

Vybrané matematické metody BI-VMM

Tomáš Kalvoda a František Štampach
KAM FIT ČVUT

24. dubna 2024

Obsah

1	Prolog: Komplexní čísla	4
1.1	Vlastnosti množiny komplexních čísel	4
1.1.1	Trojúhelníková nerovnost	6
1.1.2	Okolí komplexního čísla	6
1.2	Limita komplexních posloupností	8
1.3	Limita a spojitost funkce	9
1.4	Derivace funkce	10
1.5	Polární tvar komplexního čísla	11
1.6	Exponenciální funkce	11
1.7	Poznámky a odkazy	14
1.8	Cvičení	15
2	Fourierovy řady	24
2.1	Úvod	24
2.2	Konvergence Fourierových řad	25
2.3	Gibbsův efekt	30
2.4	Komplexní vyjádření	31
2.5	Parsevalova rovnost	32
2.6	Poznámky a odkazy	34
2.7	Cvičení	34
3	Diskrétní Fourierova transformace (DFT)	38
3.1	Úvod	38
3.2	Hilbertův prostor konečné dimenze	39
3.3	Unitární matice a operátory	45
3.4	DFT jako unitární operátor na \mathbb{C}^N	46
3.5	DFT a konvoluce	49

3.6	Poznámky a odkazy	51
3.7	Cvičení	51
4	Rychlá Fourierova transformace (FFT)	57
4.1	Cooleyho-Tukeyho algoritmus	58
4.2	Frekvenční spektrum audiosignálu (spektrogram)	59
4.3	Aplikace konvoluce: Gaussovské vyhlazování	65
4.3.1	Rychlé násobení polynomů	68
4.4	Poznámky a odkazy	69
4.5	Cvičení	69

Úvod

Tento dokument obsahuje poznámky k předmětu Vybrané matematické metody (BI-VMM), který je přednášen na FIT ČVUT v letním semestru akademického roku 2020/2021. Předmět tématicky navazuje a čerpá zejména z předmětů Základy matematické analýzy (BI-ZMA) a Lineární algebra (BI-LIN), přednášených pro studenty prvního ročníku.

Zabýváme se zde zejména Fourierovými řadami, diskrétní Fourierovou transformací, teorií funkcí více proměnných, obecnou optimalizační úlohou a obyčejnými diferenciálními rovnicemi. Dle zájmu studentů občas zařazujeme i přednášku o Lineárním programování (speciální případ optimalizační úlohy) na úkor některého z dříve uvedených témat. S funkcemi více proměnných se studenti setkají i v povinném magisterském předmětu Matematika pro informatiku (MI-MPI). Tvůrci tohoto textu jsou ale toho názoru, že i bakalářští studenti (zejména oborů Znalostního inženýrství) by s touto látkou měli přijít do styku podstatně dříve, než až během magisterského studia.

Cílů tohoto předmětu je několik. V některých partiích přednášky se snažíme studentům rozšířit rozhled v matematických tématech. V jiných, zejména aplikačních partiích, se snažíme nejen „klouzat po povrchu“ a naopak jít v rámci možností do hloubky. Tomu odpovídá i rozsah tohoto textu, který v každé kapitole obsahuje podrobný výklad, poté poznámky s případnými ukazateli na další literaturu pro zájemce o další studium a v neposlední řadě příklady k procvičování dané látky.

Tento text je psán méně formálním způsobem, než na jaký jste zvyklí z povinných předmětů. Nové pojmy a koncepty jsou zaváděny (definovány) průběžně v textu. Čtenář na ně je upozorněn tučným fontem.

1 Prolog: Komplexní čísla

*It is not knowledge, but the act of learning, not possession but the act of getting there, which grants the greatest enjoyment*¹. *Carl Friedrich Gauss*

V předmětu **BI-ZMA** jsme pracovali s reálnými číselnými posloupnostmi,

$$(a_n)_{n=0}^{\infty}, \quad a_n \in \mathbb{R} \text{ pro každé } n \in \mathbb{N},$$

reálnými číselnými řadami,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k, \quad a_k \in \mathbb{R} \text{ pro každé } k \in \mathbb{N},$$

a reálnými funkcemi jedné reálné proměnné $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ u kterých jsme studovali vlastnosti jako konvergence, spojitost a diferencovatelnost.

Všechny důležité pojmy jako např. omezenost posloupností a funkcí, konvergence řad a posloupností, limita funkce, spojitost funkce, derivace funkce stojí na pojmu *absolutní hodnoty reálného čísla*, resp. *okolí*. V této první rozcvičkové kapitole si ukážeme, jak pojem okolí rozšířit i na komplexní čísla a tím pádem i jak zavést tyto pojmy i pro komplexní posloupnosti a funkce komplexní proměnné.

1.1 Vlastnosti množiny komplexních čísel

Začněme připomenutím vlastností tělesa komplexních čísel, které v tomto předmětu bude hrát významnou roli. Je-li $z \in \mathbb{C}$ komplexní číslo tvaru²

$$z = a + bi, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

kde i je imaginární jednotka splňující $i^2 = -1$, pak o a mluvíme jako o reálné části čísla z a o b jako o imaginární části čísla z . Tato reálná čísla pak značíme symboly³

$$\Re z := a, \quad \Im z := b.$$

Komplexní čísla si proto můžeme představovat jako body v komplexní rovině v níž máme pravoúhlý souřadný systém, kde počátku odpovídá číslo $0 = 0 + 0i$, na vodorovnou osu vynášíme reálnou část komplexního čísla a na svislou osu imaginární část komplexního čísla (tzv. komplexní či Gaussova rovina, viz také Obrázek 1).

¹ *Wahrlich es ist nicht das Wissen, sondern das Lernen, nicht das Besitzen sondern das Erwerben, nicht das Da-Seyn, sondern das Hinkommen, was den grössten Genuss gewährt.*

² Je dobré si uvědomit, že symbol $+$ v tomto zápisu nehraje roli algebraické operace. Je to vlastně jen oddělovač, který říká co je reálná část a imaginární část komplexního čísla. Jinak řečeno, jde o jiný zápis uspořádané dvojice $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

³ Symbol $:=$ označuje definitivní rovnost. Symbol na levé straně od $:=$ je definován výrazem na pravé straně. Pověšiměte si, že \Re a \Im lze chápat jako zobrazení $\Re : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ a $\Im : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$.

Dvě komplexní čísla $z_1 = a_1 + b_1i$ a $z_2 = a_2 + b_2i$, $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, se **rovnají**, píšeme $z_1 = z_2$, právě když se rovnají jejich reálné a imaginární části. Komplexní čísla **sčítáme** a **násobíme** podle předpisu

$$z_1 + z_2 := (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i, \quad z_1 \cdot z_2 := a_1a_2 - b_1b_2 + (a_1b_2 + a_2b_1)i. \quad (1)$$

Sčítání se provádí tzv. po složkách a násobení formálně odpovídá roznásobení závorek a využití vztahu $i^2 = -1$. Množina \mathbb{C} s takto zavedenými binárními operacemi tvoří těleso (Cvičení 1.1). Znak pro násobení, tečku, ve většině případů explicitně nepíšeme.

Číslo **komplexně sdružené** k číslu $z = a + bi \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}$, definujeme předpisem

$$\bar{z} := a - bi.$$

Geometricky tato operace představuje zrcadlení vůči reálné ose v Gaussově rovině, viz Obrázek 1. Není těžké si rozmyslet⁴ (Cvičení 1.2), že pro $z, w \in \mathbb{C}$ platí

$$\overline{z\bar{w}} = \bar{z}w, \quad \overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w} \quad \text{a} \quad \overline{\bar{z}} = z. \quad (2)$$

Povšimněte si, že komplexní číslo z je reálné, právě když $\bar{z} = z$.

Podobně jako v případě reálných čísel máme k dispozici absolutní hodnotu komplexního čísla. Konkrétně pro komplexní číslo

$$z = a + bi, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

klademe⁵

$$|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$$

a toto reálné nezáporné číslo nazýváme **absolutní hodnotou komplexního čísla** z . Absolutní hodnotu komplexního čísla si představujeme jako délku úsečky spojující bod odpovídající číslu 0 a bod odpovídající číslu z v Gaussově (komplexní) rovině. Pro představu viz Obrázek 1.

