lze nalézt polynom  $p$  takový, že  $p^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$  pro všechna  $k = 0, 1, \dots, n$ ?

Odpověď je *kladná*. Hledejme polynom ve tvaru

$$p(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - a)^k.$$

Je potřeba určit konstanty  $a_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$  tak, aby derivace polynomu a funkce v bodě  $a$  až do řádu  $n$  včetně byly shodné. Pro funkční hodnoty derivací polynomu  $p$  v bodě  $a$  platí

$$f(a) = p(a) \quad \implies \quad a_0 = f(a)$$

$$f'(a) = p'(a) = a_1 \quad \implies \quad a_1 = f'(a)$$

$$f''(a) = p''(a) = 2a_2 \quad \implies \quad a_2 = \frac{1}{2} f''(a)$$

$$f^{(k)}(a) = p^{(k)}(a) = k! \cdot a_k \quad \implies \quad a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(a), \quad k = 0, 1, \dots, n$$

Uzavíráme, že hledaný polynom  $p$  požadovaných vlastností je tvaru

$$p(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k.$$

Shrňme si toto pozorování do následující definice a věty.

**Definice 5.2** (Taylorův polynom / *Taylor polynomial*): Nechť reálná funkce reálné proměnné  $f$  má v bodě  $a \in \mathbb{R}$  konečnou  $n$ -tou derivaci. Polynom

$$T_{n,a}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

nazýváme  $n$ -tým Taylorovým polynomem funkce  $f$  v bodě  $a$ .

**Věta 5.1** (O vlastnostech Taylorova polynomu): Nechť reálná funkce reálné proměnné  $f$  má v bodě  $a \in \mathbb{R}$  konečnou  $n$ -tou derivaci. Potom Taylorův polynom  $T_{n,a}$  existuje a je to jediný polynom stupně nejvýše  $n$  takový, že

$$T_{n,a}^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) \text{ pro každé } k = 0, 1, \dots, n.$$

*Důkaz.* Existenci i jednoznačnost jsme dokázali v předchozích odstavcích.  $\square$

**Příklad 5.1:** Nalezněme  $n$ -tý Taylorův polynom funkce  $f(x) = e^x$  v bodě 0. Pro libovolné  $k \in \mathbb{N}_0$  platí  $f^{(k)}(x) = e^x$  a proto  $f^{(k)}(0) = 1$ . Dostáváme

$$T_{n,0}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k.$$

**Příklad 5.2:** Nalezněme  $n$ -tý Taylorův polynom funkce  $f(x) = \sin(x)$  v bodě 0. Derivace funkce  $f$  se cyklicky opakují, v závislosti na  $k \in \mathbb{N}_0$  platí

$$f^{(2k)}(x) = (-1)^k \sin(x) \quad \text{a} \quad f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \cos(x).$$

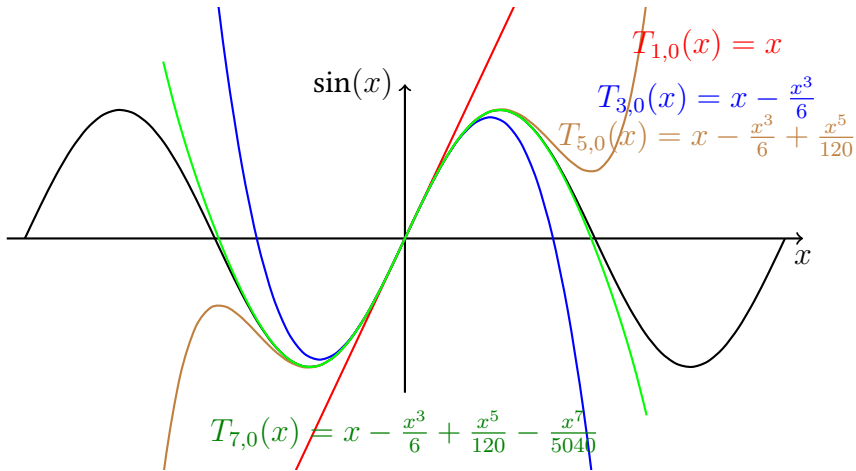
Proto

$$f^{(2k)}(0) = 0 \quad \text{a} \quad f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k.$$

Taylorův polynom pro  $n = 2\ell$  je stejný jako Taylorův polynom pro  $n = 2\ell - 1$  a platí

$$T_{n,0}(x) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j = \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

Speciálně tedy platí  $T_{2n,0} = T_{2n-1,0}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  a ještě speciálněji třeba  $T_{40,0} = T_{39,0}$ . Ukázka několika Taylorových polynomů funkce sinus v bodě 0 je uvedena na obrázku 5.4.



Obrázek 5.4: Příklady Taylorových polynomů funkce sinus v bodě 0 malých stupňů.

**Poznámka 5.1** (Terminologická): Z předchozího příkladu je pěkně vidět, proč používáme název „ $n$ -tý Taylorův polynom“ místo studenty často používaného a nesprávného „Taylorův polynom stupně  $n$ “ když mluvíme o  $T_{n,0}$ :  $n$ -tý Taylorův polynom totiž nutně nemusí mít stupeň  $n$ ! Pro funkci  $\sin$  jsme v bodě 0 odvodili  $T_{2,0}(x) = x$ , tedy její druhý Taylorův polynom má stupeň 1.

## 5.3 Chyba aproximace

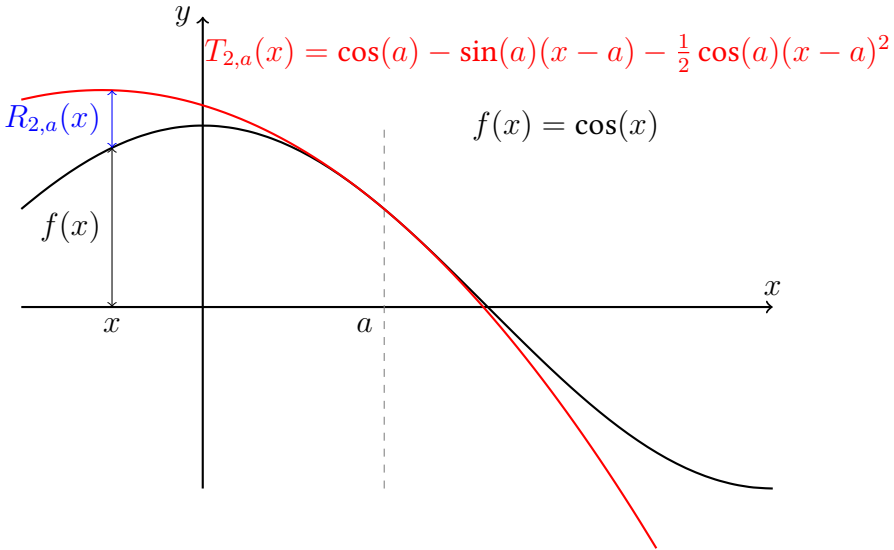
V této podkapitole se budeme zabývat chybou mezi původní funkcí a Taylorovým polynomem. Kdybychom tuto chybu nebyli schopni alespoň odhadnout, pak by aproximace byla prakticky nepoužitelná. Nebyli bychom schopni zajistit požadovanou přesnost aproximace. Definujme si nejprve jasně chybu (zbytek), který zkoumáme.

**Definice 5.3** (Taylorův vzorec a Taylorův zbytek): Nechť funkce  $f$  má v bodě  $a$  konečnou  $n$ -tou derivaci. Pro všechna přípustná  $x$  položme  $R_{n,a}(x) := f(x) - T_{n,a}(x)$ . Potom vztah

$$f(x) = T_{n,a}(x) + R_{n,a}(x)$$

nazýváme **Taylorovým vzorcem** a  $R_{n,a}$  nazýváme  **$n$ -tým zbytkem** v Taylorově vzorci.





Obrázek 5.5: Grafické znázornění Taylorova vzorce, tedy vztahu mezi funkční hodnotou funkce  $f$ , Taylorova polynomu  $T_{n,a}$  a zbytku  $R_{n,a}$ , zde konkrétně pro  $n = 2$ .

**Poznámka 5.2 (Značení):** V případě, že mluvíme o Taylorově polynomu v bodě  $a = 0$  píšeme pro jednoduchost  $T_n$  místo  $T_{n,0}$ . Podobně v případě zbytku  $R_n = R_{n,0}$ . Taylorův polynom pro  $a = 0$  se také někdy nazývá **Maclaurinův polynom**.

První informaci o zbytku v Taylorově vzorci nám dává následující věta. Hrubě řečeno, když  $x \rightarrow a$ , pak zbytek v Taylorově vzorci jde k nule rychleji, než poslední člen  $n$ -tého Taylorova polynomu.

**Věta 5.2 (O zbytku v Taylorově vzorci):** Nechť funkce  $f$  má v jistém okolí  $U_a$  bodu  $a$  spojitou  $n$ -tou derivaci. Pak pro zbytek v Taylorově vzorci platí

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_{n,a}(x)}{(x - a)^n} = 0.$$

*Důkaz.* Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že  $a = 0$ . Z definice zbytku a vlastností Taylorova polynomu plyne

$$R_n(0) = R'_n(0) = \dots = R_n^{(n-1)}(0) = R_n^{(n)}(0) = 0.$$

Pro výpočet limity lze použít l'Hospitalovo pravidlo (zdůvodněte proč!). Potom

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{R_n(x)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{R'_n(x)}{nx^{n-1}} = \dots = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n! \cdot x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{R_n^{(n)}(x)}{n!} = 0.$$

Poslední rovnost platí, protože  $R_n^{(n)} = f^{(n)} - T_n^{(n)}$  je podle předpokladu spojitá funkce na  $U_a$  a  $R_n^{(n)}(0) = 0$ .  $\square$

**Poznámka 5.3:** Za stejných předpokladů jako v předchozí větě. Taylorův vzorec lze vyjádřit ve tvaru

$$f(x) = T_{n,a}(x) + o((x-a)^n) \text{ pro } x \rightarrow a,$$

Skutečně, stačí použít definici  $o$  a tvrzení předchozí věty.

**Příklad 5.3:** Vypočtete limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}.$$

Protože  $\sin x = x + o(x)$  pro  $x \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + o(1)) = 1 + 0 = 1.$$

**Příklad 5.4:** Pro  $x \rightarrow 0$  a  $\alpha \neq 0$  např. platí

$$\begin{aligned} e^{\alpha x} &= 1 + \alpha x + o(x), & \sin(x) &= x + o(x^2), \\ e^{\alpha x} &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha^2}{2}x^2 + o(x^2), & \sin(x) &= x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4). \end{aligned}$$

Hrubě řečeno,  $n$ -tý Taylorův polynom je nejlepší aproximace mezi všemi polynomy stupně  $n$ . Přesný smysl tohoto výroku je obsažen v následující větě.

**Věta 5.3** (O nejlepší aproximaci): Nechť funkce  $f$  má na jistém okolí bodu  $a$  spojitou  $n$ -tou derivaci a nechť  $Q$  je polynom stupně nejvýše  $n$ , různý od Taylorova polynomu  $T_n$  funkce  $f$  v bodě  $a$ . Potom existuje okolí  $U_a$  bodu  $a$  takové, že

$$|f(x) - T_n(x)| < |f(x) - Q(x)| \text{ pro každé } x \in U_a \setminus \{a\}.$$

*Důkaz.* BÚNO uvažujme  $a = 0$ . Označme pro jednoduchost koeficienty polynomů

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, \quad Q(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k.$$

Polynomy jsou různé, jistě tedy existuje  $i \leq n$  takové, že  $a_i \neq b_i$ . Uvažujme dále nejmenší takové  $i$ . Potom

$$f(x) - Q(x) = T_n(x) + R_n(x) - Q(x) = \sum_{k=i}^n (a_k - b_k)x^k + R_n(x).$$

Potom pro  $x \rightarrow 0$  dostaneme použitím předchozí věty 5.2 (rozmyslete!)

$$\left| \frac{f(x) - Q(x)}{x^i} \right| = \left| (a_i - b_i) + \sum_{k=i+1}^n (a_k - b_k)x^{k-i} + \frac{R_n(x)}{x^i} \right|$$

$$\xrightarrow{x \rightarrow 0} |a_i - b_i + 0 + 0| = |a_i - b_i| > 0.$$

Předchozí věta ale také implikuje (rozmyslete!)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{f(x) - T_n(x)}{x^i} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{R_n(x)}{x^i} \right| = 0 < \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{f(x) - Q(x)}{x^i} \right|.$$

Musí tedy existovat okolí  $U_0$  takové, že pro  $x \in U_0 \setminus \{0\}$  platí

$$\left| \frac{f(x) - Q(x)}{x^i} \right| > \left| \frac{f(x) - T_n(x)}{x^i} \right| \implies |f(x) - Q(x)| > |f(x) - T_n(x)|. \quad \square$$

Výraz  $|f(x) - Q(x)|$  představuje absolutní velikost chyby při aproximaci funkce  $f$  pomocí polynomu  $Q$  v bodě  $x$ . Pokud  $T_{n-1} \neq T_n$ , pak pro jisté okolí  $U_0$  podle předchozí věty platí

$$|f(x) - T_n(x)| < |f(x) - T_{n-1}(x)| \quad \text{pro každé } x \in U_0 \setminus \{0\}.$$

Tedy, každý další Taylorův polynom aproximuje funkci  $f$  lépe než předchozí (pokud není shodný s předchozím).

Jak ale ukazuje příklad 5.11, mohou existovat i „patologické“ situace, kdy aproximace pomocí Taylorových polynomů nedává dobře použitelné výsledky.

Nejdůležitější větou této kapitoly je následující Taylorova věta. Tato věta nám dává způsob jak kontrolovat zbytek v Taylorově vzorci (tj. chybu).

**Věta 5.4 (Taylorova):** Necht' existuje okolí  $U_a$  bodu  $a$  takové, že funkce  $f$  v něm má konečnou  $(n+1)$ -ní derivaci. Pak zbytek v Taylorově vzorci  $f(x) = T_{n,a}(x) + R_{n,a}(x)$  lze pro každé  $x \in U_a$  zapsat ve tvaru

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1},$$

kde číslo  $\xi$  závisí na  $x$  a  $n$  a leží uvnitř intervalu s krajními body  $x$  a  $a$ . Tento tvar zbytku nazýváme **Lagrangeův**.

*Důkaz.* Vynecháváme. □

**Poznámka 5.4:** Pro číslo  $\xi$  z předchozí věty tedy platí  $0 < |\xi - a| < |x - a|$ . Interval, o kterém se v předchozí větě mluví nemůžeme zapsat snadno explicitně, protože nevíme, jestli  $x$  leží vpravo či vlevo od bodu  $a$ . Proto se raději uchylujeme k slovnímu popisu, případně nerovnosti uvedené v této poznámce. Hodnota  $\xi$  závisí na hodnotě  $x$  a  $a$ .

Tato věta nám dává velmi důležitou informaci o zbytku v **Taylorově vzorci**. Umožňuje *odhadovat* chybu, které se dopustíme při nahrazení původní funkce  $f$  jejím Taylorovým polynomem  $T_{n,a}$ .

**Příklad 5.5:** Určete, jaké chyby se dopustíme, když pro výpočet čísla  $\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}}$  použijeme hodnotu třetího Taylorova polynomu funkce  $e^x$  v bodě 0 vyhodnoceného v bodě  $x = \frac{1}{2}$ ,

$$T_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3.$$

Dosažením dostaneme funkční hodnotu Taylorova polynomu v  $x = \frac{1}{2}$ :

$$T_3\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{79}{48} = 1.6458\bar{3}.$$

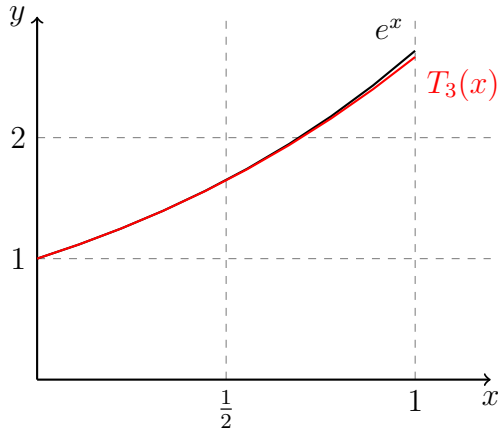
Toto číslo nám samo o sobě nic neříká. Je nutné odhadnout chybu.

Podle Taylorovy věty 5.4 platí ( $f(x) = e^x$ ) rovnost

$$\sqrt{e} = T_3\left(\frac{1}{2}\right) + R_3\left(\frac{1}{2}\right),$$

kde zbytek je tvaru

$$R_3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^\xi}{4!} \left(\frac{1}{2}\right)^4.$$



Obrázek 5.6: Graf exponenciály a 3. Taylorova polynomu exponenciály v bodě 0 použitého k přibližnému výpočtu  $e^{\frac{1}{2}}$ .

O čísle  $\xi$  pouze víme, že leží v intervalu  $(0, \frac{1}{2})$ . Navíc umíme odhadnout velikost čísla  $e$ , platí nerovnost  $e < 4$  (zdůvodněte!). Celkem tedy

$$0 < R_3\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{4^{1/2}}{4!} \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{192} = 0.005208\bar{3}.$$

Číslo  $\sqrt{e}$  leží v intervalu  $(1.6458\bar{3}, 1.651041\bar{6})$ . Viz ilustrační obrázek 5.6. Přibližná hodnota  $\sqrt{e}$  s přesností je  $\sqrt{e} \approx 1.6487213$ .

## 5.4 Mocninné a Taylorovy řady

Již jsme spočetli, že pro každé reálné  $x$  a přirozené  $n$  platí

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + R_n(x).$$

Dále v tomto případě známe tvar zbytku  $R_n$ , lze ho vyjádřit jako

$$R_n(x) = \frac{e^{\xi_{n,x}}}{(n+1)!} x^{n+1},$$

kde  $\xi_{n,x}$  leží mezi 0 a  $x$ , tudíž  $\xi_{n,x} < |x|$ . Z monotonie  $e^x$  pak plyne odhad

$$0 < e^{\xi_{n,x}} < e^{|x|}.$$

Horní odhad čísla  $e^{\xi_{n,x}}$  tedy nezávisí na  $n$  (v tomto případě)!

Pro dané pevné  $x \in \mathbb{R}$  proto platí

$$0 \leq |R_n(x)| < \frac{e^x}{(n+1)!} |x^n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

**Věta o limitě sevřené posloupnosti** potom pro každé reálné  $x$  zaručuje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0.$$

Pro libovolné reálné  $x$  tedy platí

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + R_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Tento fakt pro nás samozřejmě není překvapením, protože exponenciálu jsme takto definovali! Jak za chvíli uvidíme, tuto vlastnost – vyjádřitelnost pomocí součtu číselné řady s parametrem  $x$  – mají i další elementární funkce.

**Definice 5.4** (Mocninná řada / *Power series*): Nechť je dána posloupnost  $(a_k)_{k=0}^{\infty}$  a číslo  $c \in \mathbb{R}$ . Číselnou řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - c)^k, \quad (5.1)$$

závisející na reálném parametru  $x$ , nazýváme **mocninnou řadou se středem v bodě**  $c$ .

**Definice 5.5** (Taylorova řada / *Taylor series*): Nechť reálná funkce reálné proměnné  $f$  má v bodě  $c \in \mathbb{R}$  konečné derivace všech řádů. Mocninnou řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x - c)^k$$

potom nazýváme **Taylorovou řadou funkce  $f$  v bodě  $c$** .

**Poznámka 5.5:** Uvažme pro jednoduchost  $c = 0$  a řadu v rovnici (5.1).

- Je-li například  $x = 2$ , pak máme číselnou řadu  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k 2^k$ ,
- je-li  $x = \frac{1}{3}$ , pak máme číselnou řadu  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}$ .

Tímto způsobem je definována jistá funkce, která každému reálnému  $x$  přiřadí součet zadané číselné řady, pokud existuje. Jaký je definiční obor této funkce?

**Věta 5.5** (O poloměru konvergence): Pokud existuje limita<sup>2</sup>

$$L := \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|,$$

potom klademe

$$R := \begin{cases} \frac{1}{L}, & L > 0, \\ +\infty, & L = 0, \\ 0, & L = +\infty \end{cases}$$

a tvrdíme, že mocninná řada

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - c)^k$$

konverguje absolutně pro  $x \in (c - R, c + R)$  a diverguje pro  $|c - x| > R$ .

*Důkaz.* Pro libovolné  $x \in \mathbb{R}$  různé od  $c$  dostáváme

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}(x - c)^{k+1}}{a_k(x - c)^k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} |x - c| \cdot \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = |x - c| \cdot L.$$

Shrnujeme, že pokud

- $|x - c| \cdot L < 1$ , tedy  $|x - c| < R$ , pak podle d'Alembertova kritéria zkoumaná řada konverguje absolutně,
- $|x - c| \cdot L > 1$ , tedy  $|x - c| > R$ , pak podle podílového kritéria je  $\lim_{k \rightarrow \infty} |a_k(x - c)^k| = +\infty$ . Tudíž nemůže být splněna nutná podmínka konvergence zkoumané řady (tj. neplatí  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k(x - c)^k = 0$ ).  $\square$

<sup>2</sup>Nutně nezáporná!

Uvedme dále několik základních vlastností týkajících se mocninné řady

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k. \quad (5.2)$$

Předpokládejme, že existuje limita  $L = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$  a definujme  $R$  stejně jako v předchozí větě. Číslo  $R$  nazýváme **poloměrem konvergence** mocninné řady (5.2). Předchozí věta říká, že tato mocninná řada (5.2) konverguje pro  $|x| < R$  a diverguje pro  $|x| > R$ . *Neříká nic* o konvergenci pro  $x = R$  a  $x = -R$ . Každá mocninná řada se chová tímto způsobem. Platí totiž následující věta.

**Věta 5.6** (Cauchy–Hadamard): Ke každé mocninné řadě tvaru

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

existuje  $R \in \langle 0, +\infty \rangle$  takové, že tato řada absolutně konverguje pro  $|x| < R$  ( $x = 0$  pokud  $R = 0$ ) a diverguje pro  $|x| > R$ .

*Důkaz.* Vynecháváme. □

Poloměr konvergence ale vždy *nemusí* jít spočítat pomocí limity podílů uvedených ve větě 5.5. Tato limita nemusí existovat.

**Příklad 5.6:** Uvažte mocninnou řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sin(k) x^k.$$

Limita

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{\sin(k+1)}{\sin(k)} \right|$$

neexistuje, ale podle srovnávacího kritéria mocninná řada jistě konverguje pro  $x \in (-1, 1)$ . Skutečně,

$$|\sin(k) x^k| \leq |x|^k$$

a  $\sum_{k=0}^{\infty} |x|^k$  konverguje pro  $|x| < 1$ .



**Příklad 5.7:** Rozeberme všechny tyto poznatky na příkladu funkce  $f(x) = \frac{1}{1-x}$  a její Taylorovy řady v bodě 0,

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k.$$

Platí  $f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$ ,  $x \neq 1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Proto  $f^{(k)}(0) = k!$ . Zadání je tedy v pořádku, tato řada je skutečně Taylorovou řadou příslušné funkce v bodě 0. Pro poloměr konvergence  $R$  máme rovnost

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{1} \right| = 1 = \frac{1}{R}.$$

Dále pro  $x = \pm 1$  jsou řady  $\sum_{k=0}^{\infty} (\pm 1)^k$  divergentní. Řada konverguje absolutně pro  $x \in (-1, 1)$  a diverguje pro všechna ostatní  $x$ . Rovnost

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

platí pro  $x \in (-1, 1)$ . Řadu v tomto případě umíme přímo sečíst, není potřeba vyšetřovat zbytek v Taylorově vzorci.

**Příklad 5.8:** Vyšetřete obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^k$$

Postupujme opět s pomocí věty 5.5. Pro  $L$  platí

$$L = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+1}{k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{k} \right) = 1 + 0 = 1.$$

Proto i  $R = \frac{1}{1} = 1$  a ihned vidíme, že naše řada (se středem v 0) konverguje absolutně pro  $x \in (-1, 1)$  a diverguje pro  $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ .

Dosažením  $x = \pm 1$  dostaneme řady  $\sum_{k=1}^{\infty} k(\pm 1)^k$  z nichž ani jedna není konvergentní, protože nesplňuje nutnou podmínku konvergence. Uzavíráme, že oborem konvergence naší řady je interval  $(-1, 1)$ .

funkce	Taylorova řada v 0	konvergence pro
$e^x$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$	$x \in \mathbb{R}$
$\sin x$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$	$x \in \mathbb{R}$
$\ln(1+x)$	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$	$x \in (-1, 1)$
$\operatorname{arctg} x$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$	$x \in \langle -1, 1 \rangle$

Tabulka 5.2: Některé elementární funkce, jejich Taylorovy řady a  $x$  pro která tyto řady konvergují.

**Příklad 5.9:** Poloměr konvergence mocninné řady může vyjít i nulový. Rozmyslete si to v případě mocninné řady

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k!)x^k,$$

která absolutně konverguje pouze pro  $x = 0$  (její součet je pak 1) a diverguje pro všechna ostatní reálná  $x$ . Její obor konvergence je tedy jednoprvková množina  $\{0\}$ .

Na závěr této podkapitoly uvádíme v tabulce 5.2 Taylorovy řady dalších elementárních funkcí.

**Poznámka 5.6 (Mathematica):** Mathematica nám může pomoci s počítáním Taylorových polynomů příkazem `Series`. Jeho základní použití má tvar `Series[expr, {x, a, n}]`, kde `expr` je výraz závisející na  $x$  a chceme spočítat  $n$ -tý Taylorův polynom v bodě  $a$ .

## 5.5 Příklady

Tuto kapitolu uzavřeme několika řešenými příklady, které ukazují mnohostranné použití Taylorovy věty (Věta 5.4).

**Příklad 5.10:** Najděte vzorec pro výpočet hodnoty funkce  $\sin$  pro všechna reálná  $x$  s přesností  $10^{-7}$ . Díky periodicitě a tvaru<sup>3</sup> funkce  $f = \sin$  stačí nalézt vzorec s požadovanou přesností pro  $x$  z intervalu  $(0, \frac{\pi}{2})$ .

Podle Taylorovy věty pro  $(2n + 2)$ -tý Taylorův polynom se středem v 0 platí

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \underbrace{\frac{f^{(2n+3)}(\xi_{n,x})}{(2n+3)!} x^{2n+3}}_{R_{2n+2}(x)}.$$

Indexy u symbolu  $\xi_{n,x}$  nám připomínají, že tento závisí na  $x$  a  $n$ .

Protože derivace lichého řádu funkce  $\sin$  je – až na střídající se znaménko – funkce  $\cos$ , můžeme zbytek pro  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$  odhadnout:

$$|R_{2n+2}(x)| \leq \frac{1}{(2n+3)!} |x|^{2n+3} < \frac{(\frac{\pi}{2})^{2n+3}}{(2n+3)!} =: a_n.$$

Hodnoty  $a_n$  jsou uvedeny v tabulce 5.4. Vidíme, že pro  $n = 5$  je  $a_n$  poprvé menší než  $10^{-7}$ . Tudíž můžeme uzavřít, že se pro každé  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$  hodnota  $\sin(x)$  liší od výrazu

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!}$$

nejvýše o  $10^{-7}$ .

O úskalích implementace funkce  $\sin$  využívající právě zde uvedený přístup se můžete dozvědět více v tomto [článku na MARASTu](#).

Následující příklad ukazuje, že situace není vždy zcela růžová a pokus o aproximaci pomocí Taylorových polynomů nikam nevede.

**Příklad 5.11:** Z předchozího výkladu by mohl čtenář získat dojem, že k zlepšení přesnosti aproximace funkce  $f$  pomocí jejího Taylorova polynomu  $T_n$  je vždy dostačující zvolit vhodně velké  $n$ . V tomto příkladu si ukážeme příklad funkce, která tuto

<sup>3</sup>Stačí umět počítat funkční hodnotu v prvním kvadrantu.

$n$	1	2	3	4	5	6
$a_n$	$8.0 \cdot 10^{-2}$	$4.7 \cdot 10^{-3}$	$1.6 \cdot 10^{-4}$	$3.6 \cdot 10^{-6}$	$5.7 \cdot 10^{-8}$	$6.7 \cdot 10^{-10}$

Tabulka 5.4: K příkladu 5.10 o aproximaci funkce sinus.

domněnku vyvrací. Uvažme funkci

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Graf této funkce je uveden na obrázku 5.7. Čtenář si samozřejmě průběh této funkce může vyšetřit sám.

Pojďme vypočítat její  $n$ -tý Taylorův polynom v bodě  $a = 0$ . Její derivaci v nule musíme spočítat z definice (pokud bychom zderivovali funkční předpis pro  $f(x)$  pro nenulová  $x$ , tak dostaneme derivaci jen pro nenulová  $x$ ), tedy

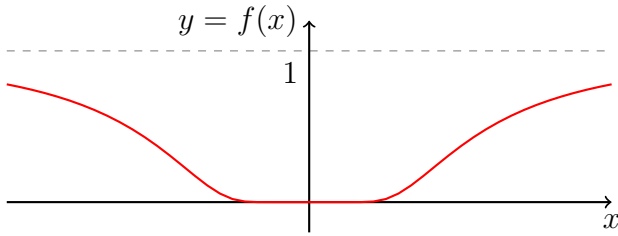
$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-1/x^2} - 0}{x - 0} = \lim_{y \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{e^{y^2}} = \lim_{y \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{2ye^{y^2}} = 0.$$

Nyní se zamysleme nad tím, jak budou vypadat derivace funkce  $f$  vyšších řádů pro nenulová  $x$ . Tvrdíme, že pro  $x \neq 0$  a  $k \in \mathbb{N}$  platí

$$f^{(k)}(x) = \frac{e^{-1/x^2}}{x^{k+2}} P_k(1/x),$$

kde  $P_k(z)$  je polynom stupně  $2k - 2$ . Toto tvrzení můžeme snadno dokázat indukcí. Pro  $k = 1$  máme

$$f'(x) = \frac{e^{-1/x^2}}{x^3}, \quad x \neq 0,$$



Obrázek 5.7: Graf funkce  $f$  z příkladu 5.11. Tato funkce u nuly jde velmi rychle k nule.

tj.  $P_k(z) = 1$ . Nechť nyní tvrzení platí pro  $k \in \mathbb{N}$ , provedme indukční krok

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= (f^{(k)})'(x) = \left( \frac{e^{-1/x^2}}{x^{k+2}} P_k(1/x) \right)' = \\ &= e^{-1/x^2} \left( \frac{\frac{2}{x^2} - k - 2}{x^{k+3}} P_k(x) - \frac{1}{x^{k+3}} P_k'(x) \right) = \\ &= \frac{e^{-1/x^2}}{x^{k+3}} \underbrace{\left( \left( \frac{2}{x^2} - k - 2 \right) P_k(1/x) - P_k'(1/x) \right)}_{P_{k+1}(1/x)}, \end{aligned}$$

na pravé straně opravdu vidíme, že  $P_{k+1}(z)$  je polynom stupně  $2 + 2k - 2 = 2k$ .

Nyní opět matematickou indukcí dokažme, že  $f^{(k)}(0) = 0$  pro přirozené  $k$ . Pro  $k = 1$  jsme toto tvrzení již ověřili, předpokládejme, že tvrzení platí pro  $k \in \mathbb{N}$ . Potom analogickým výpočtem jako výše dostáváme

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^{-1/x^2}}{x^{k+2}} P_k(1/x)}{x} = \\ &= \lim_{y \rightarrow \pm\infty} \frac{y^{k+3} P_k(y)}{e^{y^2}} = 0. \end{aligned}$$

Pro  $n$ -tý Taylorův polynom této funkce proto platí  $T_n(x) = 0$ . Ať je  $n$  jaké chce, tak stále máme nulový polynom. Pro tuto funkci je tedy hodnota  $f(x)$  totožná s hodnotou  $R_n(x)$  pro libovolné  $x$ . Poloměr konvergence příslušné Taylorovy řady je triviálně nekonečný.

Taylorovy polynomy nejsou jediným nástrojem použitelným pro výpočet funkčních hodnot elementárních funkcí. Tuto kapitolu zakončíme dvěma krátkými poznámkami tímto směrem.

**Poznámka 5.7** (CORDIC): Kapesní kalkulátory většinou přímo nepoužívají mocniné rozvoje pro výpočet hodnot trigonometrických funkcí ( $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\tan$ , atd.). Často využívají algoritmus **CORDIC**. Ten k výpočtu například funkčních hodnot funkce  $\sin$  rafinovaně využívá

1. součtové vzorce pro trigonometrické funkce,
2. vzorky, tj. v programu uložené hodnoty funkce  $\sin$  *předem napočtené* (například pomocí Taylorova polynomu) pro jistou množinu úhlů.

První implementace tohoto algoritmu pochází z roku 1959 a byla využita v navigačním počítači bombardéru B-58.

**Poznámka 5.8** (Padého aproximace): Padého aproximace funkcí místo polynomů využívá racionální lomené funkce, tj. podíl dvou polynomů. Takováto funkce je stále elementární v tom smyslu, že její funkční hodnoty lze počítat opět pouze pomocí algebraických operací sčítání, násobení a dělení čísel. Je-li  $f$  zadaná funkce tak se Padého metoda snaží najít polynomy  $P(x)$  a  $Q(x)$  takové, aby rovnost

$$f(x) \approx \frac{P(x)}{Q(x)}$$

přibližně platila na okolí zadaného bodu.

## 6 Lineární rekurentní rovnice

S rekurentně zadanými posloupnostmi  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  jste se setkali již dávno na střední škole (viz geometrická a aritmetická posloupnost). Potkali jsme se s nimi ale i při studiu BI-MA1 při snaze řešit rovnice typu  $f(x) = 0$  pomocí Newtonovy metody. Rekurentní rovnice se dále objevují na řadě míst. V této části textu si ukážeme jejich souvislost s hledáním explicitních vzorců pro členy posloupností částečných součtů číselných řad. Dále si ukážeme rekurentní rovnice přirozeně vznikající při studiu rekurzivních algoritmů. Tím ovšem není oblast aplikací těchto rovnic vyčerpána, dalším bohatým zdrojem rekurentních rovnic mohou být různé kombinatorické úlohy.

Obecně lze posloupnost rekurentně zadat vztahem

$$a_n = f_n(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2, a_1), \quad n = 2, 3, \dots,$$

kde  $f_n : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n = 2, 3, \dots$  jsou nějaká pevně zadaná zobrazení. V této formě je pojem příliš obecný a podrobněji se mu v této plné obecnosti věnovat nebudeme.<sup>1</sup>

U rekurentně zadaných posloupností nás typicky zajímá:

- Vyjádření  $n$ -tého členu v uzavřeném tvaru („vyřešení rekurence“).
- Pokud uzavřený tvar neznáme, tak alespoň odvození asymptotických vlastností řešení (popis těchto řešení pomocí asymptotických symbolů  $\sim$ ,  $\mathcal{O}$ ,  $\Omega$ ,  $\Theta$ , atd.).

Oběma aspektům se zde budeme postupně věnovat v různých speciálních případech. Nejprve začneme klasickým motivačním příkladem Hanojských věží.

---

<sup>1</sup>Partie matematiky, která se obecně snaží studovat takovéto rekurence by spadala do teorie dynamických systémů.



Obrázek 6.1: Počáteční a koncový stav Hanojských věží s čtyřmi disky.



Obrázek 6.2: Řešení Hanojských věží s jedním diskem je snadné. V jednom tahu ho přesuneme z jedné tyče na druhou.

## 6.1 Úvod

Následující zajímavý příklad ukazuje, jak rekurentní vztah (rovnice) přirozeně vzniká při studiu problému, za nímž na první pohled žádná rekurence vidět není.

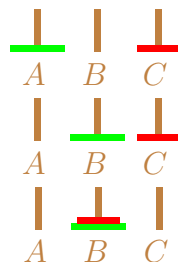
### Hanojské věže

Máme tři tyče  $A$ ,  $B$  a  $C$ , na tyči  $A$  je navlečeno  $n$  kruhových disků postupně se zmenšující velikosti (zdola nahoru). Tyto disky máme přesunout na tyč  $B$  tak, že pohybujeme vždy jen jedním diskem na vrcholu věže a nikdy nepoložíme větší disk na menší. Ilustrace této situace je uvedena na Obrázku 6.1.

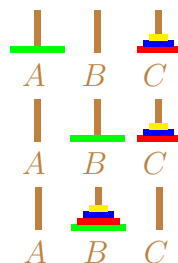
Řešení si vyzkoušíme pro  $n = 1$  disk a  $n = 2$  disky a pak uhádneme obecný postup:

1. Pro  $n = 1$  vezmeme disk z tyče  $A$  a přemístíme jej na tyč  $B$ . Tato situace je prezentována na Obrázku 6.2.
2. Pro  $n = 2$  máme minimálně tři kroky, jak si lze snadno rozmyslet například s pomocí Obrázku 6.3.





Obrázek 6.3: Řešení Hanojských věží v případě dvou disků vyžaduje minimálně tři tahů.



Obrázek 6.4: Symbolické znázornění obecného postupu při řešení Hanojských věží s  $n$  disky. Nejprve přeneseme  $n - 1$  disků z první tyče na poslední tyč. Poté přemístíme největší disk z první tyče na prostřední tyč. Nakonec přenesem  $n - 1$  disků z poslední tyče na prostřední tyč.

Pojďme se nyní zamyslet nad obecnou situací. Každé řešení problému Hanojských věží lze rozdělit na tři úkony: pro  $n > 1$  disků nejprve (nějak) přemístíme vrchních  $n - 1$  disků z tyče  $A$  na tyč  $C$ , potom přesuneme největší disk z tyče  $A$  na tyč  $B$  a na závěr přemístíme  $n - 1$  disků z tyče  $C$  na tyč  $B$ . Tyto fáze jsou ilustrovány na Obrázku 6.4.

Označme nyní minimální počet kroků (přesunů jednotlivých disků) k přesunu věže velikosti  $n$  z tyče na tyč symbolem  $T_n$ . Z předchozí diskuze už víme, že  $T_0 = 0$ ,

$T_1 = 1, T_2 = 3$ . Obecný postup popsany výše pak implikuje *rekurentní vztah*:

$$T_n = 2 \cdot T_{n-1} + 1, \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}. \quad (6.1)$$

Tento vztah nám umožňuje *rekurentně* určit další hodnoty  $T_n$ :

- $T_0 = 0, T_1 = 1, T_2 = 3$ .
- $T_3 = 2 \cdot T_2 + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$ .
- $T_4 = 2 \cdot T_3 + 1 = 2 \cdot 7 + 1 = 15$ .
- $T_5 = 2 \cdot T_4 + 1 = 2 \cdot 15 + 1 = 31$ .
- atd.

Zkušené oko v těchto numerických hodnotách vidí vztah  $T_n = 2^n - 1, n \geq 0$ .

Je tato intuice správná? Ano, jak se snadno přesvědčíte matematickou indukcí, nebo využitím látky těchto přednášek (viz Příklad 6.6).

## Nelineární rekurence

Rekurence

$$T_n = 2 \cdot T_{n-1} + 1$$

byla „lineární“ ve smyslu: výrazy  $T_n$  a  $T_{n-1}$  se v ní vyskytují pouze v součtu násobené číselnými faktory (přesná definice „linearity“ již zanedlouho).

Jakmile opustíme „linearitu“, tak se situace může velmi komplikovat, vzpomeňte na tento příklad z BI-MA1:

**Příklad 6.1:** Posloupnost  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  zadaná rekurentně vztahem

$$a_n = 4 \cdot a_{n-1} \cdot (1 - a_{n-1}), \quad n \in \mathbb{N}, \quad a_0 \in \langle 0, 1 \rangle,$$

a známá pod názvem „logistické zobrazení“ se chová chaoticky.

O nelineárních rekurentních rovnicích je obecně výrazně složitější něco říct, podrobněji se jim zde věnovat nebudeme. Tím ovšem ani při nejmenším nenaznačujeme, že by takovéto rekurence nebyly důležité a zajímavé!