Zmiňme několik užitečných vlastností absolutní hodnoty komplexního čísla. Zřejmě platí, že $|z|^2 = z\bar{z}$ a $|\bar{z}| = |z|$ pro každé komplexní číslo $z \in \mathbb{C}$. Skutečně, je-li $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, pak

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

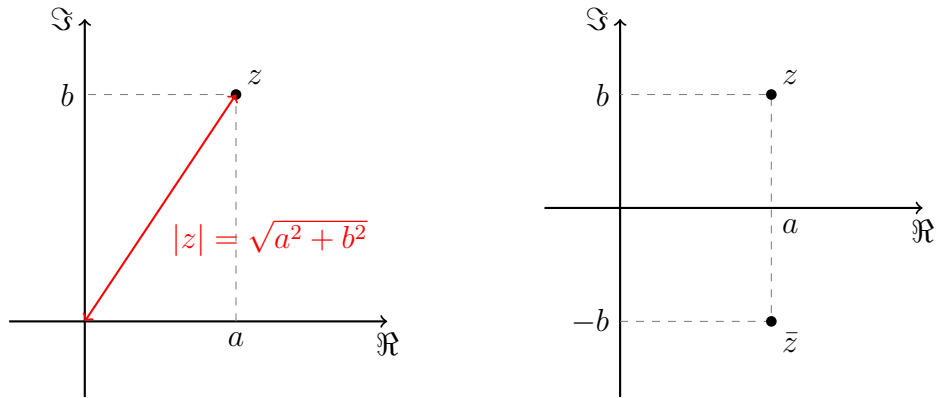
Dále pro libovolná komplexní čísla $z, w \in \mathbb{C}$ je $|zw| = |z| \cdot |w|$. Ano, podle výše uvedeného totiž platí

$$|zw|^2 = zw\overline{zw} = z\bar{z}w\bar{w} = |z|^2|w|^2.$$

Po odmocnění dostáváme požadovaný vztah mezi absolutními hodnotami.

⁴Synonymum pro lehký důkaz.

⁵Mohlo by se zdát, že symbol $|z|$ má nyní dva významy – každé reálné číslo je i komplexní číslo. Oba významy ale v tomto případě splývají: $|a + 0i| = \sqrt{a^2 + 0^2} = \sqrt{a^2} = |a|$.



Obrázek 1: Vlevo: absolutní hodnota komplexního čísla $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, v Gaussově (komplexní) rovině. Vpravo: komplexně sdružené číslo \bar{z} k číslu $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$.

1.1.1 Trojúhelníková nerovnost

Absolutní hodnota komplexního čísla splňuje **trojúhelníkovou nerovnost**. Pro komplexní čísla $z, w \in \mathbb{C}$ platí

$$|z + w| \leq |z| + |w|.$$

Proč se této nerovnosti říká „trojúhelníková“ je zřejmé z Obrázku 2.

Důkaz trojúhelníkové nerovnosti. Pro kvadrát absolutní hodnoty platí

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w)\overline{(z + w)} = (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) = z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} = \\ &= |z|^2 + 2\Re(z\bar{w}) + |w|^2. \end{aligned}$$

Obecně ale pro komplexní číslo $u \in \mathbb{C}$ platí vztah $\Re u \leq |u|$ (Cvičení 1.3), čili

$$|z + w|^2 \leq |z|^2 + 2|z\bar{w}| + |w|^2 = |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2.$$

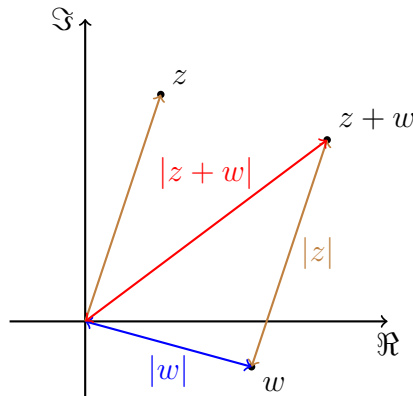
Po odmocnění získáváme požadovanou nerovnost. □

1.1.2 Okolí komplexního čísla

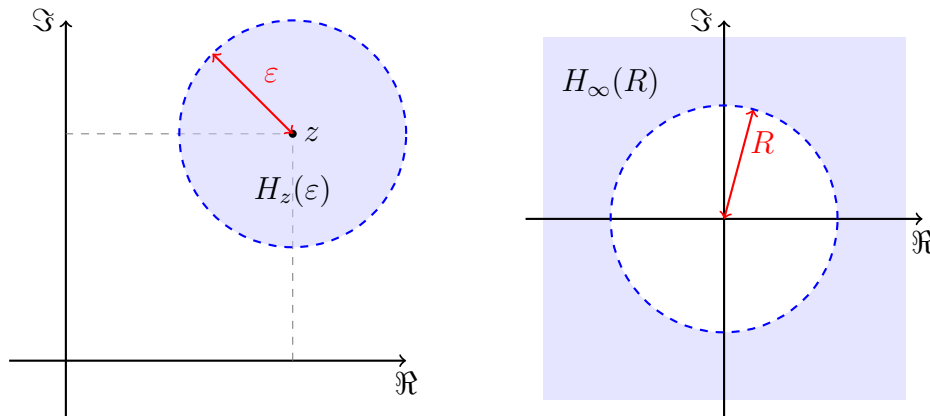
Po těchto úvodních odstavcích s povídáním o komplexních číslech se vraťme k pojmu okolí. Připomeňme, že pro $a \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$ jsme v BI-ZMA definovali okolí bodu a o poloměru ε předpisem

$$H_a(\varepsilon) := (a - \varepsilon, a + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon\} \subset \mathbb{R}.$$

O bodu a mluvíme také jako o **středu** okolí $H_a(\varepsilon)$. Dále jsme definovali okolí bodu $+\infty$, resp. $-\infty$, jako množinu $H_{+\infty}(K) = (K, +\infty)$, resp. $H_{-\infty}(K) = (-\infty, K)$, pro zadané reálné $K \in \mathbb{R}$.



Obrázek 2: Grafická ilustrace trojúhelníkové nerovnosti $|z + w| \leq |z| + |w|$ pro komplexní čísla $z, w \in \mathbb{C}$.



Obrázek 3: Vlevo: okolí bodu $z \in \mathbb{C}$ s poloměrem $\varepsilon > 0$. Vpravo: okolí ∞ s parametrem R , vyznačená oblast pokrývá celou rovinu vyjma bílého kruhu (včetně „hraniční“ kružnice).

Jsouce vybaveni pojmem absolutní hodnoty komplexního čísla, můžeme definovat **okolí** bodu $z \in \mathbb{C}$ s poloměrem $\varepsilon > 0$ prakticky stejným předpisem jako v předchozím odstavci,

$$H_z(\varepsilon) := \{w \in \mathbb{C} \mid |w - z| < \varepsilon\} \subset \mathbb{C}.$$

Množina $H_z(\varepsilon)$ geometricky představuje kruh (disk) v komplexní rovině se středem v bodě z a poloměrem ε . Hranice kruhu do této množiny nepatří. Vidíme, že názvosloví spojené s pojmem okolí (střed, poloměr) má vlastně v komplexní rovině výstižnější význam než na reálné ose, viz Obrázek 3.

Podobně jako jsme k množině \mathbb{R} přidali dva prvky $+\infty$ a $-\infty$, přidáváme k \mathbb{C} prvek ∞ . Tuto rozšířenou množinu opět značíme $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Okolí ∞ v komplexní rovině pak je dáno

$$H_\infty(R) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\} \subset \mathbb{C},$$

kde $R > 0$ je kladný parametr. Geometricky tedy $H_\infty(R)$ představuje vnějšek kruhu o

poloměru R a středu v bodě 0 . Poznamenejme, že ačkoliv platí $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ inkluze $\overline{\mathbb{R}} \subset \overline{\mathbb{C}}$ už pravdivá není. Upozorňujeme čtenáře aby se zamyslel nad rozdílem mezi symboly ∞ , $+\infty$ a $-\infty$. Nyní je tedy nutné skutečně ukončit občasně lajdácké psaní ∞ místo $+\infty$. Jedinou výjimkou z tohoto pravidla je použití symbolu ∞ v notaci limit posloupností a řad.

1.2 Limita komplexních posloupností

Nyní můžeme zavést pojem *limity* pro komplexní číselné posloupnosti (prakticky překopírováním definice pro reálné číselné posloupnosti). Řekneme, že posloupnost komplexních čísel $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ **má limitu** $w \in \overline{\mathbb{C}}$, právě když pro každé okolí H_w bodu w existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pokud $n > n_0$ pak $z_n \in H_w$. Pokud w je limitou posloupnosti $(z_n)_{n=0}^{\infty}$, pak tuto skutečnost symbolicky zapisujeme následujícími ekvivalentními způsoby

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = w \quad \text{nebo} \quad z_n \rightarrow w.$$

Pokud limita posloupnosti $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ existuje a její hodnota w není ∞ , tj. $w \in \mathbb{C}$, pak o této posloupnosti mluvíme jako o **konvergentní** posloupnosti.

Není těžké si rozmyslet, že tento pojem limity má spoustu vlastností shodných s limitou zavedenou pro reálné posloupnosti v **BI-ZMA**. Speciálně například každá posloupnost má nejvýše jednu limitu⁶, dále každá posloupnost vybraná z posloupnosti mající limitu má stejnou limitu jako původní posloupnost. Stále také platí vhodně upravená věta o limitě součtu, součinu a podílu posloupností. Viz také Cvičení 1.9.

Některé koncepty se do komplexního oboru ovšem nepřenesou. Na rozdíl od reálných posloupností nemáme pojem *monotónní posloupnosti*. Mezi komplexními čísly *není* zavedeno žádné standardní uspořádání. Podobně v komplexním oboru nemáme „jednostranná“ okolí bodů.

Vedlejší vlastností pojmu konvergence komplexních posloupností je platnost známé Bolzanovy–Cauchyovy podmínky (**úplnost** tělesa komplexních čísel):

Věta 1.1 (Bolzano–Cauchy): Komplexní posloupnost $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ konverguje, právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pokud $n, m > n_0$ pak $|z_n - z_m| < \varepsilon$.

Důkaz. Nejprve dokažme jednodušší implikaci zleva doprava. Předpokládejme, že $z_n \rightarrow w$. Pro $\varepsilon > 0$ máme k dispozici $n_0 = n_0(\varepsilon/2)$ takové, že je-li $n > n_0$ pak $z_n \in H_w(\varepsilon/2)$. Pro libovolná $n, m > n_0$ tedy platí

$$|z_n - z_m| = |z_n - w + w - z_m| \leq |z_n - w| + |w - z_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Naopak, předpokládejme, že platí tvrzení na pravé straně ekvivalence. Uvažme reálné posloupnosti $(\Re z_n)_{n=0}^{\infty}$ a $(\Im z_n)_{n=0}^{\infty}$. Dle předpokladu pro $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pokud $n, m > n_0$ pak⁷

$$|\Re z_n - \Re z_m| \leq |z_n - z_m| < \varepsilon \quad \text{a} \quad |\Im z_n - \Im z_m| \leq |z_n - z_m| < \varepsilon.$$

⁶Každá dvě různá komplexní čísla totiž mají disjunktní okolí. Toto tvrzení je pravdivé připustíme-li i nekonečno.

⁷Pro \Re (i \Im) platí $\Re(z - w) = \Re z - \Re w$ a $|\Re z| \leq |z|$ pro libovolná $z, w \in \mathbb{C}$.

Posloupnosti $(\Re z_n)_{n=0}^{\infty}$ a $(\Im z_n)_{n=0}^{\infty}$ proto splňují Bolzano–Cauchyovu podmínku konvergence (viz [BI-ZMA](#)) pro reálné posloupnosti a proto existují konečné reálné limity

$$a := \lim_{n \rightarrow \infty} \Re z_n \in \mathbb{R} \quad \text{a} \quad b := \lim_{n \rightarrow \infty} \Im z_n \in \mathbb{R}.$$

Označme $w := a + bi$. Potom s využitím trojúhelníkové nerovnosti dostáváme

$$|z_n - w| = |\Re z_n - a + i(\Im z_n - b)| \leq |\Re z_n - a| + |\Im z_n - b| \rightarrow 0$$

a proto $z_n \rightarrow w$. □

Všimněte si, že důkaz stojí na Bolzanově–Cauchyově podmínce pro reálné posloupnosti (tedy úplnosti reálných čísel).

1.3 Limita a spojitost funkce

Posuňme se nyní od posloupností k funkcím. V této sekci se lehce odchýlíme od způsobu, jakým je limita funkce zavedena v úvodním kurzu [BI-ZMA](#) a zavedeme limitu o něco obecněji.

Nejprve ještě zavedme dva užitečné pojmy. **Hromadným bodem** množiny $M \subset \mathbb{C}$ nazýváme bod $w \in \bar{\mathbb{C}}$ takový, že každé okolí H_w bodu w obsahuje alespoň jeden bod množiny M různý od w . Hromadný bod množiny M očividně nemusí být prvkem množiny M .

Uvažme nyní funkci $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ definovanou na (neprázdné) množině $M \subset \mathbb{C}$ a hromadný bod $w \in \bar{\mathbb{C}}$ množiny $M = D_f$. Bod $u \in \bar{\mathbb{C}}$ nazveme **limitou funkce f v bodě w** , právě když pro každé okolí H_u bodu u existuje okolí H_w bodu w takové, že kdykoliv $z \in (H_w \setminus \{w\}) \cap M$ pak platí $f(z) \in H_u$. Tuto situaci symbolicky zapisujeme následovně

$$\lim_{z \rightarrow w} f(z) = u \quad \text{nebo} \quad \lim_w f = u.$$

Je-li dále $N \subset M$ množina mající w také jako hromadný bod, pak klademe

$$\lim_{\substack{z \rightarrow w \\ z \in N}} f(z) := \lim_{z \rightarrow w} (f|_{M \cap N})(z)$$

a mluvíme o **limitě funkce f vzhledem k množině N** . Viz také Cvičení [1.11](#).

I pojem limity funkce zavedený tímto způsobem má podobné vlastnosti jako v [BI-ZMA](#). Speciálně například platí

$$\begin{aligned} \lim_w (f + g) &= \lim_w f + \lim_w g, \\ \lim_w (f \cdot g) &= \lim_w f \cdot \lim_w g, \\ \lim_w \frac{f}{g} &= \frac{\lim_w f}{\lim_w g}, \end{aligned}$$

za předpokladu, že bod w je hromadným bodem množiny $D_f \cap D_g$, limity $\lim_w f$ a $\lim_w g$ existují a výrazy na pravých stranách rovností mají dobrý smysl.

Spojitosť funkce f v bodě $w \in D_f$ zavádíme pak jednoduše požadavkem

$$\lim_{z \rightarrow w} f(z) = f(w).$$

Pod **spojitou funkcí** pak máme na mysli funkci spojitou v každém bodě svého definičního oboru.

1.4 Derivace funkce

Z předešlého textu můžete mít pocit, že v komplexním oboru vše funguje tak jak jsme zvyklí a že až na pár drobných detailů bude vše jako při starém. Tento pocit se významně zlomí jakmile se začneme zabývat derivací komplexní funkce komplexní proměnné.

Uvažme funkci $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ definovanou na množině $M = D_f \subset \mathbb{C}$ a bod w takový, že existuje H_w okolí bodu w splňující $H_w \subset M$. Takovýto bod je zcela jistě hromadným bodem množiny M . Existuje-li konečná⁸ limita

$$\lim_{z \rightarrow w} \frac{f(z) - f(w)}{z - w},$$

pak ji nazýváme **derivací funkce f v bodě w** a značíme ji $f'(w)$.

Nyní by opět bylo možné odvodit známá pravidla pro derivování součtu, součinu a podíly funkcí. Existence derivace komplexní funkce komplexní proměnné ovšem klade velmi striktní omezení na funkci samotnou. Ilustrujme toto tvrzení na jednom jednoduchém příkladu.

Uvažme funkci $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ mající derivaci $f'(w) \in \mathbb{C}$ v hromadném bodě $w = a + bi$ otevřené množiny $M \subset \mathbb{C}$. Dále předpokládejme, že funkce f nabývá pouze reálných hodnot, tj. $f(M) \subset \mathbb{R}$. Potom současně platí

$$f'(w) = \lim_{\substack{h \rightarrow a \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(h + bi) - f(w)}{h - a} \in \mathbb{R},$$

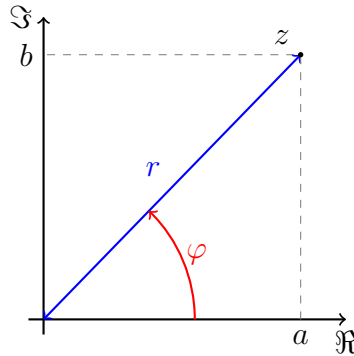
$$f'(w) = -i \lim_{\substack{h \rightarrow b \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(a + hi) - f(w)}{h - b} \in i\mathbb{R}.$$

A nutně proto $f'(w) = 0$. Takováto funkce je proto konstantní na množině M !

Předchozí odstavec můžeme přeformulovat úderněji takto: komplexních funkcí s reálným oborem hodnot existuje jistě celá řada, ovšem mezi všemi těmito funkcemi jsou diferencovatelné pouze ty konstantní!

Ba co víc. Lze ukázat, že má-li komplexní funkce komplexní proměnné konečnou derivaci, pak má i derivace všech vyšších řádů! V teorii komplexní funkce komplexní proměnné se mluví o tzv. *holomorfních funkcích*. Případného zvědavého čtenáře odkazujeme na literaturu zmíněnou v Sekci 1.7.