## 6.2 Lineární rekurentní rovnice

Motivování předchozí diskuzí a inspirování rovnicí (6.1) se nyní hlouběji ponoříme do studia lineárních rekurentních rovnic. Pusťme se nejprve do definice ústředního pojmu a zavedení užitečné terminologie.

**Definice 6.1** (Lineární rekurentní rovnice / *Linear recurrence equation*): **Lineární rekurentní rovnice řádu**  $k \in \mathbb{N}$  (zkráceně LRR) je rovnice tvaru

$$x_{n+k} + c_{k-1,n} \cdot x_{n+k-1} + \cdots + c_{1,n} \cdot x_{n+1} + c_{0,n} \cdot x_n = b_n, \quad n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0, \quad (6.2)$$

kde  $n_0 \in \mathbb{Z}$  a  $(c_{i,n})_{n=n_0}^{\infty}$ ,  $i = 0, 1, \dots, k-1$ , (tzv. **koeficienty rovnice**) a  $(b_n)_{n=n_0}^{\infty}$  (tzv. **pravá strana rovnice**) jsou zadané posloupnosti a posloupnost  $(c_{0,n})_{n=n_0}^{\infty}$  není nulová posloupnost. Jestliže  $b_n = 0$  pro každé  $n \geq n_0$ , pak se příslušná rovnice nazývá **homogenní**. **Přidruženou homogenní rovnicí** k rovnici (6.2) nazýváme LRR se stejnými koeficienty a nulovou pravou stranou ( $b_n = 0$  pro každé  $n \geq n_0$ ).

Jako neznámou v rovnici<sup>2</sup> (6.2) chápeme celou posloupnost  $(x_n)_{n=n_0}^{\infty}$ . Zkráceně bychom rovnici (6.2) mohli pomocí sumační notace zapsat ve tvaru

$$x_{n+k} + \sum_{i=0}^{k-1} c_{i,n} x_{n+i} = b_n, \quad n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0.$$

Tento zápis budeme často používat. Je explicitnější a zabírá méně místa.

Pozorné čtenářstvo si jistě všimne množství lineárně–algebraicky znějících pojmů v Definici 6.1. Zanedlouho uvidíme, že vztah mezi řešením soustav lineárních rovnic a lineárních rekurentních rovnic je hluboký.

Lineární rekurentní rovnice typicky vzejde z praktického problému a nás poté zajímá její řešení. Pojdme formálně zavést i tento důležitý pojem.

**Definice 6.2** (Řešení LRR): Nechť je dána lineární rekurentní rovnice řádu  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$x_{n+k} + c_{k-1,n} x_{n+k-1} + \cdots + c_{1,n} x_{n+1} + c_{0,n} x_n = b_n, \quad n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0. \quad (6.3)$$

Jejím **řešením** nazveme libovolnou posloupnost  $(x_n)_{n=n_0}^{\infty}$  takovou, že dosazením jejích členů do (6.3) dostaneme pravdivé rovnosti pro každé celočíselné  $n \geq n_0$ .

Uvedme nyní několik příkladů demonstrujících právě zavedené pojmy. Vlastností řešení lineárních rekurentních rovnic a jejich systematickému hledání se budeme věnovat v dalších podkapitolách.

<sup>2</sup>Přesněji spočetně mnoha rovnicích

**Příklad 6.2** (Geometrická posloupnost): Mějme zadané  $q \in \mathbb{R}$  a uvažme homogenní LRR prvního řádu

$$x_{n+1} - qx_n = 0, \quad n \geq 0.$$

Tj. v Definici 6.1 máme  $n_0 = 0, k = 1, b_n = 0$  a  $c_{0,n} = -q$  pro každé  $n \in \mathbb{N}_0$ . Řešením této rovnice je libovolná posloupnost tvaru  $x_n = \alpha \cdot q^n, n \in \mathbb{N}_0$ , pro libovolnou konstantu  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Skutečně, prostým dosazením a po jednoduché úpravě pro každé  $n \geq 0$  dostáváme

$$\alpha q^{n+1} - q \cdot \alpha q^n = \alpha (q^{n+1} - q^{n+1}) = 0.$$

**Příklad 6.3:** Uvažme rovnici

$$x_{n+1} - nx_n = 0, \quad n \geq 1.$$

Řešením této rovnice (dosadte!) je posloupnost  $x_n = A \cdot (n-1)!, n \in \mathbb{N}$ , pro libovolné  $A \in \mathbb{R}$ .

Pro zajímavost vypišme jednotlivé vztahy, všimněte si měnícího se multiplikativního faktoru:

1.  $n = 1: x_2 - 1 \cdot x_1 = 0,$
2.  $n = 2: x_3 - 2 \cdot x_2 = 0,$
3.  $n = 3: x_4 - 3 \cdot x_3 = 0,$
4.  $n = 4: x_5 - 4 \cdot x_4 = 0.$
5. ...

Jeden z koeficientů této LRR závisí na  $n$ , není tzv. konstantní (viz Definici 6.4).

V případě geometrické posloupnosti (Příklad 6.2) vidíme, že rekurentní vztah udává nekonečně mnoho různých posloupností, které ho splňují. Skutečně, konstanta  $\alpha$  může být libovolná. Rekurentní rovnice je proto často doplněna tzv. počátečními podmínkami, které už určí nějaké konkrétní řešení.

**Definice 6.3** (Počáteční podmínky / *Initial conditions*): Nechť je dána lineární rekurentní rovnice řádu  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$x_{n+k} + c_{k-1,n}x_{n+k-1} + \cdots + c_{1,n}x_{n+1} + c_{0,n}x_n = b_n, \quad n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0.$$

**Počátečními podmínkami** pro tuto rovnici nazveme libovolnou soustavu rovností  $x_{n_0} = A_0, x_{n_0+1} = A_1, \dots, x_{n_0+k-1} = A_{k-1}$ , pro zadané hodnoty  $A_0, \dots, A_{k-1} \in \mathbb{R}$ .

**Příklad 6.4** (Geometrická posloupnost): Pro dané  $q \in \mathbb{R}$  je řešením rovnice

$$x_{n+1} - qx_n = 0, \quad n \geq 0.$$

posloupnost tvaru  $x_n = \alpha \cdot q^n$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ , kde  $\alpha \in \mathbb{R}$  je nějaká konstanta.

Předepsáním počáteční podmínky pro  $x_0$  hodnotu této konstanty vynutíme (zde jednoduše  $x_0 = \alpha$ ) a dostaneme tak už jednu konkrétní posloupnost.

**Příklad 6.5** (Posloupnost částečných součtů číselné řady): Mějme číselnou řadu  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ . Potom posloupnost jejích částečných součtů  $(s_n)_{n=0}^{\infty}$  je řešením lineární rekurentní rovnice prvního řádu

$$x_{n+1} - x_n = a_{n+1}, \quad n \geq 0$$

s počáteční podmínkou  $x_0 = a_0$ .

**Příklad 6.6** (Fibonacciho posloupnost): Mějme zadané  $n_0 = 0$  a uvažme homogenní LRR druhého řádu

$$x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0, \quad n \geq n_0.$$

Tj. v Definicí 6.1 klademe  $b_n = 0$  a  $c_{1,n} = c_{0,n} = -1$  pro každé  $n \in \mathbb{N}_0$

Řešení této rovnice vyhovující počátečním podmínkám  $x_0 = 1$  a  $x_1 = 1$  je známá Fibonacciho posloupnost.

**Otázka 6.1:** Proč jsme nezavedli LRR nultého řádu? Je to vůbec možné?

## 6.3 Vlastnosti množiny řešení lineárních rekurentních rovnic

Nejprve budeme studovat obecné a důležité vlastnosti množiny řešení LRR. Začneme velmi pozitivním a základním pozorováním:

**Věta 6.1** (O existenci a jednoznačnosti řešení LRR): Platí dvě následující tvrzení.

1. Každá lineární rekurentní rovnice má *nějaké* řešení.
2. Je-li dána lineární rekurentní rovnice řádu  $k \in \mathbb{N}$  s předepsanými počátečními podmínkami, pak existuje *právě jedno* řešení této rovnice splňující tyto počáteční podmínky.

*Důkaz.* Postupně dokažme obě uvedená tvrzení.

1. Mějme LRR řádu  $k \in \mathbb{N}$  tvaru

$$x_{n+k} + \sum_{i=0}^{k-1} c_{i,n} x_{n+i} = b_n, \quad n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0.$$

Zvolme  $A_0, \dots, A_{k-1}$  libovolně a položme  $X_{n_0} := A_0, \dots, X_{n_0+k-1} := A_{k-1}$ . Poté postupně vypočteme  $X_{n_0+k}, X_{n_0+k+1}, \dots$  pomocí předpisu

$$X_{n+k} := b_n - \sum_{i=0}^{k-1} c_{i,n} X_{n+i}, \quad n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0.$$

Takto zkonstruovaná posloupnost  $(X_n)_{n=n_0}^{\infty}$  je řešením naší LRR.

2. Jsou-li počáteční podmínky  $A_0, \dots, A_{k-1}$  předepsány, pak z předchozího bodu víme, že už jednoznačně udávají hodnoty řešení  $X_n$  pro  $n \geq n_0 + k$  a tedy jednoznačně udávají i celé řešení (jakožto posloupnost).  $\square$

Dle druhého bodu Věty 6.1 je každé řešení LRR řádu  $k$  jednoznačně zadáno počátečními podmínkami (kterých je  $k$ ): shoduje-li se prvních  $k$  prvků dvou řešení jedné LRR, pak jsou tato řešení shodná.

Kolik řešení LRR existuje? Jak velká je množina všech řešení zadané LRR? Těmito otázkami se budeme zabývat zanedlouho. Nejprve učinme důležité pozorování o vztahu řešení různých LRR lišících se pouze pravou stranou, které je obecně charakteristické pro lineární systémy (rozmyslete analogické tvrzení pro soustavy lineárních rovnic).

**Věta 6.2** (Princip superpozice / *Superposition principle*): Uvažme dvě LRR  $k$ -tého řádu s ne nutně shodnými pravými stranami,

$$x_{n+k} + \sum_{i=0}^{k-1} c_{i,n} x_{n+i} = b_n, \tag{6.4}$$

a

$$x_{n+k} + \sum_{i=0}^{k-1} c_{i,n} x_{n+i} = \tilde{b}_n, \tag{6.5}$$

pro  $n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0$ . Je-li  $(X_n)_{n=n_0}^\infty$  řešení rovnice (6.4) a  $(Y_n)_{n=n_0}^\infty$  řešení rovnice (6.5), potom pro libovolnou konstantu  $\alpha$  je posloupnost  $(X_n + \alpha Y_n)_{n=n_0}^\infty$  řešením LRR

$$x_{n+k} + \sum_{i=0}^{k-1} c_{i,n} x_{n+i} = b_n + \alpha \tilde{b}_n, \quad n \geq n_0.$$

*Důkaz.* Přímočaré dosazení. Provedte! □

Než se pustíme do popisu množiny řešení je vhodné připomenout několik pojmů známých z lineární algebry.

**Poznámka 6.1** (Prostor všech posloupností): Uvažme celočíselné  $n_0$  a množinu všech reálných posloupností  $(x_n)_{n=n_0}^\infty$ , tuto neprázdnou množinu označme  $\mathbb{R}^\infty$  (závislost na  $n_0$  ve značení potlačujeme, musí být vždy dáno pevně).

- **Součet dvou posloupností**  $(x_n)_{n=n_0}^\infty, (y_n)_{n=n_0}^\infty \in \mathbb{R}^\infty$  definujeme jako posloupnost

$$(x_n)_{n=n_0}^\infty + (y_n)_{n=n_0}^\infty := (x_n + y_n)_{n=n_0}^\infty \in \mathbb{R}^\infty.$$

- **Skalární násobek posloupnosti**  $(x_n)_{n=n_0}^\infty \in \mathbb{R}^\infty$  číslem  $\alpha \in \mathbb{R}$  definujeme jako posloupnost

$$\alpha \cdot (x_n)_{n=n_0}^\infty := (\alpha x_n)_{n=n_0}^\infty \in \mathbb{R}^\infty.$$

Množina  $\mathbb{R}^\infty$  vybavená těmito operacemi tvoří vektorový prostor nekonečné dimenze (ověření axiomů: zamyslení), množina

$$\{(\delta_{i,n})_{n=n_0}^\infty \mid i = n_0, n_0 + 1, \dots\} \subset \mathbb{R}^\infty$$

je LN množina mající nekonečně mnoho členů. Nulovým prvkem v tomto prostoru je nulová posloupnost  $\theta = (0)_{n=n_0}^\infty$ .

Nyní se dostáváme k ústřední větě, která by vám měla být povědomá z BI-LA1 (Frobeniova věta).

**Věta 6.3** (O struktuře množiny řešení LRR): Mějme LRR řádu  $k \in \mathbb{N}$  tvaru

$$x_{n+k} + \sum_{i=0}^{k-1} c_{i,n} x_{n+i} = b_n, \quad n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0, \quad (6.6)$$

a označme množinu všech jejích řešení symbolem  $S$  a množinu všech řešení přidružené homogenní rovnice symbolem  $S_0$ . Potom platí následující tvrzení:

1. Množina  $S_0$  je vektorový prostor dimenze  $k$ .
2. Množina  $S$  je tvaru  $S = (\tilde{x}_n)_{n=n_0}^{\infty} + S_0$ , kde  $(\tilde{x}_n)_{n=n_0}^{\infty}$  je (partikulární) řešení rovnice (6.6).

Než se pustíme do důkazu této ústřední věty, tak vypíchněme její přímočaré důležité důsledky:

- Pokud máme dvě řešení jedné homogenní LRR, pak i jejich součet je řešení té samé homogenní LRR.
- Pokud máme jedno řešení jedné homogenní LRR, pak i jeho konstantní násobek je řešením té samé homogenní LRR.
- Při hledání všech řešení zadané LRR je potřeba umět hledat *všechna* řešení přidružené homogenní rovnice a *nějaká* partikulární řešení.

*Důkaz bodu 1 Věty 6.3.* Již víme, že množina  $S_0$  je neprázdná, viz Větu 6.1.

Dokažme nyní uzavřenost množiny  $S_0$  vůči algebraickým operacím. Uvažme dvě řešení  $(x_n)_{n=n_0}^{\infty}$  a  $(y_n)_{n=n_0}^{\infty}$  přidružené homogenní rovnice k rovnici (6.6), tedy dva prvky  $S_0$ , a libovolné  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Potom pro prvky posloupnosti  $(x_n + \alpha y_n)_{n=n_0}^{\infty}$  platí

$$\begin{aligned} (x_{n+k} + \alpha y_{n+k}) + \sum_{i=0}^{k-1} c_{i,n} (x_{n+i} + \alpha y_{n+i}) &= \\ = \left( x_{n+k} + \sum_{i=0}^{k-1} c_{i,n} x_{n+i} \right) + \alpha \left( y_{n+k} + \sum_{i=0}^{k-1} c_{i,n} y_{n+i} \right) &= 0 + \alpha \cdot 0 = 0, \quad n \geq \end{aligned}$$

Tudíž i  $(x_n + \alpha y_n)_{n=n_0}^{\infty} \in S_0$ .

Zkonstruujeme bázi  $S_0$  mající  $k$  členů. Označme jako  $(X_n^{(i)})_{n=n_0}^{\infty}$ ,  $i = 0, 1, \dots, k-1$ , prvek  $S_0$  s počátečními podmínkami  $X_{n_0+j}^{(i)} = \delta_{ij}$ ,  $i, j = 0, 1, \dots, k-1$ . Těchto vektorů je tedy  $k$ .

Soubor těchto  $k$  vektorů generuje  $S_0$ : je-li  $(x_n)_{n=n_0}^{\infty}$  libovolné řešení z  $S_0$ , pak díky linearitě jistě platí

$$(x_n)_{n=n_0}^{\infty} = \sum_{i=0}^{k-1} x_{n_0+i} \cdot (X_n^{(i)})_{n=n_0}^{\infty}.$$



Dále je tento soubor i lineárně nezávislý: dává-li lineární kombinace výše nulovou posloupnost, pak pro koeficienty lineární kombinace nutně platí  $x_{n_0+i} = 0$  pro  $i = 0, 1, \dots, k-1$ .  $\square$

*Důkaz bodu 2 Věty 6.3.* Mějme partikulární řešení  $(\tilde{x}_n)_{n=n_0}^\infty$  LRR (6.6). Chceme ukázat rovnost

$$S = (\tilde{x}_n)_{n=n_0}^\infty + S_0.$$

Ukážeme proto dvě inkluze.

$\subset$ : Uvažme  $(x_n)_{n=n_0}^\infty \in S$  a položme  $y_n := x_n - \tilde{x}_n$ ,  $n \geq n_0$ . Potom platí

$$(x_n)_{n=n_0}^\infty = (\tilde{x}_n)_{n=n_0}^\infty + (y_n)_{n=n_0}^\infty$$

a

$$\begin{aligned} y_{n+k} + \sum_{i=0}^{k-1} c_{i,n} y_{n+i} &= \left( x_{n+k} + \sum_{i=0}^{k-1} c_{i,n} x_{n+i} \right) - \left( \tilde{x}_{n+k} + \sum_{i=0}^{k-1} c_{i,n} \tilde{x}_{n+i} \right) = \\ &= b_n - b_n = 0. \end{aligned}$$

Tudíž,  $(y_n)_{n=n_0}^\infty \in S_0$ .

$\supset$ : Je-li  $(x_n)_{n=n_0}^\infty = (\tilde{x}_n)_{n=n_0}^\infty + (y_n)_{n=n_0}^\infty$  pro nějaké  $(y_n)_{n=n_0}^\infty \in S_0$ , pak

$$\begin{aligned} x_{n+k} + \sum_{i=0}^{k-1} c_{i,n} x_{n+i} &= \left( \tilde{x}_{n+k} + \sum_{i=0}^{k-1} c_{i,n} \tilde{x}_{n+i} \right) + \left( y_{n+k} + \sum_{i=0}^{k-1} c_{i,n} y_{n+i} \right) = \\ &= b_n + 0 \end{aligned}$$

a proto  $(x_n)_{n=n_0}^\infty \in S$ .  $\square$

Demonstrujme znění předchozí věty na případě geometrické posloupnosti.

**Příklad 6.7** (Geometrická posloupnost): V Příkladu 6.4 jsme ukázali, že pro dané  $q \in \mathbb{R}$  je řešením LRR prvního řádu

$$x_{n+1} - qx_n = 0, \quad n \geq 0.$$

posloupnost tvaru  $x_n = \alpha \cdot q^n$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ , kde  $\alpha \in \mathbb{R}$  je nějaká konstanta.

V tomto případě proto pro množinu všech řešení této LRR platí

$$S_0 = \langle (q^n)_{n=0}^\infty \rangle,$$

jde o jednodimenzionální podprostor  $\mathbb{R}^\infty$ .

Řadu dalších příkladů si ukážeme v další části této kapitoly, až vybudujeme nástroje pro systematické řešení LRR s konstantními koeficienty.

## Poznámka ke vztahu s lineární algebrou

V této podkapitole by měl být patrný velmi blízký kontakt s lineární algebrou. Samotnou LRR

$$x_{n+k} + \sum_{i=0}^{k-1} c_{i,n} x_{n+i} = b_n, \quad n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0. \quad (6.7)$$

lze formulovat pomocí tzv. **matic přechodu** v následujícím maticovém tvaru

$$\begin{pmatrix} x_{n+k} \\ x_{n+k-1} \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \mathbf{A}_n \begin{pmatrix} x_{n+k-1} \\ x_{n+k-2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

pro  $n \geq n_0$ , kde

$$\mathbf{A}_n = \begin{pmatrix} -c_{k-1,n} & -c_{k-2,n} & -c_{k-3,n} & \cdots & -c_{1,n} & -c_{0,n} \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Další souvislosti mezi LRR a lineární algebrou uvidíme v dalších částech této kapitoly.

## Lineární rekurentní rovnice s konstantními koeficienty

LRR zkoumané v předchozím textu jsou stále ještě příliš obecné, jejich řešení nemusí být snadno vyjádřitelné v uzavřeném tvaru. Provedeme ještě jedno omezení třídy rekurentních rovnic, které se budeme snažit vyřešit.

**Definice 6.4** (LRR s konstantními koeficienty): **Lineární rekurentní rovnice řádu  $k \in \mathbb{N}$  s konstantními koeficienty** je **lineární rekurentní rovnice** řádu  $k$  tvaru

$$x_{n+k} + c_{k-1} \cdot x_{n+k-1} + \cdots + c_1 \cdot x_{n+1} + c_0 \cdot x_n = b_n, \quad n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0, \quad (6.8)$$

kde  $n_0 \in \mathbb{Z}$  a  $c_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 0, 1, \dots, k-1$ ,  $c_0 \neq 0$ , jsou zadané konstanty a  $(b_n)_{n=n_0}^{\infty}$  je zadaná posloupnost.

Každá lineární rekurentní rovnice s konstantními koeficienty (Definice 6.4) je speciálním případem lineární rekurentní rovnice (Definice 6.1) a platí o ní vše co jsme zatím zmínili v předchozí části této kapitoly.

Pokusme se najít řešení přidružené homogenní rovnice k rovnici (6.8) ve tvaru  $x_n = \lambda^n$ , kde  $\lambda$  je zatím neznámý nenulový parametr. Po dosazení a pokrácení dostaneme rovnice

$$\lambda^{n+k} + \sum_{i=0}^{k-1} c_i \lambda^{n+i} = 0, \quad n \geq n_0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^k + \sum_{i=0}^{k-1} c_i \lambda^i = 0.$$

Tím jsme se zcela zbavili závislosti na  $n$  a pokud najdeme kořeny tohoto polynomu stupně  $k$ , pak najdeme i řešení naší homogenní LRR! Zavádíme proto následující pojem.

**Definice 6.5** (Charakteristický polynom LRR s konstantními koeficienty): **Charakteristickým polynomem rovnice (6.8)** nazýváme polynom stupně  $k$  tvaru

$$p(\lambda) = \lambda^k + c_{k-1} \lambda^{k-1} + \dots + c_1 \lambda + c_0.$$

Kořeny<sup>3</sup> tohoto polynomu se nazývají **charakteristická (nebo vlastní) čísla rovnice (6.8)**.

**Příklad 6.8:** Následuje výčet ukázkových dvojic LRR s konstantními koeficienty a jejich charakteristických polynomů:

$$\begin{array}{ll} x_{n+2} - 2x_{n+1} + 7x_n = 0, & p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 7, \\ x_{n+3} + \pi x_n - 1 = 0, & p(\lambda) = \lambda^3 + \pi, \\ x_{n+7} + x_{n+3} - 42x_n = n^2, & p(\lambda) = \lambda^7 + \lambda^3 - 42. \end{array}$$

Všimněte si, že v případě LRR s nekonstantními koeficienty tento přístup, tj. hledání řešení ve tvaru  $\lambda^n$ , takto jednoduše aplikovat nemůžeme: koeficienty by stále závisely na  $n$ , neměli bychom jeden polynom pro danou LRR.

Pojďme nyní systematicky řešit LRR s konstantními koeficienty.

---

<sup>3</sup>Obecně komplexní čísla!

## 6.4 Řešení homogenní LRR s konstantními koeficienty

Nejprve zformalizujme pozorování učiněné před definicí charakteristického polynomu.

**Věta 6.4** (Konstrukce řešení homogenní LRR pomocí charakteristického čísla): Jestliže  $\lambda$  je **charakteristickým číslem** homogenní LRR s konstantními koeficienty řádu  $k \in \mathbb{N}$

$$x_{n+k} + c_{k-1}x_{n+k-1} + \cdots + c_1x_{n+1} + c_0x_n = 0, \quad n \geq n_0,$$

pak posloupnost  $(\lambda^n)_{n=n_0}^\infty$  je jejím **řešením**.

*Důkaz.* Číslo  $\lambda$  splňuje  $p(\lambda) = \lambda^k + c_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0 = 0$  a proto

$$\lambda^{n+k} + \sum_{i=0}^{k-1} c_i \lambda^{n+i} = \lambda^n \cdot p(\lambda) = \lambda^n \cdot 0 = 0$$

pro každé  $n \geq n_0$ . □

Pomocí charakteristických čísel můžeme zkonstruovat bázi  $S_0$ . Nejprve prozkoumejme jednoduchý případ, kdy všechna mají násobnost<sup>4</sup> 1, tj. když jsou všechna tzv. **jednoduchá**.

**Věta 6.5** (Řešení homogenní LRR s konstantními koeficienty, jednoduchá charakteristická čísla): Uvažujme **homogenní LRR s konstantními koeficienty** řádu  $k \in \mathbb{N}$

$$x_{n+k} + c_{k-1}x_{n+k-1} + \cdots + c_1x_{n+1} + c_0x_n = 0, \quad n \geq n_0.$$

Jestliže má  $k$  vzájemně různých **charakteristických čísel**  $\lambda_i$ ,  $i \in \hat{k}$ , pak soubor posloupností  $(\lambda_i^n)_{n=n_0}^\infty$ ,  $i \in \hat{k}$ , tvoří bázi  $S_0$ , tedy libovolné řešení  $(x_n)_{n=n_0}^\infty \in S_0$  je tvaru

$$x_n = \alpha_1 \lambda_1^n + \cdots + \alpha_k \lambda_k^n, \quad n \geq n_0,$$

pro nějaké konstanty  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ .

V důkazu budeme potřebovat následující lineárně–algebraické pomocné tvrzení.

<sup>4</sup>Jakožto kořeny charakteristického polynomu.

**Lemma 6.1** (Determinant Vandermondovy matice): Mějme vzájemně různá čísla  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  a označme (tzv. **Vandermondův determinant**)

$$V(\lambda_1, \dots, \lambda_k) := \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_{k-1} & \lambda_k \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \cdots & \lambda_{k-1}^2 & \lambda_k^2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 & \cdots & \lambda_{k-1}^3 & \lambda_k^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{k-2} & \lambda_2^{k-2} & \lambda_3^{k-2} & \cdots & \lambda_{k-1}^{k-2} & \lambda_k^{k-2} \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \lambda_3^{k-1} & \cdots & \lambda_{k-1}^{k-1} & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix}. \quad (6.9)$$

Potom  $V(\lambda_1, \dots, \lambda_k) = \prod_{1 \leq i < j \leq k} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0$ .

*Důkaz Lemmatu (Vandermonde).* Postupně učiňme následující pozorování:

- Z vlastností determinantu plyne, že funkce  $\lambda \mapsto V(\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, \lambda)$  je polynom stupně  $k - 1$  v proměnné  $\lambda$  a má kořeny  $\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}$ . Platí proto

$$V(\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, \lambda) = \alpha(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_{k-1}),$$

kde  $\alpha$  je zatím neznámá konstanta.

- Rozvojem podle posledního sloupce determinantu (6.9) ihned vidíme, že koeficient  $\alpha$  u nejvyšší mocniny (tj.  $\lambda^{k-1}$ ) splňuje  $\alpha = V(\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1})$ .
- Hledaný determinant proto splňuje rekurenci

$$V(\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, \lambda_k) = V(\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}) \prod_{i=1}^{k-1} (\lambda_k - \lambda_i),$$

a počáteční podmínku  $V(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_2 - \lambda_1$ .

- Odtud už vidíme platnost dokazovaného tvrzení. □

*Důkaz Věty 6.5.* Z Věty 6.4 již víme, že každá z posloupností  $(\lambda_i^n)_{n=n_0}^\infty$ ,  $i \in \hat{k}$ , patří do  $S_0$ . Všechna  $\lambda_i$  jsou nenulová, protože  $c_0 \neq 0$ . Tvoří těchto  $k$  posloupností LN soubor? Pokud ano, pak bude důkaz dokončen, protože dimenze  $S_0$  je rovna  $k$  (viz Větu 6.3).

Nechť lineární kombinace  $(x_n)_{n=n_0}^\infty = \left( \sum_{i=1}^k \alpha_i \lambda_i^n \right)_{n=n_0}^\infty$  je nulová posloupnost. Zapišeme-li rovnosti  $x_{n_0} = 0, x_{n_0+1} = 0, \dots, x_{n_0+k-1} = 0$  vzhledem k neznámým  $\alpha_1 \lambda_1^{n_0}, \dots, \alpha_k \lambda_k^{n_0}$ , dostaneme homogenní lineární soustavu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_{k-1} & \lambda_k \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \cdots & \lambda_{k-1}^2 & \lambda_k^2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 & \cdots & \lambda_{k-1}^3 & \lambda_k^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{k-2} & \lambda_2^{k-2} & \lambda_3^{k-2} & \cdots & \lambda_{k-1}^{k-2} & \lambda_k^{k-2} \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \lambda_3^{k-1} & \cdots & \lambda_{k-1}^{k-1} & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \lambda_1^{n_0} \\ \alpha_2 \lambda_2^{n_0} \\ \alpha_3 \lambda_3^{n_0} \\ \vdots \\ \alpha_{k-1} \lambda_{k-1}^{n_0} \\ \alpha_k \lambda_k^{n_0} \end{pmatrix} = \theta,$$

kde matice soustavy je regulární (Vandermondova matice, Lemma 6.1) a proto řešením této soustavy je pouze  $\alpha_i \lambda_i^{n_0} = 0, i \in \hat{k}$ , a díky nenulovosti  $\lambda_i$  pak nutně  $\alpha_i = 0$  pro  $i \in \hat{k}$ .  $\square$

**Příklad 6.9:** Uvažme homogenní LRR druhého řádu s konstantními koeficienty

$$x_{n+2} + 3x_{n+1} + 2x_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Pro její charakteristický polynom platí

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2).$$

A má proto dva vzájemně různé kořeny  $\lambda_1 = -1$  a  $\lambda_2 = -2$ , každý násobnosti 1.

Množina  $S_0$  všech řešení výše uvedené LRR má proto tvar

$$S_0 = \left\langle ((-1)^n)_{n=0}^\infty, ((-2)^n)_{n=0}^\infty \right\rangle.$$

Tj. každé řešení  $(x_n)_{n=0}^\infty$  z  $S_0$  je tvaru  $x_n = \alpha(-1)^n + \beta(-2)^n, n \in \mathbb{N}_0$ , kde  $\alpha, \beta$  jsou nějaké konstanty.

Charakteristický polynom může mít přirozeně kořeny vyšší násobnosti, než je 1. Jak zkonstruovat bázi  $S_0$  v tomto případě? Dimenze prostoru  $S_0$  pro LRR řádu  $k$  bude stále  $k$ , ale vzájemně různých charakteristických čísel budeme mít méně než  $k$ . Otázkou vytvoření dalších řešení v této situaci se zabývá následující věta.

**Věta 6.6** (Konstrukce řešení homogenní LRR pomocí charakteristického čísla vyšší násobnosti): Jestliže  $\lambda$  je **charakteristickým číslem homogenní LRR** řádu  $k \in \mathbb{N}$  s konstantními koeficienty

$$x_{n+k} + c_{k-1}x_{n+k-1} + \cdots + c_1x_{n+1} + c_0x_n = 0, \quad n \geq n_0,$$

a jeho násobnost je  $m$ , pak posloupnosti  $(\lambda^n)_{n=n_0}^\infty$ ,  $(n\lambda^n)_{n=n_0}^\infty$ , ...,  $(n^{m-1}\lambda^n)_{n=n_0}^\infty$  jsou jejím řešením a tvoří LN soubor.

Na tomto místě důkaz v plné podrobnosti dělat nebudeme. Spokojíme se s ilustrací klíčové myšlenky v případě dvojnásobného charakteristického čísla.

*Náznak důkazu pro násobnost  $m = 2$ .* Mějme  $\lambda$  dvojnásobný kořen charakteristického polynomu  $p(z) = z^k + \sum_{i=0}^{k-1} c_i z^i$ . Protože  $c_0 \neq 0$ , je i  $\lambda \neq 0$

Ve faktorizaci polynomu  $p(z)$  se kořenový činitel  $(z - \lambda)$  vyskytuje v druhé mocnině a proto nutně platí i  $p'(\lambda) = 0$  (představte si derivování součinu kořenových činitelů, v každém sčítanci zůstane alespoň jedna mocnina  $(z - \lambda)$ ). Proto platí  $p(\lambda) = 0$  a i  $p'(\lambda) = 0$ . Z dřívější diskuze již víme, že  $(\lambda^n)_{n=n_0}^\infty$  je řešení. Nyní ověřme to samé pro  $(n\lambda^n)_{n=n_0}^\infty$ . Dosazením do levé strany rekurence a využitím nenulovosti  $\lambda$  dostáváme

$$\begin{aligned} (n+k)\lambda^{n+k} + \sum_{i=0}^{k-1} c_i(n+i)\lambda^{n+i} &= \\ &= \lambda \left( (n+k)\lambda^{n+k-1} + \sum_{i=0}^{k-1} c_i(n+i)\lambda^{n+i-1} \right) = \\ &= \lambda \cdot \left( z^n \cdot p(z) \right)' \Big|_{z=\lambda} = 0. \end{aligned}$$

Zbývá rozmyslet lineární nezávislost. Platí-li  $\alpha\lambda^n + \beta n\lambda^n = 0$ ,  $n \geq n_0$  a  $\lambda \neq 0$  pak nutně (napište si první dvě rovnice)  $\alpha = \beta = 0$ .  $\square$

Poznamenejme, že pro vyšší násobnosti bude potřeba využít vyšších derivací charakteristického polynomu. Důkaz lineární nezávislosti obecně vede na podobné úvahy jako v případě Vandermonдова determinantu.

V obecném případě můžeme konstrukci řešení homogenní LRR shrnout v následující větě.

**Věta 6.7** (Konstrukce prostoru všech řešení homogenní LRR): Uvažujme homogenní LRR řádu  $k \in \mathbb{N}$  s konstantními koeficienty

$$x_{n+k} + c_{k-1}x_{n+k-1} + \cdots + c_1x_{n+1} + c_0x_n = 0, \quad n \geq n_0.$$

Jestliže má  $K$  vzájemně různých charakteristických čísel  $\lambda_i, i \in \hat{K}$ , každé s násobností  $m_i \in \hat{k}$ , pak soubor posloupností

$$\left( (\lambda_1^n)_{n=n_0}^\infty, (n\lambda_1^n)_{n=n_0}^\infty, \dots, (n^{m_1-1}\lambda_1^n)_{n=n_0}^\infty, \dots, \right. \\ \left. (\lambda_K^n)_{n=n_0}^\infty, (n\lambda_K^n)_{n=n_0}^\infty, \dots, (n^{m_K-1}\lambda_K^n)_{n=n_0}^\infty \right)$$

tvoří bázi  $S_0$ .

*Důkaz.* Využíváme dřívějších tvrzení. Formální ověření LN vynecháváme. □

**Příklad 6.10:** Uvažme homogenní LRR třetího řádu s konstantními koeficienty

$$x_{n+3} + 2x_{n+2} - 4x_{n+1} - 8x_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

*Řešení.* Pro její charakteristický polynom platí

$$p(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 - 4\lambda - 8 = (\lambda - 2)(\lambda + 2)^2.$$

A má proto dva vzájemně různé kořeny  $\lambda_1 = -2$  (dvojnásobný) a  $\lambda_2 = 2$  (jednoduchý). Množina  $S_0$  všech řešení výše uvedené LRR má proto tvar

$$S_0 = \left\langle (2^n)_{n=0}^\infty, ((-2)^n)_{n=0}^\infty, (n(-2)^n)_{n=0}^\infty \right\rangle.$$

Tj. každé řešení  $(x_n)_{n=0}^\infty$  z  $S_0$  je tvaru  $x_n = \alpha 2^n + \beta(-2)^n + \gamma n(-2)^n, n \in \mathbb{N}_0$ , kde  $\alpha, \beta, \gamma$  jsou nějaké konstanty.

**Příklad 6.11:** Nalezněte všechna řešení homogenní LRR druhého řádu s konstantními koeficienty

$$x_{n+2} + x_n = 0, \quad n \geq 0.$$

*Řešení.* Charakteristickým polynomem je v tomto případě

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 1,$$



a má dva čistě imaginární (komplexní) kořeny  $\lambda_{\pm} = \pm i$ . Dříve zmíněná tvrzení stále platí (komplexnost kořenů nehraje roli). Libovolné řešení této LRR je tvaru

$$x_n = \alpha \cdot i^n + \beta \cdot (-i)^n, \quad n \geq 0.$$

To ale není pěkné! Začneme-li s reálnými počátečními podmínkami, tak původní „reálný“ problém bude mít jistě reálné řešení! Nutnost vyjadřovat pomocí výrazů s imaginárními jednotkami bychom se tedy měli být schopni zbavit.

A to skutečně jde, vzpomeneme-li si na Moivreovu větu

$$(\pm i)^n = \left( \cos \frac{\pi}{2} \pm i \sin \frac{\pi}{2} \right)^n = \cos \frac{\pi n}{2} \pm i \sin \frac{\pi n}{2}$$

a vyjádříme-li řešení ve tvaru

$$x_n = (\alpha + \beta) \cos \frac{\pi n}{2} + i(\alpha - \beta) \sin \frac{\pi n}{2}, \quad n \geq 0.$$

Místo posloupnosti  $(i^n)_{n=0}^{\infty}$  a  $((-i)^n)_{n=0}^{\infty}$  proto v této situaci použijeme lineární kombinaci  $(\sin \frac{\pi n}{2})_{n=0}^{\infty}$  a  $(\cos \frac{\pi n}{2})_{n=0}^{\infty}$  k vyjádření obecného řešení ve tvaru

$$x_n = \tilde{\alpha} \cos \frac{\pi n}{2} + \tilde{\beta} \sin \frac{\pi n}{2}, \quad n \geq 0,$$

kde  $\tilde{\alpha}$  a  $\tilde{\beta}$  jsou nějaké konstanty.

Lze postup v předchozím příkladu zobecnit? Ano! Postup lze shrnout do následujících bodů.

- Mějme LRR s konstantními koeficienty a buď  $p(\lambda)$  její charakteristický polynom (mající reálné koeficienty, viz definice LRR).
- Je-li  $\lambda$  charakteristické číslo, které je komplexní a není reálné, pak i  $\bar{\lambda}$  (číslo komplexně sdružené k  $\lambda$ ) je charakteristické číslo naší LRR.
- Vyjádřeme toto  $\lambda$  v polárním tvaru jako

$$\lambda = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

kde  $r > 0$  a  $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$ . Potom  $\bar{\lambda} = r \cdot (\cos \varphi - i \sin \varphi)$ .

- Použijeme-li opět Moivreovu větu, pak vidíme, že při konstrukci  $S_0$  můžeme místo posloupností  $(\lambda^n)_{n=n_0}^\infty$  a  $(\bar{\lambda}^n)_{n=n_0}^\infty$  použít dvojici posloupností

$$(r^n \sin \varphi n)_{n=n_0}^\infty \quad \text{a} \quad (r^n \cos \varphi n)_{n=n_0}^\infty.$$

- V případě vyšších násobností stačí vše navíc ještě vynásobit příslušnými mocninami  $n$ .

## Shrnutí konstrukce množiny všech řešení homogenní LRR

Uvažme LRR  $k$ -tého řádu s konstantními koeficienty a nulovou pravou stranou. Bázi  $\mathcal{B}$  podprostoru  $S_0$  konstruujeme v následujících krocích:

1. Sestavme charakteristický polynom  $p(\lambda)$  a nalezněme jeho kořeny.
2. Za každé reálné charakteristické číslo  $\lambda$  přidáme do  $\mathcal{B}$  posloupnost  $(\lambda^n)_{n=n_0}^\infty$ .
3. Za každé reálné charakteristické číslo  $\lambda$  násobnosti  $m > 1$  přidáme do  $\mathcal{B}$  posloupnosti  $(n\lambda^n)_{n=n_0}^\infty, \dots, (n^{m-1}\lambda^n)_{n=n_0}^\infty$ .
4. Za každá dvě komplexně sdružená charakteristická čísla  $\lambda = r(\cos \varphi \pm i \sin \varphi)$ , která nejsou reálná, přidáme do souboru  $\mathcal{B}$  dvě reálné posloupnosti  $(r^n \cos n\varphi)_{n=n_0}^\infty$  a  $(r^n \sin n\varphi)_{n=n_0}^\infty$ .
5. Za každá dvě komplexně sdružená charakteristická čísla  $\lambda = r(\cos \varphi \pm i \sin \varphi)$ , která nejsou reálná a mají násobnost  $m > 1$ , přidáme do souboru  $\mathcal{B}$  reálné posloupnosti  $(nr^n \cos n\varphi)_{n=n_0}^\infty, \dots, (n^{m-1}r^n \cos n\varphi)_{n=n_0}^\infty$  a dále  $(nr^n \sin n\varphi)_{n=n_0}^\infty, \dots, (n^{m-1}r^n \sin n\varphi)_{n=n_0}^\infty$ .