⁸Tj. $\in \mathbb{C}$.



Obrázek 4: Polární tvar komplexního čísla $z = a + bi = re^{i\varphi}$.

1.5 Polární tvar komplexního čísla

Abychom uvedli příští kapitolku připomeňme, že ze středoškolské matematiky jistě znáte tzv. **polární tvar** komplexního čísla $z \in \mathbb{C}$,

$$z = r e^{i\varphi} := r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad r \geq 0, \varphi \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

V podstatě nejde o nic jiného, než o přechod od kartézských (reálná a imaginární osa) souřadnic v komplexní rovině k polárním souřadnicím (vhodně měřený úhel a vzdálenost od počátku). Ilustraci tohoto konceptu lze shlédnout v Obrázku 4. Hodnota φ není dána jednoznačně, ale až na celočíselné násobky 2π . Abychom zajistili jednoznačnost musíme omezit možné hodnoty φ . Standardně se požaduje $\varphi \in (-\pi, \pi)$. Přesněji, platí-li pro $z \neq 0$ rovnost $z = r e^{i\varphi}$, kde $\varphi \in (-\pi, \pi)$ pak o φ mluvíme jako o **argumentu** čísla z a značíme ho $\arg z = \varphi$.

Volíme-li v rovnici (3) speciálně $r = 1$ a $\varphi = \pi$ dostáváme jednu z nejkrásnějších matematických rovnic⁹

$$e^{i\pi} + 1 = 0. \quad (4)$$

Jedná se pouze o formální zápis, nebo mu lze dát hlubší význam? Má symbol $e^{i\pi}$ zavedený v rovnici (3) skutečně něco společného s exponenciální funkcí známou z **BI-ZMA**? Na tyto a další otázky odpovíme v další kapitole.

1.6 Exponenciální funkce

This is the most important function in mathematics.

Walter Rudin

Uvažme komplexní číslo $z \in \mathbb{C}$ a posloupnost $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ (ve skutečnosti tedy posloupnost částečných součtů jisté komplexní číselné řady) komplexních čísel

$$s_n := \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

⁹Skutečně! Tato rovnost vyhrává matematické soutěže krásy.

Pro libovolná přirozená n, m splňující $n > m$ platí rovnost

$$s_n - s_m = \sum_{k=m+1}^n \frac{z^k}{k!}$$

a díky (několikrát použité) trojúhelníkové nerovnosti pak i nerovnost

$$|s_n - s_m| \leq \sum_{k=m+1}^n \frac{|z|^k}{k!}.$$

Reálná číselná řada

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!}$$

je ale podle d'Alembertova kritéria¹⁰ (absolutně) konvergentní. Podle Bolzanovy–Cauchyovy podmínky pro reálné číselné řady můžeme proto pro libovolné $\varepsilon > 0$ najít přirozené n_0 tak, že pro každé $n, m > n_0$, $n > m$, je

$$\sum_{k=m+1}^n \frac{|z|^k}{k!} < \varepsilon.$$

Tím pak ale pro tato n a m platí i nerovnost

$$|s_n - s_m| \leq \sum_{k=m+1}^n \frac{|z|^k}{k!} < \varepsilon.$$

Podle Bolzanova–Cauchyova kritéria (Věta 1.1) pro komplexní posloupnosti je tedy konvergentní i komplexní posloupnost $(s_n)_{n=1}^{\infty}$. Označme její limitu očekávaným symbolem

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}.$$

V předchozím odstavci jsme zjistili, že komplexní řada

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

konverguje pro libovolné $z \in \mathbb{C}$. Její součet je jednoznačně určené komplexní číslo. Tímto způsobem definujeme zobrazení $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

¹⁰Uvažme reálnou číselnou posloupnost s členy $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$. Nechť existuje limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, označme její limitu q . Je-li $q < 1$, pak reálná číselná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje. Pokud $q > 1$, pak zmíněná číselná řada diverguje.

Jedná se o rozšíření exponenciální funkce na všechna komplexní čísla. Speciálně tedy platí, že $\exp(1)$ je Eulerovo číslo, či pro reálné x je $\exp(x) = e^x$ známá reálná exponenciála. Z definice také ihned plyne vztah $\exp(0) = 1$.

Exponenciální funkce stále splňuje veledůležitý vztah

$$\exp(z + w) = \exp(z) \exp(w), \quad z, w \in \mathbb{C}. \quad (5)$$

Skutečně, pro součin dvou absolutně konvergentních číselných řad obecně platí¹¹

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n a_m b_{n-m}.$$

Speciálně v našem případě proto máme

$$\begin{aligned} \exp(z) \exp(w) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \cdot \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{w^\ell}{\ell!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{z^m}{m!} \frac{w^{n-m}}{(n-m)!} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} z^m w^{n-m} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = \exp(z+w). \end{aligned}$$

V předposlední rovnosti jsme použili binomickou větu.

Z rovnosti (5) plyne řada důležitých vlastností komplexní exponenciály. Například pro každé komplexní číslo $z \in \mathbb{C}$ platí

$$1 = \exp(0) = \exp(z - z) = \exp(z) \exp(-z),$$

a proto číslo $\exp(z)$ nikdy není nulové a

$$\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Z předmětu **BI-ZMA** víme, že trigonometrické funkce \sin a \cos lze rozvinout do Taylorových řad s nekonečným poloměrem konvergence. Přesněji víme, že platí rovnosti

$$\begin{aligned} \sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \\ \cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}, \end{aligned}$$

pro každé reálné $x \in \mathbb{R}$. Pokusme se nyní vypočítat

$$\exp(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} \quad (6)$$

¹¹Netriviální!

pro zadané reálné x (ix je tedy čistě imaginární, nebo nulové). Povšimněme si, že

$$i^k = \begin{cases} 1, & k = 4\ell, \ell \in \mathbb{Z}, \\ i, & k = 4\ell + 1, \ell \in \mathbb{Z}, \\ -1, & k = 4\ell + 2, \ell \in \mathbb{Z}, \\ -i, & k = 4\ell + 3, \ell \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Přeuspořádáme-li tedy sčítání v (6), což si můžeme dovolit vzhledem k absolutní konvergenci příslušné řady, tak dostáváme

$$\exp(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \cos x + i \sin x, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (7)$$

Celkem uzavíráme, že pro reálné $x \in \mathbb{R}$ leží $\exp(ix) = \cos x + i \sin x$ na jednotkové kružnici v komplexní rovině se středem v bodě 0. Parametr x představuje úhel měřený (v radiánech) od kladného směru reálné osy proti směru hodinových ručiček. Navíc z rovnosti (7) ihned plynou rovnosti

$$\begin{aligned} \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) &= \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i, \\ \exp(i\pi) &= \cos \pi + i \sin \pi = -1. \end{aligned}$$

Druhá z těchto rovnic po jednoduché úpravě je přesně rovnice (4).

Na závěr ještě poznamenejme, že pro $x \in \mathbb{R}$ z rovnic

$$\begin{aligned} \exp(ix) &= \cos x + i \sin x, \\ \exp(-ix) &= \cos x - i \sin x, \end{aligned}$$

můžeme vyjádřit známé trigonometrické funkce sinus a kosinus pomocí exponenciály

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{1}{2} \left(\exp(ix) + \exp(-ix) \right), \\ \sin x &= \frac{1}{2i} \left(\exp(ix) - \exp(-ix) \right). \end{aligned}$$

Funkce \sin a \cos můžeme pomocí nich (nebo rovnou pomocí příslušných Taylorových rozvoju) rozšířit na celou komplexní rovinu.

Na závěr této kapitoly poznamenejme, že komplexní exponenciála $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ již není prostá funkce. Skutečně, z rovnice (7) například ihned vidíme, že $\exp(0) = \exp(2\pi i) = 1$. Není proto možné mluvit o inverzní funkci k funkci \exp . Zavést komplexní logaritmus, \log , je tedy složitější úloha, které se věnujeme v Cvičení 1.18, 1.19 a 1.20.

1.7 Poznámky a odkazy

Případné zájemce o podrobný výklad komplexní analýzy, kterou jsme zde sotva nakousli, čtenáře odkazujeme na několik kvalitních učebnic uvedených v seznamu literatury, konkrétně [2], [1] a [5].

1.8 Cvičení

Cvičení 1.1: Dokažte, že množina \mathbb{C} s operacemi zavedenými v (1) tvoří těleso.

Řešení. Pro důkaz toho, že $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ tvoří těleso, jsou potřeba dva pojmy z lineární algebry, konkrétně těleso a grupa.