## Příklady

**Příklad 6.12** (Fibonacciho posloupnost): Uvažme homogenní LRR druhého řádu s konstantními koeficienty

$$x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

s počátečními podmínkami  $x_0 = x_1 = 1$ . Tj. Fibonacciho posloupnost. Nalezněme explicitní vyjádření jejího  $n$ -tého členu.

*Řešení.* Charakteristickým polynomem této LRR je polynom  $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$ , který má dva vzájemně různé reálné kořeny  $\lambda_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ . Libovolné řešení naší homogenní LRR je tedy tvaru

$$x_n = \alpha_+ \lambda_+^n + \alpha_- \lambda_-^n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Vhodnou volbou konstant  $\alpha_{\pm}$  nyní splníme počáteční podmínky. Soustava dvou rovnic o dvou neznámých  $\alpha_{\pm}$

$$x_0 = \alpha_+ + \alpha_- \stackrel{!}{=} 1 \quad \text{a} \quad x_1 = \alpha_+ \lambda_+ + \alpha_- \lambda_- \stackrel{!}{=} 1$$

má právě jedno řešení  $\alpha_+ = \frac{\lambda_+}{\sqrt{5}}$  a  $\alpha_- = -\frac{\lambda_-}{\sqrt{5}}$ .

Závěr: Pro  $n$ -tý člen Fibonacciho posloupnosti platí

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

**Poznámka 6.2:** K řešení předchozího příkladu, explicitnímu vyjádření  $n$ -tého členu Fibonacciho posloupnosti, uveďme několik komentářů.

- Pro hodnoty  $\lambda_{\pm}$  platí

$$\lambda_+ \approx 1,618\,033\,988\,749\,895,$$

$$\lambda_- \approx -0,618\,033\,988\,749\,895.$$

Hodnota  $\lambda_+$  je také známá jako tzv. **zlatý řez** a označuje se často symbolem  $\varphi$ .

- Povedlo se nám od rekurentní definice Fibonacciho posloupnosti přejít k jejímu vyjádření v uzavřeném tvaru. Vedle toho máme i přesnou informaci o jejím asymptotickém chování, konkrétně

$$x_n \sim \frac{1}{\sqrt{5}} \varphi^{n+1} \quad \text{nebo} \quad x_n = \Theta(\varphi^n) \quad \text{pro } n \rightarrow \infty.$$

Tato informace není na první pohled na definiční rekurenci vůbec patrná!

## 6.5 Partikulární řešení LRR s konstantními koeficienty

Připomeňme si znění Věty 6.3. Máme-li LRR (s konstantními koeficienty), pak všechna její řešení jsou prvky množiny  $(\tilde{x}_n)_{n=n_0}^\infty + S_0$ , kde

- $S_0$  je množina všech řešení přidružené homogenní soustavy (umíme konstruovat; viz Podkapitola 6.4),
- $(\tilde{x}_n)_{n=n_0}^\infty$  je nějaké partikulární řešení rovnice s pravou stranou.

Partikulární řešení již nelze hledat tak systematicky jako v případě konstrukce  $S_0$ . Typicky toto řešení uhodneme pomocí několika šikovných pozorování, jednomu z nich se budeme věnovat v této podkapitole. Vzhledem k výše uvedenému nám ale opravdu stačí nějaké uhodnout! Případně při tomto hádání můžeme využít principu superpozice!

Při hledání partikulárního řešení se řídíme tvarem pravé strany LRR. My si ukážeme, jak konstruovat řešení pro LRR s tzv. kvazipolynomiální pravou stranou. Nejprve definujme příslušný pojem.

**Definice 6.6** (Kvazipolynom / *Quasipolynomial*): Řekneme, že posloupnost  $(b_n)_{n=n_0}^\infty$  je **kvazipolynom**, jestliže existuje  $\lambda \in \mathbb{R}$  a polynom  $P(x)$  takový, že  $b_n = P(n)\lambda^n$  pro všechna přirozená  $n \geq n_0$ .

**Příklad 6.13:** Kvazipolynomy jsou například:

$$(2n - 3)3^n, \quad (n^2 + 1)\left(\sqrt{2}\right)^n, \quad 4n + 2, \quad 42^n, \quad n \geq n_0.$$

Následující věta ukazuje, jak pro kvazipolynomiální pravou stranu hledat řešení.

**Věta 6.8** (Partikulární řešení LRR s kvazipolynomiální pravou stranou): Uvažujme **nehomogenní LRR** řádu  $k \in \mathbb{N}$  s konstantními koeficienty

$$x_{n+k} + c_{k-1}x_{n+k-1} + \cdots + c_1x_{n+1} + c_0x_n = b_n, \quad n \geq n_0,$$

a necht'  $(b_n)_{n=n_0}^\infty$  je **kvazipolynom**, tj.  $b_n = P(n)\lambda^n$ ,  $n \geq n_0$ , pro nějaký polynom  $P(x)$  a číslo  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Definujme  $m \in \mathbb{N}_0$  následujícím způsobem:

- pokud je  $\lambda$  charakteristické číslo uvažované LRR, pak necht'  $m$  je jeho násobnost,

$b_n$	$x_{n+2} - 9x_n$	$x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n$	$x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n$
	$\lambda = -3, 3$	$\lambda = 1, 2$	$\lambda = 2, 2$
$n \cdot 2^n$	$(An + B)2^n$	$n(An + B)2^n$	$n^2(An + B)2^n$
$n^2(-1)^n$	$(An^2 + Bn + C)(-1)^n$	$(An^2 + Bn + C)(-1)^n$	$(An^2 + Bn + C)(-1)^n$
$2n - 5$	$An + B$	$n(An + B)$	$An + B$
$(-3)^n$	$n \cdot A(-3)^n$	$A(-3)^n$	$A(-3)^n$

Tabulka 6.2: Ukázka tvaru partikulárního řešení dle Věty 6.8. Tabulka obsahuje pravé strany (první sloupec), „levé strany“ (druhý až čtvrtý sloupec), kořeny charakteristického polynomu (druhý řádek) a tvar příslušných partikulárních řešení.

- jinak nechť  $m$  je nula.

Potom existuje polynom  $Q(x)$  stupně stejného jako  $P(x)$  takový, že posloupnost

$$\left( n^m Q(n) \lambda^n \right)_{n=n_0}^{\infty}$$

je řešením uvažované LRR.

*Důkaz.* Důkaz vynecháváme. Věta samotná zaručuje existenci polynomu  $Q$ , ale nic neříká o jeho koeficientech. V konkrétním případě vždy tento polynom musíme explicitně najít a tvrzení věty tak vlastně v každém konkrétním příkladě znovu ověřit.  $\square$

Tabulka 6.2 ukazuje různé LRR, pravé strany a tvar hledaných partikulárních řešení.

**Příklad 6.14:** Uvažme LRR prvního řádu s konstantními koeficienty

$$x_{n+1} - x_n = (n + 1)^2, \quad n \geq 1$$

s počáteční podmínkou  $x_1 = 1$ . Alternativně, hledáme součet  $x_n = \sum_{\ell=1}^n \ell^2$ .

*Řešení.* Charakteristickým polynomem této rovnice je polynom prvního stupně

$$p(\lambda) = \lambda - 1,$$

který má právě jeden reálný kořen  $\lambda_1 = 1$  (tj. s násobností 1).

Libovolné řešení homogenní rovnice je proto tvaru  $x_n = \alpha \cdot 1^n = \alpha$  pro nějakou konstantu  $\alpha$ .

Pravá strana je kvazipolynom tvaru  $(n+1)^2 \cdot 1^n$ . Partikulární řešení proto hledáme ve tvaru  $\tilde{x}_n = n^1 \cdot (An^2 + Bn + C) \cdot 1^n$ ,  $n \geq 1$ . Dosazením tohoto „odhadu“ dostaneme rovnici

$$\underbrace{(n+1)(A(n+1)^2 + B(n+1) + C)}_{\tilde{x}_{n+1}} - \underbrace{n(An^2 + Bn + C)}_{\tilde{x}_n} = (n+1)^2, \quad n \geq 1,$$

a po roznásobení a upravení dostaneme rovnici

$$(3A-1)n^2 + (3A+2B-2)n + A+B+C-1 = 0,$$

která má být platná pro všechna  $n \geq 1$ .

To je možné pouze pokud platí (na levé straně máme nulový polynom)

$$3A = 1, \quad 3A + 2B = 2, \quad A + B + C = 1.$$

Řešením této soustavy je  $A = \frac{1}{3}$ ,  $B = \frac{1}{2}$  a  $C = \frac{1}{6}$ .

Libovolné řešení naší původní rekurence má proto tvar

$$x_n = \alpha + n \cdot \frac{2n^2 + 3n + 1}{6}, \quad n \geq 1.$$

Konečně počáteční podmínka  $x_1 \stackrel{!}{=} 1$  implikuje  $\alpha = 0$ . Dostáváme tak finální výsledek

$$\sum_{\ell=1}^n \ell^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

## 6.6 Příklady

**Příklad 6.15:** Nalezněte řešení rekurence  $a_n = 2a_{n-1} + 3 \cdot 2^n$  pro  $n \geq 1$  s počáteční podmínkou  $a_0 = 13$ .

Po přepsání do našeho tvaru pomocí substituce  $a_n = x_{n+1}$  vidíme, že řešíme LRR prvního řádu s konstantními koeficienty a nenulovou pravou stranu

$$x_{n+1} - 2x_n = 3 \cdot 2^n \quad \text{pro } n \geq 1, \quad (6.10)$$

s počáteční podmínkou  $x_1 = 13$ .

*Řešení.* Kořen charakteristického polynomu  $p(\lambda) = \lambda - 2$  je právě jeden,  $\lambda = 2$ . Řešení homogenní rovnice je proto tvaru  $(\alpha 2^n)_{n=1}^{\infty}$ , kde  $\alpha$  je zatím neurčená konstanta.

Kvazipolynom na pravé straně je tvaru  $3 \cdot 2^n$  a proto hledáme partikulární řešení ve tvaru  $\tilde{x}_n = n^1 \cdot A \cdot 2^n$ ,  $n \geq 1$ . Po dosazení do rovnice (6.10) dostáváme

$$A(n+1)2^{n+1} - 2 \cdot An2^n = 3 \cdot 2^n, \quad n \geq 1,$$

což po jednoduchých úpravách je ekvivalentní podmínce

$$2A = 3,$$

kterou snadno splníme volbou  $A = \frac{3}{2}$ .

Zbývá využít volnosti ve volbě  $\alpha$  ke splnění počáteční podmínky. Obecné řešení naší LRR je tvaru

$$x_n = \alpha 2^n + 3n2^{n-1}, \quad n \geq 1.$$

A proto je požadavek  $x_1 = 13$  ekvivalentní požadavku  $\alpha = 5$ . Můžeme proto řešení příkladu uzavřít s výsledkem

$$x_n = \left(5 + \frac{3n}{2}\right) \cdot 2^n, \quad n \geq 1$$

resp.

$$a_n = x_{n+1} = (13 + 3n) \cdot 2^n, \quad n \geq 0.$$

**Příklad 6.16:** Pro<sup>5</sup>  $q \neq 0, 1$  sečtěte

$$\sum_{k=1}^n kq^k,$$

tedy vyřešte LRR

$$x_{n+1} - x_n = (n+1)q^{n+1}, \quad n \geq 1,$$

s počáteční podmínkou  $x_1 = q$ .

---

<sup>5</sup>Případy  $q = 0, 1$  jsou triviální.

*Řešení.* Charakteristický polynom  $p(\lambda) = \lambda - 1$  má právě jeden kořen  $\lambda = 1$ . Řešení homogenní LRR je tedy tvaru  $(\alpha \cdot 1^n)_{n=1}^{\infty} = (\alpha)_{n=1}^{\infty}$ , pro libovolnou konstantu  $\alpha$ .

Kvazipolynom na pravé straně je tvaru  $P(n) \cdot q^n$ , kde  $q$  není kořenem charakteristického polynomu a polynom  $P$  má stupeň 1. Partikulární řešení proto hledáme ve tvaru

$$\tilde{x}_n = n^0 \cdot (An + B) \cdot q^n.$$

Dosazením tohoto tvaru do rekurence dostaneme podmínku

$$(A(n+1) + B)q^{n+1} - (An + B)q^n = (n+1)q^{n+1}, \quad n \geq 1.$$

Po jednoduchých úpravách dostáváme ekvivalentní podmínku

$$(Aq - A - q)n + (A + B)q - B - q = 0, \quad n \geq 1.$$

Tuto podmínku splníme vynulováním koeficientů polynomu (v proměnné  $n$ ), tedy vyřešením soustavy

$$(q-1)A = q \quad \text{a} \quad Aq + (q-1)B = q,$$

pro neznámé  $A$  a  $B$ . Tato soustava má řešení

$$A = \frac{q}{q-1} \quad \text{a} \quad B = -\frac{q}{(q-1)^2}.$$

Obecné řešení naší nehomogenní LRR proto je tvaru

$$x_n = \alpha + \left( n - \frac{1}{q-1} \right) \frac{q^{n+1}}{q-1}.$$

Počáteční podmínku  $x_1 = q$  splní<sup>6</sup>  $\alpha = \frac{q}{(q-1)^2}$ . Řešení příkladu proto uzavíráme shrnutím výsledku.

$$\sum_{k=1}^n kq^k = \frac{q}{(q-1)^2} + \left( n - \frac{1}{q-1} \right) \frac{q^{n+1}}{q-1}.$$

<sup>6</sup>Po chvílce počítání...



**Příklad 6.17:** Vraťme se k případu Hanojských věží z podkapitoly 6.1. Z analýzy problému jsme se dostali k lineární rekurentní rovnici prvního řádu ( $T_n = x_{n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ )

$$x_{n+1} - 2x_n = 1, \quad n \in \mathbb{N},$$

s počáteční podmínkou  $x_1 = T_0 = 0$ . Nalezněme řešení této úlohy pomocí mašinerie popsané v této kapitole.

*Řešení.* Charakteristický polynom

$$p(\lambda) = \lambda - 2$$

má jediný jednoduchý kořen  $\lambda_1 = 2$ . Obecným řešením naší homogenní LRR proto je

$$x_n = \alpha 2^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pravá strana je kvazipolynomiální tvaru  $1 \cdot 1^n$ . Partikulární řešení proto hledáme ve tvaru

$$\tilde{x}_n = n^0 \cdot A \cdot 1^n = A.$$

Po jeho dosazení do rekurentní rovnice s pravou stranou dostaneme rovnost

$$-A = 1$$

A tedy  $A = -1$ . Obecné řešení naší rekurence má proto tvar

$$x_n = -1 + \alpha 2^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Konstantu  $\alpha$  určíme podle počáteční podmínky. Rovnost  $x_1 = 0$  je ekvivalentní podmínce  $2\alpha = 1$  a tedy  $\alpha = 1/2$ . Získáváme proto očekávané řešení

$$T_n = x_{n+1} = -1 + \frac{1}{2} 2^{n+1} = 2^n - 1.$$

**Příklad 6.18:** V tomto příkladě ukážeme, jak využít principu superpozice (Věta 6.2) ke konstrukci partikulárního řešení. Hledejme partikulární řešení rovnice

$$x_{n+1} - 3x_n = 1 + 3^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

*Řešení.* Podle principu superpozice (Věta 6.2) stačí nalézt partikulární řešení pro pravou stranu  $(1)_{n=1}^{\infty}$ , pravou stranu  $(3^n)_{n=1}^{\infty}$  a pak je sečíst.

Charakteristickým polynomem této rovnice je

$$p(\lambda) = \lambda - 3$$

a má jeden jednoduchý kořen  $\lambda_1 = 3$ .

Hledejme partikulární řešení pro pravou stranu  $1 = 1 \cdot 1^n$ . Očekáváme ho ve tvaru  $n^0 \cdot A \cdot 1^n = A$ , jehož dosazením do rekurence s pravou stranou 1 dostaneme podmínku pro  $A$ :

$$A - 3A = 1 \Leftrightarrow A = -\frac{1}{2}.$$

Hledejme partikulární řešení pro pravou stranu  $3^n = 1 \cdot 3^n$ . Očekáváme ho ve tvaru  $n^1 \cdot B \cdot 3^n$ , jehož dosazením do rekurence s pravou stranou  $3^n$  dostaneme podmínku pro  $B$ :

$$(n+1)B3^{n+1} - 3nB3^n = 3^n \Leftrightarrow 3B = 1 \Leftrightarrow B = \frac{1}{3}.$$

Hledané partikulární řešení zadané LRR je proto tvaru  $\tilde{x}_n = -\frac{1}{2} + n3^{n-1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

## 6.7 Asymptotické chování řešení LRR

Motivací pro obsah této sekce je následující situace: máme rekurzivní algoritmus, který při řešení dělí problém „velikosti“  $n$  na  $a$  „částí“ „velikosti“  $\frac{n}{b}$  a jejich „zkombinování“ do celkového řešení stojí  $f(n)$ .

Takovouto situaci popíšeme rekurzivním vztahem

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n),$$

kde  $T(n)$  vyjadřuje složitost (operační/paměťovou) vyřešení problému velikosti  $n$ .

Nyní z praktických důvodů místo posloupností používáme funkce  $T$  a  $f$ , typicky s kladnými funkčními hodnotami a definované alespoň na  $\langle 1, +\infty \rangle$ , resp.  $\mathbb{N}$ . Pokud velikost vstupu nemá velikost  $n = b^N$ , pak musíme ještě řešit případné zaokrouhlování  $n/b$  pomocí horní nebo dolní celé části. Za „počáteční podmínku“ považujeme  $T(1)$ .

Příklady rekurencí a algoritmů (viz BI-AG1 a jinde):

- FFT:  $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n)$ ,
- MergeSort:  $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n)$ ,
- Karatsuba (rekurzivní násobení čísel):  $T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n)$ ,
- ...

Naším cílem nyní není nalézt řešení v uzavřeném tvaru, ale odhalit nějaké jeho asymptotické vlastnosti. Například nalézt jeho asymptotickou těsnou mez  $\Theta$ .

K tomuto účelu budeme postupně probírat

- Iterační metodu (podkapitola 6.8),
- Mistrovskou metodu (podkapitola 6.9),
- Substituční metodu (podkapitola 6.10).

## 6.8 Iterační metoda

Pod iterační metodou chápeme opakované rozepsání rekurence a následné řešení asymptotického chování výsledné sumy. Nejprve si ukážeme konkrétní příklad a poté se pustíme do obecného rozboru, který vyústí v Mistrovskou metodu (Věta 6.9).

**Příklad 6.19:** Mějme rekurentní vztah

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + n.$$

Předpokládejme  $T(1) = \Theta(1)$ . Bez snahy o hledání explicitního řešení nalezněte asymptotickou těsnou mez pro  $T(n)$ .

*Řešení.* Postupně iterujme (dosazujme; telescoping), po prvních třech krocích dostaneme

$$\begin{aligned} T(n) &= n + 3T\left(\frac{n}{4}\right) = \\ &= n + 3\frac{n}{4} + 3^2 \cdot T\left(\frac{n}{4^2}\right) = \\ &= n + 3\frac{n}{4} + 3^2\frac{n}{4^2} + 3^3 \cdot T\left(\frac{n}{4^3}\right). \end{aligned}$$

Obecně po  $k$  iteracích dostaneme

$$T(n) = n + 3\frac{n}{4} + 3^2\frac{n}{4^2} + \dots + 3^{k-1}\frac{n}{4^{k-1}} + 3^k \cdot T\left(\frac{n}{4^k}\right).$$

Iterování skončí při dosažení rovnosti  $4^k = n$ , tj.  $k = \log_4 n$ . Bereme-li  $T(1) = \Theta(1)$ , pak dostáváme vztah

$$T(n) = \underbrace{n \cdot \sum_{i=0}^{\log_4(n)-1} \left(\frac{3}{4}\right)^i}_{A(n)} + \underbrace{3^{\log_4(n)} \cdot \Theta(1)}_{B(n)}.$$

Nyní se zaměříme na výrazy  $A(n)$  a  $B(n)$  jednotlivě.

- Ve výrazu pro  $A(n)$  se vyskytuje součet konvergentní číselné řady (geometrická s kladným kvocientem menším než 1) a proto  $A(n) = n \cdot \Theta(1) = \Theta(n)$ .
- Pro druhý člen platí  $B(n) = n^{\log_4(3)} \cdot \Theta(1) = \Theta(n^{\log_4(3)})$ .

Celkově dostáváme  $T(n) = \Theta(n)$ , protože  $\log_4(3) < 1$ .

Pokud aplikujeme iterační metodu na rekurenci tvaru

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n),$$

pak je obecně potřeba:

- určit počet iterací nutných k dosažení počátečních podmínek,
- sečíst řadu nebo odhadnout její součet, případně rozhodnout o její konvergenci/divergenci, nebo nalézt asymptotické chování posloupnosti částečných součtů divergentní číselné řady,
- následně určit, který z členů  $A(n)$  a  $B(n)$  kontroluje výsledné chování.

Tento postup obecně více rozebírat nebudeme, vždy ho lze aplikovat v konkrétním příkladě (viz [cvičení k předmětu BI-MA2 na MARASTu](#)). V následující podkapitole představíme metodu, která je na tomto postupu založená a postihuje některé časté případy.

## 6.9 Mistrovská metoda

Aplikujme opět iterační metodu na „obecnou“ rekurenci

$$T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n).$$

Prvních několik iterací dává

$$\begin{aligned} T(n) &= f(n) + a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) \\ &= f(n) + a \cdot f\left(\frac{n}{b}\right) + a^2 \cdot T\left(\frac{n}{b^2}\right) \\ &= f(n) + a \cdot f\left(\frac{n}{b}\right) + a^2 f\left(\frac{n}{b^2}\right) + a^3 \cdot T\left(\frac{n}{b^3}\right). \end{aligned}$$

Po  $k$  iteracích pak dostáváme

$$\begin{aligned} T(n) &= f(n) + a \cdot f\left(\frac{n}{b}\right) + \dots + a^{k-1} f\left(\frac{n}{b^{k-1}}\right) + a^k \cdot T\left(\frac{n}{b^k}\right) \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} a^j f\left(\frac{n}{b^j}\right) + a^k \cdot T\left(\frac{n}{b^k}\right). \end{aligned}$$

Určíme ukončovací podmínku. Iteraci zastavíme pokud  $\frac{n}{b^k} = 1$ , tedy po  $k = \log_b n$  iteracích (případně „ $\leq$ “ místo „ $=$ “). Pak klademe  $T(1) = \Theta(1)$ .

Celkem se tedy dostáváme ke vztahu

$$T(n) = \underbrace{\sum_{j=0}^{\log_b(n)-1} a^j f\left(\frac{n}{b^j}\right)}_{A(n)} + \underbrace{\Theta\left(n^{\log_b(a)}\right)}_{B(n)}.$$

Abychom vystihli chování  $T(n)$ , tak je potřeba rozhodnout, který z uzávorkovaných výrazů  $A(n)$  a  $B(n)$  je asymptoticky významnější. To můžeme vždy zkoumat v konkrétním případě (pro konkrétní volbu  $a$ ,  $b$  a  $f$  – to přesně dělá iterační metoda), nebo se můžeme omezit na několik kvalitativně odlišných situací, což přesně činí následující věta.

**Věta 6.9** (Mistrovská metoda / *Master theorem*): Nechť  $a \geq 1$  a  $b > 1$  jsou reálné konstanty,  $f$  kladná funkce jedné proměnné. Uvažujme **rekurentní rovnici**

$$T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n),$$

kde  $\frac{n}{b}$  v argumentu může znamenat i  $\lceil \frac{n}{b} \rceil$  nebo  $\lfloor \frac{n}{b} \rfloor$ .

Potom (všechny vztahy myšleny pro  $n \rightarrow \infty$ ):

1. Pokud  $f(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b(a)-\varepsilon})$  pro nějaké  $\varepsilon > 0$ , potom  $T(n) = \Theta(n^{\log_b(a)})$ .
2. Pokud  $f(n) = \Theta(n^{\log_b(a)})$ , pak  $T(n) = \Theta(n^{\log_b(a)} \cdot \ln(n))$ .
3. Pokud  $f(n) = \Omega(n^{\log_b(a)+\varepsilon})$  pro nějaké  $\varepsilon > 0$  a pokud existuje  $d \in (0, 1)$  a  $n_0 \in \mathbb{N}$  takové, že

$$af\left(\frac{n}{b}\right) \leq d \cdot f(n), \quad \text{pro každé } n \geq n_0,$$

pak  $T(n) = \Theta(f(n))$ .

Kompletní důkaz na tomto místě podávat (zatím) nebudeme. Omezíme se jen na jeho náčrt v jednom případě. Nejprve ale pro jistotu čtenáře upozorníme:

**Varování 6.1:** Jednotlivé body Mistrovské metody nepokrývají všechny situace, které mohou nastat. V takovém případě je možné se uchýlit k iterační metodě.

*Mistrovská metoda: náčrt důkazu pro bod 2.* Pokud  $f(n) = \Theta(n^{\log_b(a)})$ , pak existují dvě konstanty  $c_1, c_2$  a  $n_0$  takové, že

$$c_1 n^{\log_b(a)} \leq f(n) \leq c_2 n^{\log_b(a)}, \quad \text{pro všechna } n \geq n_0.$$

Protože

$$\frac{n}{b^j} > n_0 \iff j \leq \log_b(n/n_0) = \log_b(n) - \log_b(n_0),$$

rozdělím sumu v  $A(n)$  následovně

$$A(n) = \sum_{j=0}^{\log_b(n)-1} a^j f\left(\frac{n}{b^j}\right) = \underbrace{\sum_{j=0}^{\log_b(n/n_0)-1} a^j f\left(\frac{n}{b^j}\right)}_{S(n)} + \underbrace{\sum_{j=\log_b(n/n_0)}^{\log_b(n)-1} a^j f\left(\frac{n}{b^j}\right)}_{C(n)}$$

Suma  $C(n)$  obsahuje  $\log_b(n_0)$  sčítanců, navíc  $1 \leq \frac{n}{b^j} \leq n_0$ , proto

$$0 \leq C(n) \leq \underbrace{\left(\max_{k \in \widehat{n_0}} f(k)\right)}_D \cdot \sum_{j=\log_b(n/n_0)}^{\log_b(n)} a^j = Da^{\log_b(n)} \sum_{j=0}^{\log_b(n_0)-1} a^j = \Theta(n^{\log_b(a)})$$

Celkem  $C(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b(a)})$ .

Odhad  $S(n)$  shora:

$$\begin{aligned} S(n) &\leq c_2 \sum_{j=0}^{\log_b(n/n_0)} a^j \left(\frac{n}{b^j}\right)^{\log_b(a)} = c_2 \sum_{j=0}^{\log_b(n/n_0)} n^{\log_b(a)} = \\ &= c_2 n^{\log_b(a)} (\log_b(n) - \log_b(n_0)) = n^{\log_b(a)} \ln(n) \cdot \Theta(1). \end{aligned}$$

Analogicky provedeme i spodní odhad, tj. celkem  $S(n) = \Theta(n^{\log_b(a)} \ln(n))$ .

Protože  $B(n) = \Theta(n^{\log_b(a)})$  celkem dostáváme

$$\begin{aligned} T(n) &= S(n) + B(n) + C(n) = \\ &= \Theta(n^{\log_b(a)} \ln(n)) + \Theta(n^{\log_b(a)}) + \mathcal{O}(n^{\log_b(a)}) = \\ &= \Theta(n^{\log_b(a)} \ln(n)). \end{aligned}$$

Tím je důkaz dokončen. □

Pojďme se nyní podívat na konkrétní příklad. Více příkladů lze nalézt ve výše zmíněné cvičebnici na MARASTu.

**Příklad 6.20:** Aplikujte Mistrovskou metodu na rekurenci

$$T(n) = 6T\left(\frac{n}{4}\right) + n.$$

*Řešení.* Máme  $a = 6$  a  $b = 4$ , tudíž

$$n^{\log_b(a)} = n^{\log_4(6)}, \quad \text{přičemž } \log_4(6) > 1.$$

Proto jistě existuje kladné  $\varepsilon$  (numericky třeba  $1/10$ ) takové, že

$$f(n) = n = n^1 = \mathcal{O}(n^{\log_4(6)-\varepsilon}).$$

V Mistrovské metodě jsme proto v první situaci a dostáváme výsledek

$$T(n) = \Theta(n^{\log_4(6)}).$$

**Příklad 6.21:** Aplikujte Mistrovskou metodu na rekurenci

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n.$$

*Řešení.* Máme  $a = 2$  a  $b = 2$ , tudíž

$$n^{\log_b(a)} = n^{\log_2(2)} = n^1.$$

a

$$f(n) = n = n^1 = \Theta(n^1).$$

V Mistrovské metodě jsme proto v druhé situaci a dostáváme výsledek

$$T(n) = \Theta(n^{\log_2(2)} \ln(n)) = \Theta(n \ln(n)).$$

**Příklad 6.22:** Aplikujte Mistrovskou metodu na rekurenci

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + n.$$

*Řešení.* Máme  $a = 3$  a  $b = 4$ , tudíž

$$n^{\log_b(a)} = n^{\log_4(3)}, \quad \text{přičemž } 0 < \log_4(3) < 1.$$

Proto existuje kladné  $\varepsilon$  takové, že

$$f(n) = n = n^1 = \Omega(n^{\log_4(3)+\varepsilon}).$$

Dále

$$af\left(\frac{n}{b}\right) = 3\frac{n}{4} = \frac{3}{4}n \leq dn,$$

kde za  $d \in (0, 1)$  volíme například  $\frac{3}{4}$ . V Mistrovské metodě jsme proto v třetí situaci a dostáváme výsledek

$$T(n) = \Theta(n).$$

**Příklad 6.23:** Aplikujte Mistrovskou metodu na rekurenci

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + n^2.$$

*Řešení.* Máme  $a = 3$  a  $b = 4$ , tudíž

$$n^{\log_b(a)} = n^{\log_4(3)}, \quad \text{přičemž } 0 < \log_4(3) < 1.$$

Proto existuje kladné  $\varepsilon$  takové, že

$$f(n) = n^2 = \Omega(n^{\log_4(3)+\varepsilon}).$$



Dále

$$af\left(\frac{n}{b}\right) = 3\left(\frac{n}{4}\right)^2 = \frac{3}{4^2}n^2 \leq dn^2,$$

kde za  $d \in (0, 1)$  volíme například  $\frac{3}{4^2}$ . V Mistrovské metodě jsme proto v třetí situaci a dostáváme výsledek

$$T(n) = \Theta(n^2).$$

## 6.10 Substituční metoda

Mějme opět rekurenci (případně i jinou rekurenci)

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n).$$

Substituční „metoda“ spočívá v následujících dvou krocích:

1. Uhodněte/odhadněte asymptotické chování  $T(n)$ , vyjádřené pomocí  $\Theta$ ,  $\mathcal{O}$ ,  $\Omega$ , ...
2. Dokažte jeho platnost pomocí matematické indukce.

Z důvodu zpětné kompatibility s BI-ZDM o tomto přístupu stále mluvíme jako o „substituční metodě“. Ale skutečně nejde o nic jiného, než o důkaz platnosti jistého vztahu pomocí matematické indukce. Demonstrujeme výše popsané myšlenky na konkrétních příkladech.

**Příklad 6.24:** Mějme rekurentní rovnici

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n.$$

Pomocí iterační metody po  $k$  krocích dostaneme

$$T(n) = kn + 2^k T\left(\frac{n}{2^k}\right).$$

Pokud  $n = 2^k$ , tj.  $k = \log_2(n)$ , pak dostáváme

$$T(n) = n \log_2(n) + nT(1).$$

Pomocí matematické indukce dokažte vztah  $T(n) = \mathcal{O}(n \ln n)$ , pro  $n \rightarrow \infty$ .

**Řešení.** Máme dokázat následující tvrzení: splňuje-li  $T(n)$  rekurentní rovnici  $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$ , pak

existují  $n_0 \in \mathbb{N}$  a  $c > 0$  tak, že  $0 \leq T(n) \leq cn \ln(n)$  pro každé  $n \geq n_0$ .

**Indukční krok:** Předpokládejme, že pro  $n$  platí  $T\left(\frac{n}{2}\right) \leq c\frac{n}{2} \ln \frac{n}{2}$ . Potom s využitím rekurentního vztahu dostáváme

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \stackrel{IP}{\leq} 2\left(c\frac{n}{2} \ln \frac{n}{2}\right) + n = \\ &= cn \ln(n) - cn \ln 2 + n = cn \ln(n) + n(1 - c \ln 2). \end{aligned}$$

Pro  $c > \frac{1}{\ln 2}$  je poslední výraz záporný a proto platí  $T(n) \leq cn \ln(n)$ . Omezení na  $n$  jsme žádná neměli.

**Základní krok matematické indukce:** dokážeme nalézt nějaké  $n_0 \in \mathbb{N}$  takové, aby nerovnost  $T(n_0) \leq cn_0 \ln(n_0)$  platila pro nějaké  $c > 1/\ln 2$ ? Ano, můžeme vzít libovolné  $n_0 > 1$ , pro které má  $T(n_0)$  smysl a pak nerovnost splnit volbou dostatečně velkého  $c$ .

**Poznámka:** Naprosto analogickým způsobem bychom dokázali vztah  $T(n) = \Omega(n \ln(n))$ , pro  $n \rightarrow \infty$  a dohromady tedy i  $T(n) = \Theta(n \ln(n))$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

**Příklad 6.25:** Mějme rekurenci

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + 1.$$

Pomocí matematické indukce dokažte, že  $T(n) = \mathcal{O}(n)$ .

**Řešení.** V tomto případě se dostaneme do problémů. Chceme ukázat, že nerovnost

$$0 \leq T(n) \leq cn \tag{6.11}$$

platí pro nějaké  $c > 0$  a všechna dost velká  $n$ .

**Indukční krok:** Předpokládejme platnost vztahu  $T\left(\frac{n}{2}\right) \leq c\frac{n}{2}$ . Potom

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + 1 \stackrel{IP}{\leq} 2 \cdot c\frac{n}{2} + 1 = cn + 1.$$

Pravou stranu ovšem nikdy neuděláme menší než požadované  $cn$ .

Pokud ovšem chceme dokázat, že  $T(n) = \mathcal{O}(n)$ , pak díky tranzitivitě na pravé straně (6.11) stačí mít libovolný  $\mathcal{O}(n)$  výraz.

Druhý pokus: V předchozím pokusu jsme „přetekli“, zkusme tento problém vyřešit zpřísněním původního požadavku, pokusme se ukázat nerovnost

$$T(n) \leq cn - b$$

pro nějaké konstanty  $c, b > 0$  a všechna dost velká  $n$ .

Indukční krok: Předpokládejme platnost vztahu  $T\left(\frac{n}{2}\right) \leq c\frac{n}{2} - b$ . Potom

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + 1 \stackrel{IP}{\leq} 2 \cdot \left(c\frac{n}{2} - b\right) + 1 = cn + 1 - 2b.$$

Požadujeme  $1 - 2b \leq -b$ , což je ekvivalentní  $b \geq 1$ .

## 6.11 Příklad

Nechť je dán vstup  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ .

- Vyber náhodně prvek ze seznamu (nazývaný *pivot*).
- Prvky ze seznamu menší než pivot dej do jednoho podseznamu a prvky větší do druhého podseznamu.
- Dva kratší seznamy uspořádej podle velikosti.
- Vezmi uspořádaný první seznam, za něj dej pivota a připoj uspořádaný druhý seznam.

Algoritmus probíhá rekurentně. Uspořádání dvouprvkového seznamu je jednoduché.

Označme  $T_n$  průměrný počet porovnání pro uspořádání seznamu délky  $n$ .

Pokud je pivot  $r$ -tým prvkem seznamu (co do velikosti), pak dostáváme rekurenci<sup>7</sup>

$$T_n = n - 1 + T_{r-1} + T_{n-r}, \quad \text{kde klademe } T_0 = T_1 = 0.$$

Sečtením těchto vztahů pro  $r = 1, 2, \dots, n$ :

$$\sum_{r=1}^n T_n = \sum_{r=1}^n (n-1) + \sum_{r=1}^n (T_{r-1} + T_{n-r}) \implies nT_n = n(n-1) + 2 \sum_{r=1}^{n-1} T_r.$$

<sup>7</sup>Poměrně jiného typu, než dříve.

Poslední rovnost vyjádříme pro  $k - 1$  místo  $k$  a oba vztahy odečteme (zbavíme se tím součtu vpravo), tj.:

$$k T_k = k(k - 1) + 2 \sum_{r=1}^{k-1} T_r, \quad (k - 1)T_{k-1} = (k - 1)(k - 2) + 2 \sum_{r=1}^{k-2} T_r,$$

a po odečtení:

$$kT_k - (k - 1)T_{k-1} = k(k - 1) - (k - 1)(k - 2) + 2T_{k-1}.$$

Odvodili jsme tedy vztah (LRR s nekonstantními koeficienty!)

$$kT_k - (k + 1)T_{k-1} = 2k - 2.$$

Vydělením číslem  $k(k + 1)$  dostáváme

$$\frac{T_k}{k + 1} - \frac{T_{k-1}}{k} = \frac{2k - 2}{k(k + 1)}.$$

Konečně, sečtením těchto rovností pro  $k = 1, 2, \dots, n$

$$\begin{aligned} \frac{T_n}{n + 1} &= 2 \sum_{k=1}^n \frac{k - 1}{k + 1} \cdot \frac{1}{k} \leq 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \\ &\leq 2 \left( 1 + \int_1^n \frac{1}{x} dx \right) = 2(1 + \ln(n)). \end{aligned}$$

Uzavíráme

$$T_n = \mathcal{O}(n \ln(n)).$$

# 7 Funkce více proměnných

Doposud jsme se v předmětech BI-MA1 i BI-MA2 zabývali pouze reálnými funkcemi *jedné* reálné proměnné. Při řešení praktických problémů ovšem budeme narážet na objekty závisající na mnoha parametrech a tak je přirozené i potřeba pracovat s funkcemi více proměnných (tj., více než jedné).

Toto rozdělení látky je v kurzech matematické analýzy, resp. diferenciálního a integrálního počtu, poměrně časté. Zavedení a osvojení si základních pojmů jako jsou *limita* či *derivace* v „jednoduchém“ případě jedné proměnné by mělo studentstvu usnadnit pochopení obecnějších pojmů. Jak zanedlouho uvidíme, přechod k více proměnným bude opět využívat základní principy, na kterých stojí definice limit či derivace, a navíc budeme využívat aparát Lineární algebry.

Následující kapitoly si nekladou za cíl být vyčerpávající, v některých částech „nepůjdeme příliš do hloubky“. Snažíme se čtenářky a čtenáře seznámit se základními pojmy a ukázat jim i zajímavé aplikace. Konkrétně například spádovou metodu (Podkapitola 9.5) nebo regrese pomocí metody nejmenších čtverců (Podkapitola 9.4).

V této kapitole nejprve zobecníme okolí bodů do prostorů vyšších dimenzí. Zavedeme vektorové posloupnosti a (vektorové) funkce více proměnných. Dále budeme studovat limity takovýchto funkcí a posloupností, a spojitost (vektorových) funkcí. V neposlední řadě zavedeme základní objekty diferenciálního počtu funkcí více proměnných (derivace, gradient, Hesseova matice). Nejprve ale oprášíme a připomeneme základy.

## 7.1 Úvodní poznámky

V předmětu BI-MA1 jsme studovali

- posloupnosti  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  reálných čísel a jejich limity,

- reálné funkce jedné reálné proměnné  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ , a jejich limity, spojitost a derivaci.

Nyní se budeme zabývat jejich „vícerozměrnými“ analogy. Přechod bude často přímočarý, někdy komplikovanější. Budeme intenzivně využívat aparát Lineární algebry, proto je případně dobré si oprášit znalosti z předmětu [BI-LA1](#).

Naším hlavním cílem v této kapitole jsou kritéria pro hledání extrémů funkcí více proměnných, konkrétně podkapitoly [9.2](#) a [9.3](#). Nejprve ale musíme zavést základní koncepty týkající se funkcí více proměnných.

## Připomenutí

Není překvapivé, že při práci v prostorech vyšších dimenzí budeme intenzivně využívat látku [BI-LA1](#). Proto na následujících několika odstavcích pro pohodlí čtenářek a čtenářů nejprve stručně shrneme základní poznatky, značení a terminologii.

Budeme pracovat ve vektorovém prostoru  $\mathbb{R}^n$   $n$ -tic reálných čísel vybavených standardními operacemi sčítání a násobením reálným skalárem (po složkách). Prvky  $\mathbb{R}^n$  – vektory – budeme značit tučnými malými písmeny, např.  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{z}$ ,... Složky vektorů jakožto skaláry tučně neznačíme, viz např. rovnici [\(7.1\)](#) níže. Vektory z  $\mathbb{R}^n$  chápeme jako sloupcové vektory, tj. ztotožňujeme  $\mathbb{R}^n$  s  $\mathbb{R}^{n,1}$ , například

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n. \quad (7.1)$$

Zde horní index  $T$  označuje transpozici. Nulový vektor prostoru  $\mathbb{R}^n$  značíme pomocí řeckého písmena  $\theta = (0, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^n$ .

Prostor všech matic s  $m$  řádky a  $k$  sloupci s reálnými prvky značíme  $\mathbb{R}^{m,k}$ . Matice značíme také tučnými velkými písmeny jako  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ , či  $\mathbf{M}$ . Prvek  $\mathbf{A}_{i,j}$  pak najdeme v  $i$ -tém řádku a  $j$ -tém sloupci matice  $\mathbf{A}$ .

Dále používáme praktické, ale ne příliš rozšířené, značení množin přirozených čísel menších nebo rovno jisté přirozené číslo zavedené v [BI-LA1](#). Konkrétně pro přirozené  $n \in \mathbb{N}$  symbolem  $\hat{n}$  označujeme množinu  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Tj. například platí  $\hat{3} = \{1, 2, 3\}$ . Množina  $\hat{n}$  je konečná množina pro každé  $n \in \mathbb{N}$ .

Pro  $j \in \hat{n}$  vektor  $\mathbf{e}_j$  představuje  $j$ -tý vektor standardní báze  $\mathbb{R}^n$ . Tedy  $(\mathbf{e}_j)_k = \delta_{jk}$  pro  $j, k \in \hat{n}$ , kde pro **Kroneckerovo**  $\delta$  platí

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k, \end{cases} \quad j, k \in \hat{n}.$$

Například v prostoru  $\mathbb{R}^3$  pro vektory standardní báze  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  tohoto prostoru platí

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)^T,$$

$$\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)^T,$$

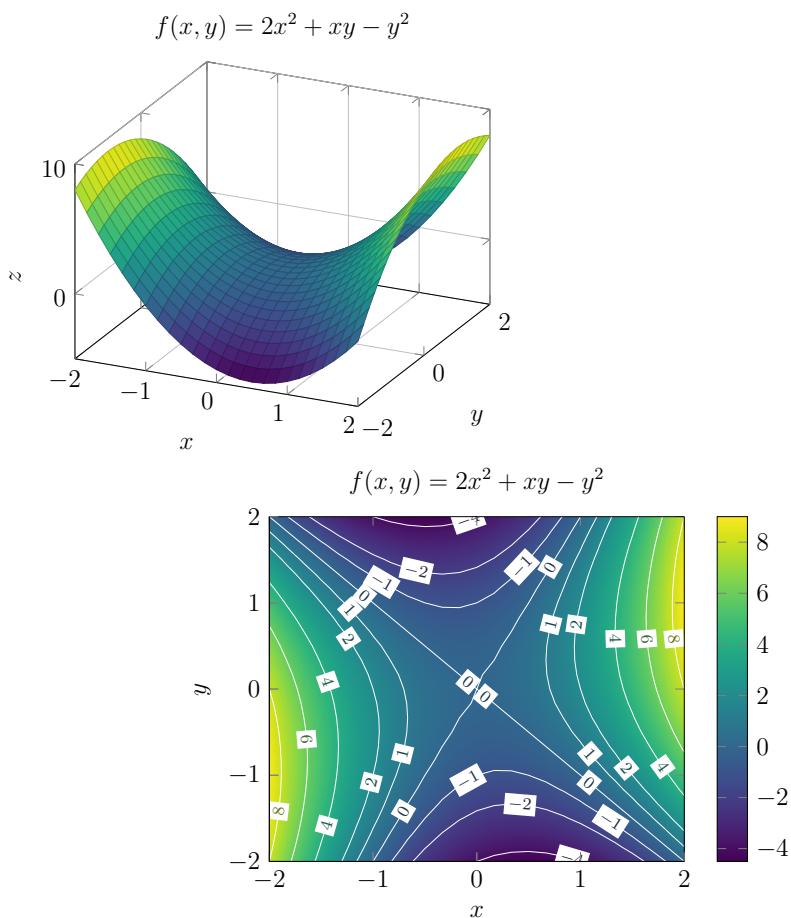
$$\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)^T.$$

## Vizualizace

Reálnou funkci *jedné* reálné proměnné  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D_f \subset \mathbb{R}$ , lze snadno vizualizovat pomocí jejího grafu, který je podmnožinou roviny  $\mathbb{R}^2$ . Tento způsob vizualizace jistě důvěrně znáte. Označíme-li jako  $x$  nezávisle proměnnou a  $y$  jako závisle proměnnou, pak na vodorovné ose vynášíme  $x$  a na svislé  $y$  (i když to evidentně není jediná možná volba).

Vizualizace funkcí více proměnných je již komplikovanější. „Rozumně“ to lze provést více méně jen pro reálné funkce *dvou* proměnných  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D_f \subset \mathbb{R}^2$ , jejichž graf je podmnožinou trojrozměrného prostoru  $\mathbb{R}^3$ . Nezávisle proměnné označujeme typicky  $x$  a  $y$  a závisle proměnnou pak  $z$ . Definiční obor naší funkce leží v rovině obsahující osy  $x$  a  $y$ . Funkční hodnotu  $f(x, y)$  pak vynášíme kolmo k této rovině na osu  $z$ . Chová-li se takováto funkce  $f$  „pěkně“ (např. je spojitá), pak takto vzniklý graf připomíná krajinu („3D mapu“), viz levá část Obrázku 7.1. Například v Mathematica můžete použít funkci `Plot3D`.

Postup uvedený v předchozím odstavci vede k poměrně atraktivnímu výsledku, s kterým ale nemusí být jednoduché pracovat a který často ani nemusí být přehledný. Alternativně lze pro uvažovanou funkci vytvořit tzv. *contour plot*, tedy výškový profil, kde pomocí „vrstevnic“ (tedy křivek konstantní hodnoty funkce) a případně barev znázorníme oblasti se stejnou či podobnou funkční hodnotou. Viz pravou část Obrázku 7.1. Například v Mathematica můžete použít funkci `ContourPlot`.



Obrázek 7.1: Vizualizace funkce více proměnných  $f(x, y) = 2x^2 + xy - y^2$  pomocí jejího grafu (levá část) a pomocí znázornění křivek konstantní hodnoty této funkce (pravá část). Všimněte si, že na obrázku vpravo vidíme numerické nepřesnosti vykreslovacího algoritmu (například křivky odpovídající nulové hodnotě jsou v tomto případě skutečně přímky!).



## 7.2 Okolí bodu v $\mathbb{R}^n$

Vzpomeňte si, jak v BI-MA1 celá řada pojmů vycházela z pojmu okolí bodu na reálné ose. Naším prvním krokem proto bude rozšíření pojmu okolí i do vektorového prostoru  $\mathbb{R}^n$ . Na prvky  $\mathbb{R}^n$  se budeme dívat také jako na body, jejich vektorovost pro naše úvahy často není podstatná. Tj. o  $\mathbf{x}$  podle kontextu mluvíme buď jako o „vektoru“ nebo „bod“.

### Délky a vzdálenosti

Nejprve v našem prostoru  $\mathbb{R}^n$  musíme umět měřit vzdálenost dvou bodů. Toho docílíme využitím vektorové struktury tohoto prostoru a možnosti měřit délku vektoru.

**Definice 7.1** (Euklidovská norma a vzdálenost): **Euklidovskou normu vektoru  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  definujeme předpisem**

$$\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}.$$

**Euklidovskou vzdálenost dvou bodů  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  a  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  pak představuje číslo**

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2}.$$

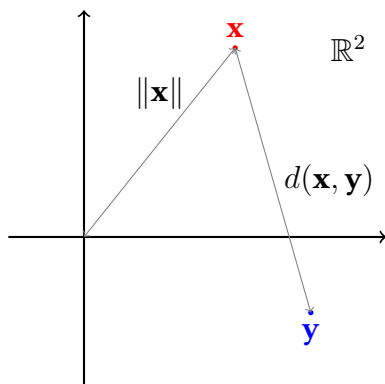
Povšimněte si, že Euklidovská norma je tzv. indukována **standardním skalárním součinem**<sup>1</sup>

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle := \sum_{j=1}^n x_j y_j = \mathbf{x}^T \mathbf{y}, \quad (7.2)$$

tj.  $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle}$ . Prostor  $\mathbb{R}^n$  od tohoto okamžiku považujeme za vybavený Euklidovskou normou  $\|\mathbf{x}\|$  a vzdáleností  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ . Jiné normy a vzdálenosti nebudeme zatím přímo uvažovat (i když bychom mohli, ale nic bychom v našem konečnedimenzionálním případě nezískali<sup>2</sup>). Grafické znázornění situace v rovině  $\mathbb{R}^2$  uvádíme na Obrázku 7.2.

<sup>1</sup>Ve značení jsme kompatibilní s BI-LA2.

<sup>2</sup>Úmyslně kryptická poznámka.



Obrázek 7.2: Znázornění Euklidovské délky vektoru a Euklidovské vzdálenosti dvou bodů v rovině.

Euklidovská norma a standardní skalární součin mají řadu užitečných vlastností, které je důstojné formálně vyslovit a dokázat. Následující tvrzení také někdy naleznete pod jménem Cauchyho–Schwarzova nerovnost.

**Tvrzení 7.1** (Schwarzova nerovnost): Pro každé  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  platí nerovnost

$$|\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|. \quad (7.3)$$

Navíc rovnost nastává právě tehdy, když jeden z vektorů je násobkem druhého.

*Důkaz.* Skutečně, pro každé  $\alpha \in \mathbb{R}$  a  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  platí (rozepište!)

$$0 \leq \|\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}\|^2 = \langle \mathbf{x} + \alpha\mathbf{y} | \mathbf{x} + \alpha\mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\|^2 + 2\alpha\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle + \alpha^2\|\mathbf{y}\|^2.$$

A pro diskriminant  $D$  tohoto kvadratického polynomu (v  $\alpha$ ) pak nutně platí

$$0 \geq D = (2\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle)^2 - 4\|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2.$$

Což po jednoduchých úpravách dává přesně nerovnost (7.3).

Konečně pak také vidíme, že rovnost v (7.3) nastává právě tehdy, když  $D = 0$ , čili když uvedený polynom má dvojnásobný kořen  $\alpha$  a tedy  $\|\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}\| = 0$ , neboli  $\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y} = \theta$ .  $\square$

**Tvrzení 7.2** (Trojúhelníková nerovnost): Pro každé  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  platí

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|.$$

*Důkaz.* Tvrzení poměrně přímočaře plyne ze Schwarzovy nerovnosti:

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + 2\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle + \|\mathbf{y}\|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 = (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2.$$

Nyní stačí odmocnit. □

## Okolí bodu $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$

Vybavení konceptem vzdálenosti dvou bodů v prostoru  $\mathbb{R}^n$  nám nyní nic nebrání zadefinovat okolí bodu v  $\mathbb{R}^n$ :

**Definice 7.2** (Okolí bodu  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ ): Mějme bod  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  a poloměr  $\varepsilon > 0$ . Potom **okolím bodu  $\mathbf{a}$  o poloměru  $\varepsilon$**  nazýváme množinu všech bodů  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , jejichž vzdálenost od bodu  $\mathbf{a}$  je menší než  $\varepsilon$  a značíme ho  $U_{\mathbf{a}}(\varepsilon)$ . Tj. podrobně rozepsáno

$$U_{\mathbf{a}}(\varepsilon) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < \varepsilon\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Podobně jako dříve v **BI-MA1** budeme občas specifikaci poloměru  $\varepsilon$  vynechávat, pokud jeho konkrétní hodnota nemá pro danou argumentaci význam. Tedy symbol  $U_{\mathbf{a}}$  představuje nějaké okolí bodu  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ . Dále ve veškerém výkladu přirozeně ztotožňujeme  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}^1$ .

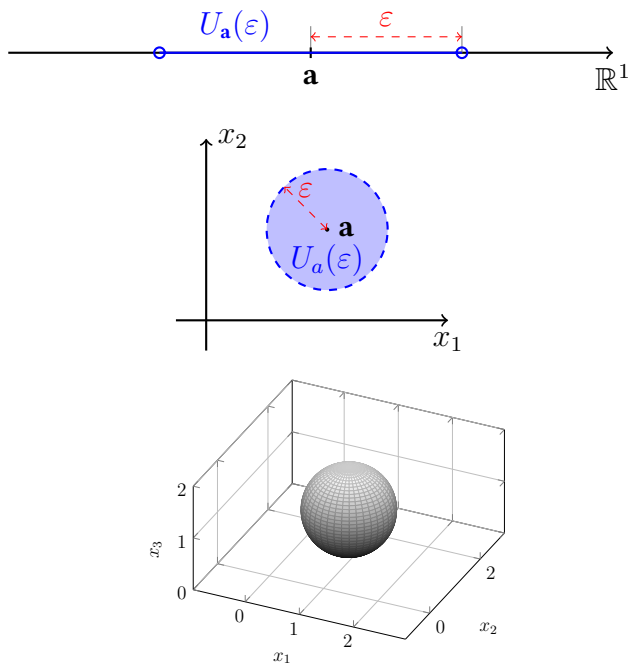
Vizualizace několika okolí v prostorech malých dimenzí uvádíme na **Obrázku 7.3**. V případě  $n = 1$ , tedy v  $\mathbb{R}^1$ , jsme nezískali nic nového (vzpomeňte na vztah  $\sqrt{x^2} = |x|$ ). Okolí jsou stále známé otevřené intervaly. V rovině  $\mathbb{R}^2$  (resp. prostoru  $\mathbb{R}^3$ ) jsou okolí představována kruhy (resp. koulemi), vždy bez „hranice“ (kružnice, resp. sféry).

Vybavení pojmem okolí můžeme ihned rozšířit důležitý (viz **BI-MA1** a definici limity funkce) pojem hromadného bodu i na množiny  $M \subset \mathbb{R}^n$ . V další podkapitole se vrátíme k pojmům z **BI-MA1** (posloupnosti, limity, derivace,...) a zavedeme jejich vícerozměrné analogy a „hromadnost“ jistých bodů nebo „otevřenost“ jistých množin bude hrát důležitou roli.

**Definice 7.3** (Hromadný bod množiny  $M \subset \mathbb{R}^n$ ): Bod  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  nazýváme **hromadným bodem množiny**  $M \subset \mathbb{R}^n$ , právě když v každém okolí bodu  $\mathbf{a}$  leží bod množiny  $M$  různý od  $\mathbf{a}$ .

**Obrázek 7.4** se snaží tento koncept vizualizovat v jednoduchém případě, kdy  $n = 2$ , tedy v rovině.

**Příklad 7.1:** Rozmysleme si následující jednoduché situace:



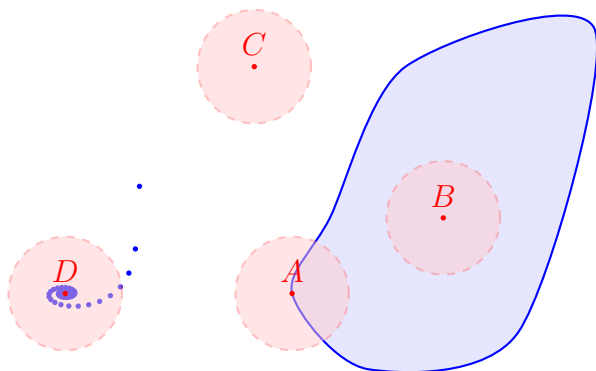
Obrázek 7.3: Okolí bodu, postupně v  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^2$  a  $\mathbb{R}^3$ . Dostáváme otevřený interval, kruh bez kružnice a kouli bez sféry.

- $\theta$  je hromadným bodem množiny  $\{\frac{1}{t}(\cos(t), \sin(t)) \mid t > 0\}$ .
- Podmnožina  $\mathbb{R}^n$  s konečným počtem prvků nemá žádný hromadný bod.
- Je-li  $\mathbf{a}$  hromadný bod množiny  $M$ , pak v každém jeho okolí leží nekonečně mnoho bodů množiny  $M$  různých od  $\mathbf{a}$ .

V BI-MA1 hrály důležitou roli otevřené intervaly. V případě vícerozměrných prostorů tuto roli budou hrát otevřené množiny.

**Definice 7.4** (Vnitřní bod množiny / *Inner point of a set*): O bodu  $\mathbf{a} \in M \subset \mathbb{R}^n$  řekneme, že je **vnitřním bodem množiny**  $M$ , právě když existuje okolí  $U_{\mathbf{a}}$  bodu  $\mathbf{a}$  takové, že  $U_{\mathbf{a}} \subset M$ .

**Definice 7.5** (Otevřená množina / *Open set*): O množině  $M \subset \mathbb{R}^n$  řekneme, že je **otevřená**, právě když pro každý bod  $\mathbf{a} \in M$  existuje okolí  $U_{\mathbf{a}}$  bodu  $\mathbf{a}$  takové, že  $U_{\mathbf{a}} \subset M$ .



Obrázek 7.4: Ilustrace k definici hromadného bodu (Definice 7.3). Představme si následující  $M$ , tvořenou modrými body, modrou křivkou a plochou vyplněnou bledě modrou barvou. Diskutujte hromadnost uvedených červeně zvýrazněných bodů.

**Poznámka 7.1:** Množina  $M$  je otevřená, právě když každý její prvek je vnitřním bodem množiny  $M$ . Otevřené intervaly  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  jsou otevřené množiny.

**Příklad 7.2:** Množina

$$M = (0, 1) \times (1, 2),$$

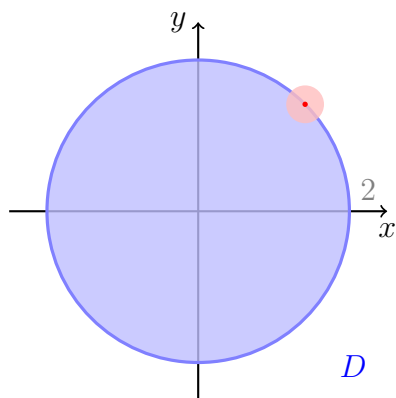
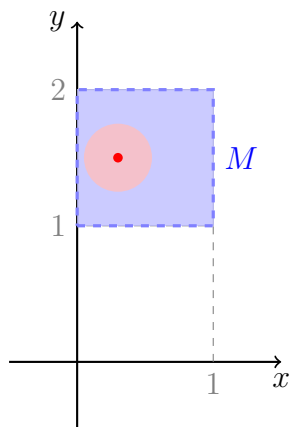
tedy čtverec s vrcholy  $(0, 1)$ ,  $(0, 2)$ ,  $(1, 1)$  a  $(1, 2)$  bez stran je otevřená množina. Každý bod množiny  $M$  má jistou nenulovou minimální vzdálenost od stran tohoto čtverce. Okolí, jehož poloměr je například polovina této minimální vzdálenosti, nutně celé leží v  $M$ .

Naproti tomu třeba disk  $D$  se středem v bodě  $(0, 0)$  a poloměrem 2 včetně příslušné kružnice už otevřená množina není. Nelze nalézt okolí libovolného bodu ležícího na kružnici se středem v bodě  $(0, 0)$  a poloměrem 2 tak, aby celé patřilo do  $D$ . Vždy část tohoto okolí bude uvnitř a část vně množiny  $D$ .

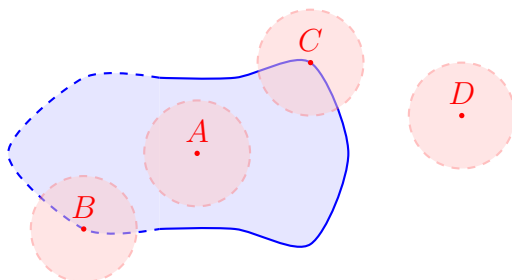
K ilustraci těchto dvou případů poslouží Obrázek 7.5.

Následující pojem je také užitečný a intuitivně pochopitelný. Pravděpodobně ho přednášející už neformálně použil při diskuzi předchozích situací.

**Definice 7.6** (Hraniční bod množiny / *boundary point of a set*): Bod  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  nazveme **hraničním bodem množiny**  $M$ , právě když v každém okolí  $U_{\mathbf{a}}$  bodu  $\mathbf{a}$  existují  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U_{\mathbf{a}}$  takové, že  $\mathbf{x} \in M$  a  $\mathbf{y} \notin M$ . **Hranicí množiny**  $M$  nazýváme množinu všech jejích hraničních bodů.



Obrázek 7.5: Dvě množiny z Příkladu 7.2.



Obrázek 7.6: Ilustrace k pojmu hraničního bodu (Definice 7.6).

Vedle vnitřního bodu množiny, resp. otevřené množiny, hromadného bodu množiny a hraničního bodu množiny lze pomocí pojmu okolí ještě zavést **vnější bod množiny** (bod mající okolí disjunktní s danou množinou), **uzávěr množiny** (sjednocení množiny s její hranicí) a **uzavřenou množinu** (množina, která je shodná se svým uzávěrem). Těmito pojmy a axiomatizací pojmu okolí se zabývá partie matematiky nazývaná Topologie. V našem výkladu do těchto partií příliš zabíhat nebudeme, ale základní pojmy jako otevřená množina a hromadný bod budeme využívat.

## 7.3 Limita vektorové posloupnosti

Nyní budeme uvažovat posloupnosti vektorů, tj. zobrazení  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , které stále značíme  $(\mathbf{x}_k)_{k=1}^{\infty}$ , ovšem  $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Dejte si pozor na význam spodního indexu. I z kontextu je patrné, zda-li mluvíme o členu posloupnosti, nebo jeho složkách: například  $(\mathbf{x}_k)_j$ , kde  $k \in \mathbb{N}$  a  $j \in \hat{n}$ , představuje  $j$ -tou složku vektoru  $\mathbf{x}_k$ , tedy  $k$ -tého členu zmíněné posloupnosti.

S vektorovými posloupnostmi se setkáme například v různých numerických metodách, které konstruují posloupnosti aproximací řešení jisté úlohy:

- numerické řešení soustav lineárních rovnic (v BI-MA2 neprobíráme).
- numerické hledání lokálních extrémů funkcí více proměnných (uvidíme již brzy).

Pojďme nejprve definovat ústřední pojem limity posloupnosti.

**Definice 7.7** (Limita vektorové posloupnosti): Řekneme, že posloupnost  $(\mathbf{x}_k)_{k=1}^{\infty}$  vektorů  $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$  má **limitu** (případně **konverguje k**)  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ , právě když pro každé okolí  $U_{\mathbf{a}}$  bodu  $\mathbf{a}$  existuje  $N \in \mathbb{N}$  takové, že pro každé přirozené  $k > N$  platí  $\mathbf{x}_k \in U_{\mathbf{a}}$ . Tento fakt značíme  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{a}$ .

Vektorovou posloupnost mající limitu, která je dle definice nutně prvkem  $\mathbb{R}^n$ , nazýváme **konvergentní**. Všechny ostatní posloupnosti nazýváme **divergentní**.

Mezi konvergencí těchto vektorových posloupností a konvergencí číselných posloupností (známe z BI-MA1) je velmi úzký vztah, který odhalují dvě následující věty.

**Věta 7.1** (Konvergence a vzdálenost): Pro vektorovou posloupnost  $(\mathbf{x}_k)_{k=1}^{\infty}$  platí  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{a}$ , právě když  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_k - \mathbf{a}\| = 0$  (tato druhá limita je obyčejná limita z BI-MA1).

*Důkaz.* Přímochary (provedte!). Stačí si vzpomenout na definici limity číselné posloupnosti z BI-MA1 a na definici okolí bodu v  $\mathbb{R}^n$ , zejména jakou v ní hraje roli norma.  $\square$

**Věta 7.2** (Konvergence po složkách): Uvažme posloupnost  $(\mathbf{x}_k)_{k=1}^{\infty}$ . Potom platí následující ekvivalence:  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{a}$ , právě když pro každé  $j \in \hat{n}$  platí  $\lim_{k \rightarrow \infty} (\mathbf{x}_k)_j = \mathbf{a}_j$ .

*Důkaz.*  $\Leftarrow$ : Nechť  $\varepsilon > 0$ . Potom pro každé  $j \in \hat{n}$  existují  $N_j > 0$  taková, že pro všechna přirozená  $k > N_j$  platí  $|(\mathbf{x}_k)_j - \mathbf{a}_j| < \varepsilon/\sqrt{n}$ . Zvolíme-li  $N := \max\{N_1, \dots, N_n\}$ , pak pro přirozené  $k > N$  platí

$$\|\mathbf{x}_k - \mathbf{a}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n ((\mathbf{x}_k)_j - \mathbf{a}_j)^2} < \sqrt{\sum_{j=1}^n \frac{\varepsilon^2}{n}} = \varepsilon.$$

$\Rightarrow$ : Stačí vzít do úvahy nerovnost

$$0 \leq |(\mathbf{x}_k)_j - \mathbf{a}_j| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n ((\mathbf{x}_k)_j - \mathbf{a}_j)^2} = \|\mathbf{x}_k - \mathbf{a}\|.$$

Tím je důkaz dokončen.  $\square$

Předchozí dvě věty (Věta 7.1 a 7.2) v podstatě říkají následující:

- Posloupnost vektorů  $(\mathbf{x}_k)_{k=1}^{\infty}$  konverguje k  $\mathbf{a}$ , právě když vzdálenost  $\mathbf{x}_k$  od  $\mathbf{a}$  konverguje k nule.
- Konvergence vektorové posloupnosti je ekvivalentní konvergenci ve všech složkách (více „obyčejných“ číselných posloupností).

Díky těmto dvěma pozorováním bychom tak měli mít poměrně silnou intuici ohledně chování vektorových posloupností – podívej se na chování jejich složek.

Využijeme-li nyní naše znalosti vlastností číselných limit (BI-MA1) a předchozí ekvivalenci, pak ihned dostáváme další užitečné tvrzení.



**Věta 7.3** (Limita součtu a skalárního násobku posloupnosti): Mějme dvě vektorové posloupnosti  $(\mathbf{x}_k)_{k=1}^{\infty}$  a  $(\mathbf{y}_k)_{k=1}^{\infty}$  splňující  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{a}$  a  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{y}_k = \mathbf{b}$  a  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Potom

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\mathbf{x}_k + \mathbf{y}_k) = \mathbf{a} + \mathbf{b},$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\alpha \mathbf{x}_k) = \alpha \mathbf{a}.$$

*Důkaz.* Okamžitě plyne z Věty 7.2 a Věty o limitě součtu a součinu pro číselné posloupnosti z BI-MA1. □

**Příklad 7.3:** Mějme posloupnost  $(\mathbf{x}_k)_{k=1}^{\infty}$  danou předpisem

$$\mathbf{x}_k = \left( \frac{\cos k}{k}, \frac{\sin k}{k} \right)^T, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Určete její limitu.

*Řešení.* Složky této vektorové posloupnosti jsou

$$(\mathbf{x}_k)_1 = \frac{\cos k}{k} \text{ a } (\mathbf{x}_k)_2 = \frac{\sin k}{k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Protože platí (obyčejné BI-MA1 limity posloupností)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\mathbf{x}_k)_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cos k}{k} = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} (\mathbf{x}_k)_2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sin k}{k} = 0,$$

dostáváme výsledek

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = (0, 0)^T = \theta.$$

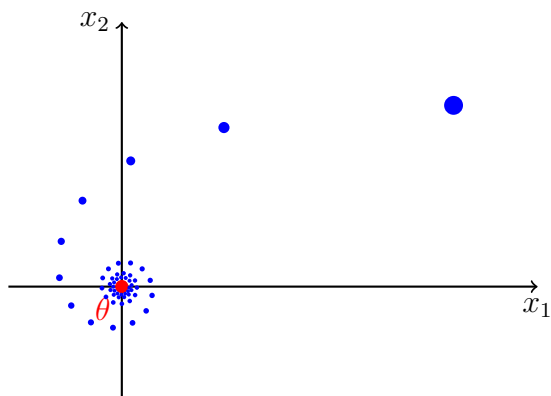
Vizualizace vektorových posloupností pomocí „grafu“ není praktická. Vhodnější je zpravidla právě pohled na její členy pomocí bodů v daném prostoru, viz Obrázek 7.7.

Předchozí věty dávají i nástroj k vyvrácení existence limity vektorové posloupnosti. Jednoduše stačí ukázat, že limita některé ze složek neexistuje.

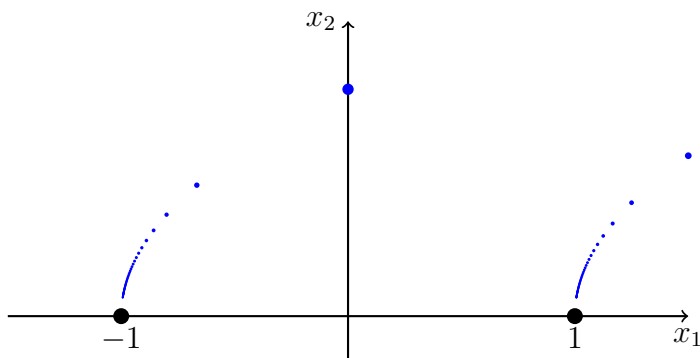
**Příklad 7.4:** Ukažte, že neexistuje limita

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left( (-1)^k + \frac{1}{k}, \frac{1}{\sqrt{k}} \right).$$

Uvedená posloupnost je proto příkladem divergentní posloupnosti.



Obrázek 7.7: Vizualizace vektorové posloupnosti  $\mathbf{x}_k = (\cos(k/2), \sin(k/2))/k$ ,  $k \in \mathbb{N}$  a její limity  $\theta$ .



Obrázek 7.8: Vizualizace vektorové posloupnosti z Příkladu 7.4.

*Řešení.* Druhá složka sice konverguje k nule, ale limita první, ozn.  $u_k = (-1)^k + \frac{1}{k}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , neexistuje:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_{2k} := 1 + \frac{1}{2k} = 1 + 0 = 1,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_{2k+1} := -1 + \frac{1}{2k+1} = -1 + 0.$$

Grafické znázornění této posloupnosti je uvedeno na Obrázku 7.8.

## 7.4 Limita (vektorových) funkcí

V této a následujících kapitolách budeme pracovat s dvěma typy zobrazení:

1. **funkce** (více proměnných): zobrazení nějaké neprázdné  $A \subset \mathbb{R}^n$  do  $\mathbb{R}$ .
2. **vektorové funkce** (více proměnných): zobrazení nějaké neprázdné  $A \subset \mathbb{R}^n$  do  $\mathbb{R}^m$ .

Pro  $m = 1$  je první případ v tomto výčtu speciálním případem druhého, ztožňujeme přirozeně  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}^1$ . Tvrzení uvedená níže a formulovaná pro „vektorové funkce“ tak přirozeně platí i pro „funkce“.

K zmenšení počtu závorek zavádíme užitečné značení  $f(x_1, \dots, x_n) := f(\mathbf{x})$ . Bez něj bychom museli striktně psát výrazy jako  $f((x, y)^T)$ .

Vektorovou funkci  $F : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $A \subset \mathbb{R}^n$ , lze opět popsat pomocí jejích „složek“, tj.  $m$  funkcí  $F_j : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j \in \hat{m}$ , splňujících

$$F(\mathbf{x}) = (F_1(\mathbf{x}), F_2(\mathbf{x}), \dots, F_m(\mathbf{x}))^T, \quad \mathbf{x} \in A.$$

Například lineární zobrazení  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  zapsané po složkách

$$F(\mathbf{x}) = F(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + x_2, x_3 - x_1, 2x_1)^T$$

má tři složky

$$\begin{aligned} F_1(\mathbf{x}) &= 3x_1 + x_2, \\ F_2(\mathbf{x}) &= x_3 - x_1, \\ F_3(\mathbf{x}) &= 2x_1. \end{aligned}$$

Vzpomeňte si na definici limity v BI-MA1! Její struktura se výrazně odráží i v následující definici.

**Definice 7.8** (Limita (vektorové) funkce více proměnných): Mějme funkci  $n$  reálných proměnných  $F : D_F \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $D_F \subset \mathbb{R}^n$ , a **hromadný bod**  $\mathbf{a}$  množiny  $D_F$ .

Potom **funkce  $F$  má v bodě  $\mathbf{a}$  limitu  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$** , právě když pro každé okolí  $U_{\mathbf{b}}$  bodu  $\mathbf{b}$  existuje okolí  $U_{\mathbf{a}}$  bodu  $\mathbf{a}$  takové, že kdykoliv  $\mathbf{x} \in (U_{\mathbf{a}} \cap D_F) \setminus \{\mathbf{a}\}$  pak platí  $F(\mathbf{x}) \in U_{\mathbf{b}}$ .

Symbolicky tuto situaci zapisujeme opět jako

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} F(\mathbf{x}) = \mathbf{b}.$$

Pokud  $m = 1$ , pak ještě pro  $\alpha \in \{+\infty, -\infty\}$  klademe  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} F(\mathbf{x}) = \alpha$  kdykoliv

$$(\forall U_\alpha)(\exists U_{\mathbf{a}})(\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n)(\mathbf{x} \in (U_{\mathbf{a}} \cap D_F) \setminus \{\mathbf{a}\} \Rightarrow F(\mathbf{x}) \in U_\alpha).$$

Podobně jako dříve v BI-MA1 přímo z definice dostáváme následující užitečné tvrzení:

**Věta 7.4** (Limita zúžení): Mějme vektorovou funkci  $F : D_F \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $D_F \subset \mathbb{R}^n$  a hromadný bod  $\mathbf{a}$  definičního oboru funkce  $F$  v němž existuje limita

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} F(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m.$$

Potom i pro  $F|_M$  zúžení funkce  $F$  na množinu  $M$ , která má  $\mathbf{a}$  jako hromadný bod, platí

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} (F|_M)(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m.$$

V tomto tvrzení je obsažena i jedna polovina Heineho věty. Konkrétně, je-li  $(\mathbf{x}_k)_{k=1}^\infty$  posloupnost bodů z  $D_F$  různých od  $\mathbf{a}$ , ale s limitou rovnou  $\mathbf{a}$ , pak

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F(\mathbf{x}_k) = \mathbf{b}.$$

Skutečně, množina  $M := \{\mathbf{x}_k \mid k \in \mathbb{N}\}$  splňuje předpoklady předchozí věty.

V podstatě stejně jako u posloupností můžeme dokázat následující tvrzení ukazující vztah limity (vektorové) funkce, vzdálenosti a limit složek.

**Věta 7.5** (Limita vektorové funkce a limity jejích složek): Mějme (vektorovou) funkci  $F : D_F \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $D_F \subset \mathbb{R}^n$ , hromadný bod  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  množiny  $D_F$  a bod  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ . Potom platí

- $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} F(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ , právě když  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \|F(\mathbf{x}) - \mathbf{b}\| = 0$ .

- Označme složky  $F$  jako

$$F(\mathbf{x}) = (F_1(\mathbf{x}), \dots, F_m(\mathbf{x}))^T, \quad \mathbf{x} \in D_F.$$

Pak  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} F(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ , právě když  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} F_j(\mathbf{x}) = b_j$  pro každé  $j \in \hat{m}$ .

*Důkaz.* Pro důkaz prvního bodu si stačí pouze uvědomit, že podmínka  $F(\mathbf{x}) \in U_{\mathbf{b}}(\varepsilon)$  je ekvivalentní podmínce  $\|F(\mathbf{x}) - \mathbf{b}\| < \varepsilon$  a dále si rozepsat definice zmíněných limit.

V druhém bodě stačí postupovat jako v důkazu Věty 7.2, stručně:

- Je-li  $\|F(\mathbf{x}) - \mathbf{b}\| < \varepsilon$ , pak jistě  $|F_j(\mathbf{x}) - \mathbf{b}_j| \leq \|F(\mathbf{x}) - \mathbf{b}\| < \varepsilon$ .
- Druhým směrem musíme malinko více pracovat: mějme  $\varepsilon > 0$  a dále dle předpokladu mějme  $\delta_1, \dots, \delta_m > 0$  pro něž  $|F_j(\mathbf{x}) - \mathbf{b}_j| < \varepsilon/\sqrt{m}$  kdykoliv  $\mathbf{x} \in U_a(\delta_j)$ ,  $j \in \hat{m}$ . Potom pro  $\delta := \min\{\delta_1, \dots, \delta_m\}$  platí

$$\|F(\mathbf{x}) - \mathbf{b}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^m |F_j(\mathbf{x}) - \mathbf{b}_j|^2} < \sqrt{\sum_{j=1}^m \frac{\varepsilon^2}{m}} = \varepsilon$$

kdykoliv  $\mathbf{x} \in U_a(\delta)$ . □

Spousta známých vlastností limit zůstává zachována. Například platí následující důležité analogie z BI-MA1 důvěrně známých tvrzení.

**Věta 7.6** (O limitě součtu, násobku): Mějme dvě vektorové funkce  $F : D_F \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $D_F \subset \mathbb{R}^n$ ,  $G : D_G \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $D_G \subset \mathbb{R}^n$ , bod  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ , který je hromadným bodem množiny  $D_F \cap D_G$  a  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Potom pokud existují limity  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} F(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$  a  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} G(\mathbf{x}) = \mathbf{c} \in \mathbb{R}^m$ , potom platí

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} (F(\mathbf{x}) + G(\mathbf{x})) = \mathbf{b} + \mathbf{c} \quad \text{a} \quad \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \alpha F(\mathbf{x}) = \alpha \mathbf{b}.$$

**Věta 7.7** (O limitě součinu a podílu): Mějme dvě funkce  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D_f \subset \mathbb{R}^n$ ,  $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D_g \subset \mathbb{R}^n$ , bod  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ , který je hromadným bodem množiny  $D_f \cap D_g$ . Potom pokud existují limity  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = b \in \mathbb{R}$  a  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = c \in \mathbb{R}$ , potom platí

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x}) = b \cdot c \quad \text{a} \quad \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} = \frac{b}{c}, \text{ pokud } c \neq 0.$$

*Důkaz tvrzení o limitě součtu.* Mějme dvě vektorové funkce  $F : D_F \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $D_F \subset \mathbb{R}^n$ ,  $G : D_G \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $D_G \subset \mathbb{R}^n$ , bod  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ , který je hromadným bodem množiny  $D_F \cap D_G$  a  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Nechť dále existují limity  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} F(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$  a  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} G(\mathbf{x}) = \mathbf{c} \in \mathbb{R}^m$ .