Začneme ověřením, zda je $(\mathbb{C}, +)$ abelovská grupa. V následujících výpočtech uvažme $v = a + bi$ a $u = c + di$ a postupně ověříme požadované vlastnosti:

- komutativita

$$\begin{aligned}v + u &= a + bi + c + di = (a + c) + i(b + d) = \\ &= (c + a) + i(d + b) = c + di + a + bi = v + u,\end{aligned}$$

- asociativita

$$\begin{aligned}(u + v) + w &= (a + bi + c + di) + e + fi = a + c + i(b + d) + e + fi = \\ &= a + c + e + i(b + d + f) = a + bi + (c + e + i(d + f)) = \\ &= u + (v + w),\end{aligned}$$

- neutrálním prvkem této grupy je $0 = 0 + 0i$, skutečně, pro každé $u \in \mathbb{C}$ platí

$$u + 0 = (a + bi) + 0 = 0 + (a + bi) = a + bi,$$

- pro každé číslo tvaru $u = a + bi$ existuje opačný prvek ve tvaru $v = -a - bi$

$$u + v = (a + bi) + (-a - bi) = a - a + i(b - b) = 0 + 0 = 0.$$

Nyní zjistíme, zda $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ je grupa. Se stejným značením jako výše platí

- asociativita,

$$\begin{aligned}(u \cdot v) \cdot w &= ((a + bi) \cdot (c + di)) \cdot (e + fi) = ((ac - bd) + i(ad + cb)) \cdot (e + fi) = \\ &= (ace - bde) + i(ade + cbe) + i(acf - bdf) - (adf + cbf) = \\ &= (ace - bde - adf - cbf) + i(ade + cbe + acf - bdf), \\ u \cdot (v \cdot w) &= (a + bi) \cdot ((c + di) \cdot (e + fi)) = (a + bi) \cdot ((ce - df) + i(cf + ed)) = \\ &= ace - adf + i(acf + aed) + i(bce - bdf) - bcf - bed = \\ &= (ace - adf - bcf - bed) + i(acf + aed + bce - bdf).\end{aligned}$$

Díky komutativitě sčítání a násobení na reálných číslech se výrazy výše skutečně rovnají.

- Neutrálním prvkem této grupy je 1, pro každé $u = a + bi$ platí rovnost

$$(a + bi) \cdot 1 = 1 \cdot (a + bi) = a + bi.$$

- Pro každé nenulové číslo $u = a + bi$ lze najít inverzní prvek $v = c + di$ následujícím způsobem. Požadavek z definice

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac - bd + i(ad + cb) = 1$$

je ekvivalentní soustavě

$$ad + cb = 0 \wedge ac - bd = 1.$$

První rovnici vynásobíme b , druhou a ,

$$abd + cb^2 = 0 \wedge a^2c - abd = a$$

a sečteme,

$$c \cdot (a^2 + b^2) = a \Rightarrow c = \frac{a}{a^2 + b^2}.$$

Pro d obdobným způsobem získáme tvar $d = -\frac{b}{a^2 + b^2}$. Pro kontrolu:

$$\begin{aligned} (a + bi) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2} \right) &= \frac{a^2}{a^2 + b^2} - i \frac{ab}{a^2 + b^2} + i \frac{ab}{a^2 + b^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2} = \\ &= \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} + 0 = 1. \end{aligned}$$

A nakonec důkaz levého a pravého distributivního zákona. Mějme libovolná komplexní čísla $u = a + bi, v = c + di, w = e + fi$.

Levý distributivní zákon požaduje $u \cdot (v + w) = uv + uw$, což ověříme porovnáním obou stran této rovnosti,

$$\begin{aligned} u \cdot (v + w) &= (a + bi) \cdot (c + di + e + fi) = ac + adi + ae + afi + cbi - bd + ebi - bf = \\ &= ac + ae - bd - bf + i(ad + cb + af + eb), \\ uv + uw &= (a + bi) \cdot (c + di) + (a + bi) \cdot (e + fi) = ac + adi + cbi - bd + ae + afi + \\ &+ ebi - bf = ac + ae - bd - bf + i(ad + cb + af + eb). \end{aligned}$$

Pravý distributivní zákon plyne z levého a z komutativity násobení. Tedy $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ skutečně tvoří těleso. \square

Cvičení 1.2: Dokažte platnost vztahů uvedených v rovnici (2).

Řešení. Mějme dvě komplexní čísla $z = a + bi$ a $w = c + di$.

- rovnost $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$ ověříme rozepsáním obou stran a porovnáním výsledků

$$\begin{aligned} \overline{z \cdot w} &= \overline{(a + bi) \cdot (c + di)} = \overline{ac + adi + cbi - bd} = ac - bd - i(ad + cb) \\ \overline{z} \cdot \overline{w} &= \overline{(a + bi)} \cdot \overline{(c + di)} = (a - bi) \cdot (c - di) = ac - adi - cbi - bd = \\ &= ac - bd - i(ad + cb) \end{aligned}$$

- obdobně postupujeme i u rovnosti $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$

$$\begin{aligned}\overline{z+w} &= \overline{a+bi+c+di} = \overline{a+c+i(b+d)} = a+c-i(b+d) \\ \bar{z} + \bar{w} &= \overline{a+bi} + \overline{c+di} = a-bi+c-di = a+c-i(b+d)\end{aligned}$$

- výraz $\bar{\bar{z}} = z$ ověříme opakovanou aplikací definice komplexně sdruženého čísla

$$\bar{\bar{z}} = \overline{\overline{a+bi}} = \overline{a-bi} = a+bi = z \quad \square$$

Cvičení 1.3: Dokažte, že pro každé $u \in \mathbb{C}$ platí

$$|\Re u| \leq |u| \quad \text{a} \quad |\Im u| \leq |u|.$$

Řešení. Pro komplexní číslo $u = a + bi$ s absolutní hodnotou $|u| = \sqrt{a^2 + b^2}$ platí

$$\Re u = a \quad \text{a} \quad \Im u = b.$$

Čísla a^2 i b^2 jsou jistě nezáporná, proto

$$|u| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq \sqrt{a^2} = |a|$$

Tím se dostáváme k požadovanému výrazu.

$$|\Re u| = |a| \leq |u|$$

Obdobně i důkaz druhé nerovnosti:

$$|u| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq \sqrt{b^2} = |b| \Rightarrow |\Im u| = |b| \leq |u|. \quad \square$$

Cvičení 1.4: Vypočtěte reálnou a imaginární část komplexního čísla $\frac{1}{1-i}$ a komplexního čísla $\frac{1}{z}$, kde z je nenulové komplexní číslo.

Řešení. Mějme nenulové $z = a + bi$, pak $\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi}$, a dále postupujeme následně

$$\begin{aligned}\frac{1}{a+bi} &= \frac{1}{a+bi} \cdot \frac{a-bi}{a-bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2-b^2i^2} = \\ &= \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i.\end{aligned}$$

Tímto způsobem jsme vyjádřili $\frac{1}{z} = c + di$, kde $c, d \in \mathbb{R}$, a můžeme tedy triviálně určit \Re a \Im ,

$$\begin{aligned}\Re \frac{1}{z} &= \frac{a}{a^2+b^2}, \\ \Im \frac{1}{z} &= \frac{-b}{a^2+b^2}.\end{aligned}$$

Odpověď na první otázku tedy je

$$\begin{aligned}\Re \frac{1}{1-i} &= \frac{1}{2}, \\ \Im \frac{1}{z} &= \frac{1}{2}.\end{aligned} \quad \square$$

Cvičení 1.5: Převedte komplexní čísla $1 + i\sqrt{2}$, -3 , $4i$ a $-1 - i$ do polárního tvaru.

Řešení. Mějme $z = a + bi$. Pro převedení do tvaru $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ nejprve spočteme

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

a poté φ . Podmínka

$$\begin{aligned} a + bi &= r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \\ \frac{a}{r} + \frac{b}{r}i &= \cos \varphi + i \sin \varphi, \end{aligned}$$

je ekvivalentní podmínkám

$$\Rightarrow \frac{a}{r} = \cos \varphi \quad \text{a} \quad \frac{b}{r} = \sin \varphi$$

a tedy, pokud $\cos \varphi \neq 0$,

$$\tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{b/r}{a/r} = \frac{b}{a}.$$

Nyní je potřeba rozlišit situace podle znaménka a a využít π -periodicity funkce \tan . Řešením poslední rovnice je

$$\varphi = \begin{cases} \arctan(b/a), & \text{když } a > 0, \\ \arctan(b/a) + \pi, & \text{když } a < 0. \end{cases}$$

Pro $a = 0$ nebo $b = 0$ můžeme φ triviálně dodefinovat následujícím vztahem

$$\varphi = \begin{cases} 0, & \text{když } a > 0, b = 0, \\ \pi/2, & \text{když } a = 0, b > 0, \\ \pi, & \text{když } a < 0, b = 0, \\ 3\pi/2, & \text{když } a = 0, b < 0. \end{cases}$$

Případ $a = b = 0$ polárně vyjadřovat nemá smysl.