Buď  $U_{\mathbf{b}+\mathbf{c}}(\varepsilon)$  okolí bodu  $\mathbf{b} + \mathbf{c}$ . Dle předpokladů existují okolí  $U_a(\delta_1)$  a  $U_a(\delta_2)$  bodu  $\mathbf{a}$  taková, že

$$\forall \mathbf{x} \in (U_a(\delta_1) \cap D_F) \setminus \{\mathbf{a}\} : F(\mathbf{x}) \in U_{\mathbf{b}}(\varepsilon/2),$$

$$\forall \mathbf{x} \in (U_a(\delta_2) \cap D_G) \setminus \{\mathbf{a}\} : G(\mathbf{x}) \in U_{\mathbf{c}}(\varepsilon/2).$$

Položme  $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ . Potom pro libovolné  $\mathbf{x} \in (U_{\mathbf{a}}(\delta) \cap D_{F+G}) \setminus \{\mathbf{a}\}$  platí (trojúhelníková nerovnost!)

$$\begin{aligned} \|(F+G)(\mathbf{x}) - (\mathbf{b} + \mathbf{c})\| &= \|(F(\mathbf{x}) - \mathbf{b}) + (G(\mathbf{x}) - \mathbf{c})\| \\ &\leq \|F(\mathbf{x}) - \mathbf{b}\| + \|G(\mathbf{x}) - \mathbf{c}\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Tj.  $(F+G)(\mathbf{x}) \in U_{\mathbf{b}+\mathbf{c}}(\varepsilon)$ . □

## 7.5 Spojitost (vektorových) funkcí

Spojitost opět vyjadřuje vztah mezi funkční hodnotou a limitou funkce v jistém bodě.

**Definice 7.9** (Spojitost (vektorové) funkce): Mějme (vektorovou) funkci  $F : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $A \subset \mathbb{R}^n$ , a bod  $\mathbf{a} \in D_F$ , který je hromadným bodem množiny  $D_F$ .

**Funkce  $F$  je spojitá v bodě  $\mathbf{a}$ , právě když**

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{a}).$$

Funkci  $F$  nazveme **spojitou** (resp. **spojitou na množině  $M$** ), právě když je spojitá v každém bodě svého definičního oboru (resp. v každém bodě množiny  $M$ ).

Definiční obory spojitých funkcí, na které narazíme, budou většinou nějaké otevřené množiny. Budou tedy definovány dokonce na celém okolí bodu  $\mathbf{a}$ .

Následující tři věty nám velmi pomohou při rozhodování o spojitosti různých funkcí.

**Věta 7.8** (Spojitost součtu, násobku, součinu a podílu): Mějme dvě vektorové funkce  $F : D_F \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $D_F \subset \mathbb{R}^n$ ,  $G : D_G \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $D_G \subset \mathbb{R}^n$ , bod  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ , který je hromadným bodem množiny  $D_F \cap D_G$  a  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Předpokládejme, že  $F$  i  $G$  jsou spojitě v bodě  $\mathbf{a}$ . Potom

- $F + G$  je spojitá v  $\mathbf{a}$ ,
- $\alpha F$  je spojitá v  $\mathbf{a}$ .

Pokud je  $m = 1$ , pak

- $F \cdot G$  je spojitá v  $\mathbf{a}$ ,

- $\frac{F}{G}$  je spojitá v  $\mathbf{a}$  v případě kdy  $G(\mathbf{a}) \neq 0$ .

*Důkaz.* Sňatek definice spojitosti a věty o limitě součtu, násobku, součinu a podílu.  $\square$

Často budeme mít (vektorovou) funkci zadanou pomocí spojitých elementárních funkcí jedné proměnné známých z BI-MA1. Tento případ řeší následující věta:

**Věta 7.9:** Buďte  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D_f \subset \mathbb{R}$ , reálná funkce jedné reálné proměnné,  $n \in \mathbb{N}$  a  $k \in \hat{n}$ . Definujme funkci ( $D_f$  v  $k$ -tém faktoru)

$$g(\mathbf{x}) := f(x_k), \text{ pro } \mathbf{x} \in D_g := \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{k-1} \times D_f \times \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n-k}.$$

Je-li  $f$  spojitá, pak i  $g$  je spojitá.

*Důkaz.* Mějme  $\mathbf{a} \in D_g$ , potom  $a_k \in D_f$  je hromadným bodem  $D_f$  a tudíž i bod  $\mathbf{a}$  je pak hromadným bodem  $D_g$ . Dále je  $f$  spojitá v  $a_k$  a proto platí  $\lim_{x \rightarrow a_k} f(x) = f(a_k)$ .

Tudíž: pro libovolné okolí  $U_{f(a_k)}(\varepsilon)$  existuje  $U_{a_k}(\delta)$  takové, že kdykoliv  $x \in U_{a_k}(\delta) \cap D_f$ , pak  $f(x) \in U_{f(a_k)}(\varepsilon)$ .

Vezmeme-li  $\mathbf{x} \in U_{\mathbf{a}}(\delta)$  se stejným  $\delta$  jako výše, pak  $|x_k - a_k| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$  a proto

$$|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{a})| = |f(x_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

Tedy  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = g(\mathbf{a})$ .  $\square$

**Věta 7.10** (O spojitosti složené (vektorové) funkce): Mějme (vektorové) funkce  $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $D_g \subset \mathbb{R}^n$  a  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $D_f \subset \mathbb{R}^m$ . Dále předpokládejme, že  $g$  je spojitá v  $\mathbf{a} \in D_g$  a  $f$  je spojitá a definovaná na okolí  $g(\mathbf{a})$ . Potom je  $f \circ g$  spojitá v bodě  $\mathbf{a}$ .

*Důkaz.* Označme  $\mathbf{b} := f(g(\mathbf{a}))$  a uvažme libovolné okolí bodu  $\mathbf{b}$ , které označíme  $U_{\mathbf{b}}(\varepsilon)$ .

Protože  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow g(\mathbf{a})} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ , existuje okolí  $U_{g(\mathbf{a})}(\delta_1)$  bodu  $g(\mathbf{a})$  takové, že  $f(\mathbf{x}) \in U_{\mathbf{b}}(\varepsilon)$ , kdykoliv  $\mathbf{x} \in U_{g(\mathbf{a})}(\delta_1) \setminus \{g(\mathbf{a})\}$ .

Protože  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = g(\mathbf{a})$ , existuje okolí  $U_{\mathbf{a}}(\delta_2)$  bodu  $\mathbf{a}$  takové, že  $g(\mathbf{x}) \in U_{g(\mathbf{a})}(\delta_1)$ , kdykoliv  $\mathbf{x} \in (U_{\mathbf{a}}(\delta_2) \cap D_g) \setminus \{\mathbf{a}\}$ .

Celkem tedy pokud vezmeme  $\mathbf{x} \in (U_{\mathbf{a}}(\delta_2) \cap D_g) \setminus \{\mathbf{a}\}$ , pak  $g(\mathbf{x}) \in U_{g(\mathbf{a})}(\delta_1) \setminus \{g(\mathbf{a})\}$  a tedy i  $f(g(\mathbf{x})) \in U_{\mathbf{b}}(\varepsilon)$ , což jsme měli dokázat.  $\square$

Předchozí věta nám ihned dává například následující výsledky:

**Příklad 7.5:** Následující funkce jsou spojité na svých definičních oborech:

- $f(x, y) = \sin(x) + \cos(y)$ ,  $D_f = \mathbb{R}^2$ .
- $f(x, y) = \ln(xy)$ ,  $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > 0\}$ . (Složená funkce!)
- $g(x, y) = \frac{y}{x^2} + x + y^2$ ,  $D_g = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ .

Měli bychom být tedy nyní schopní rozeznat spojité funkce zadané tímto způsobem.

Dále bychom mohli formulovat například větu o limitě složené funkce a větu o spojitosti složené funkce...

## 7.6 Diferenciální počet funkcí více proměnných

Pro analýzu funkcí jedné proměnné byl zásadní pojem *derivace*. Podobně tomu bude i pro funkce více proměnných. Situace nyní ovšem nebude tak přímočará jako v předchozích kapitolách.

### Parciální derivace funkce

Nejprve se soustředíme na chování pouze vzhledem k jedné zvolené proměnné.

**Definice 7.10** (Parciální derivace (v bodě)): Mějme reálnou funkci  $n$  reálných proměnných  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D_f \subset \mathbb{R}^n$ , definovanou na okolí bodu  $\mathbf{a} \in D_f$  a  $j \in \hat{n}$ .

Existuje-li limita

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{a})}{h}, \quad (7.4)$$

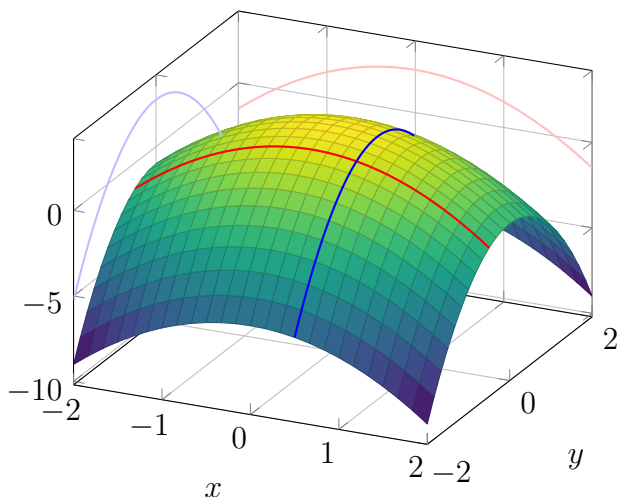
pak její hodnotu nazýváme **parciální derivací funkce  $f$  v bodě  $\mathbf{a}$  podle  $j$ -té proměnné** a značíme ji  $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a})$ , případně  $\partial_{x_j} f(\mathbf{a})$ .

Označme  $M$  jako množinu všech **vnitřních bodů**  $\mathbf{a}$  množiny  $D_f$ , v kterých existuje limita (7.4). Potom funkci přiřazující hodnotu  $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a})$  každému  $\mathbf{a} \in M \subset \mathbb{R}^n$  nazýváme **parciální derivací funkce  $f$  podle  $j$ -té proměnné** a značíme ji

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}, \quad \text{případně} \quad \partial_{x_j} f.$$



$$f(x, y) = 3 - x^2 - 2y^2$$



Obrázek 7.9: Ilustrace k definici parciálních derivací  $\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{a})$  a  $\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{a})$  funkce dvou proměnných  $f$  v jistém bodě  $\mathbf{a}$ .

Předchozí definice je nápadně podobná definici *derivace reálné funkce reálné proměnné*. Má-li funkce  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D_f \subset \mathbb{R}^n$ , parciální derivaci v bodě  $\mathbf{a} \in D_f$  podle  $j$ -té proměnné, pak pokud definujeme

$$g(x) := f(\mathbf{a} + x\mathbf{e}_j),$$

pak je  $g$  je reálná funkce jedné reálné proměnné definována na okolí bodu 0 a pro její derivaci v bodě 0 platí

$$g'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a}).$$

Odtud okamžitě plyne geometrická interpretace parciální derivace: číselná hodnota parciální derivace funkce  $f$  v bodě  $\mathbf{a}$  udává míru růstu/poklesu funkčních hodnot funkce  $f$  v bodě  $\mathbf{a}$  ve směru  $j$ -té souřadné osy. Definice 7.10 je koncipována tak, že se „dívá“ na chování funkce  $f$  v daném bodě pouze v daném směru.

Toto pozorování má i důležitý početní důsledek. Při parciálním derivování podle  $x_j$  se na ostatní proměnné díváme jako na konstanty a můžeme používat známá pravidla pro derivování (součet, součin, podíl, složená funkce,...).

Parciální derivace funkce  $f$  podle  $j$ -té proměnné je obecně funkce a má proto smysl uvažovat o její parciální derivaci podle  $k$ -té proměnné. K zjednodušení značení používáme následující zápis (pozor na pořadí)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} := \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) := \frac{\partial \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right)}{\partial x_k}.$$

Dále případné opakované derivace podle stejné proměnné zkracujeme takto

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} := \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_k}.$$

Podobně pro vyšší derivace. Například pod výrazem

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2^2}(1, 2, 3)$$

máme na mysli parciální derivaci podle  $x_1$  druhé parciální derivace funkce  $f$  podle  $x_2$  vypočtenou v bodě  $(1, 2, 3)^T$ .

Z výše uvedeného je patrné, že při výpočtu parciální derivace uplatníme znalosti z **BI-MA1**. Derivujeme podle zadané proměnné a na ostatní se díváme jako na konstanty.

**Příklad 7.6:** Rozmyslete si následující výsledky.

- Pro  $f(x, y) = x + xy + y$  platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 1 + 1 \cdot y + 0 = 1 + y, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 0 + x \cdot 1 + 1 = x + 1. \end{aligned}$$

- Pro  $g(x, y, z) = e^y \cdot \sin(x + y) + zy$  platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z) &= e^y \cdot \sin(x + y) + e^y \cdot \cos(x + y) + z, \\ \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial y}(x, y, z) &= 1. \end{aligned}$$

## Gradient funkce

Pomocí parciálních derivací, existují-li, můžeme definovat tzv. gradient funkce. Jeho pravý význam odhalíme v další části textu.

**Definice 7.11** (Gradient / *Gradient*): Mějme reálnou funkci  $n$  reálných proměnných  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D_f \subset \mathbb{R}^n$  mající všechny parciální derivace v bodě  $\mathbf{a} \in D_f$ . Potom řádkový vektor

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \right) \in \mathbb{R}^{1,n}$$

nazýváme **gradientem funkce  $f$  v bodě  $\mathbf{a}$**  a používáme pro něj značení

$$\nabla f(\mathbf{a}) \quad \text{nebo} \quad \text{grad}f(\mathbf{a}).$$

Podobně jako u parciální derivace se na  $\nabla f$  díváme jako na zobrazení (vektorovou funkci), které bodu přiřazuje hodnotu gradientu  $f$  v tomto bodě.

**Příklad 7.7:** Hned se zamysleme nad jednoduchými příklady:

- Pro  $f(x, y) = \pi$  máme  $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ .
- Pro  $f(x, y) = x - y$  máme  $\nabla f(x, y) = (1, -1)$ .

**Příklad 7.8:** Mějme funkci  $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_1 x_2$ ,  $D_f = \mathbb{R}^2$ . Potom gradient této funkce existuje v každém bodě jejího definičního oboru a platí

$$\nabla f(x_1, x_2) = (3x_1^2 + x_2, x_1).$$

**Příklad 7.9:** Mějme funkci  $f(x, y, z) = \sin(x) \cos(y+z)$ ,  $D_f = \mathbb{R}^3$ . Potom gradient této funkce existuje v každém bodě jejího definičního oboru a platí

$$\nabla f(x, y, z) = (\cos(x) \cos(y+z), -\sin(x) \sin(y+z), -\sin(x) \sin(y+z)).$$

## Derivace funkce

Parciální derivace zkoumala chování funkce jenom vzhledem k *jedné* proměnné.

Motivace k zobecnění *derivace*, bez přívlastku „parciální“, pro funkce více proměnných vychází z role první derivace při lineární aproximaci funkce. V BI-MA1 jsme ukázali, že pro dostatečně diferencovatelnou funkci  $f$  v bodě  $a$  představuje její první Taylorův polynom  $T(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$  nejlepší možnou aproximaci

této funkce v tomto bodě (na jistém okolí). Graf tohoto polynomu prvního stupně pak navíc představuje tečnu funkce  $f$  v bodě  $a$ . Derivace  $f'(a)$ , jedno číslo, v tomto vzorci hraje roli směrnice tečny, udává lineární člen. To nás motivuje k následující definici.

**Definice 7.12** (Derivace (vektorové) funkce): Mějme zobrazení  $F : D_F \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $D_F \subset \mathbb{R}^n$ , definované na okolí bodu  $\mathbf{a}$ .

Derivací zobrazení  $F$  v bodě  $\mathbf{a}$  nazýváme matici  $DF(\mathbf{a}) \in \mathbb{R}^{m,n}$  splňující

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{\|F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{a}) - DF(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|} = 0.$$

Tj. vágně  $F(\mathbf{x}) \approx F(\mathbf{a}) + DF(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})$  pro  $\mathbf{x}$  blízko u  $\mathbf{a}$ , lokální chyba této aproximace je menší než lineární (dle definice). Podmínka v Definici 7.12 nemusí působit intuitivně, od definice derivace funkce jedné proměnné v bodě (BI-MA1, Definice) se na první pohled liší. Následující poznámka ukazuje souvislost mezi těmito definicemi.

**Poznámka 7.2** (Souvislost s derivací funkce jedné proměnné): Během dřívějšího studia jsme se již s pojmem derivace setkali, konkrétně s derivací reálné funkce jedné reálné proměnné (BI-MA1, Definice). Derivací takovéto funkce  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D_f \subset \mathbb{R}$ , definované na okolí bodu  $a$ , v bodě  $a$  jsme nazývali limitu

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Pokud je  $f'(a) \in \mathbb{R}$ , tj.  $f$  je diferencovatelná v bodě  $a$ , pak je tato podmínka ekvivalentní podmínce

$$0 = \lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right| = \lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)|}{|x - a|},$$

v které již jistě vidíme podmínku z Definice 7.12. V tomto případě diferencovatelné reálné funkce jedné reálné proměnné je tak vlastně  $Df(a)$  rovna  $1 \times 1$  matici ( $f'(a)$ ).

Okamžitě se nabízí otázka, jak tato derivace souvisí s dříve zavedenými parciálními derivacemi (Definice 7.10). Odpověď nám dává následující věta.

**Věta 7.11** (Složky matice  $DF(\mathbf{a})$  a její jednoznačnost): Pokud má zobrazení  $F : D_f \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $D_f \subset \mathbb{R}^n$ , definované na okolí bodu  $\mathbf{a}$ , derivaci  $DF(\mathbf{a}) \in \mathbb{R}^{m,n}$  v bodě  $\mathbf{a}$ ,

potom

$$DF(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial F_m}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{pmatrix}.$$

Odtud ihned také plyne, že je tato matice dána jednoznačně, existuje-li.

*Důkaz.* Určíme prvek matice  $DF(\mathbf{a})$  v  $i$ -tém řádku a  $j$ -tém sloupci. Z předpokladu a již jednou použité obecné nerovnosti  $|\mathbf{z}_i| \leq \|\mathbf{z}\|$ ,  $i \in \hat{m}$  a  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$ , dostáváme

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{|F_i(\mathbf{x}) - F_i(\mathbf{a}) - (DF(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}))_i|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|} = 0.$$

Nyní použijeme větu o zúžení a budeme k  $\mathbf{a}$  přistupovat po přímce  $\mathbf{x} = \mathbf{a} + h\mathbf{e}_j$ , kde  $h \rightarrow 0$ . Odtud s pomocí jednoduchých úprav plyne

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|F_i(\mathbf{a} + h\mathbf{e}_j) - F_i(\mathbf{a}) - DF(\mathbf{a})_{i,j}h|}{|h|} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{F_i(\mathbf{a} + h\mathbf{e}_j) - F_i(\mathbf{a})}{h} - DF(\mathbf{a})_{i,j} \right|. \end{aligned}$$

V tomto výrazu již vidíme parciální derivaci funkce  $F_i$  podle  $j$ -té proměnné v bodě  $\mathbf{a}$ , která má nutně hodnotu  $DF(\mathbf{a})_{i,j}$ .  $\square$

Na funkci  $n$  proměnných  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D_f \subset \mathbb{R}^n$ , lze nahlížet jako na zobrazení  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}^1$  a proto pokud má v bodě  $\mathbf{a} \in D_f$  derivaci  $Df(\mathbf{a}) \in \mathbb{R}^{1,n}$ , pak podle předchozí věty pro ni platí

$$Df(\mathbf{a}) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \right) = \nabla f(\mathbf{a})$$

a není tedy ničím jiným, než gradientem funkce  $f$  v bodě  $\mathbf{a}$ !

Také je z tohoto pozorování patrné, proč jsme gradient striktně definovali jako *řádkový* vektor.

**Poznámka 7.3** (Tečná rovina): Vrátime-li se zpět k motivaci, pak vidíme, že máme-li funkci  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D_f \subset \mathbb{R}^n$  mající derivaci v bodě  $\mathbf{a} \in D_f$ , pak tečná rovina ke

grafu funkce  $f$  v bodě  $\mathbf{a}$  (označíme-li osu, kam vynášíme závisle proměnnou jako  $z$ , tj. zmíněný graf je plocha  $z = f(\mathbf{x})$ ) je dána rovnicí

$$z = f(\mathbf{a}) + DF(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}).$$

Speciálně v případě dvou proměnných dostáváme rovnici

$$z = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot ((x, y)^T - \mathbf{a}),$$

resp. zcela explicitně

$$z = f(\mathbf{a}) + \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{a})(x - a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{a})(y - a_2).$$

K předchozímu pozorování, resp. vztahu mezi derivací a parciálními derivacemi, učiníme dvě poznámky.

- Pokud má  $f$  v bodě  $\mathbf{a}$  derivaci  $Df(\mathbf{a})$ , pak má v tomto bodě i všechny parciální derivace (ukázali jsme).
- Toto tvrzení nelze obrátit, tj. samotná existenci parciálních derivací nestačí k existenci derivace. K existenci derivace  $Df(\mathbf{a})$  už ale stačí např. spojitost všech prvních parciálních derivací na okolí bodu  $\mathbf{a}$  (nedokazujeme).

Více do této problematiky zabíhat nebudeme.

## Hesseova matice

Při analýze vlastností funkcí jedné proměnné jsme vedle první derivace využívali i druhou derivaci. Ta souvisela s konvexností a konkávností, využívali jsme ji při hledání extrémů. Jak je to s druhou derivací funkce více proměnných?

**Definice 7.13** (Hesseova matice): Na derivaci, resp. gradient, funkce  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D_f \subset \mathbb{R}^n$ , lze nahlížet jako na zobrazení  $Df : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $A \subset D_f$ , jeho derivací v bodě  $\mathbf{a} \in A$  je pak matice typu  $\mathbb{R}^{n,n}$ , kterou nazýváme **Hesseovou maticí** a značíme  $\nabla^2 f(\mathbf{a})$ . Pokud existuje, pak platí

$$\nabla^2 f(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\mathbf{a}) \end{pmatrix}.$$

Hesseova matice (někdy nesprávně zkráceně Hessián) je pojmenována po Ludwigu Ottovi Hesseovi, německém matematikovi, jenž žil v letech 1811 – 1874.

Pořadí derivování ve smíšených derivacích nelze obecně zaměnit (viz Příklad 7.10 níže). Pokud ale například jsou všechny druhé parciální derivace spojitě na okolí bodu  $\mathbf{a}$ , pak bude Hesseova matice symetrická (typicky náš případ). Toto pozitivní tvrzení je známo pod jménem Schwarzova–Clairautova věta.

**Příklad 7.10** (Smíšené derivace nelze obecně zaměnit): Uvažme funkci definovanou předpisem

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y)^T \neq \theta, \\ 0, & (x, y)^T = \theta. \end{cases} \quad (7.5)$$

Tato funkce je definována na  $\mathbb{R}^2$  a je spojitá v nule (netriviální cvičení, které není cílem tohoto příkladu). Ukažte, že v bodě  $\theta$  existují obě její smíšené derivace a nejsou si rovny, tj.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\theta) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\theta).$$

Graf této funkce je uveden na Obrázku 7.10.

*Řešení.* Ukážeme si výpočet jedné z parciálních derivací. U druhé pouze prozradíme výsledek a výpočet necháme k dopočítání zvědavému čtenářstvu. Přímou z definice (7.5) a s využitím znalosti derivace součinu a podílu plyne vztah

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2}, \quad (x, y)^T \neq \theta.$$

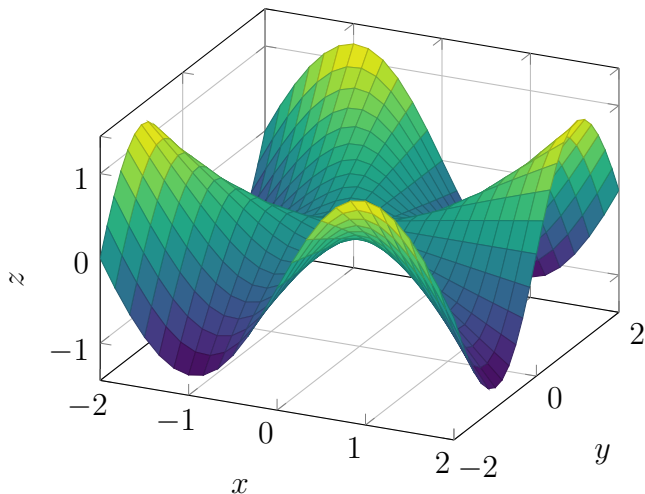
Zdůrazněme jeho platnost všude mimo bod  $\theta$ . K výpočtu parciální derivace funkce  $f$  v bodě  $\theta$  podle  $x$  musíme využít přímo definici, do předchozího vztahu nulu jen tak nedosadíme. To ale není těžké, opět s využitím definice (7.5) rovnou dostáváme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\theta) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0.$$

A konečně potom s využitím již napočteného (N.B.: při výpočtu limitu  $h \rightarrow 0$  nás ve výrazu  $\partial_x f(0, h)$  situace s  $h = 0$  nezajímá)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\theta) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\partial_x f(0, h) - \partial_x f(0, 0)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot h \frac{0^4 + 4 \cdot 0^2 \cdot h^2 - h^4}{(0^2 + h^2)^2} = -1. \end{aligned}$$

$$f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$



Obrázek 7.10: Graf funkce z Příkladu 7.10. Na první pohled byste do ní neřekli, že v bodě  $\theta$  nemá záměnné druhé smíšené parciální derivace.

Naprostο analogickým způsobem lze vypočítat

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\theta) = 1.$$

## Další vlastnosti derivací

Na závěr této podkapitoly shrneme ještě několik užitečných vlastností derivací, které budeme v dalším výkladu potřebovat.

**Věta 7.12** (Derivace složené funkce): Mějme zobrazení  $F : D_F \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $D_F \subset \mathbb{R}^m$  a  $G : D_G \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $D_G \subset \mathbb{R}^n$  a bod  $\mathbf{a} \in D_G$  takové, že existují  $DG(\mathbf{a})$  a  $DF(G(\mathbf{a}))$ . Potom existuje i derivace složeného zobrazení  $F \circ G$  v bodě  $\mathbf{a}$  a platí

$$D(F \circ G)(\mathbf{a}) = DF(G(\mathbf{a})) \cdot DG(\mathbf{a}).$$

Docente kompaktní zápis pomocí matic a jejich násobení! Rozepsán explicitně pro  $F = (F_1, \dots, F_k)^T$  a  $G = (G_1, \dots, G_m)^T$  tento vztah po složkách říká (tzv.



**řetězové pravidlo)**

$$\frac{\partial(F \circ G)_i}{\partial x_\ell}(\mathbf{a}) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(G(\mathbf{a})) \cdot \frac{\partial G_j}{\partial x_\ell}(\mathbf{a}), \quad i \in \hat{k}, \ell \in \hat{n}.$$

*Důkaz.* Důkaz vynecháváme. □

**Věta 7.13** (Derivace ve směru): Nechť  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D_f \subset \mathbb{R}^n$  má derivaci v bodě  $\mathbf{a} \in D_f$ . Buď  $\mathbf{v}$  vektor délky 1.

Potom existuje limita (tzv. **derivace funkce  $f$  ve směru  $\mathbf{v}$  v bodě  $\mathbf{a}$** )

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{a}) := \partial_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{h}$$

a je rovna  $\langle \nabla f(\mathbf{a})^T \mid \mathbf{v} \rangle$ .

*Důkaz.* Použijte větu o derivaci složené funkce na  $g(h) = f(\mathbf{a} + h\mathbf{v})$ . □

**Důsledek 7.1** (Gradient jakožto směr největšího růstu): Nechť  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D_f \subset \mathbb{R}^n$  má nenulovou derivaci v bodě  $\mathbf{a} \in D_f$ . Buď  $\mathbf{v}$  vektor délky 1.

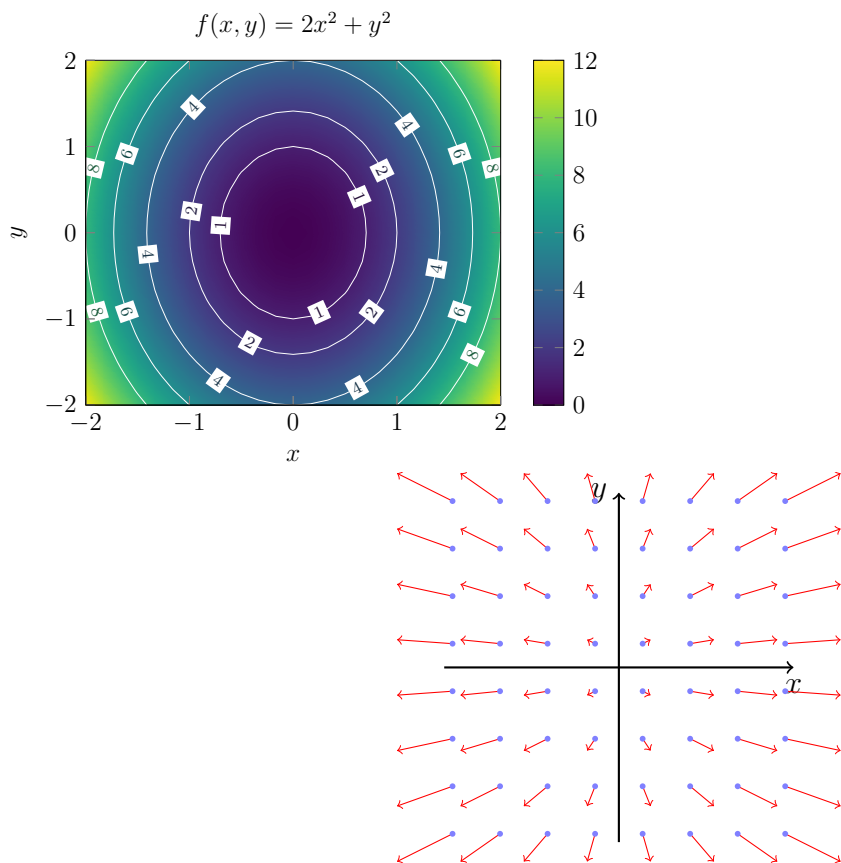
Potom  $\partial_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a})$  nabývá největší hodnoty pro  $\mathbf{v} = \nabla f(\mathbf{a})^T / \|\nabla f(\mathbf{a})\|$ .

*Důkaz.* Platí nerovnost  $|\langle \nabla f(\mathbf{a})^T \mid \mathbf{v} \rangle| \leq \|\nabla f(\mathbf{a})\|$  a současně platí rovnost  $\langle \nabla f(\mathbf{a})^T \mid \pm \nabla f(\mathbf{a})^T \rangle = \pm \|\nabla f(\mathbf{a})\|^2$ . □

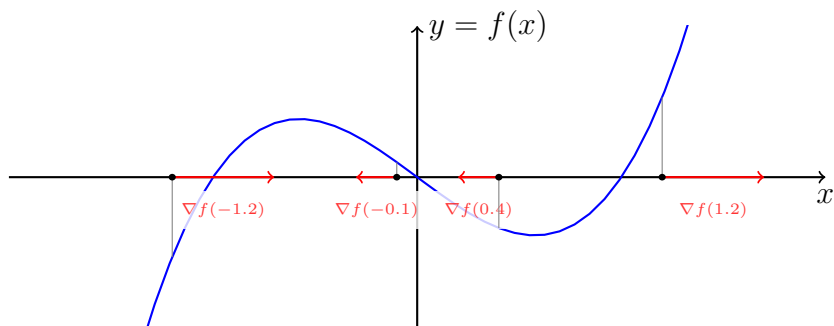
Na Obrázku 7.11 se pokusíme graficky znázornit funkci  $f(x, y) = 2x^2 + y^2$  (levý graf) a jejího gradient  $\nabla f(x, y) = (4x, 2y)$  vizualizovaný pomocí vektorového pole (pravý graf). Zdůrazněme, že graf funkce dvou proměnných je množina bodů v  $\mathbb{R}^3$ , ale gradient takovéto funkce má pouze dvě složky! Vágně řečeno „žije“ v rovině, kde leží definiční obor.

Je také zajímavé zpětně reflektovat situaci reálné funkce jedné reálné proměnné, jak si zde představit gradient? V případě diferencovatelné funkce  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a bodu  $a \in D_f$  je gradient řádkový vektor  $\nabla f(a) = (f'(a)) \in \mathbb{R}^{1,1}$ , jeho ilustraci uvádíme na Obrázku 7.12. Opět si všimněte, že leží na ose  $x$ !

**Otázka 7.1:** Je-li funkce  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  diferencovatelná v bodě  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}$ , jaký je směrový a normálový vektor její tečny v bodě  $\mathbf{a}$ ?



Obrázek 7.11: Vizualizace funkce a jejího gradientu, jakožto vektorového pole.



Obrázek 7.12: Gradient reálné funkce jedné reálné proměnné.

# 8 Kvadratické formy

Naším cílem v další části přednášky bude hledání extrémů funkcí více proměnných. Připomeňme si několik znalostí z předchozího studia.

Mějme funkci  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mající spojitou třetí derivaci na celém  $\mathbb{R}$  a bod  $a \in \mathbb{R}$ . Potom dle Taylorovy věty platí

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \mathcal{O}((x - a)^2), \quad \text{pro } x \rightarrow a.$$

V tomto výrazu bychom nyní měli vidět další důvod pro z [BI-MA1](#) známé kritérium (pro maximum podobně): Pokud  $f'(a) = 0$  a  $f''(a) > 0$ , potom  $f$  má v bodě  $a$  ostré lokální minimum.

Můžeme podobnou úvahu učinit i pro funkce více proměnných? Co je v tomto případě analogem lineárního a kvadratického členu?

**Definice 8.1** (Kvadratická forma / *Quadratic form*): Funkci  $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  nazýváme **kvadratickou formou**, právě když existuje symetrická matice  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n,n}$  splňující

$$q(\mathbf{x}) = \sum_{j,k=1}^n \mathbf{M}_{j,k} x_j x_k, \quad \text{pro každé } \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n. \quad (8.1)$$

Ihned učiňme několik relativně jednoduchých pozorování:

- V jedné dimenzi je situace velmi jednoduchá. Pokud  $n = 1$ , pak máme  $q(\mathbf{x}) = \alpha x_1^2$  pro nějaké  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
- Pro jistotu připomeňme definici symetrické matice. Matice  $\mathbf{M}$  je **symetrická**, právě když  $\mathbf{M}^T = \mathbf{M}$ .

- Pomocí standardního skalárního součinu a násobení matic můžeme výraz (8.1) vyjádřit alternativně i takto

$$q(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x} | \mathbf{M}\mathbf{x} \rangle = \mathbf{x}^T \mathbf{M}\mathbf{x}.$$

- Předpoklad symetričnosti matice  $\mathbf{M}$  není omezující. Pro každou matici  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$  a vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  platí  $\mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}^T \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) \mathbf{x}$ , kde  $\frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)$  je symetrická matice.
- Každá kvadratická forma je nulová v bodě  $\theta$ , tj.  $q(\theta) = 0$ .

**Příklad 8.1:** Například funkce

$$q(x, y) = x^2 - 3xy + 2y^2$$

je kvadratická forma, neboť ji lze vyjádřit jako

$$q(x, y) = (x, y) \mathbf{M} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

kde

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ -3/2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Kvadratická forma představuje zobecnění *pouze* kvadratického členu  $\alpha x^2$  pro funkce více proměnných. Zobecněním známých kvadratických funkcí  $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ,  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , jsou **kvadriky**. Přesněji funkce tvaru  $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  splňující

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{M}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + \gamma,$$

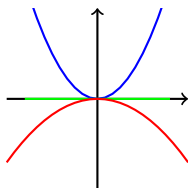
kde  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n,n}$  je symetrická matice,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$  je vektor a  $\gamma \in \mathbb{R}$ . Těmi se zde podrobněji zabývat nebudeme.

**Příklad 8.2:** Konkrétně pro

$$Q(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x + 3y + 4$$

bychom měli

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}^T = (-2, 3), \quad \text{a} \quad \gamma = 4.$$



Obrázek 8.1: Kvadratické formy v 1D. Situace je tragicky nezajímavá.

## 8.1 Definitnost kvadratických forem

Z předchozí motivace je zřejmé, že nás bude zajímat *znaménko* hodnot kvadratické formy. Nabývá kvadratická forma pouze nezáporných hodnot? Nabývá kladných i záporných hodnot? Atd.

V případě  $n = 1$  je situace jednoduchá, pro  $q(\mathbf{x}) = \alpha x_1^2$  platí následující implikace:

- $\alpha = 0 \Rightarrow q(\mathbf{x}) = 0$  pro všechna  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,
- $\alpha > 0 \Rightarrow q(\mathbf{x}) > 0$  pro všechna nenulová  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,
- $\alpha < 0 \Rightarrow q(\mathbf{x}) < 0$  pro všechna nenulová  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .

Pro grafickou ilustraci viz Obrázek 8.1.

Vše se ale komplikuje už i v případě  $n = 2$ . Například pro  $q(\mathbf{x}) = x_1^2 - x_2^2$  platí  $q(\mathbf{e}_1) = 1$  a současně  $q(\mathbf{e}_2) = -1$ . Tato situace s měnícím se znaménkem v jedné dimenzi nastat nemůže.

Všechny možné situace související se znaménkem kvadratické formy vystihují různé typy *definitnosti* kvadratických forem:

**Definice 8.2** (Typy definitnosti kvadratických forem): Kvadratickou formu  $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  nazveme

- **pozitivně definitní** (PD), právě když  $q(\mathbf{x}) > 0$  pro každé nenulové  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .
- **pozitivně semidefinitní** (PSD), právě když  $q(\mathbf{x}) \geq 0$  pro každé  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .
- **indefinitní** (ID), právě když existují vektory  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  splňující  $q(\mathbf{x}) > 0$  a  $q(\mathbf{y}) < 0$ .
- **negativně semidefinitní** (NSD), právě když  $q(\mathbf{x}) \leq 0$  pro každé  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .

- **negativně definitní** (ND), právě když  $q(\mathbf{x}) < 0$  pro každé nenulové  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .

Stejnou terminologii budeme používat i pro symetrické matice  $\mathbf{M}$ : symetrická matice  $\mathbf{M}$  je typu  $T$ , právě když forma  $\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x}$  je typu  $T$ .

Pozor! Terminologie napříč různými zdroji (literatura, web) není zcela ustálená, existují dva přístupy. V tomto kurzu se striktně držíme předchozí Definice 8.2, v které každá PD kvadratická forma je i PSD (analogicky pro ND a NSD).

Alternativní terminologie u PSD forem vyžaduje existenci nenulového vektoru s nulovou hodnotou. V takovém případě (ne v našem!) jsou množiny PSD a PD forem disjunktní.

Užitečnost námi použité konvence bude patrná v příští přednášce při studiu nutných a postačujících podmínek pro existenci lokálních extrémů funkcí více proměnných, případně ve vztahu mezi typy definitností a vlastními čísly matice  $\mathbf{M}$ .

Grafické znázornění několika kvadratických forem uvádíme na Obrázku 8.2. Vztah mezi různými typy definitností je dále znázorněn pomocí Vennova diagramu na Obrázku 8.3.

**Příklad 8.3** (Případ jedné proměnné,  $n = 1$ ): Pro kvadratické formy v jedné proměnné je situace velmi jednoduchá.

- Pokud  $\alpha > 0$ , pak  $q(x) = \alpha x^2$  je PD (i PSD).
- Pokud  $\alpha < 0$ , pak  $q(x) = \alpha x^2$  je ND (i NSD).
- Pokud  $\alpha = 0$ , pak  $q(x) = 0$  je PSD i NSD současně.
- Indefinitní kvadratické formy v jedné dimenzi neexistují!

**Příklad 8.4** (Případ dvou proměnných,  $n = 2$ ): Nejprve jednoduché příklady:

- $q(x, y) = x^2 + y^2$  je PD (a tedy i PSD): pro každý vektor  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  platí  $q(x, y) \geq 0$ , rovnost nule nastává právě když oba kvadráty jsou nulové, tj. právě když  $(x, y) = \theta$ .
- $q(x, y) = -x^2$  je NSD, ale není ND: pro každý vektor  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  platí  $q(x, y) \leq 0$ , nulovou hodnotu dostaneme i pro nenulový vektor  $(0, 1) \neq \theta$ :  $q(0, 1) = 0$ .
- $q(x, y) = xy$  je ID: máme například  $q(1, 1) = 1$  a současně  $q(1, -1) = -1$ .