Polární tvar zadaných čísel už zbývá jen dopočítat podle odvozených vzorců:

$$1 + i\sqrt{2} \simeq \sqrt{3}(\cos 0.9553 + i \sin 0.9553),$$

$$-3 = 3(\cos \pi + i \sin \pi),$$

$$4i = 4(\cos \pi/2 + i \sin \pi/2),$$

$$-1 - i = \sqrt{2}(\cos \pi/4 + i \sin \pi/4). \quad \square$$

Cvičení 1.6: Nalezněte všechna komplexní řešení rovnice $z^n = 1$ pro $n \in \mathbb{N}^*$. Tato řešení graficky znázorněte v komplexní rovině.

Cvičení 1.7: Ukažte, že množina všech **reálných** matic tvaru

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \quad (8)$$

vybavená standardním sčítáním a násobením matic je izomorfní¹² tělesu komplexních čísel, \mathbb{C} .

Řešení. Označme M množinu všech matic tvaru (8) a dále uvažme

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ -\delta & \gamma \end{pmatrix}$$

dvě libovolné matice z M . Definujeme zobrazení $\varphi : M \rightarrow \mathbb{C}$ jako

$$\varphi(\mathbf{A}) = \alpha + i\beta.$$

Toto zobrazení je zřejmě injektivní, protože komplexní čísla $\alpha + i\beta$ a $\gamma + i\delta$ se rovnají právě když $\alpha = \gamma$ a $\beta = \delta$ a tedy se musí rovnat i jim odpovídající matice z M . Rovněž je triviálně surjektivní, s inverzním zobrazením

$$\varphi^{-1}(\alpha + i\beta) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Jedná se tedy o bijekci. Pro matice

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \alpha + \gamma & \beta + \delta \\ -\beta - \delta & \alpha + \gamma \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{AB} = \begin{pmatrix} \alpha\gamma - \beta\delta & \alpha\delta + \beta\gamma \\ -\alpha\delta - \beta\gamma & \alpha\gamma - \beta\delta \end{pmatrix}$$

platí:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= (\alpha + \gamma) + i(\beta + \delta) = (\alpha + i\beta) + (\gamma + i\delta) = \varphi(\mathbf{A}) + \varphi(\mathbf{B}), \\ \varphi(\mathbf{AB}) &= (\alpha\gamma - \beta\delta) + i(\alpha\delta + \beta\gamma) = (\alpha + i\beta)(\gamma + i\delta) = \varphi(\mathbf{A})\varphi(\mathbf{B}). \end{aligned}$$

Těleso komplexních čísel je tedy izomorfní množině M vybavenou standardními maticovými operacemi a hledaným izomorfismem je φ . \square

Cvičení 1.8: Bez použití polárního tvaru komplexních čísel nalezněte obě hodnoty $\sqrt{\alpha + i\beta}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Řešení. Mějme $z = \alpha + i\beta$, hledáme $y_{1,2} = a + bi$ takové, že $\sqrt{z} = y_{1,2}$ tedy $z = y_{1,2}^2$, resp.

$$\alpha + i\beta = (a + bi)^2 = a^2 + 2abi + b^2i^2 = a^2 + 2abi - b^2.$$

¹²Tj. existuje bijekce φ těchto množin zachovávající sčítání a násobení: $\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$ a $\varphi(uv) = \varphi(u)\varphi(v)$

Porovnáním reálných a imaginárních částí dostáváme rovnosti

$$\alpha = a^2 - b^2 \quad \text{a} \quad \beta = 2ab$$

Uvažme $|z|^2 = \alpha^2 + \beta^2$, pro tuto hodnotu platí

$$\alpha^2 + \beta^2 = (a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2 = a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + 4a^2b^2 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4 = (a^2 + b^2)^2,$$

čili $a^2 + b^2 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. Přičtením této rovnice k dříve odvozenému vztahu $a^2 - b^2 = \alpha$ dostáváme postupně

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + a^2 - b^2 &= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \alpha \\ \Rightarrow 2a^2 &= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \alpha \\ \Rightarrow a &= \pm \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \alpha}{2}}. \end{aligned}$$

Obdobně můžeme získat b ,

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 - (a^2 - b^2) &= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha \\ \Rightarrow 2b^2 &= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha \\ \Rightarrow b &= \pm \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha}{2}}. \end{aligned}$$

Ze vztahu $\beta = 2ab$ můžeme triviálně určit, že pokud $\beta \geq 0$, pak $ab \geq 0$ a tedy i $\operatorname{sgn} a = \operatorname{sgn} b$ a opačně, tj. pokud je β záporná, pak jsou znaménka a a b různá.

Na závěr tedy (horní a dolní znaménka si odpovídají, tj. na začátku zmíněné y_1 je třeba řešení s horními znaménky a y_2 s dolními):

$$\begin{aligned} a &= \pm \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \alpha}{2}}, \\ b &= \begin{cases} \pm \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha}{2}} & \text{když } \beta \geq 0, \\ \mp \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha}{2}} & \text{když } \beta < 0. \end{cases} \quad \square \end{aligned}$$

Cvičení 1.9: Uvažme komplexní posloupnost $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ a $w \in \mathbb{C}$. Dokažte následující ekvivalenci,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = w \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - w| = 0.$$

Cvičení 1.10: Nalezňte všechny hromadné body následujících množin.

$$A = \{1\}, \quad B = \{n \mid n \in \mathbb{N}\}, \quad C = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}, \quad D = \left\{ \frac{1}{n} e^{in} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Cvičení 1.11: Uvažme funkci f mající limitu u v bodě w (který je tím pádem hromadným bodem množiny D_f). Dokažte následující tvrzení¹³: je-li $N \subset D_f$ mající w jako hromadný bod, pak je limita funkce f vzhledem k množině N rovna také u .

Cvičení 1.12: Dokažte spojitost následujících funkcí

- komplexní polynom komplexní proměnné,
- absolutní hodnota komplexního čísla,
- reálná a imaginární část komplexního čísla,
- komplexní sdružení.

Cvičení 1.13: Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

v závislosti na komplexním $z \in \mathbb{C}$. Graficky znázorněte obor konvergence jakožto množinu v komplexní rovině.

Cvičení 1.14: Uvažme funkci $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x \in \mathbb{R}$. Její graf jistě všichni známe a víme, že je definovaná na celé reálné ose. Dále víme, že její Taylorova řada v bodě 0 je

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}.$$

Tato reálná číselná řada má poloměr konvergence 1, což může být z grafu funkce arctg překvapivé – nevidíme žádný očividný důvod jako tomu je třeba u Taylorových řad funkcí $\ln(x+1)$ nebo $\frac{1}{1-x}$ (např. v nule).

Tento fakt je ale očividný, pokud se na tuto mocninou řadu díváme jako na komplexní číselnou řadu, tj.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} z^{2k+1}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

V kterých bodech komplexní roviny má tato řada zásadní problém, který zapříčiňuje uvedené omezení poloměru konvergence?

Cvičení 1.15: S pomocí známého vztahu $e^{z+w} = e^z e^w$, platného pro všechna komplexní z a w , odvoďte součtové vzorce pro reálné funkce sinus a kosinus, tedy

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y, \\ \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y, \end{aligned}$$

kde $x, y \in \mathbb{R}$.

¹³V podstatě jde o zobecnění věty o limitě vybrané posloupnosti, případně jedné implikace Heineho věty.

Cvičení 1.16: Vyřešte kvadratickou rovnici

$$z^2 + (\alpha + i\beta)z + \gamma + i\delta = 0,$$

kde z je komplexní proměnná a $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ jsou reálné parametry.

Cvičení 1.17: Pro $z \in \mathbb{C}$ definujeme Riemannovu ζ -funkci předpisem

$$\zeta(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^z}.$$

Dokažte, že tato řada konverguje pro $\Re z > 1$ a Riemannova ζ -funkce je tímto způsobem zadána na množině $\{z \in \mathbb{C} \mid \Re z > 1\}$.