Rozeznat znaménko hodnot kvadratických forem ale nemusí být ihned očividné. Uvažte například

- $q(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2$  je PD,
- $q(x, y) = x^2 + 4xy + y^2$  je ID.

Jak jsme se k tomuto výsledku dostali? Ve zbytku textu se tímto problémem budeme zabývat.

## 8.2 Určování definitnosti forem

Začněme nejprve jednoduchými kritérii pro indefinitnost (stačí nalézt dva vektory, pro které dostaneme hodnoty různých znamének).

Pokud máme kvadratickou formu

$$q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x},$$

pak dosazením  $j$ -tého standardního bazického  $\mathbf{e}_j$  vektoru dostaneme  $j$ -tý prvek na diagonále matice  $\mathbf{M}$ :  $q(\mathbf{e}_j) = \mathbf{M}_{jj}$ . Tudíž jsme dokázali:

**Tvrzení 8.1:** *Pokud má symetrická matice  $\mathbf{M}$  na diagonále prvky s různým znaménkem (jedno kladné, jedno záporné), potom je kvadratická forma  $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x}$  indefinitní.*

**Poznámka 8.1:** Toto pozorování dává pouze postačující podmínku pro indefinitnost.

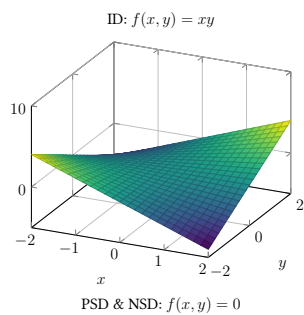
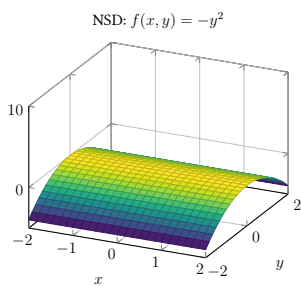
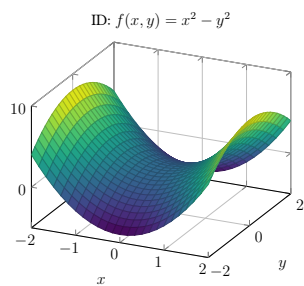
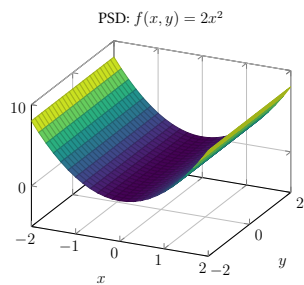
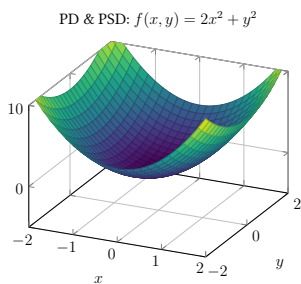
Kvadratická forma  $q(\mathbf{x}) = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$  je indefinitní (ukážeme později) i když má na diagonále pouze kladná čísla!

Bez důkazu uvedeme následující klíčové tvrzení z Lineární algebry (studenti z BI-LA2 znají, pro ostatní stačí bez důkazu jako fakt).

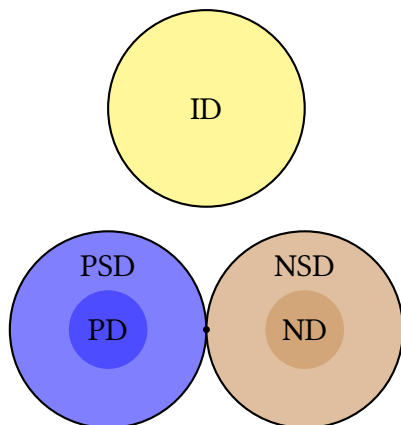
**Věta 8.1** (Diagonalizace symetrické reálné matice): Symetrická reálná matice je diagonalizovatelná a všechna její vlastní čísla jsou reálná. Vlastní vektory příslušející různým vlastním číslům jsou vzájemně ortogonální.

Připomeňme explicitněji smysl předchozího tvrzení: máme-li symetrickou reálnou matici  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n,n}$ , pak existuje diagonální matice  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n,n}$  a regulární matice  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n,n}$  splňující

$$\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{P}, \quad \text{resp.} \quad \mathbf{M} = \mathbf{P} \mathbf{D} \mathbf{P}^{-1}.$$







Obrázek 8.3: Znázornění vztahů mezi různými typy definitností pomocí Vennova diagramu. Jediná forma, která je současně NSD a PSD, je nulová kvadratická forma (znázorněna puntíkem).

O matici  $\mathbf{D}$  dále víme, že má na diagonále (nutně reálná) vlastní čísla matice  $\mathbf{M}$  a v matici  $\mathbf{P}$  jsou ve sloupcích vlastní vektory příslušející vlastním číslům v pořadí na diagonále  $\mathbf{D}$ . Matici  $\mathbf{P}$  lze volit tak, aby  $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T$ .

Vztah mezi vlastními čísly matice  $\mathbf{M}$  a definitností příslušné kvadratické formy je velmi úzký a názorný:

**Důsledek 8.1** (Vztah definitností a vlastních čísel): Kvadratická forma  $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x}$  je

- PD, právě když všechna vlastní čísla matice  $\mathbf{M}$  jsou kladná.
- PSD, právě když všechna vlastní čísla matice  $\mathbf{M}$  jsou nezáporná.
- ID, právě když má matice  $\mathbf{M}$  kladné i záporné vlastní číslo.
- NSD, právě když všechna vlastní čísla matice  $\mathbf{M}$  jsou nekladná.
- ND, právě když všechna vlastní čísla matice  $\mathbf{M}$  jsou záporná.

*Důkaz.* Dle předchozí Věty 8.1 pro reálnou symetrickou matici  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n,n}$  existuje diagonální matice  $\mathbf{D} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  a ortogonální<sup>1</sup> matice  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n,n}$  splňující

<sup>1</sup>Tj. regulární splňující  $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T$ .

$\mathbf{M} = \mathbf{PDP}^T$ . Potom pro naši formu platí

$$q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{PDP}^T \mathbf{x} = (\mathbf{P}^T \mathbf{x})^T \mathbf{D} (\mathbf{P}^T \mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \lambda_j (\mathbf{P}^T \mathbf{x})_j^2. \quad (8.2)$$

Nyní si postupně rozmyslíme různé situace.

PSD: Pokud  $\lambda_j \geq 0$  pro každé  $j \in \hat{n}$ , pak z (8.2) plyne  $q(\mathbf{x}) \geq 0$  pro každý  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ . Naopak, pokud  $q(\mathbf{x}) \geq 0$  pro každý  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , pak pro  $j \in \hat{n}$  zvolme  $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{e}_j$  (vlastní vektor příslušející  $\lambda_j$ ) a dostaneme  $\lambda_j = q(\mathbf{x}) \geq 0$ .

PD: Vzhledem k předchozímu bodu stačí ukázat ekvivalenci:  $q(\mathbf{x}) = 0$  pouze pro  $\mathbf{x} = \theta$ , právě když  $\lambda_j > 0$  pro každé  $j \in \hat{n}$ .  $\Rightarrow$ : Opět pro  $j \in \hat{n}$  zvolme  $x = \mathbf{P}\mathbf{e}_j \neq \theta$ , pak  $0 < q(\mathbf{x}) = \lambda_j$ .  $\Leftarrow$ : Z  $q(\mathbf{x}) = 0$  a (8.2) v tomto případě plyne  $\mathbf{P}^T \mathbf{x} = \theta$  a tedy  $\mathbf{x} = \theta$ .

NSD a ND: analogicky.

ID: Důsledek již dokázaného. □

## Úprava na čtverce

Mějme kvadratickou formu  $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x}$  a postupně provádějme následující algebraické operace (pokud je to možné, viz níže):

1. Ve výrazu  $q(\mathbf{x})$  zvolme proměnnou  $x_k$ , která se v něm vyskytuje v kvadrátu.
2. Vezměme všechny členy obsahující proměnnou  $x_k$ , tj. výraz tvaru

$$\alpha x_k^2 + A(x_j, j \neq k) \cdot x_k,$$

kde výraz  $A := A(x_j, j \neq k)$  obsahuje už pouze konstantní násobky proměnných různých od  $x_k$ .

3. Tento výraz doplňme na čtverec pomocí standardní úpravy

$$\alpha x_k^2 + A \cdot x_k = \alpha \left( x_k + \frac{A}{2\alpha} \right)^2 - \frac{A^2}{4\alpha}.$$

4. Celkem pak dostáváme rovnost

$$q(\mathbf{x}) = \alpha \left( x_k + \frac{A}{2\alpha} \right)^2 + \tilde{q}(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n),$$

kde nová forma  $\tilde{q}$  už nezávisí na  $k$ -té proměnné  $x_k$ .

5. Opakujme tento postup s  $\tilde{q}$ .

Pokud tento proces úspěšně proběhne, tak na konci získáme  $q(\mathbf{x})$  ve tvaru součtu konstantních násobků nejvýše  $n$  čtverců.

**Věta 8.2** (Typy definitností a úprava na čtverce): Předpokládejme, že předchozí postup úspěšně proběhl a máme tedy  $q(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , vyjádřeno ve tvaru

$$q(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^k \alpha_j ((\mathbf{P}\mathbf{x})_j)^2,$$

kde  $1 \leq k \leq n$ ,  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{k,n}$  má hodnost  $k$  (plyne z postupné eliminace proměnných) a  $\alpha_j \neq 0$ ,  $j \in \hat{k}$ .

Potom platí:

- Pokud  $k = n$  a  $\alpha_j > 0$  pro všechna  $j \in \hat{k}$ , potom je  $q$  PD.
- Pokud  $k = n$  a  $\alpha_j < 0$  pro všechna  $j \in \hat{k}$ , potom je  $q$  ND.
- Pokud  $k < n$  a  $\alpha_j > 0$  pro všechna  $j \in \hat{k}$ , potom je  $q$  PSD (ale ne PD).
- Pokud  $k < n$  a  $\alpha_j < 0$  pro všechna  $j \in \hat{k}$ , potom je  $q$  NSD (ale ne ND).
- Pokud existují  $j, \ell \in \hat{k}$  taková, že  $\alpha_j > 0$  a  $\alpha_\ell < 0$ , potom je  $q$  ID.

*Důkaz.* Důkaz v podstatě kopíruje důkaz Důsledku 8.1. V něm jsme vlastní čísla a diagonalizaci využili k provedení úpravy na čtverce, viz rovnici (8.2). Koefficienty u čtverců byla právě vlastní čísla. □

Problém v předchozím postupu nastane v případě, kdy se jistá proměnná ve výrazu nevyskytuje v kvadrátu, ale pouze ve smíšených členech. Například  $xy$ .

V takovém konkrétním případě dvou proměnných můžeme použít úpravu

$$xy = \frac{1}{4}(x+y)^2 - \frac{1}{4}(x-y)^2,$$

resp. provést substituci  $x = u + v$  a  $y = u - v$ . V obecném případě většího počtu smíšených členů (nejhůře matice  $\mathbf{M}$  s nulovou diagonálou) se postup více komplikuje, ale výše uvedená substituce pomůže.

Úpravu na čtverec ale není nutné provádět, pokud lze snadno rozhodnout o ID. Např.

$$q(x, y, z, u) = (x + y)^2 + yz - 2zu$$

je ID: vynulujeme kvadrát ( $x = -y$ ) a zbývající volnost využijeme k vytvoření hodnot s různými znaménky:  $q(-1, 1, 1, 1) = -1$  a  $q(-1, 1, -1, 1) = 1$ . Tadá!

Rozhodněme nyní o definitnosti dvou kvadratických forem, které jsme zmínili dříve v textu (Příklad 8.4).

**Příklad 8.5:** Kvadratická forma  $q(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2$  je PD, protože

$$q(x, y) = (x + y)^2 + y^2$$

Dvě proměnné a dva kladné čtverce.

**Příklad 8.6:** Kvadratická forma  $q(x, y) = x^2 + 4xy + y^2$  je ID, protože

$$q(x, y) = (x + 2y)^2 - 3y^2.$$

Jeden čtverec kladný, jeden záporný. Odtud také hned vidíme:  $q(2, -1) = -3$  (nuluje první čtverec),  $q(1, 0) = 1$  (nuluje druhý čtverec).

## Sylvesterovo kritérium

Pro matici  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n,n}$  definujeme  $\mathbf{M}_k$  jakožto čtvercovou matici  $\mathbf{M}_k = (\mathbf{M}_{ij})_{i,j=1}^k$  (tj. „ $k \times k$  podmatici v levém horním rohu“).

K určení pozitivní nebo negativní definitnosti máme k dispozici následující kritérium:

**Věta 8.3** (Sylvesterovo kritérium): Kvadratická forma  $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x}$ , kde  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n,n}$  je symetrická matice, je

- PD, právě když pro každé  $k \in \hat{n}$  platí  $\det \mathbf{M}_k > 0$ .
- ND, právě když pro každé  $k \in \hat{n}$  platí  $(-1)^k \det \mathbf{M}_k > 0$ .

Důkaz stačí provést pro případ PD, existuje několik důkazů, my zde volíme jeden z přístupů z článku [3]. Ano,  $\mathbf{M}$  je ND, právě když  $-\mathbf{M}$  je PD a to je ekvivalentní podmínkám  $0 < \det(-\mathbf{M}_k) = (-1)^k \det \mathbf{M}_k$ ,  $k \in \hat{n}$ .

$PD \Rightarrow \det \mathbf{M}_k > 0$  pro každé  $k \in \hat{n}$ . Nejprve si všimněme, že kvadratická forma definovaná maticí  $\mathbf{M}_k$  je PD pro libovolné  $k \in \hat{n}$ . Skutečně, je-li  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^k$  nenulový vektor, pak vektor  $\mathbf{x} := (y_1, \dots, y_k, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$  je také nenulový a dle předpokladu platí (využijte nul!)

$$\mathbf{y}^T \mathbf{M}_k \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x} > 0.$$

Nyní si stačí uvědomit, že determinant libovolné symetrické reálné PD matice je roven součinu jejích vlastních čísel, která jsou všechna kladná a proto je sám kladný.  $\square$

**Lemma 8.1** (Pomocné tvrzení): Mějme symetrickou matici  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$  takovou, že  $\mathbf{A}_{n-1}$  je regulární a označme  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{n-1} & \mathbf{a} \\ \mathbf{a}^T & \alpha \end{pmatrix}$ . Potom existuje regulární matice  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n,n}$  splňující  $\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{n-1} & \theta \\ \theta^T & \beta \end{pmatrix}$ . Pokud navíc  $\det \mathbf{A}_{n-1} > 0$  a  $\det \mathbf{A} > 0$ , potom  $\beta > 0$ .

*Důkaz.* Díky regularitě matice  $\mathbf{A}_{n-1}$  má soustava  $\mathbf{A}_{n-1} \mathbf{x} = \mathbf{a}$  právě jedno řešení, ozn. ho  $\mathbf{b} = \mathbf{A}_{n-1}^{-1} \mathbf{a}$ . Položme  $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{n-1} & -\mathbf{b} \\ \theta^T & 1 \end{pmatrix}$ . Takováto matice je jistě regulární a platí

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P} &= \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{n-1} & \theta \\ -\mathbf{b}^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{n-1} & \mathbf{a} \\ \mathbf{a}^T & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{n-1} & -\mathbf{b} \\ \theta^T & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{n-1} & \mathbf{a} \\ -\mathbf{b}^T \mathbf{A}_{n-1} + \mathbf{a}^T = \theta^T & -\mathbf{b}^T \mathbf{a} + \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{n-1} & -\mathbf{b} \\ \theta^T & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{n-1} & -\mathbf{A}_{n-1} \mathbf{b} + \mathbf{a} = \theta \\ \theta^T & -\mathbf{b}^T \mathbf{a} + \alpha =: \beta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dodatek plyne z rovnosti  $(\det \mathbf{P})^2 \det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}_{n-1} \cdot \beta$ .  $\square$

Nyní můžeme dokončit důkaz Sylvesterova kritéria.

$\det \mathbf{M}_k > 0$  pro každé  $k \in \hat{n} \Rightarrow PD$ . Tvrzení je pravdivé pro  $n = 1$  ( $\det(a_{11}) = a_{11}$ ).

Mějme  $n \geq 2$  a předpokládejme, že tvrzení platí pro  $n - 1$ . Z předchozího Lemma aplikovaného na  $\mathbf{M}$  plyne existence regulární matice  $\mathbf{P}$  takové, že

$$(\mathbf{P}\mathbf{x})^T \mathbf{M} (\mathbf{P}\mathbf{x}) = \mathbf{x}_{n-1}^T \mathbf{M}_{n-1} \mathbf{x}_{n-1} + \beta x_n^2,$$

kde  $\mathbf{x}_{n-1} = (x_1, \dots, x_{n-1})^T$ . Matice  $\mathbf{M}_{n-1}$  je PD a  $\beta$  je kladná, takže i  $\mathbf{M}$  je PD.  $\square$

Následující příklad vyvrací častý mýtus, který se někdy objevuje i v literatuře: pokud platí  $\det \mathbf{M}_k \geq 0$  pro každé  $k \in \hat{n}$ , tak příslušná kvadratická forma není nutně PSD (analogicky pro NSD).

**Příklad 8.7:** Uvažme

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Potom  $\det \mathbf{M}_1 = 1 \geq 0$ ,  $\det \mathbf{M}_2 = 0 \geq 0$  a  $\det \mathbf{M}_3 = 0 \geq 0$ . Ale příslušná forma je indefinitní, protože (úprava na čtverce)

$$q_{\mathbf{M}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x} = x_1^2 + 4x_1x_3 + x_3^2 = (x_1 + 2x_3)^2 - 3x_3^2$$

a proto  $q_{\mathbf{M}}(2, 0, -1) = -3 < 0$  a  $q_{\mathbf{M}}(1, 0, 0) = 1 > 0$ .

## 8.3 Dodatek

Sylvesterovo kritérium lze zobecnit i na případ PSD a NSD forem, ale ne pouhým přepsáním ostrých nerovností na neostré. Pro zájemce zde toto kritérium bez důkazu alespoň zformulujeme.

Pro matici  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n,n}$  a množinu  $I \subset \hat{n}$ ,  $I \neq \hat{n}$ , označme jako  $\mathbf{M}_I$  matici, která vznikne z matice  $\mathbf{M}$  smazáním řádků a sloupců s indexy patřícími do  $I$ .

**Příklad 8.8:** Je-li

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

potom například

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\{2\}} &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{M}_{\{1,3\}} &= (1), \\ \mathbf{M}_{\{1\}} &= \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vždy platí  $\mathbf{M}_{\emptyset} = \mathbf{M}$ .

**Věta 8.4** (Obecné Sylvesterovo kritérium): Nechť  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n,n}$  je symetrická matice. Potom

1.  $\mathbf{M}$  je PD, právě když  $\det \mathbf{M}_{\{k+1, \dots, n\}} > 0$  pro každé přirozené  $k$  splňující  $0 < k \leq n$ ,

2.  $\mathbf{M}$  je ND, právě když  $(-1)^k \det \mathbf{M}_{\{k+1, \dots, n\}} > 0$  pro každé přirozené  $k$  splňující  $0 < k \leq n$ ,
3.  $\mathbf{M}$  je PSD, právě když  $\det \mathbf{M}_I \geq 0$  pro všechna  $I \subsetneq \hat{n}$ .
4.  $\mathbf{M}$  je NSD, právě když  $(-1)^{n-\#I} \det \mathbf{M}_I \geq 0$  pro všechna  $I \subsetneq \hat{n}$ .
5.  $\mathbf{M}$  je ID, právě když  $\det \mathbf{M}_I < 0$  pro nějaké  $I \subsetneq \hat{n}$ , kde  $n - \#I$  je sudé, nebo  $\det \mathbf{M}_I < 0$  a  $\det \mathbf{M}_J > 0$  pro nějaké  $I, J \subsetneq \hat{n}$ , kde  $n - \#I$  a  $n - \#J$  jsou lichá.

Toto tvrzení má dva užitečné důsledky.

**Důsledek 8.2:** Nechť  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n,n}$  je symetrická matice. Pokud existuje sudé  $k$  takové, že  $\det \mathbf{M}_k < 0$ , nebo pokud existují lichá  $k, \ell$  taková, že  $\det \mathbf{M}_k < 0$  a  $\det \mathbf{M}_\ell > 0$ , pak je matice  $\mathbf{M}$  ID.

**Důsledek 8.3:** Nechť  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n,n}$  je symetrická matice. Pokud  $\mathbf{M}$  není PD ani ND a pro každé  $k \in \hat{n}$  je  $\det \mathbf{M}_k \neq 0$ , pak je matice  $\mathbf{M}$  ID.

# 9 Extrémy funkcí více proměnných

Co mají následující úlohy společného?

- Jak rovnoměrně rozmístit objekty na tiskovou podložku 3D tiskárny?
- Jak „naučit“ neuronovou síť vykonávat jistý úkol?
- Jak z několika potravin s různým složením vytvořit optimální jídelníček splňující zadaná dietologická kritéria?
- Jak na desku optimálně rozmístit elektronické součástky při splnění zejména prostorových omezení a nákladnosti výroby?
- Jak nalézt co nejkratší (nebo nejlevnější) trasu mezi zadanými místy?

Pod každou z těchto úloh ve skutečnosti leží optimalizační úloha, tedy úloha nalézt minimum/maximum jisté funkce (potenciálně opravdu mnoha proměnných) za jistých omezujících podmínek.

V maximální obecnosti by matematická formulace „obecné optimalizační úlohy“ mohla znít následovně:

**Poznámka 9.1** (Obecná optimalizační úloha): Nalezněte maximum, resp. minimum, (existuje-li; alespoň lokální) funkce  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ , kde  $D_f \subset \mathbb{R}^n$ , na množině

$$M = \{\mathbf{x} \in D_f \mid g_i(\mathbf{x}) = 0, i \in \hat{I}, h_j(\mathbf{x}) \leq 0, j \in \hat{J}\},$$

tj.  $\max_M f$ , resp.  $\min_M f$ , kde  $I$  a  $J$  jsou nezáporná celá čísla a  $g_i$  a  $h_j$  funkce s definičními obory ležícími v  $\mathbb{R}^n$ ,  $i \in \hat{I}$ ,  $j \in \hat{J}$ , připouštíme i  $I$  nebo  $J$  nulové a pak odpovídající podmínky nemáme ( $\hat{0} = \emptyset$ ).



Podle různých situací rozlišujeme celé ZOO různých typů této optimalizační úlohy (pouze lineární funkce, pouze kvadratické funkce, konvexní funkce, funkce definované na  $\mathbb{Z}^n$  nebo dokonce jenom  $\{0, 1\}^n, \dots$ ). Např. pod úlohou „lineárního programování“ se většinou myslí optimalizační úloha s lineární objektivní funkcí a lineárními rovnostními nebo nerovnostními omezeními.

V BI-MA2 se budeme věnovat pouze úvodu do problematiky a úlohám bez rovnostních i bez nerovnostních omezení a s reálnými proměnnými. Tj. úloze nalézt (lokální) minima/maxima reálné funkce více reálných proměnných.

Koncepty, které zde zavedeme, hrají ale důležitou roli i v případě úloh s omezeními, nebo v případě implementace numerických algoritmů snažících se tyto úlohy řešit. Úlohy s omezeními potkáte v magisterském povinném předmětu **NI-MPI** nebo ve specializovaných předmětech **NI-LOM**, **NI-NON**, nebo **NI-KOP**, ale i jinde.

## 9.1 Definice pojmů

Následující definice různých typů extrémů jako by z oka vypadla té z BI-MA1. Opět s úspěchem použijeme dříve zobecněný koncept okolí.

**Definice 9.1** (Extrémy funkcí více proměnných): Mějme funkci  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D_f \subset \mathbb{R}^n$ , a bod  $\mathbf{a} \in D_f$ . Funkce  $f$  má v bodě  $\mathbf{a}$

- **ostré lokální minimum**, právě když existuje okolí  $U_{\mathbf{a}}$  bodu  $\mathbf{a}$  takové, že pro všechna  $\mathbf{x} \in U_{\mathbf{a}} \cap D_f$  různá od  $\mathbf{a}$  platí  $f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{a})$ .
- **ostré lokální maximum**, právě když existuje okolí  $U_{\mathbf{a}}$  bodu  $\mathbf{a}$  takové, že pro všechna  $\mathbf{x} \in U_{\mathbf{a}} \cap D_f$  různá od  $\mathbf{a}$  platí  $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{a})$ .
- **lokální minimum**, právě když existuje okolí  $U_{\mathbf{a}}$  bodu  $\mathbf{a}$  takové, že pro všechna  $\mathbf{x} \in U_{\mathbf{a}} \cap D_f$  platí  $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{a})$ .
- **lokální maximum**, právě když existuje okolí  $U_{\mathbf{a}}$  bodu  $\mathbf{a}$  takové, že pro všechna  $\mathbf{x} \in U_{\mathbf{a}} \cap D_f$  platí  $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a})$ .

Hodnota tohoto extrému je ve všech případech rovna  $f(\mathbf{a})$ . Souhrnně budeme mluvit o (ostrém) lokálním extrému.

Nejprve se budeme soustředit na analytické hledání lokálních extrémů. Odvodíme nutné i postačující podmínky pro jejich existenci. K tomu využijeme pojmy diferenciálního počtu a typy definitností probrané v dřívější části textu.

**Poznámka 9.2:** Nutnou i postačující podmínku pro existenci lokálního extrému uvádí sama Definice 9.1. Nezapomínejte na ni. Pokud analytická metoda hledání selže, vždy se můžete pomocí definice pokusit existenci extrému vyvrátit, nebo prokázat.

V pozdější části přednášky si ukážeme i jeden z možných numerických přístupů k řešení tohoto problému spočívající v tzv. „spádové“ metodě.

Je dobré si uvědomit, že struktura množiny bodů, kde je nabýván extrém, může být poměrně komplikovaná. Zamyslete se co lze říci o extrémech funkcí uvedených na Obrázku 9.1.

## 9.2 Nutné podmínky existence lokálního extrému

V této podkapitole odvodíme nutné podmínky existence lokálního extrému. Ty nám umožňují podstatně zúžit body, kde extrém může nastávat. Postačující podmínkou se budeme zabývat v následující kapitole.

### Nutná podmínka prvního řádu

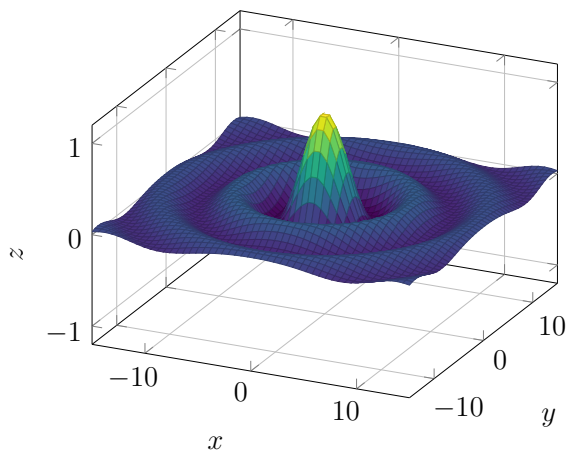
Vzpomeňte si na známé tvrzení z BI-MA1: pokud má reálná funkce reálné proměnné lokální extrém v bodě  $a$ , pak její derivace v bodě  $a$  buď neexistuje, nebo je rovna nule. Vzhledem k úzké souvislosti mezi parciální derivací a „obyčejnou“ derivací, popsané v podkapitole 7.6, dostáváme následující analogické tvrzení.

**Věta 9.1** (Nutná podmínka existence lokálního extrému I: parciální derivace): Mějme funkci  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D_f \subset \mathbb{R}^n$ , mající v bodě  $\mathbf{a}$  lokální extrém (klidně ostrý) a  $j \in \hat{n}$ . Potom parciální derivace funkce  $f$  v bodě  $\mathbf{a}$  podle  $j$ -té proměnné je rovna nule nebo neexistuje.

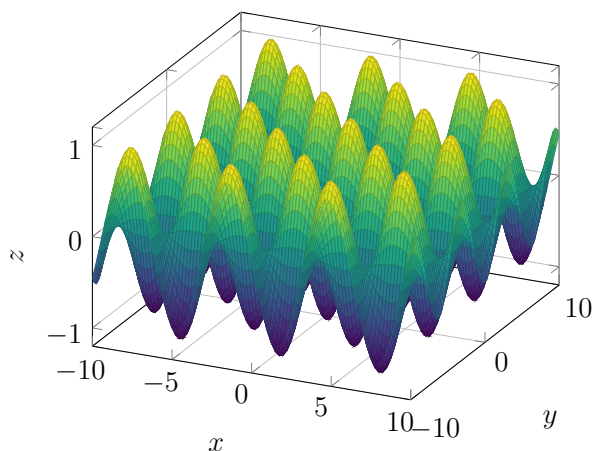
*Důkaz.* Stačí použít výše zmíněné tvrzení z BI-MA1 na funkci  $g(x) = f(\mathbf{a} + x\mathbf{e}_j)$ : tato funkce má dle předpokladů jistě (ostrý) lokální extrém v bodě  $x = 0$ , tudíž  $g'(0)$  je buď nula nebo neexistuje. Ale  $g'(0)$  je identická s  $\partial_j f(\mathbf{a})$ .  $\square$

**Důsledek 9.1** (Nutná podmínka existence lokálního extrému I: gradient): Mějme funkci  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D_f \subset \mathbb{R}^n$ , mající v bodě  $\mathbf{a}$  (ostrý) lokální extrém a mající parciální derivace v bodě  $\mathbf{a}$  podle všech proměnných. Potom  $\nabla f(\mathbf{a}) = \theta$ .

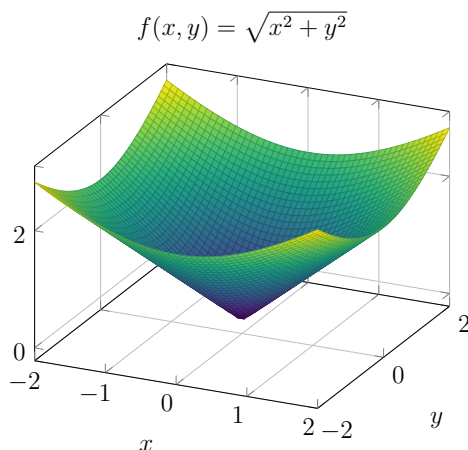
$$f(x, y) = \frac{\sin \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$



$$f(x, y) = \sin(x) \cos(y)$$



Obrázek 9.1: Vizualizace dvou funkcí dvou proměnných. Co dokážete říct o jejich extrémech čistě na základě vizualizace a znalosti Definice 9.1?



Obrázek 9.2: Extrém v bodě s neexistující derivací, grafem funkce  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  je kužel.

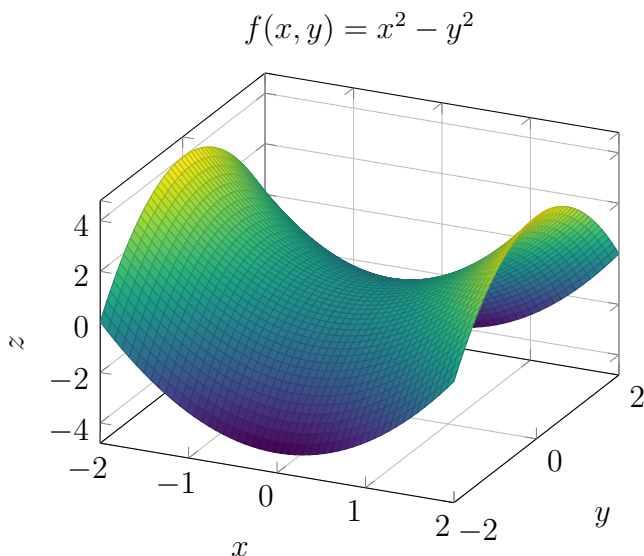
Ukázkou extrému (ostrého lokálního minima; snadno ukážeme z definice) v bodě s neexistujícím gradientem je například funkce  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  v bodě  $\theta$ . Její graf představuje kužel, viz Obrázek 9.2. Existence ostrého lokálního minima plyne jednoduše přímo z Definice 9.1. Pro všechna nenulová  $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$  jistě platí  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} > 0 = f(\theta)$ .

**Varování 9.1:** Opět upozorněme, že Věta 9.1, resp. Důsledek 9.1, představuje pouze nutnou podmínku! To znamená, že z nulovosti gradientu *neplyne* existence extrému. Například, pro funkci  $f(x, y) = x^2 - y^2$  sice platí  $\nabla f(0, 0) = \theta$ , ale v  $(0, 0)$  očividně extrém nenastává!

Proč v tomto bodě tato funkce extrém nemá? Protože pro každé nenulové reálné  $t$  platí  $f(0, t) = -t^2 < 0 = f(\theta)$  a  $f(t, 0) = t^2 > 0 = f(\theta)$ , což je v rozporu se všemi podmínkami v Definici 9.1. Jinak řečeno, lze nalézt dva různé směry, jak se k bodu  $\theta$  blížit tak, že odpovídající funkční hodnoty jsou jednou nad a jednou pod hodnotou  $f(\theta)$ .

Bod, kde je gradient nulový, je tedy *potenciálním* bodem lokálního extrému. Tečná rovina (viz Poznámka 7.3) v tomto bodě je kolmá na osu  $z$  (závisle proměnná). Zavádíme pro něj proto následující terminologii.

**Definice 9.2** (Stacionární bod / *Stationary point*): Mějme funkci  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D_f \subset \mathbb{R}^n$ . Bod  $\mathbf{a} \in D_f$  splňující  $\nabla f(\mathbf{a}) = \theta$  nazýváme **stacionárním bodem**.



Obrázek 9.3: Funkce  $f(x, y) = x^2 - y^2$  má v bodě  $\theta$  sice nulový gradient, ale nemá v tomto bodě lokální extrém. Ilustrace k Varování 9.1.

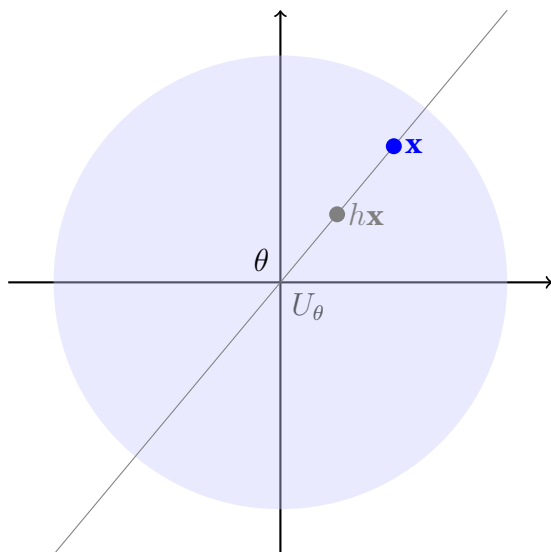
**Kritickým bodem** nazýváme bod, kde neexistuje gradient nebo je stacionární.

## Nutná podmínka druhého řádu

V případě funkce jedné proměnné jsme často při hledání extrémů hledali nulové body první derivace a poté zkoumali znaménko první derivace na okolí takového bodu. U funkcí více proměnných tento přístup použitelný není. Musíme se podívat na analog druhé derivace, tedy Hesseovu matici a její definitnost.

**Věta 9.2** (Nutná podmínka existence lokálního extrému II): Nechť funkce  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D_f \subset \mathbb{R}^n$ , má spojitě všechny druhé parciální derivace na okolí bodu  $\mathbf{a}$  a nechť má v tomto bodě lokální minimum (resp. maximum), potom je Hesseova matice  $\nabla^2 f(\mathbf{a})$  PSD (resp. NSD).

*Důkaz.* BÚNO  $\mathbf{a} = \theta$ . Buď  $U_\theta$  okolí bodu  $\theta$  kde má funkce  $f$  spojitě všechny parciální derivace až do druhého řádu (včetně) a platí  $f(\mathbf{x}) \geq f(\theta)$  pro každé  $\mathbf{x} \in U_\theta$ . Viz Obrázek 9.4.



Obrázek 9.4: Ilustrace k důkazu Věty 9.2.

Mějme  $\mathbf{x} \in U_\theta$  libovolné nenulové a uvažme funkci  $g(h) = f(h\mathbf{x})$  definovanou určitě na nějakém okolí  $U_0 \subset \mathbb{R}$  obsahujícím 1 ( $\mathbf{x} \in U_\theta$ ).

Tato funkce má v bodě 0 lokální minimum ( $g(h) \geq f(\theta)$ ) a pro její derivace podle pravidla o derivaci složené funkce (Věta 7.12) platí

$$g'(h) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(h\mathbf{x}) \cdot x_j,$$

$$g''(h) = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(h\mathbf{x}) \cdot x_j x_k.$$

Funkce  $g$  má proto spojitou druhou derivaci a navíc dle předpokladu platí  $g'(0) = 0$ .

Podle Taylorovy věty (Věta 5.4) pro  $h \in U_0$  platí

$$0 \leq g(h) - g(0) = \frac{1}{2} g''(\xi_h) h^2, \quad (9.1)$$

kde  $\xi_h$  leží mezi 0 a  $h$  (a tedy  $\xi_h \rightarrow 0$  když  $h \rightarrow 0$ ).

Dále podle předchozího textu platí

$$g''(\xi_h) = \mathbf{x}^T \cdot \nabla^2 f(\xi_h \mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}.$$

Dosažením tohoto vztahu do (9.1), podělením nerovnosti  $h^2$  a provedením limity  $h \rightarrow 0$  získáváme nerovnost

$$\mathbf{x}^T \cdot \nabla^2 f(\theta) \cdot \mathbf{x} \geq 0,$$

kde  $\mathbf{x}$  bylo libovolné z  $U_\theta$ .

Libovolné  $\mathbf{x} \neq \theta$  ale snadno přenásobením vhodnou kladnou konstantou lze převést do  $U_\theta$ , kde nerovnost platí a poté opět vytknout škálovací faktor.

Tím je důkaz dokončen.  $\square$

Ihned na tomto místě upozorníme, že semi/definitnost nám nepomůže rozlišit ne/ostrost extrému. To je smysl následujících dvou příkladů. Hesseova matice zkrátka „vidí“ pouze kvadratické chování funkce.

**Příklad 9.1:** Funkce  $f(x, y) = x^2 + y^2$  má jediný stacionární bod  $\theta$  a její Hesseova matice v tomto bodě je PD, tedy

$$\begin{aligned} \nabla f(0, 0) &= \theta, \\ \nabla^2 f(0, 0) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

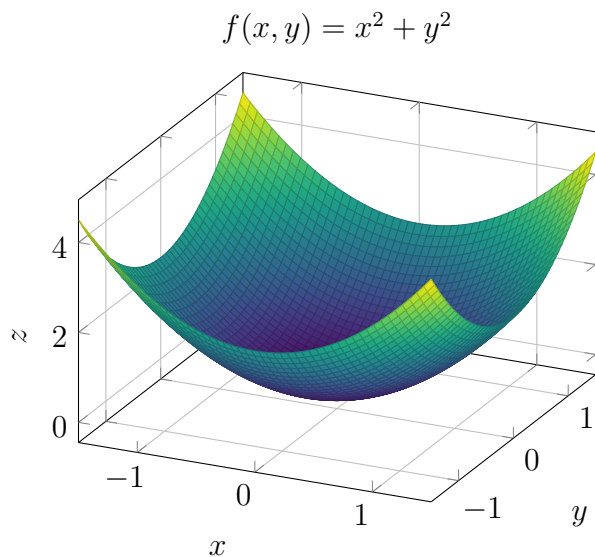
V bodě  $\theta$  také má ostré lokální minimum (to vidíme naprosto očividně pomocí definice extrému (Definice 9.1): ano, skutečně pro každé nenulové  $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$  platí  $f(x, y) = x^2 + y^2 > f(\theta)$ ). Graf této funkce je na Obrázku 9.5.

**Příklad 9.2:** Funkce  $f(x, y) = x^4 + y^4$  má jediný stacionární bod  $\theta$  a její Hesseova matice v tomto bodě je PSD (ale i NSD), ale není PD (ani ND). Tedy platí

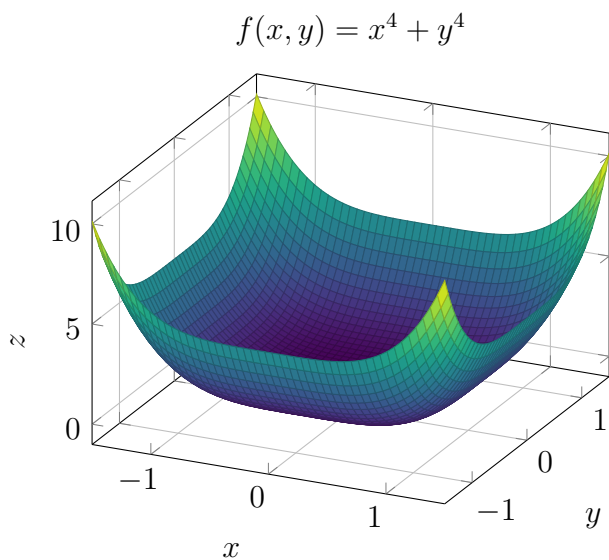
$$\begin{aligned} \nabla f(0, 0) &= \theta, \\ \nabla^2 f(0, 0) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

V bodě  $\theta$  také má ostré lokální minimum (to vidíme naprosto očividně pomocí definice extrému (Definice 9.1): ano, skutečně pro každé nenulové  $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$  platí  $f(x, y) = x^4 + y^4 > f(\theta)$ ). Graf této funkce je na Obrázku 9.6.

**Varování 9.2:** Opět upozorníme, že jde pouze o nutnou podmínku! Z nulovosti gradientu a PSD (resp. NSD) Hessovy matice v daném stacionárním bodě neplyne

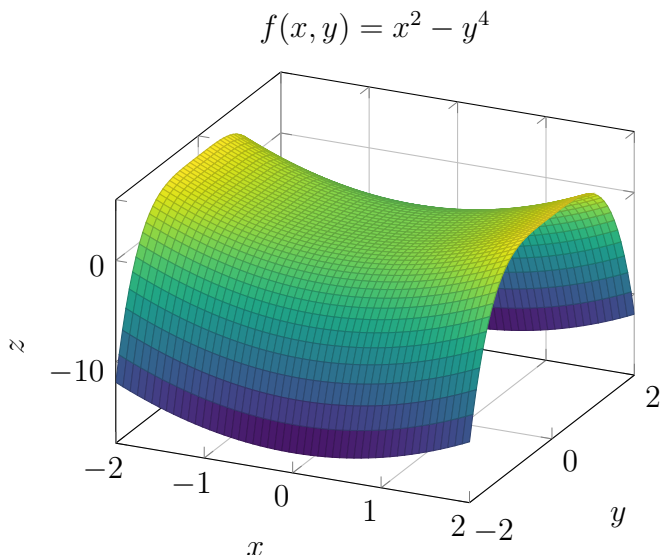


Obrázek 9.5: Ilustrace funkce z Příkladu 9.1.



Obrázek 9.6: Ilustrace funkce z Příkladu 9.2.





Obrázek 9.7: Ilustrace k Varování 9.2. Funkce mající ve stacionárním bodě  $\theta$  PSD Hessovu matici a nemající v tomto bodě lokální extrém.

existence lokálního extrému. Například pro funkci  $f(x, y) = x^2 - y^4$  sice platí  $\nabla f(0, 0) = \theta$  a Hesseova matice

$$\nabla^2 f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

je PSD, ale v  $(0, 0)$  očividně extrém nenastává! Skutečně, pro každé nenulové  $t$  platí  $f(t, 0) = t^2 > 0 = f(\theta)$  a  $f(0, t) = -t^4 < 0 = f(\theta)$ , což je v rozporu se všemi podmínkami v Definicí 9.1. Viz Obrázek 9.7.

### 9.3 Postačující podmínka existence lokálního extrému

Po studiu nutných podmínek konečně přistupme k postačující podmínce. Stačí zpřísňit podmínku definitnosti (ze semidefinitnosti na definitnost). Navíc dále ukážeme, že ID existenci extrému vylučuje (tzv. **sedlový bod**).

**Věta 9.3** (Postačující podmínka existence lokálního extrému): Mějme funkci  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D_f \subset \mathbb{R}^n$ , mající spojité všechny třetí parciální derivace na okolí bodu  $\mathbf{a}$  a nechť jsou splněny následující dvě podmínky

1.  $\nabla f(\mathbf{a}) = \theta$ ,
2.  $\nabla^2 f(\mathbf{a})$  je PD (resp. ND).

Potom má funkce  $f$  v bodě  $\mathbf{a}$  ostré lokální minimum (resp. maximum).

Pokud platí první podmínka a Hesseova matice  $\nabla^2 f(\mathbf{a})$  je ID, pak tato funkce v bodě  $\mathbf{a}$  lokální extrém nemá.

Než se pustíme do důkazu, tak opět upozorníme na záludnosti předchozí věty. Studenti mají tendenci v předchozí větu rozšiřovat i na případ PSD (resp. NSD) a z toho pak vyvozovat existenci neostrého lokálního extrému. Následující příklad ukazuje, že nic takového neplatí.

**Příklad 9.3:** Funkce  $f(x, y) = x^2 + y^3$  má v bodě  $\theta$  nulový gradient, skutečně:

$$\nabla f(x, y) = (2x, 3y^2) \Rightarrow \nabla f(\theta) = \theta.$$

Pro Hessovu matici platí

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$$

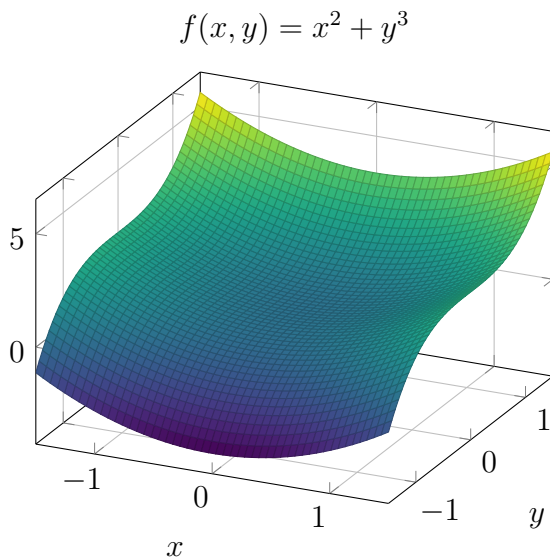
a proto  $\nabla^2 f(\theta) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Odpovídající kvadratická forma je rovna  $(x_1, x_2) \mapsto 2x_1^2$  a je PSD.

Funkce  $f$  v bodě  $\theta$  extrém nemá:  $f(0, y) = y^3$  je kladná pro  $y > 0$  a záporná pro  $y < 0$ ,  $f(\theta) = 0$ . Tedy jsme ve sporu se všemi podmínkami v Definicí 9.1. Graf této funkce je znázorněn na Obrázku 9.8.

Klíčem k důkazu je v podstatě Taylorova věta pro funkce více proměnných, kterou zde zformulujeme jenom v jednodušší verzi využívající pouze kvadratické členy.

**Lemma 9.1** (Taylorova věta do kvadratických členů s odhadem chyby): Mějme funkci  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D_f \subset \mathbb{R}^n$ , mající spojité všechny parciální derivace do třetího řádu včetně na okolí  $U_{\mathbf{a}}$  bodu  $\mathbf{a} \in D_f$ . Potom existuje konstanta  $M > 0$  taková, že pro každé  $\mathbf{x} \in U_{\mathbf{a}}$  platí

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{a})^T \cdot \nabla^2 f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) + R_2(\mathbf{x}),$$



Obrázek 9.8: Graf funkce z Příkladu 9.3.

kde  $|R_2(\mathbf{x})| \leq M\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^3$ .

*Náčrt důkazu Lemmatu.* Uvažme  $\mathbf{x} \in U_{\mathbf{a}}$  a funkci  $g(t) := f(\mathbf{a} + (\mathbf{x} - \mathbf{a})t)$ , definovanou pro všechna přípustná  $t$  (zcela jistě pro nějaký otevřený interval obsahující interval  $\langle 0, 1 \rangle$ ). Funkce  $g$  má na tomto intervalu spojité derivace do řádu 3 včetně.

Podle Taylorovy věty (Věta 5.4) pro funkci  $g$  a  $t \in \langle 0, 1 \rangle$  platí

$$g(t) = g(0) + g'(0)t + \frac{1}{2}g''(0)t^2 + \frac{1}{3!}g'''(\xi)t^3, \quad \text{kde } \xi \in \langle 0, t \rangle.$$

Použitím věty o derivaci složené funkce opět zjistíme, že

$$g'(0) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \quad \text{a} \quad g''(0) = (\mathbf{x} - \mathbf{a})^T \cdot \nabla^2 f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}).$$

Konečně, pro  $g'''$  platí

$$g'''(t) = \sum_{i,j,k=1}^n \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} (\mathbf{a} + (\mathbf{x} - \mathbf{a})t) (\mathbf{x} - \mathbf{a})_i (\mathbf{x} - \mathbf{a})_j (\mathbf{x} - \mathbf{a})_k.$$

Díky spojitosti parciálních derivací a uzavřenosti intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$  můžeme v absolutní hodnotě tento výraz odhadnout výrazem tvaru  $C \cdot (\sum_{i=1}^n |(\mathbf{x} - \mathbf{a})_i|)^3$ . Lze ukázat,

že tento výraz je dále menší než  $M\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^3$  a konstanta  $M$  nezávisí na  $\mathbf{x}$ . Nyní stačí položit  $t = 1$ .  $\square$

Nyní přistupme k důkazu Věty 9.3. Nejprve ošetříme případ PD a poté ostatní případy.

*Důkaz případu PD.* Mějme okolí  $\mathcal{U} := U_{\mathbf{a}}$  bodu  $\mathbf{a}$ , na kterém má funkce  $f$  spojitě všechny třetí parciální derivace a nechť platí uvedené podmínky:  $\nabla f(\mathbf{a}) = \theta$  a  $\nabla^2 f(\mathbf{a})$  je PD.

Uvažme libovolný bod  $\mathbf{x} \in U_{\mathbf{a}}$  různý od  $\mathbf{a}$ . Podle předchozího Lemmatu 9.1 existuje konstanta  $M > 0$  nezávislá na  $\mathbf{x}$  taková, že

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) = 0 + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{a})^T \cdot \nabla^2 f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) + R_2(\mathbf{x}),$$

kde  $|R_2(\mathbf{x})| < M\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^3$ .

Z PD kvadratické formy  $q(\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T \nabla^2 f(\mathbf{a}) \mathbf{y}$  plyne existence ortogonální regulární matice  $\mathbf{P}$  splňující

$$q(\mathbf{y}) = (\mathbf{P}\mathbf{y})^T \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mathbf{P}\mathbf{y} = \sum_{j=1}^n \lambda_j (\mathbf{P}\mathbf{y})_j^2 \geq \lambda_* \sum_{j=1}^n (\mathbf{P}\mathbf{y})_j^2 = \lambda_* \|\mathbf{y}\|^2,$$

kde  $\lambda_*$  je nejmenší z kladných vlastních čísel  $\nabla^2 f(\mathbf{a})$ .

Je-li nyní  $\mathbf{x} \in U_{\mathbf{a}}(\varepsilon) \subset \mathcal{U}$ , kde  $M\varepsilon < \frac{\lambda_*}{4}$ , pak

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) \geq \frac{\lambda_*}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2 - M\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^3 > \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2 \left( \frac{\lambda_*}{2} - M\varepsilon \right) > \frac{\lambda_*}{4} \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2. \quad \square$$

*Zbývající případy.* Případ ND ihned plyne z PD (jaký je vztah mezi typem extrému funkce  $f$  a  $-f$ , definitností formy  $q$  a  $-q$ ?)

Případ ID se ošetří analogicky, využijeme existence  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{y}$  takových, že

$$(\mathbf{x} - \mathbf{a})^T \nabla^2 f(\mathbf{a}) (\mathbf{x} - \mathbf{a}) > 0,$$

$$(\mathbf{y} - \mathbf{a})^T \nabla^2 f(\mathbf{a}) (\mathbf{y} - \mathbf{a}) < 0,$$

k tomu, abychom v odpovídajícím směru od  $\mathbf{a}$  našli vhodným škálováním (dost blízko k  $\mathbf{a}$ ) kladná  $h$  a  $t$  splňující

$$f(\mathbf{a} + h\mathbf{x}) > f(\mathbf{a}) \quad \text{a} \quad f(\mathbf{a} + t\mathbf{y}) < f(\mathbf{a}).$$

Tím je náčrt důkazu dokončen.  $\square$

Opět poznamenejme, že Věta 9.3 dává pouze postačující podmínky pro existenci lokálních extrémů. Pokud Hesseova matice ve stacionárním bodě vyjde PSD, nebo NSD, pak z této věty nic neplyne. V takovém případě nám nezbyvá nic jiného, než se obrátit zpět na Definicí 9.1 a *zkoumat* chování funkce v okolí stacionárního bodu. To jsme již několikrát ukázali v příkladech napříč touto kapitolou.

## 9.4 Příklady

V této sekci projdeme několik příkladů a ukážeme použití právě vybudované teorie. Volíme relativně jednoduché příklady, které lze i hezky vizualizovat.

**Příklad 9.4:** Nalezněte extrémy a sedlové body funkce

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2.$$

Podrobněji: nalezněte všechny stacionární body a rozhodněte, zda-li je v nich nabýván extrém a určete jeho typ. Případně existenci extrému ve stacionárním bodu vraťte.

*Řešení.* Definičním oborem této funkce je  $D_f = \mathbb{R}^2$ . Funkce je polynom, který má spojitě všechny své parciální derivace. Pro gradient platí

$$\nabla f(x, y) = (4x^3 - 2x - 2y, 4y^3 - 2x - 2y), \quad (x, y)^T \in \mathbb{R}^2.$$

Jeho nulovost je ekvivalentní podmínkám

$$2x^3 = x + y \wedge 2y^3 = x + y,$$

které nutně vyžadují  $x^3 = y^3$ , tj.  $x = y$ . Dosazením do původních rovnic dostaneme podmínku  $x^3 - x = x(x^2 - 1) = 0$ . Stacionární body existují proto celkem 3:

$$\mathbf{a} = (-1, -1)^T, \quad \mathbf{b} = (0, 0)^T, \quad \mathbf{c} = (1, 1)^T.$$

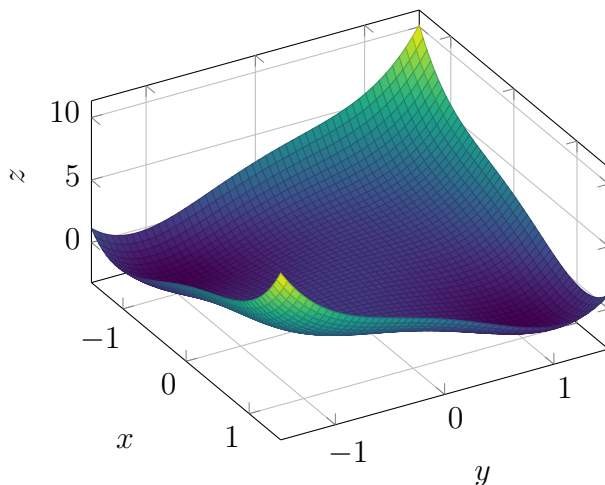
Pro Hessovu matici funkce  $f$  dále platí

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 2 & -2 \\ -2 & 12y^2 - 2 \end{pmatrix}, \quad (x, y)^T \in \mathbb{R}^2.$$

Ve stacionárních bodech pak máme

$$\nabla^2 f(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix} = \nabla^2 f(\mathbf{c}), \quad \nabla^2 f(\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$$



Obrázek 9.9: Vizualizace funkce z Příkladu 9.4.

První matice je PD podle Sylvesterova kritéria (Věta 8.3):  $10 > 0$  a  $100 - 4 = 96 > 0$ . V bodech **a** a **c** má naše funkce proto ostrá lokální minima.

Druhá matice je NSD, stačí provést jednoduchou úpravu na čtverec:  $-2x^2 - 4xy - 2y^2 = -2(x + y)^2$ . Naše kritéria proto ohledně ne/existence extrému v bodě **b** nic neimplikují. Musíme provést podrobnější inspekci.

Pro naši funkci platí  $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2 = x^4 + y^4 - (x + y)^2$ . Pokusme se vhodně využít tohoto rozkladu na součet kladné a záporné části. Využitím u **b** =  $\theta$  podstatnějšího (ale vynulovatelného) záporného členu se zkusme k bodu  $\theta$  blížit následujícími dvěma způsoby:

$$\begin{aligned} f(t, -t) &= 2t^4 > 0, & \text{pro } t \neq 0, \\ f(t, 0) &= t^4 - t^2 = t^2(t^2 - 1) < 0, & \text{pro } t \in (-1, 1) \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

V bodě **b** proto extrém nenastává. Vzhledem k výše popsanému chování bychom ho také mohli označit za sedlový bod. Na Obrázku 9.9 pro ukázkou uvádíme graf této funkce.

## Regrese pomocí metody nejmenších čtverců

Tuto podkapitolu lze považovat také za samostatný příklad, ale většího a důležitějšího rozsahu. Ukážeme jednu z možných metod jak tzv. „proložit data křivkou“, tedy jak provést tzv. „regresi“.

Předpokládejme, že máme k dispozici sadu dat  $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$  a chceme nalézt lineární kombinaci daných funkcí  $f_1, f_2, \dots, f_m$ , tj. funkci

$$f_{\mathbf{c}} = \sum_{i=1}^m c_i f_i,$$

tak, aby funkční hodnoty funkce  $f$  v bodech  $x_i$  co nejlépe odpovídaly hodnotám  $y_i$  pro každé  $i \in \hat{n}$ . Alternativně: snažíme se dobře vystihnout hypotetickou závislost  $y \approx f(x)$ .

Úkolem je určit neznámé koeficienty lineární kombinace:  $c_1, c_2, \dots, c_m$ .

Předpokládejme, že  $m \leq n$ . To není na závadu, neboť typicky je množství dat  $n$  mnohem větší než počet funkcí  $m$ .

Funkce  $f_i$  mohou být např. voleny tak, že  $f_i(x) = x^i$ . V tomto případě prokládáme data polynomiální křivkou. Funkce  $f_1, f_2, \dots, f_m$  nelze volit úplně libovolně, jedna podmínka svazující funkce  $f_1, f_2, \dots, f_m$  a data  $x_1, x_2, \dots, x_n$  nám vypadne z výpočtu dále.

Metoda nejmenších čtverců spočívá v myšlence minimalizovat kvadrát celkové chyby mezi  $y_i$  a  $f(x_i)$ . Přesněji, hledáme hodnoty  $c_1, c_2, \dots, c_m$  tak, aby hodnota

$$F(\mathbf{c}) := \sum_{i=1}^n (y_i - f_{\mathbf{c}}(x_i))^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - (\mathbf{A}\mathbf{c})_i)^2 = \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{c}\|_2^2$$

byla co nejmenší. Zde jsme označili

$$(\mathbf{A}\mathbf{c})_i = \sum_{j=1}^m f_j(x_i) c_j.$$

Matice  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,m}$  je dána hodnotami jednotlivých funkcí  $f_1, f_2, \dots, f_m$  v bodech

$x_1, x_2, \dots, x_n$ :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & f_3(x_1) & \cdots & f_m(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & f_3(x_2) & \cdots & f_m(x_2) \\ f_1(x_3) & f_2(x_3) & f_3(x_3) & \cdots & f_m(x_3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x_n) & f_2(x_n) & f_3(x_n) & \cdots & f_m(x_n) \end{pmatrix}. \quad (9.2)$$

Metodu nejmenších čtverců tedy můžeme shrnout takto

$$\begin{cases} \text{minimalizuj } \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{c}\|_2^2, \\ \text{vůči } \mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_m)^T \in \mathbb{R}^m, \\ \text{kde } \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n \text{ a } \mathbf{A}_{ij} = f_j(x_i) \text{ jsou dány.} \end{cases} \quad (9.3)$$

Aplikujme analytický postup pro hledání extrémů funkcí více proměnných. Předpokládejme navíc, že matice  $\mathbf{A}$  má plnou hodnotu, tzn.  $h(\mathbf{A}) = m$  (předpokládáme  $m \leq n$ ).

Nejprve hledejme gradient funkce  $F$ . Pro její parciální derivaci platí

$$\begin{aligned} (\partial_{c_j} F)(\mathbf{c}) &= -2 \sum_{i=1}^n (y_i - (\mathbf{A}\mathbf{c})_i) \mathbf{A}_{ij} = -2 \sum_{i=1}^n (\mathbf{A}^T)_{ji} y_i + 2 \sum_{i=1}^n (\mathbf{A}^T)_{ji} (\mathbf{A}\mathbf{c})_i \\ &= -2(\mathbf{A}^T \mathbf{y})_j + 2(\mathbf{A}^T \mathbf{A}\mathbf{c})_j. \end{aligned}$$

Pro její gradient proto platí

$$(\nabla_{\mathbf{c}} F)(\mathbf{c})^T = -2\mathbf{A}^T \mathbf{y} + 2\mathbf{A}^T \mathbf{A}\mathbf{c}, \quad (9.4)$$

kde spodní index u symbolu  $\nabla_{\mathbf{c}}$  nám připomíná, vůči kterým proměnným derivujeme.

Hledáme bod  $\mathbf{c}$ , kde  $\nabla_{\mathbf{c}} F(\mathbf{c}) = \theta$ . Protože  $\mathbf{A}$  má dle předpokladu plnou hodnotu, je matice  $\mathbf{A}^T \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,m}$  regulární. Z rovnosti (9.4) potom dostáváme řešení

$$\mathbf{c} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{y},$$

resp. umíme vždy vyřešit příslušnou nehomogenní lineární soustavu.

Hessovou maticí funkce  $F$  je shodou okolností právě matice  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  (až na multiplikativní číselný faktor). Skutečně, pro prvek Hessovy matice funkce  $F$  platí

$$\partial_{c_i c_j}^2 F(\mathbf{c}) = 2(\mathbf{A}^T \mathbf{A})_{ji}.$$



Matice  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  je pozitivně definitní, neboť pro  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$  je

$$x^T (\mathbf{A}^T \mathbf{A}) \mathbf{x} = (\mathbf{A} \mathbf{x})^T (\mathbf{A} \mathbf{x}) = \|\mathbf{A} \mathbf{x}\|^2 \geq 0$$

a rovnost nastává pouze pro  $\mathbf{x} = 0$ , protože je  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  regulární.

Shrnutí: prakticky tedy stačí sestavit příslušnou matici a vyřešit uvedenou soustavu lineárních rovnic.

**Příklad 9.5:** Představme si jednoduchou situaci, v které máme za úkol data

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 4, x_4 = 5, y_1 = 0, y_2 = 1, y_3 = 2, y_4 = 2$$

proložit přímkou.

*Řešení.* V předchozím obecném popisu tedy máme  $n = 4$ , hodnoty  $x$  a  $y$  jsou uvedeny výše a závislost se snažíme vystihnout lineární kombinací funkcí  $f_1(x) = 1$  a  $f_2(x) = x$ , tj.  $m = 2$ . Pro matici  $\mathbf{A}$  definovanou v (9.2) v tomto případě platí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Hledané koeficienty lineární kombinace jsou řešením lineární soustavy s maticí

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 12 & 46 \end{pmatrix}$$

a pravou stranou

$$\mathbf{A}^T \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 5 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

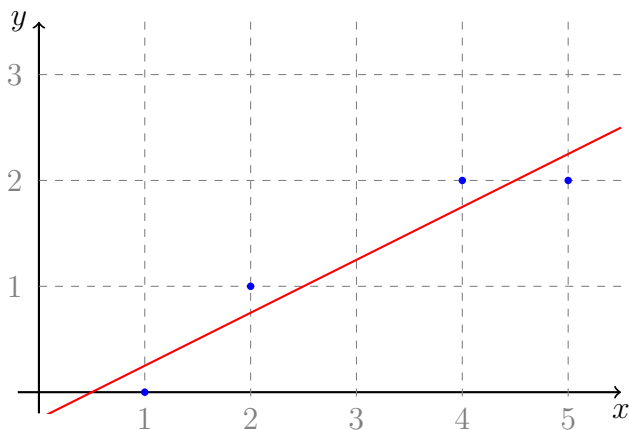
Tuto soustavu snadno vyřešíme a dostaneme vektor

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -1/4 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Hledanou lineární funkcí proto je

$$y = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}x.$$

Vizualizaci tohoto výsledku uvádíme na Obrázku 9.10.



Obrázek 9.10: Ilustrace k Příkladu 9.5: datové body (modře) a výsledná přímka (červeně).

## 9.5 Spádové metody

V této sekci si ukážeme obecný postup při numerickém hledání lokálních minim<sup>1</sup> funkcí  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  bez omezujících podmínek na proměnné  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Řešíme tedy úlohu

$$\text{minimalizuj } f(\mathbf{x}),$$

kde

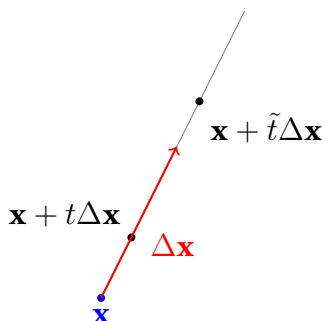
- $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  a  $x$  probíhá všechny možné hodnoty  $\mathbf{x} \in D_f$ ,
- definiční obor  $D_f$  je otevřená množina,
- funkce  $f$  je minimálně dvakrát spojitě diferencovatelná<sup>2</sup>.

Řešení hledáme iterativně pomocí tzv. **spádové metody** (*descent method*), jejíž princip je velmi jednoduchý: v každé iteraci se snažíme snížit hodnotu minimalizované funkce  $f$ .

Nechť je dána první aproximace  $\mathbf{x}^{(1)} \in D_f$  (náhodně vybraný vektor, nebo vektor vybraný na základě nějakého heuristického postupu). Sestavíme posloupnost

<sup>1</sup>To není žádné omezení, maxima  $f$  jsou minima  $-f$ .

<sup>2</sup>Tj. všechny její parciální derivace až do druhého řádu včetně jsou spojitě na  $D_f$ .



Obrázek 9.11: Ilustrace k volbě kroku.

vektorů  $(\mathbf{x}^{(k)})_{k=1}^{\infty}$ , podle rekurentního předpisu

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + t^{(k)} \Delta \mathbf{x}^{(k)},$$

kde „ $\Delta \mathbf{x}^{(k)}$ “ je vhodně zvolený vektor (směr poklesu) a  $t^{(k)}$  délka tzv. kroku. Následující člen vždy musí být zvolen tak, aby  $f(\mathbf{x}^{(k+1)}) < f(\mathbf{x}^{(k)})$ , samozřejmě vyjma případu, kdy  $\mathbf{x}^{(k)}$  je již optimální (je bodem lokálního minima).

Jak ale zvolit směr  $\Delta \mathbf{x}^{(k)}$  a krok  $t^{(k)}$ ? Tím se budeme zabývat v další části této podkapitoly.

## Jeden krok

Jeden krok typické spádové metody lze tedy popsat následovně (odpustíme si horní indexy, budeme mluvit o jednom kroku): Nechť je dáno  $\mathbf{x} \in D_f$ .

1. Urči směr  $\Delta \mathbf{x}$ .
2. Zvol velikost kroku  $t > 0$ .
3. Napočti  $\mathbf{x} + t\Delta \mathbf{x}$  a ulož ho do  $\mathbf{x}$ .

Pro grafickou ilustraci viz Obrázek 9.11.

Tento postup opakuj dokud není splněno kritérium pro zastavení iterační smyčky. Praktické kritérium pro zastavení může být například dostatečná nulovost gradientu. Je také vhodné kontrolovat maximální povolený počet iterací.

Konkrétní volbě směru  $\Delta \mathbf{x}$  se budeme věnovat podrobněji níže. V tento okamžik pouze uvedme, že pro  $t$  blízká nule přibližně platí (viz Taylorova věta, resp. Lemma 9.1)

$$f(\mathbf{x} + t\Delta \mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}) + t\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \Delta \mathbf{x}.$$

Pokud chceme být schopní i malým krokem funkční hodnotu *vždy* zmenšit, musíme směr kroku, tj.  $\Delta \mathbf{x}$ , vždy volit tak, aby

$$\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \Delta \mathbf{x} < 0.$$

Také ve zbytku popisu algoritmu předpokládáme, že v každém kroku  $\nabla f(\mathbf{x}) \neq 0$ . Pokud by gradient byl nulový, pak běh algoritmu již skončil a dostáváme kandidáta na extrém.

## Zpětné krokování

Nechť máme bod  $\mathbf{x}$  a již jsme zvolili směr  $\Delta \mathbf{x}$ . Ideálně bychom chtěli  $t > 0$  zvolit tak, aby v tomto bodě  $t$  bylo nabyto minimum funkce jedné proměnné  $s > 0$ ,

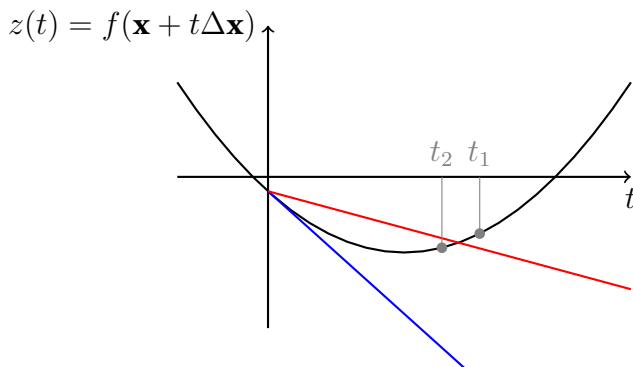
$$s \mapsto f(\mathbf{x} + s\Delta \mathbf{x})$$

Analytické řešení tohoto problému nemusí být obecně jednoduché, stejně bychom se museli uchýlit k numerickým metodám (ovšem s jednou proměnnou!). V praxi se často používá tzv. **zpětné krokování** (*backtracking*), které popíšeme v následujícím odstavci.

Algoritmus **zpětného krokování** probíhá následovně:

- Jsou dány  $f$ , směr  $\Delta \mathbf{x}$ , bod  $\mathbf{x} \in D_f$  a parametry  $\alpha \in (0, 1/2)$ ,  $\beta \in (0, 1)$ .
- Polož  $t := 1$ . Dokud  $f(\mathbf{x} + t\Delta \mathbf{x}) > f(\mathbf{x}) + \alpha t \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \Delta \mathbf{x}$  změň  $t$  na  $\beta t$ .
- Vrať  $t$ .

Parametr  $\alpha$  kontroluje, jaký pokles jsme ochotni akceptovat. Parametr  $\beta$  pak udává, jak rychle zmenšujeme prvotní  $t$  (proto zpětné krokování). Viz Obrázek 9.12.



Obrázek 9.12: Na obrázku je znázorněn řez grafu funkce nad přímkou  $\mathbf{x} + t\Delta\mathbf{x}$  (černě), tečna  $f(\mathbf{x}) + t\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \Delta\mathbf{x}$  a přípustná mez poklesu  $f(\mathbf{x}) + \alpha t\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \Delta\mathbf{x}$ . Bod  $t_1$  by nebyl akceptován (i když k poklesu došlo). Bod  $t_2$  by již akceptován byl (i když nedává nejmenší možnou hodnotu).

## Volby směru

Předpokládejme, že jsme v bodě  $\mathbf{x}$  a vydáme se malým krokem směrem  $\mathbf{v}$ . Potom lineární aproximace změny funkční hodnoty je

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{v}) \approx f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}.$$

Směry, ve kterých dojde k poklesu funkční hodnoty, splňují  $\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v} < 0$ .

Zvolme normu  $\|\cdot\|$  na  $\mathbb{R}^n$ . Směr nejprudšího poklesu je pak dán řešením úlohy

$$\Delta\mathbf{x} = \operatorname{argmin} \{ \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v} \mid \|\mathbf{v}\| \leq 1 \}.$$

Pro reálnou symetrickou pozitivně definitní matici  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n,n}$  můžeme definovat normu (pro Euklidovskou máme  $\mathbf{P} = \mathbf{E}$ )

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{P}} := \sqrt{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}, \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n.$$

Směr největšího poklesu vzhledem k této normě je pak dán vektorem

$$\Delta\mathbf{x} = -\mathbf{P}^{-1} \nabla f(\mathbf{x})^T.$$

Uvažme tedy obecně úlohu minimalizovat lineární reálnou funkci

$$g(\mathbf{v}) = \mathbf{c}^T \mathbf{v}, \quad D_g = \mathbb{R}^n,$$

kde  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$  je zadaný vektor, za podmínky

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v}^T \mathbf{v} = 1.$$

Vzpomeňme si, že ze Schwarzovy nerovnosti plyne nerovnost  $|g(\mathbf{v})| \leq \|\mathbf{c}\| \|\mathbf{v}\|$ , což za uvedené podmínky na vektory  $\mathbf{v}$  implikuje  $|g(\mathbf{v})| \leq \|\mathbf{c}\|$ . Těto maximální meze ale snadno dosáhneme právě volbami

$$\mathbf{v}_+ = \frac{\mathbf{c}}{\|\mathbf{c}\|} \quad \text{a} \quad \mathbf{v}_- = -\frac{\mathbf{c}}{\|\mathbf{c}\|}.$$

První vektor dává maximální hodnotu a druhý minimální hodnotu funkce  $g$  za uvedených podmínek. To jsme přesně očekávali: v kontextu předcházejících úvah je  $\mathbf{c}$  gradient.

*Důkaz pro případ Euklidovské normy.* Uvažme funkci  $g(\mathbf{v}) = \mathbf{c}^T \mathbf{v}$ ,  $\mathbf{v} \in D_g = \mathbb{R}^n$ , pro zadaný vektor  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ . Hledáme řešení úlohy

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{minimalizuj} \quad g(\mathbf{v}) = \mathbf{c}^T \mathbf{v}, \\ \text{za podmínky} \quad \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = 1, \\ \quad \quad \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n. \end{array} \right.$$

kde  $\mathbf{P}$  je (reálná) symetrická pozitivně definitní matice.

Matice  $\mathbf{P}$  má všechna vlastní čísla kladná a je diagonalizovatelná, tj.

$$\mathbf{P} = \mathbf{U} \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mathbf{U}^T,$$

kde  $\lambda_i > 0$ ,  $i \in \hat{n}$ , jsou vlastní čísla matice  $\mathbf{P}$  a matice  $\mathbf{U}$  je (reálná) a ortogonální.

Definujme matici  $\mathbf{P}^{1/2}$  předpisem

$$\mathbf{P}^{1/2} := \mathbf{U} \text{diag}(\lambda_1^{1/2}, \dots, \lambda_n^{1/2}) \mathbf{U}^T.$$

Tato matice splňuje  $\mathbf{P}^{1/2} \mathbf{P}^{1/2} = \mathbf{P}$ , je (reálná) symetrická a regulární. □

*Důkaz pro obecný případ: náčrt.* Naši minimalizační úlohu proto můžeme přepsat do následujícího tvaru,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{minimalizuj} \quad g(\mathbf{v}) = ((\mathbf{P}^{1/2})^{-1} \mathbf{c})^T \mathbf{P}^{1/2} \mathbf{v}, \\ \text{za podmínky} \quad (\mathbf{P}^{1/2} \mathbf{v})^T (\mathbf{P}^{1/2} \mathbf{v}) = 1, \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n. \end{array} \right.$$

Pokud provedeme změnu souřadnic  $\mathbf{z} := \mathbf{P}^{1/2}\mathbf{v}$ , tak dostaneme minimalizační úlohu tvaru

$$\begin{cases} \text{minimalizuj} & \tilde{g}(\mathbf{z}) = ((\mathbf{P}^{1/2})^{-1}\mathbf{c})^T \mathbf{z}, \\ \text{za podmínky} & \mathbf{z}^T \mathbf{z} = 1 \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

O té z předchozího případu víme, že nabývá maxima a minima v

$$\mathbf{z}_+ = \frac{(\mathbf{P}^{1/2})^{-1}\mathbf{c}}{\|(\mathbf{P}^{1/2})^{-1}\mathbf{c}\|} \quad \text{a} \quad \mathbf{z}_- = -\frac{(\mathbf{P}^{1/2})^{-1}\mathbf{c}}{\|(\mathbf{P}^{1/2})^{-1}\mathbf{c}\|}.$$

V původních proměnných pak v

$$\mathbf{v}_+ = \frac{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{c}}{\|(\mathbf{P}^{1/2})^{-1}\mathbf{c}\|} \quad \text{a} \quad \mathbf{v}_- = -\frac{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{c}}{\|(\mathbf{P}^{1/2})^{-1}\mathbf{c}\|}. \quad \square$$

## 9.6 Gradientová metoda / Gradientní sestup

Očividným kandidátem pro volbu směru kroku při minimalizaci je krok ve směru záporně vzatého gradientu (je-li nenulový), tj. volíme  $\mathbf{P} = \mathbf{E}$ ,

$$\Delta \mathbf{x} := -\nabla f(\mathbf{x}).$$

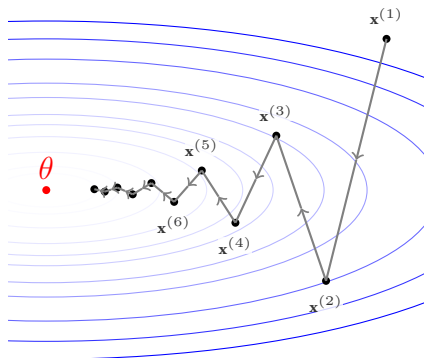
Potom skutečně

$$\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \Delta \mathbf{x} = -\|\Delta \mathbf{x}\|^2 < 0$$

Uvedme několik obecných komentářů k této volbě:

- Směr (pouhý gradient) je relativně snadno spočítatelný.
- Výsledný směr nemusí být ovšem „nejvhodnější“.
- Nevyužíváme žádným způsobem informaci obsaženou ve vyšších derivacích.

Na Obrázku 9.13 je ukázka pro funkci  $f(x, y) = \frac{1}{9}x^2 + y^2$ . Vidíme, že v tomto případě trajektorie nejde k jedinému globálnímu minimu zrovna přímočaře.



Obrázek 9.13: Ilustrace gradientního sestupu na funkci  $f(x, y) = \frac{1}{9}x^2 + y^2$ , která je zde znázorněna pomocí svých kontur.

## 9.7 Newtonova metoda

Newtonova metoda volí směr v bodě  $\mathbf{x}$  vzhledem k Hessově matici  $\mathbf{P} = \nabla^2 f(\mathbf{x})$ , tedy dle výpočtů výše

$$\mathbf{v}_- = -\frac{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{c}}{\|(\mathbf{P}^{1/2})^{-1}\mathbf{c}\|},$$

kde  $\mathbf{c} = \nabla f(\mathbf{x})$ . Tj. bez pro nás nepodstatného normalizačního faktoru dostáváme

$$\Delta\mathbf{x} = -(\nabla^2 f(\mathbf{x}))^{-1} \cdot \nabla f(\mathbf{x})^T.$$

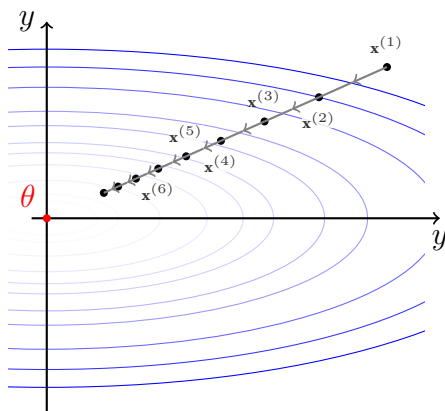
Opět učiňme na tomto místě pouze několik obecných poznámek:

- Tato metoda je jistě výpočetně náročnější, v každém kroku ještě musíme řešit soustavu lineárních rovnic. Opravdu není potřeba počítat maticovou inverzi, směr  $\Delta\mathbf{x}$  je řešením nehomogenní lineární soustavy

$$\nabla^2 f(\mathbf{x}) \cdot (-\Delta\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x})^T.$$

- Pokud to lze, tak to ale většinou stojí za to. Lze očekávat podstatně lepší míru konvergence než u obyčejné gradientové metody. Existují různé upravené verze této metody, které nepočítají celou Hessovu matici a příslušnou soustavu, ale snaží se jí například iterativně aproximovat.