Řešení. Necht $z = a + bi$ pro nějaké $a, b \in \mathbb{R}$, pak:

$$\zeta(a + bi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{a+bi}}.$$

Vyšetříme absolutní konvergenci této řady, tj. řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{k^{a+bi}} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|k^a| |k^{bi}|} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|k^a| |1e^{bi \ln(k)}|} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a}$$

Dokážeme, že pro $a > 1$ řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a}$ konverguje a to přímo z definice. Vypočteme součet posloupnosti částečných součtů řady pro nějaké $k = 2^n - 1$ a sdružíme při tom kladné členy řady do následujícího tvaru:

$$S_{2^n - 1} = 1 + \left(\frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} \right) + \left(\frac{1}{4^a} + \frac{1}{5^a} + \frac{1}{6^a} + \frac{1}{7^a} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{(n-1)a}} + \dots + \frac{1}{(2^n - 1)^a} \right).$$

Pro členy v k -té závorce platí nerovnost:

$$\frac{1}{(2^k + m)^a} \leq \frac{1}{2^{ka}},$$

kde $m = 0, 1, 2, \dots, 2^k - 1$. Jelikož každá taková závorka má 2^k sčítanců dostáváme:

$$S_{2^n - 1} < 1 + \frac{2}{2^a} + \frac{2^2}{2^{2a}} + \dots + \frac{2^{n-1}}{2^{(n-1)a}} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{(n-1)(a-1)}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{a-1}}} = \frac{2^{a-1}}{2^{a-1} - 1}$$

Posloupnost částečných součtů je omezena shora. Navíc její členy jsou kladné. To znamená, že existuje limita $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$. Jelikož $S_{2^n - 1}$ je podposloupnost *monotonní* posloupnosti S_n je i tato limita konečná. Alternativně by šlo využít integrálního kritéria.

Dokázali jsme, že pro $a > 1$ řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a}$ konverguje, to znamená, že i řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{a+bi}}$ konverguje (absolutně). \square

V následujících třech cvičeních se vrátíme k problému logaritmu jakožto komplexní funkci komplexní proměnné.

Cvičení 1.18: Buď w nenulové komplexní číslo, pak existuje spočetně mnoho komplexních čísel z splňující rovnost $\exp(z) = w$. Jinak řečeno, obor hodnot \exp je množina $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Explicitně nalezněte všechna tato řešení.

Cvičení 1.19: Pomocí Cvičení 1.18 ukažte, že pro každé nenulové komplexní číslo w existuje právě jedno řešení rovnice $\exp(z) = w$ splňující $\arg z \in (-\pi, \pi)$. Toto z značíme $\log w$, definičním oborem takovéto funkce je množina $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Cvičení 1.20: Vypočtěte

$$\log(-3), \quad \log(e + i), \quad \log(i).$$

Na rozdíl do reálných funkcí reálné proměnné není tak snadné komplexní funkce komplexní proměnné graficky znázornit. Následující tři cvičení ukazují dva známé a používané způsoby jak komplexní funkce vizualizovat. Následující cvičení popisují tři metody použitelné k znázorňování komplexních funkcí komplexní proměnné.

Cvičení 1.21 (Barevné kódování): Mějme funkci $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Bodu $z \in \mathbb{C}$ je funkcí f přiřazeno komplexní číslo $f(z)$, které má polární tvar

$$f(z) = re^{i\varphi}, \tag{9}$$

kde $r \geq 0$ a $\varphi \in (-\pi, \pi]$. Bod z bereme jako bod v komplexní rovině a přiřadíme mu barvu v závislosti na r a φ z rovnice (9). Nejčastěji se volí barevný odstín v závislosti na φ a sytost barvy v závislosti na r .

Cvičení 1.22 (Metoda obrazů): Mějme funkci $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Zvolme vhodné podmnožiny $M_i \subset \mathbb{C}$, $i = 1, 2, \dots, n$, (například vhodnou část souřadnicové mřížky, nebo kružnice se středem v bodě 0 a různých poloměrech). Do roviny vynesme a vhodně označme obrazy $f(M_i)$.

Cvičení 1.23 (Křivky konstantní absolutní hodnoty a fáze): Pro funkci $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ můžeme znázornit křivky v \mathbb{C} , kde je $|f(z)|$ konstantní, případně kde je $\arg f(z)$ konstantní.

2 Fourierovy řady

Profound study of nature is the most fertile source of mathematical discoveries.

Joseph Fourier

V této části textu si stručně představíme důležité matematické objekty nesoucí jméno po francouzském matematikovi a fyzikovi Josephovi Fourierovi (1768 – 1830). Text této kapitoly bude místy neformální a rozhodně ho nelze považovat za ucelený výklad této látky. Cílem je zde zejména poskytnout čtenáři jisté povědomí o těchto důležitých tématech a připravit půdu pro příští kapitolu. Fourierovy řady i Diskrétní Fourierova transformace (DFT), probíraná v příští kapitole, spolu totiž úzce souvisí. DFT lze z jistého úhlu pohledu chápat jako diskrétní analog Fourierových řad.

2.1 Úvod

Nebude-li v této kapitole řečeno jinak, pak pod pojmem *funkce* rozumíme vždy reálnou funkci jedné reálné proměnné.

V předmětu **BI-ZMA** jsme se zabývali možnostmi vyjádření některých elementárních funkcí ve tvaru tzv. mocninných řad. Například jsme zjistili, a v předchozí kapitole znovu ověřili, že v reálném oboru platí rovnosti

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},$$
$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

Výrazy na pravých stranách těchto rovností představují *mocninné řady*, tedy řady jejichž členy jsou konstantní násobky mocnin x^k , $k \in \mathbb{N}$. Co kdybychom místo těchto *monomů* chtěli použít trigonometrické funkce sinus a kosinus?

Ve svém článku z roku 1822 vyjádřil Fourier hypotézu, že každou periodickou „funkci“ f s periodou $2T$ lze vyjádřit ve tvaru tzv. **trigonometrické řady**. Přesněji, pro takovou funkci postuloval následující rovnost

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{T} + b_k \sin \frac{k\pi x}{T} \right), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (10)$$

kde reálné číselné koeficienty a_0, a_1, a_2, \dots a b_1, b_2, \dots lze napočítat pomocí vztahů

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(x) \cos \frac{k\pi x}{T} dx, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (11)$$

$$b_k = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(x) \sin \frac{k\pi x}{T} dx, \quad k \in \mathbb{N}^*. \quad (12)$$

S takto napočítanými číselnými posloupnostmi $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ (mají-li uvedené integrály smysl) se řada na pravé straně rovnosti (10) nazývá **Fourierovou řadou funkce** f na intervalu $(-T, T)$. Rovnice (11) a (12) bývají označovány jako **Eulerovy vzorce**.

Bohužel, pouze periodičnost funkce f nestačí k tomu, aby platila rovnost (10). Z periodicity funkcí sinus a kosinus ale logicky vyplývá, že i funkce f , pro kterou má platit rozvoj (10) na celém \mathbb{R} , musí být periodická. S problémem jak popsat třídu funkcí, pro které by platila rovnost (10) se kromě Fouriera zabývali největší matematici 19. století, např. **F. W. Bessel**, **U. Dini**, **G. L. Dirichlet**, **R. O. Lipschitz**, **B. Riemann** a další. Toto snažení ve výsledku vedlo k rozšíření samotného pojmu „funkce“ a k vybudování Lebesgueova integrálu. Podrobný výklad těchto partií matematiky by vydal na samostatný předmět a zde se jimi nebudeme zabývat. Případné zájemce opět odkazujeme např. na [5]. Výklad na následujících řádkách je tímto faktem samozřejmě poznamenán. Pokusíme se vypíchnout alespoň základní výsledky a myšlenky, i ve zjednodušené formě.

2.2 Konvergence Fourierových řad

Postupné kroky téměř jedno století trvající práce nakonec vedly k vybudování celé teorie trigonometrických řad. Tato problematika ovšem není ani dnes uzavřená a existují otázky týkající se Fourierových řad, které zůstávají stále nezodpovězené.

My si zde nejprve uvedeme jeden výsledek tohoto snažení, který dává alespoň částečnou odpověď na to, jaké funkce lze rozvíjet ve Fourierovu řadu, resp. jak je to s tzv. *bodovou konvergencí* Fourierovy řady. Důkaz tohoto tvrzení je samozřejmě daleko nad rámcem tohoto kurzu, a proto ho neuvědeme.

Věta 2.1: Buď f funkce, která má po částech spojitou derivaci na intervalu $\langle -T, T \rangle$. Potom Fourierova řada funkce f na intervalu $(-T, T)$ konverguje na celé množině \mathbb{R} . Označme F její součtovou funkci, tzn.

$$F(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{T} + b_k \sin \frac{k\pi x}{T} \right), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

kde posloupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou určeny vztahy (11) a (12). Potom platí:

- (i) F je periodická funkce s periodou $2T$.
- (ii) $F(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}$ pro každé $x \in (-T, T)$.
- (iii) $F(T) = F(-T) = \frac{f(-T+) + f(T-)}{2}$.

kde $f(x\pm) := \lim_{y \rightarrow x\pm} f(y)$.