Obrázek 9.14: Ilustrace k Newtonově metodě pro funkci  $f(x, y) = \frac{1}{9}x^2 + y^2$ , která je zde znázorněna pomocí svých kontur.

- Pro kvadratickou funkci uvedenou níže nepřekvapivě dostáváme směr přímo k  $\theta$ .
- Nepleťte tuto metodu s Newtonovou metodou v BI-MA1.

Na Obrázku 9.14 opět uvádíme opět ukázkou pro funkci  $f(x, y) = \frac{1}{9}x^2 + y^2$ . Protože jde ale o kvadratickou funkci, není překvapivé, že Newtonova metoda přesně vystihne směr k bodu  $\theta$ .

Pojďme chování Newtonovy metody podrobněji prozkoumat na funkcích tvaru  $f(x, y) = \alpha x^m + \beta y^n$ , kde  $\alpha, \beta > 0$  a  $m, n$  jsou kladná sudá přirozená čísla. V takovémto případě má funkce  $f$  právě jedno lokální (i globální) ostré minimum v bodě  $\theta$ . Pro její gradient platí

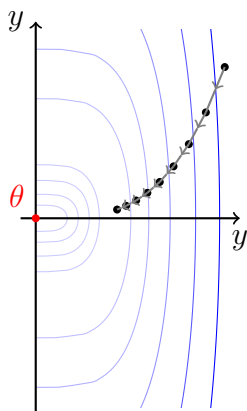
$$\nabla f(x, y) = (\alpha m x^{m-1}, \beta n y^{n-1}), \quad (x, y)^T \in \mathbb{R}^2$$

a pro Hesseovu matici pak

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha m(m-1)x^{m-2} & 0 \\ 0 & \beta n(n-1)y^{n-2} \end{pmatrix}, \quad (x, y)^T \in \mathbb{R}^2.$$

V bodě  $(x, y)^T \neq \theta$  tak Newtonova metoda volí směr

$$-(\nabla^2 f(x, y))^{-1} \cdot \nabla f(x, y)^T = - \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha m(m-1)x^{m-2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta n(n-1)y^{n-2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha m x^{m-1} \\ \beta n y^{n-1} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{1}{m} \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$



Obrázek 9.15: Ilustrace k Newtonově metodě pro funkci  $f(x, y) = x^4 + y^2$ , která je zde znázorněna pomocí svých kontur.

Pokud platí rovnost  $m = n$ , pak Newtonova metoda *vždy* volí přímý směr k extrému! Chování znázorněné na Obrázku 9.14 tak bude totožné například i pro funkci  $f(x, y) = \frac{1}{9}x^4 + y^4$ .

V případě  $m \neq n$  (stále obě kladná sudá) se již nevydáme zcela nejpřímějším směrem k minimum. Toto chování ilustruje Obrázek 9.15 na funkci  $f(x, y) = x^4 + y^2$ .

# 10 Vícerozměrná integrace

Tato kapitola uzavírá studium funkcí více proměnných stručným popisem jejich integrace. Naznačíme si Riemannovu konstrukci integrálu funkce více proměnných. Probereme základní vlastnosti Riemannova integrálu a jeho interpretaci. Důležitým výpočetním nástrojem pro nás bude Fubiniho věta a vícenásobný integrál.

Tato kapitola je více „početně“ zaměřená. Do důkazů se příliš nepouštíme. Pro vícerozměrnou teorii integrace by bylo daleko výhodnější využít **Lebesgueovy konstrukce integrálu**, kterou se na tomto místě zabývat nebudeme.

## 10.1 Riemannova konstrukce integrálu

Na začátku semestru (Kapitola 3) jsme v tomto předmětu zkonstruovali Riemannův integrál reálné funkce jedné reálné proměnné na intervalu  $\langle a, b \rangle$ .

Analogem intervalu v  $\mathbb{R}^2$  je obdélník, tedy kartézský součin dvou intervalů  $\langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle$ . Analogem intervalu v  $\mathbb{R}^3$  je kvádr, tedy kartézský součin tří intervalů  $\langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle \times \langle a_3, b_3 \rangle$ . Obecně, v  $\mathbb{R}^n$  se nejprve zabýváme integrací funkcí na množinách tvaru

$$\times_{j=1}^n \langle a_j, b_j \rangle,$$

tedy přes tzv. **hyperkvádr** (*hypercuboid*).

Pro jednoduchost a snazší představitelnost se při stručném popisu Riemannovy konstrukce integrálu omezíme na dvě proměnné. V následujících bodech shrneme modifikace Riemannovy konstrukce (Kapitola 3) do světa funkcí více (dvou) proměnných.

1. Mějme funkci dvou proměnných  $f$  definovanou a omezenou na obdélníku  $D := \langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle$ .

2. Pro dělení  $\sigma_x = \{x_0 = a_1 < x_1 < \dots < x_n = b_1\}$  intervalu  $\langle a_1, b_1 \rangle$  a  $\sigma_y = \{y_0 = a_2 < y_1 < \dots < y_m = b_2\}$  intervalu  $\langle a_2, b_2 \rangle$  definujeme

$$m_{i,j} := \inf\{f(x, y) \mid (x, y) \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle \times \langle y_{j-1}, y_j \rangle\},$$

$$M_{i,j} := \sup\{f(x, y) \mid (x, y) \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle \times \langle y_{j-1}, y_j \rangle\}, \quad i \in \hat{n}, j \in \hat{m}.$$

Množinu  $\sigma = \sigma_x \times \sigma_y$  nazveme **dělením obdélníku**  $D$ .

3. Dále definujeme **dolní a horní součty funkce**  $f$  **na obdélníku**  $D$  **při dělení**  $\sigma$  předpisem

$$s(f, \sigma) := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m m_{i,j} (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}),$$

$$S(f, \sigma) := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{i,j} (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}).$$

4. Nyní pro funkci  $f$  a obdélník  $D$  definujeme **horní a dolní integrál funkce**  $f$  **na obdélníku**  $D$  následujícím předpisem

$$\overline{\int_D} f(x, y) \, dx dy := \inf\{S(f, \sigma) \mid \sigma \text{ dělení obdélníku } D\},$$

$$\underline{\int_D} f(x, y) \, dx dy := \sup\{s(f, \sigma) \mid \sigma \text{ dělení obdélníku } D\}.$$

5. Omezenou funkci  $f$  nazveme **Riemannovsky integrabilní na obdélníku**  $D$ , právě když

$$\overline{\int_D} f(x, y) \, dx dy = \underline{\int_D} f(x, y) \, dx dy.$$

Tuto společnou reálnou hodnotu potom nazýváme **Riemannovým integrálem funkce**  $f$  **na obdélníku**  $D$  a značíme ji

$$\int_D f(x, y) \, dx dy \quad \text{nebo} \quad \int_D f.$$

Pokud bychom měli funkci  $f$  definovanou na hyperkvádru  $K \subset \mathbb{R}^n$ , pak příslušný Riemannův integrál značíme

$$\int_K f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n \quad \text{nebo} \quad \int_K f.$$

Jeho konstrukce probíhá analogicky.

Někdy se **vícerozměrnost** integrálu zdůrazňuje použitím více symbolů  $\int$ , tj. například integrál přes obdélník  $D \subset \mathbb{R}^2$  nebo kvádr  $K \subset \mathbb{R}^3$  bychom označili

$$\iint_D f(x, y) dx dy, \quad \iiint_K f(x, y, z) dx dy dz.$$

Pro větší počet rozměrů než tři to není moc praktické.

Poznamenejme, že Riemannova konstrukce opět dává návod, jak případnou hodnotu Riemannova integrálu hledat numericky. Velmi podobným způsobem jako v případě jedné proměnné. Více se touto problematikou na tomto místě zabírat nebudeme.

Než se pustíme do diskuze vlastností Riemannova integrálu, tak musíme zvětšit množinu množin, přes které má smysl integrovat. S integrací přes hyperkvádry bychom si nevystačili.

## Integrace přes obecnější množiny

Omezíme se opět na dvourozměrný případ  $D \subset \mathbb{R}^2$  a zavedeme dva typy množin.

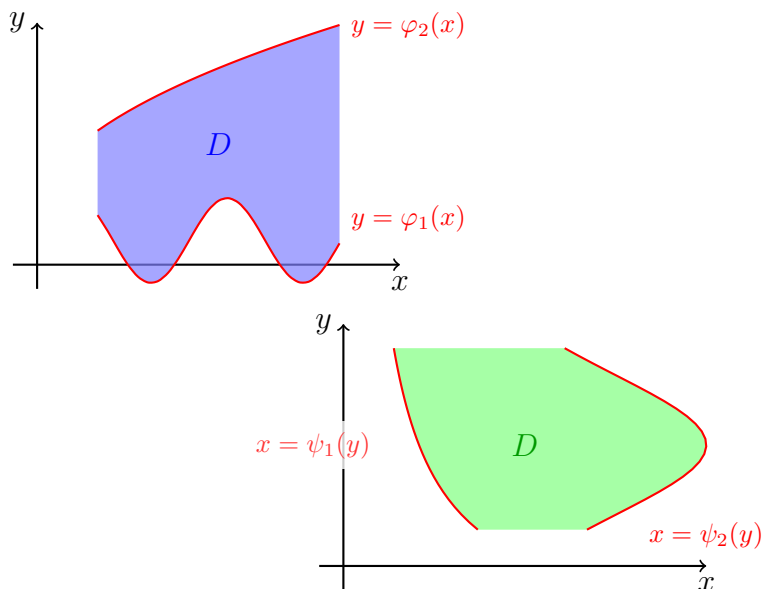
**Definice 10.1** (Množiny typu 1 a 2): O množině  $D \subset \mathbb{R}^2$  řekneme, že

- je **typu 1**, právě když existuje interval  $J = \langle a, b \rangle$  a dvě spojité funkce  $\varphi_1$  a  $\varphi_2$  definované na  $J$  a splňující  $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$  pro všechna  $x \in J$  tak, že

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in J \wedge \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}.$$

- je **typu 2**, právě když existuje interval  $J = \langle a, b \rangle$  a dvě spojité funkce  $\psi_1$  a  $\psi_2$  definované na  $J$  a splňující  $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$  pro všechna  $y \in J$  tak, že

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in J \wedge \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}.$$



Obrázek 10.1: Množiny typu 1 a typu 2.

Grafickou ilustraci uvádíme na Obrázku 10.1.

Máme-li nyní množinu  $D \subset \mathbb{R}^2$  typu 1 nebo 2, pak Riemannův integrál definujeme takto: množinu  $D$  vnoříme do vhodného obdélníku  $K$ , tj.  $D \subset K$ , a funkci vně  $D$  dodefinujeme/předefinujeme nulou.

Na obdélníku  $K \supset D$  definujeme funkci

$$g(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \notin D. \end{cases}$$

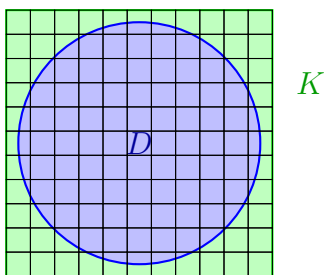
A klademe

$$\int_D f(x, y) \, dx dy := \int_K g(x, y) \, dx dy,$$

kde integrál na pravé straně je definován na začátku této podkapitoly.

## 10.2 Vlastnosti Riemannova integrálu

Nyní se zaměříme na nejzákladnější vlastnosti Riemannova integrálu pro funkce více proměnných.



Obrázek 10.2: K definici Riemannova integrálu přes množinu, která není obdélníkem (hyperkvádrem).

**Věta 10.1** (Postačující podmínka existence vícerozměrného integrálu): Nechť  $D$  je hyperkvádř nebo množina typu 1 nebo 2 a  $f$  spojitá funkce na  $D$ . Potom je funkce  $f$  Riemannovsky integrovatelná na množině  $D$ .

*Důkaz.* Důkaz vynecháváme. Podstatné je, že funkce  $f$  je pěkná (tj. spojitá) a integrujeme ji na pěkné množině („uzavřená“).  $\square$

Nechť  $D \subset \mathbb{R}^2$  je množina typu 1 nebo 2 (obsahuje případ obdélníku) a funkce  $f$  a  $g$  jsou spojité na  $D$ . Potom platí:

- Linearita: pro konstantu  $c$  platí

$$\int_D (f + cg) = \int_D f + c \int_D g.$$

- Nerovnosti: pokud  $f(x, y) \leq g(x, y)$  pro každé  $(x, y)^T \in D$ , pak

$$\int_D f \leq \int_D g.$$

- Obsah množiny  $D$ , ozn.  $\text{Vol}_2(D)$ , lze spočítat jako  $\text{Vol}_2(D) = \int_D 1$ .
- Chování v „mezích“: je-li  $C$  další množina typu 1 nebo 2 mající s množinou  $D$  v průniku pouze část „hranice,“ pak

$$\int_{C \cup D} f = \int_C f + \int_D f.$$

Analogická tvrzení platí i pro hyperkvádry  $K \subset \mathbb{R}^n$  a funkce spojitě na  $K$ .  
Na vícerozměrnou integraci narazíme v řadě různorodých situací:

- Popisuje-li  $\rho(x, y)$  hustotu desky (zobecnění do více rozměrů je přirozené)  $D$ , pak její hmotnost  $M$  a souřadnice jejího těžiště  $(X, Y)$  spočteme jako

$$M = \int_D \rho(x, y) \, dx dy, \quad X = \frac{1}{M} \int_D x \rho(x, y) \, dx dy, \quad Y = \frac{1}{M} \int_D y \rho(x, y) \, dx dy.$$

- Hustota pravděpodobnosti  $f(x, y)$  na množině  $D$  je funkce splňující

$$\int_D f(x, y) \, dx dy = 1.$$

- Je-li  $f(x, y) \geq 0$  pro  $(x, y) \in D$ , pak

$$\int_D f(x, y) \, dx dy$$

vyjadřuje objem tělesa ohraničeného množinou  $D$  a grafem funkce  $f$ .

- Obsah plochy  $z = f(x, y)$ , kde  $(x, y) \in D$ , se vypočte dle vzorce

$$\int_D \sqrt{1 + (\partial_x f(x, y))^2 + (\partial_y f(x, y))^2} \, dx dy.$$

- Fyzika...

## 10.3 Fubiniho věta

Pro analytické počítání je klíčová Fubiniho věta, která nám umožňuje vícerozměrný integrál počítat pomocí několika „jednorozměrných“ integrálů.

### Integrace přes hyperkvádry

První verze této věty mluví o integraci přes obdélník, zobecněním o kvádrech a hyperkvádrech.



**Věta 10.2** (Fubini pro hyperkvádr): Buď  $f$  Riemannovsky integrabilní na obdélníku  $D = \langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle$ . Pokud existuje jeden z integrálů

$$\int_{a_1}^{b_1} \left( \int_{a_2}^{b_2} f(x, y) dy \right) dx \quad \text{nebo} \quad \int_{a_2}^{b_2} \left( \int_{a_1}^{b_1} f(x, y) dx \right) dy \quad (10.1)$$

potom je roven Riemannově integrálu

$$\int_D f(x, y) dx dy.$$

**Poznámka 10.1:** Pořádně si rozmyslete, co se v rovnici (10.1) děje. Vyhnete se pak hloupým chybám při počítání příkladů. Např. vnitřní integrál v prvním výrazu,

$$\int_{a_2}^{b_2} f(x, y) dy$$

již představuje funkci *pouze* proměnné  $x$ . Přes  $y$  se již integrovalo.

K výpočtu vícerozměrného integrálu tedy lze použít opakovanou integraci funkce jedné proměnné probíranou na začátku semestru. Pro tyto účely máme celou řadu nástrojů (substituce, per partes, Newtonova formule..., viz Kapitoly 2 a 3).

Analogickou větu lze zformulovat i pro více než dvě proměnné a hyperkrychli. Například pro kvádr  $K = \langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle \times \langle a_3, b_3 \rangle$  bychom měli

$$\int_K f(x, y, z) dx dy dz = \int_{a_1}^{b_1} \left( \int_{a_2}^{b_2} \left( \int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$$

Všimněte si také, že pořadí integrace lze zaměnit, jen je potřeba hlídat pořadí intervalů a proměnných.

Důsledkem předchozí věty je následující užitečné tvrzení:

**Důsledek 10.1** (Integrace funkcí se separovanými proměnnými): Pokud integrujeme spojitou funkci tvaru  $f(x, y) = g(x) \cdot h(y)$  na obdélníku  $D = \langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle$ , pak

$$\int_D f(x, y) dx dy = \int_{a_1}^{b_1} g(x) dx \cdot \int_{a_2}^{b_2} h(y) dy.$$

*Důkaz.* Stačí v podstatě „dosadit“ do Věty 10.2 a dvakrát vytknout konstantu vůči příslušné integrační proměnné.  $\square$

**Příklad 10.1:** Vypočtěte integrál

$$\int_D (x + 2y) \, dx dy$$

kde  $D = \langle -1, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$ .

*Řešení.* K výpočtu můžeme použít dvou postupů, které lze i geometricky interpretovat. První výpočet (viz Obrázek 10.3),

$$\begin{aligned} \int_D (x + 2y) \, dx dy &= \int_{-1}^1 \left( \int_0^1 (x + 2y) dy \right) dx = \\ &= \int_{-1}^1 [xy + y^2]_{y=0}^{y=1} dx = \int_{-1}^1 (x + 1) dx = 2. \end{aligned}$$

Druhý výpočet (viz Obrázek 10.3),

$$\begin{aligned} \int_D (x + 2y) \, dx dy &= \int_0^1 \left( \int_{-1}^1 (x + 2y) dx \right) dy = \\ &= \int_0^1 \left[ \frac{x^2}{2} + 2xy \right]_{x=-1}^{x=1} dy = \int_0^1 4y dy = 2. \end{aligned}$$

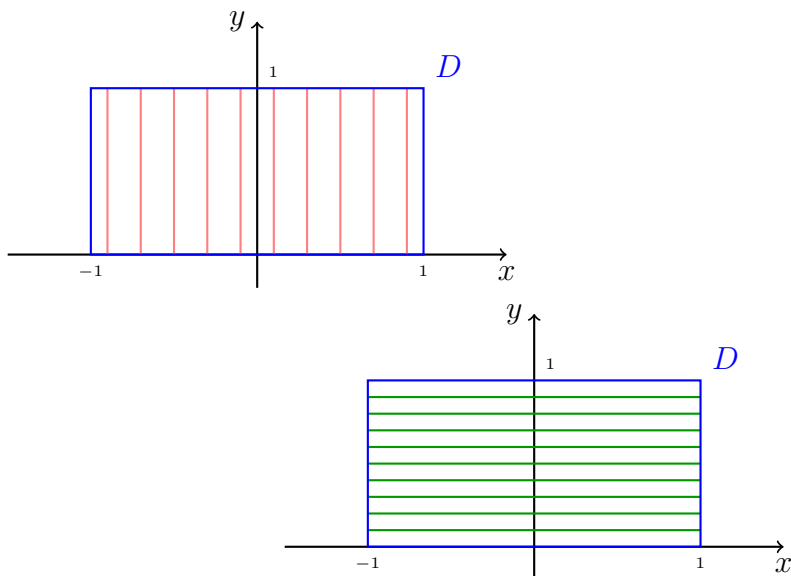
Pokud naše množina není obdélník, pak se situace malinko komplikuje, ale princip zůstává stejný. Pro množiny typu 1 nebo 2 máme následující verzi Fubiniho věty, viz také Obrázek 10.4.

**Věta 10.3** (Fubini pro množiny typu 1 nebo 2): Buď  $f$  spojitá na množině  $D$  typu 1 nebo 2. Potom

1. pro množinu  $D$  typu 1 platí 
$$\int_D f(x, y) \, dx dy = \int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) \, dy \right) dx,$$

2. pro množinu  $D$  typu 2 platí 
$$\int_D f(x, y) \, dx dy = \int_a^b \left( \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) \, dx \right) dy.$$

Základní použití této věty ilustruje následující příklad. Další příklady pak lze najít v Cvičebnici na MARASTu, případně další podkapitole.



Obrázek 10.3: Ilustrace k Příkladu 10.1. Dva možné způsoby jak integrovat přes obdélník.

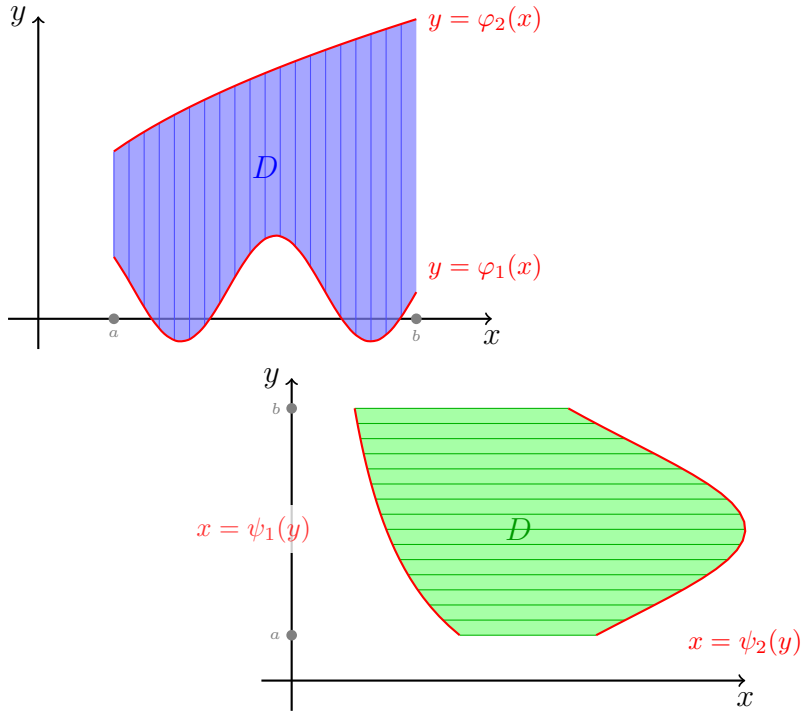
**Příklad 10.2:** Vypočtěte integrál

$$\int_D xy \, dx dy,$$

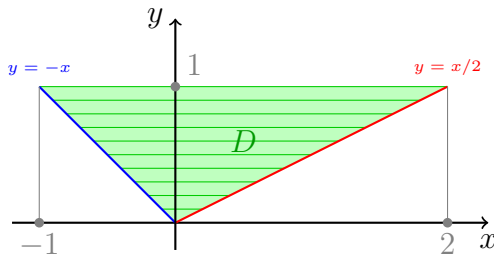
kde  $D \subset \mathbb{R}^2$  je trojúhelník s vrcholy  $(0, 0)$ ,  $(-1, 1)$  a  $(2, 1)$ . Viz Obrázek 10.5.

*Řešení.* Tento trojúhelník můžeme nejlépe popsat jako množinu typu 2 (alternativně bychom ji mohli brát jako sjednocení dvou množin typu 1, ale takový výpočet by nebyl nejpřímochařejší). Proto

$$\begin{aligned} \int_D xy \, dx dy &= \int_0^1 \left( \int_{-y}^{2y} xy \, dx \right) dy \\ &= \int_0^1 \left[ \frac{x^2}{2} y \right]_{x=-y}^{x=2y} dy \\ &= \int_0^1 2y^3 - \frac{y^3}{2} dy = \left[ \frac{3y^4}{8} \right]_0^1 = \frac{3}{8}. \end{aligned}$$



Obrázek 10.4: Integrace přes množiny typu 1 a 2, grafická interpretace vzorců ve Větě 10.3.



Obrázek 10.5: Ilustrace k Příkladu 10.2.

## 10.4 Příklady

Tuto kapitolu uzavřeme několika dalšími řešenými příklady.

**Příklad 10.3:** Mějme parametry  $a, b, c > 0$ . Vypočtěte objem elipsoidu s poloosami  $a, b, c$ , přesněji množiny

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$$

**Poznámka 10.2:** Důsledkem předchozího příkladu je známý vzorec pro objem koule  $S_r$  o poloměru  $r > 0$  (tj. máme elipsoid s  $a = b = c = r$ )

$$\text{Vol}_3(S_r) = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

*Řešení.* Provedeme-li řez elipsoidu rovinou  $z = \alpha \in (-c, c)$ , pak dostaneme elipsu  $E(\alpha)$

$$\frac{x^2}{a^2(1 - \alpha^2/c^2)} + \frac{y^2}{b^2(1 - \alpha^2/c^2)} = 1,$$

jejíž obsah již známe z Příkladu 3.11:  $\text{Vol}_2(E(\alpha)) = \pi ab \left(1 - \frac{\alpha^2}{c^2}\right)$ . Tudíž:

$$\begin{aligned} \text{Vol}_3(E) &= \int_E 1 \, dx dy dz = \int_{-c}^c \left( \int_{E(z)} 1 \, dx dy \right) dz = \pi ab \int_{-c}^c \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) dz = \\ &= \pi ab \cdot 2 \left[ z - \frac{z^3}{3c^2} \right]_0^c = 2\pi ab \left( c - \frac{c}{3} \right) = \frac{4}{3}\pi abc. \end{aligned}$$

# 11 Přehled použitého značení

Níže uvedené značení je kompatibilní s přednáškami a cvičeními BI-MA1 a BI-MA2.

Symbol	Význam	Definice
$:=$	definitivní rovnost, symbol na levé straně je definován výrazem na straně pravé	
$\approx$	přibližné vyjádření v jistém smyslu	
$\wedge$	logická konjunkce	BI-DML
$\vee$	logická disjunkce	BI-DML
$\Rightarrow$	logická implikace	BI-DML
$\Leftrightarrow$	logická ekvivalence	BI-DML
$\forall$	velký (obecný) kvantifikátor	BI-DML
$\exists$	existenční kvantifikátor	BI-DML
$\{a, b, c\}$	množina obsahující prvky $a, b$ a $c$	BI-DML
$\{x \in M \mid P(x)\}$	množina všech $x$ z $M$ splňující $P(x)$	BI-DML
$x \in M, x \notin M$	prvek $x$ patří/nepatří do množiny $M$	BI-DML
$A \subset B$	$A$ je podmnožinou $B$ (platí $A \subset A$ )	BI-DML
$\emptyset$	prázdná množina	BI-DML
$A \cup B$	sjednocení množin $A$ a $B$	BI-DML
$A \cap B$	průnik množin $A$ a $B$	BI-DML
$A \setminus B$	rozdíl množin $A$ a $B$	BI-DML
$A \times B$	kartézský součin množiny $A$ a $B$	BI-DML

## 11. PŘEHLED POUŽITÉHO ZNAČENÍ

Symbol	Význam	Definice
$\mathcal{P}(A)$	množina všech podmnožin množiny $A$	BI-DML
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$	množina přirozených čísel <i>bez nuly</i>	
$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$	množina přirozených čísel <i>s nulou</i>	
$\mathbb{Z}$	množina celých čísel	
$\mathbb{Q}$	množina racionálních čísel	
$\mathbb{R}$	množina reálných čísel	
$\overline{\mathbb{R}}$	rozšířená množina reálných čísel	BI-MA1
$\mathbb{R}_0^+$	nezáporná reálná čísla, tj. $\langle 0, +\infty \rangle$	
$\mathbb{R}^+$	kladná reálná čísla, tj. $(0, +\infty)$	
$\mathbb{R}^\infty$	prostor všech reálných posloupností	
$\hat{n}$	množina $\{1, 2, \dots, n\}$ pro $n \in \mathbb{N}$	
$\mathbb{C}$	množina komplexních čísel	
$n!$	faktoriál čísla $n \in \mathbb{N}_0$	BI-PKM
$\binom{n}{k}$	kombinační číslo $n$ nad $k$	BI-PKM
$[x]$	dolní celá část reálného $x$	BI-PKM
$\lceil x \rceil$	horní celá část reálného $x$	BI-PKM
$(a, b)$	otevřený interval nebo uspořádaná dvojice	BI-PKM
$\langle a, b \rangle$	uzavřený interval	BI-PKM
$U_a(\varepsilon)$ , resp. $U_{\mathbf{a}}(\varepsilon)$	$\varepsilon$ -okolí bodu $a$ , resp. $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ .	BI-MA1 a Definice 7.2
$U_a^+(\varepsilon)$ , resp. $U_a^-(\varepsilon)$	pravé, resp. levé $\varepsilon$ -okolí bodu $a$	BI-MA1
$U_{+\infty}(\alpha)$ , resp. $U_{-\infty}(\alpha)$	$\alpha$ -okolí bodu $+\infty$ , resp. $-\infty$	BI-MA1
$\ \mathbf{a}\ $	Euklidovská norma vektoru $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$	Definice 7.1
$\langle \mathbf{a} \mid \mathbf{b} \rangle$	standardní skalární součin vektorů $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$	rovnice (7.2)
$f : A \rightarrow B$	zobrazení množiny $A$ do množiny $B$	BI-DML
$D_f$	definiční obor zobrazení $f$	BI-DML
$H_f$	obor hodnot zobrazení $f$	BI-DML

Symbol	Význam	Definice
$f _M$	zúžení zobrazení $f$ na množinu $M$	BI-DML
$f(M)$	obraz množiny $M$ při zobrazení $f$	BI-DML, nepoužíváme
$f^{-1}(M), f_{-1}(M)$	vzor množiny $M$ při zobrazení $f$	BI-DML
$f \circ g$	složené zobrazení	BI-DML
$\text{id}_A$	identické zobrazení na množině $A$	BI-DML
$f^{-1}$	inverzní zobrazení	BI-DML
$(a_n)_{n=1}^{\infty}, (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$	reálná číselná posloupnost	BI-MA1
$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$	limita posloupnosti	BI-MA1
$\sum_{k=0}^{\infty} a_k, \sum_{k=0}^{\infty} a_k$	číselná řada	Definice 4.1
$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	limita funkce $f$ v bodě $a$	BI-MA1
$\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$	limita funkce $f$ v bodě $a$ zprava	BI-MA1
$\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$	limita funkce $f$ v bodě $a$ zleva	BI-MA1
$f'(a)$	derivace funkce $f$ v bodě $a$	BI-MA1
$T_{n,a}$	$n$ -tý Taylorův polynom se středem v bodě $a$	Definice 5.2
$R_{n,a}$	zbytek po $n$ -tém Taylorově polynomu v bodě $a$	Definice 5.3
$\int f, \int f(x) dx$	neurčitý integrál funkce $f$	Definice 2.2
$\int_a^b f(x) dx$	Riemannův určitý integrál funkce $f$ na intervalu $(a, b)$	Definice 3.5
$\overline{\int_a^b f(x) dx}$	horní integrál funkce $f$ na intervalu $(a, b)$	Definice 3.4
$\underline{\int_a^b f(x) dx}$	dolní integrál funkce $f$ na intervalu $(a, b)$	Definice 3.4
$S(\sigma, f)$	horní součet funkce $f$ při dělení $\sigma$	Definice 3.3
$s(\sigma, f)$	dolní součet funkce $f$ při dělení $\sigma$	Definice 3.3
$\mathcal{I}(\sigma, f)$	integrální součet funkce $f$ při rozdělení $\sigma$	Definice 3.7
$a_n \sim b_n$	asymptoticky ekvivalentní posloupnosti, pro $n \rightarrow \infty$ .	BI-MA1



## 11. PŘEHLED POUŽITÉHO ZNAČENÍ

Symbol	Význam	Definice
$\mathcal{O}(a_n)$	posloupnost s horní asymptotickou mezí $a_n$ , pro $n \rightarrow \infty$ .	BI-MA1
$\Omega(a_n)$	posloupnost s dolní asymptotickou mezí $a_n$ , pro $n \rightarrow \infty$ .	BI-MA1
$\Theta(a_n)$	posloupnost s asymptotickou těsnou mezí $a_n$ , pro $n \rightarrow \infty$ .	BI-MA1
$\frac{\partial f}{\partial x_j}$	parciální derivace funkce $f$ podle $j$ -té proměnné	Definice 7.10
$DF(\mathbf{a})$	derivace (vektorové) funkce $F$ v bodě $\mathbf{a}$	Definice 7.12
$\nabla f(\mathbf{a})$	gradient funkce $f$ v bodě $\mathbf{a}$	Definice 7.11
$\nabla^2 f(\mathbf{a})$	Hessova matice funkce $f$ v bodě $\mathbf{a}$	Definice 7.13
$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{a})$	derivace funkce $f$ ve směru $\mathbf{v}$ v bodě $\mathbf{a}$	Definice 7.13
$\int_D f(x, y) \, dx dy$	Riemannův integrál funkce $f$ dvou proměnných $x$ a $y$ na množině $D$	Podkapitola 10.1
$\overline{\int_D f(x, y) \, dx dy}$	horní integrál funkce $f$ na obdélníku $D$	Podkapitola 10.1
$\underline{\int_D f(x, y) \, dx dy}$	dolní integrál funkce $f$ na obdélníku $D$	Podkapitola 10.1
$\text{Vol}_n(M)$	objem množiny $M \subset \mathbb{R}^n$ .	

# Odpovědi na některé otázky

2.1  $F$  a  $H$ .

2.2 Primitivní funkcí je funkce  $x \cdot \ln(x) - x + C$ .

2.3 Pokud  $\alpha \neq 1$ , pak  $\int f(x)g(x) dx = \frac{h(x)}{1 - \alpha} + C$ .

3.1 Změna by měla zásadní vliv. Například libovolná spojitá nekonstantní funkce by náhle neměla integrál, v horních i dolních součtech vždy do pokrytí skutečné plochy pod grafem takovéto funkce bude chybět či přebývat a infima ani suprema v uvedené definici nikdy žádným rozdělením nedosáhneme. Integrál v tomto smyslu by měly například jen po částech konstantní funkce.

6.1 V definici LRR lze položit  $k = 0$ , ale výslednou rovnici nelze považovat za rekurentní. Dostali bychom explicitní předpis  $x_n = b_n$ ,  $n \geq n_0$ . V tomto případě není co řešit.

7.1 Normálovým vektorem je například  $(-f'(a), 1)$  a směrovým vektorem je například  $(1, f'(a))$ .

# Literatura

- [1] Jiří Kopáček. *Matematická analýza nejen pro fyziky I.* matfyzpress, 2004.
- [2] Jiří Kopáček. *Matematická analýza nejen pro fyziky II.* matfyzpress, 2004.
- [3] S. M. Samuels. A simplified proof of a sufficient condition for a positive definite quadratic form, 1966.

# Index

- $\delta$ 
  - Kroneckerovo, 138
- algoritmus
  - CORDIC, 97
- antiderivace, 2
- aproximace
  - Padého, 97
- bod
  - hraniční, 144
  - hromadný, 142
  - kritický, 183
  - stacionární, 183
  - vnitřní, 143
  - vnější, 146
- derivace
  - parciální, 155
  - složené funkce, 163
  - ve směru, 164
- determinant
  - Vandermondův, 112
- diagonalizace
  - symetrické matice, 170
- dělení
  - ekvidistantní, 21
  - intervalu, 20
  - norma, 21
- forma
  - kvadratická, 166
- formule
  - Newtonova, 30
- funkce, 150
  - Dirichletova, 27
  - exponenciální, 70
  - gradient, 158
  - integrovaná, 4
  - kvadratická, 80
  - limita, 150
  - lineární, 80
  - primitivní, 2
  - spojitá, 153
  - spojitá na množině, 153
  - spojitá v bodě, 153
  - více proměnných, 150
- gradient, 158
- hranice, 144
- hyperkvádr, 206
- integrace
  - per partes, 9, 32

- substituce, 11, 13, 33
- základní pravidla, 7
- integrand, 4
- integrál
  - absolutně konvergentní, 40
  - absolutně konvergentní Riemannův zobecněný, 40
  - aditivita, 29
  - aditivita v mezích, 29
  - dolní, 22
  - horní, 22
  - multiplikativita, 29
  - nerovnosti, 29
  - neurčitý, 4
  - Riemannův, 24
  - zobecněný Riemannův, 40, 41
- interval
  - dělicí body, 20
  - částečný, 20
- konstanta
  - Eulerova-Mascheroniová, 67
  - integrační, 4
- konvergence, 146
- kritérium
  - d'Alembertovo, 60
  - integrální, 67
  - obecné Sylvestrovo, 177
  - Sylvestrovo, 175
- krokování
  - zpětné, 199
- kvadratická forma
  - indefinitní, 168
  - negativně definitní, 169
  - negativně semidefinitní, 168
  - pozitivně definitní, 168
  - pozitivně semidefinitní, 168
- kvadratika, 167
- kvazipolynom, 119
- linearita
  - neurčitého integrálu, 7
- logaritmus
  - přirozený, 74
- matice
  - Hesseova, 161
  - přechodu, 109
  - symetrická, 166
- maximum
  - lokální, 180
  - ostré lokální, 180
- metoda
  - Gaussova eliminační, 17
  - iterační, 126
  - Mistrovská, 128
  - spádová, 197
  - substituční, 132
- minimum
  - lokální, 180
  - ostré lokální, 180
- množina
  - otevřená, 143
  - typu 1, 208
  - typu 2, 208
  - uzavřená, 146
  - uzávěr, 146
- mocnina
  - obecná, 75
- nerovnost
  - Schwarzova, 141
  - trojúhelníková, 141

- norma
  - Euklidovská, 140
- okolí
  - bodů, 142
- podmínky
  - počáteční, 103
- poloměr
  - konvergence, 91
- polynom, 78
  - charakteristický, LRR, 110
  - Maclaurinův, 84
  - nulový, 80
  - stupeň, 80
  - Taylorův, 82
- posloupnost
  - divergentní, 146
  - Fibonacciho, 104
  - konvergentní, 146
  - limita, 146
  - normální, 24
  - součet, 106
  - částečných součtů, 48
- pravidlo
  - Simpsonovo, 45
  - řetězové, 163, 164
- princip
  - superpozice, 105
- proměnná
  - integrační, 4
- prostor
  - všech posloupností, 106
- rovina
  - tečná, 160
- rovnice
  - homogenní, 102
  - koeficienty, 102
  - lineární rekurentní s konstantními koeficienty, 109
  - lineární rekurentní řádu  $k$ , 102
  - pravá strana, 102
  - přidružená homogenní, 102
- rozvoj
  - desetiný, 62
- součet
  - dolní, 21
  - dolní při dělení, 22
  - horní, 21
  - horní při dělení, 22
  - integrální při dělení, 25
- součin
  - standardní skalární, 140
- uzávěr, 146
- vzdálenost
  - Euklidovská, 140
- vzorec
  - Stirlingův, 66
  - Taylorův, 83
- věta
  - Fubiniho pro hyperkvádr, 212
  - Fubiniho pro množiny typu 1 nebo 2, 213
  - O jednoznačnosti primitivní funkce, 3
  - Postačující podmínka pro existenci Riemannova integrálu, 24
  - Taylorova, více proměnné, 189
- věže
  - Hanojské, 99

## zbytek

Lagrangeův, 87

Peanův tvar, 85

v Taylorově vzorci, 83

## zlomky

parciální, 16

## čísla

charakteristická, LRR, 110

## číslo

Eulerovo, 69, 73

## řada

absolutní konvergence, 54

absolutně konvergentní, 54

Bolzano-Cauchy, 54

divergence, 48

geometrická, 49

konvergence, 48

Leibnizovo kritérium, 55

mocinná, 89

nutná podmínka konvergence, 52

součet, 48

srovnávací kritérium, 59

Taylorova, 89

číselná, 48

## řez

zlatý, 118

## řešení

lineárně rekurentní rovnice, 102