Důkaz. Neuvádíme. □

Tvrzení této věty je vhodné podrobněji okomentovat.

Poznámka 2.2: Připomeňme, že funkce je **po částech spojitá na uzavřeném a omezeném intervalu**, má-li v tomto intervalu nejvýše konečně mnoho bodů nespojitosti a v těchto bodech existují konečné jednostranné limity (tzv. odstranitelná nespojitost, nebo nespojitost 1. druhu).

Poznámka 2.3: Podle Věty 2.1 platí rovnost (10), tzn. $F(x) = f(x)$, ve všech bodech spojitosti f . V bodech nespojitosti je pravá strana rovnice (10), tzn. $F(x)$, rovna průměru jednostranných limitních hodnot funkce f v odpovídajícím bodě.

Poznámka 2.4: V mnoha situacích hledáme Fourierův rozvoj funkce $f \in C^1(\langle -T, T \rangle)$, tj. funkce která má spojitou první derivaci na celém intervalu $\langle -T, T \rangle$ (v bodech $\pm T$ je f' spojitá z příslušné strany). Rovnost (10) potom platí pro všechna $x \in (-T, T)$. Pro názornou ukázkou viz Obrázek 5.

Poznámka 2.5: Všimněte si, že ve speciálním případě, kdy $T = \pi$, se formule (10), (11) a (12) mírně zjednoduší:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad x \in \mathbb{R}$$

a

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (13)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx, \quad k \in \mathbb{N}^*. \quad (14)$$

Poznámka 2.6: Všimněte si, že je-li funkce f lichá je $a_k = 0$ pro $\forall k \in \mathbb{N}$. Je-li naopak funkce f sudá je $b_k = 0$ pro $\forall k \in \mathbb{N}^*$. (Cvičení 2.1)

Ukažme si nyní alespoň částečně, že z rovnosti (10) skutečně vyplývají Eulerovy vzorce ve tvaru (11) a (12) pro koeficienty a_n a b_n . Vynásobením obou stran rovnice (10) funkcí $\sin \frac{n\pi x}{T}$, kde $n \in \mathbb{N}^*$, a zintegrováním od $-T$ do T dostaneme

$$\begin{aligned} \int_{-T}^T f(x) \sin \frac{n\pi x}{T} \, dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-T}^T \sin \frac{n\pi x}{T} \, dx + \\ &+ \int_{-T}^T \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{T} \sin \frac{n\pi x}{T} + b_k \sin \frac{k\pi x}{T} \sin \frac{n\pi x}{T} \right) dx. \end{aligned}$$

Na pravé straně nyní provedeme záměnu sumy a integrálu. Pro tento krok nemáme ospravedlnění, ale za uvedených předpokladů je možné ho provést. Máme tedy

$$\begin{aligned} \int_{-T}^T f(x) \sin \frac{n\pi x}{T} \, dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-T}^T \sin \frac{n\pi x}{T} \, dx + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{-T}^T \cos \frac{k\pi x}{T} \sin \frac{n\pi x}{T} \, dx + b_k \int_{-T}^T \sin \frac{k\pi x}{T} \sin \frac{n\pi x}{T} \, dx. \end{aligned}$$

Protože pro $\forall k, n \in \mathbb{N}^*$ je

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos nx \, dx = 0$$

a

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx \, dx = \pi \delta_{k,n},$$

(Cvičení 2.3, ověřte!) můžeme po jednoduché substituci spočítat integrály na pravé straně upravovaného výrazu a dojdeme tak k rovnosti

$$\int_{-T}^T f(x) \sin \frac{n\pi x}{T} \, dx = b_n T.$$

Dostáváme tak formulku (12). Podobnou úvahu lze učinit i v případě koeficientů a_n a odvodit tak (11).

Uvažujme ještě chvíli speciální případ, kdy $f \in C^1(\langle -T, T \rangle)$. Podle Věty 2.1 platí rovnost (10) pro $\forall x \in (-T, T)$. Řada napravo rovnosti (10) konverguje ale pro $\forall x \in \mathbb{R}$ a protože je to $2T$ -periodická funkce, musí se její hodnota pro nějaké $x \in ((2\ell-1)T, (2\ell+1)T)$, kde $\ell \in \mathbb{Z}$, rovnat hodnotě $f(y)$, kde

$$y = x - 2\ell T \in (-T, T).$$

Nahradíme-li tedy levou stranu v rovnici (10) periodickým prodloužením funkce f na $\mathbb{R} \setminus (2\mathbb{Z} + 1)T$,

$$f^*(x) := f\left(x - \left\lfloor \frac{x+T}{2T} \right\rfloor 2T\right), \quad \forall x \notin (2\mathbb{Z} + 1)T,$$

dostaneme identitu

$$f^*(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{T} + b_k \sin \frac{k\pi x}{T} \right)$$

s a_n a b_n určenými Eulerovými vzorci (11) a (12), která platí $\forall x \notin (2\mathbb{Z} + 1)T$. V bodech $x \in (2\mathbb{Z} + 1)T$ potom opět podle věty 2.1 platí rovnost

$$\frac{f(-T+) + f(T-)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{T} + b_k \sin \frac{k\pi x}{T} \right).$$

Příklad 2.7: Prozkoumejme výše uvedená tvrzení na konkrétním příkladu jednoduché funkce $f(x) = x$. Najdeme její Fourierovu řadu na intervalu $(-\pi, \pi)$. Volíme tedy $T = \pi$.

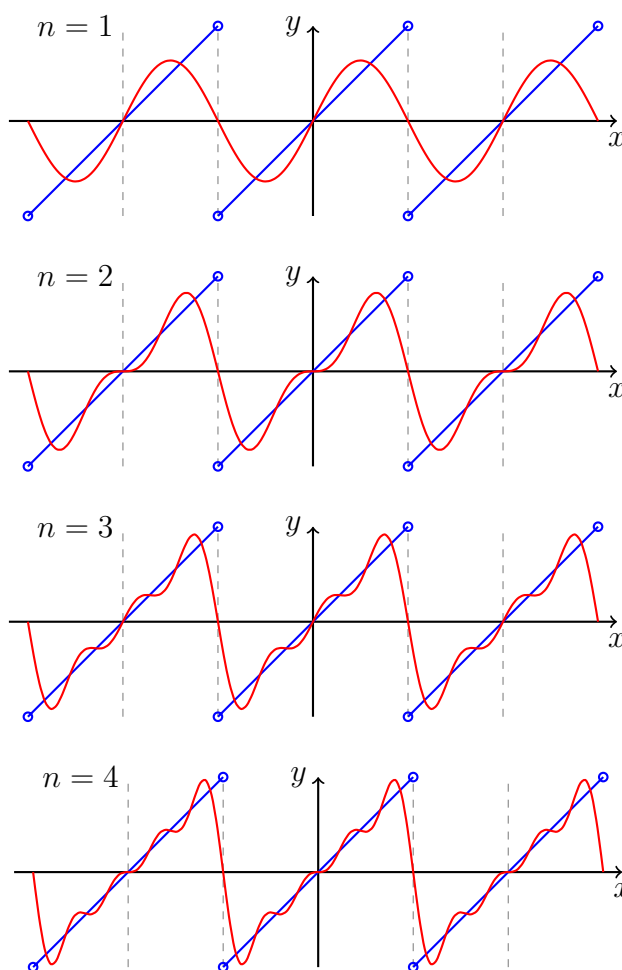
Vypočtěme Fourierovy koeficienty f . Dosazením do rovnic (13) a (14) spočítáme pomocí integrace *per partes*

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \, dx = 0, \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos kx \, dx = \frac{1}{\pi} \left(\left[\frac{x}{k} \sin kx \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{k} \sin kx \, dx \right) = 0, \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx \, dx = \frac{1}{\pi} \left(\left[-\frac{x}{k} \cos kx \right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{k} \cos kx \, dx \right) = \\ &= \frac{2(-1)^{k+1}}{k}, \quad k \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Dostáváme tak Fourierův rozvoj (2.5) funkce $f(x) = x$ na $(-\pi, \pi)$, který je tvaru

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{k} \sin kx \quad (15)$$

a tato rovnost platí pro všechna $x \in (-\pi, \pi)$. Několik jejích částečných součtů s nízkým počtem sčítanců je znázorněno na obrázku 5. Skutečně tedy získáváme pocit, že postupným přidáváním členů řady dostáváme lepší a lepší aproximaci funkce f .



Obrázek 5: Částečné součty Fourierovy řady (15) na $(-\pi, \pi)$ periodického prodloužení funkce $f(x) = x$, n označuje počet sčítanců v částečném součtu.

Věta 2.1 se zabývá tzv. *bodovou konvergencí*, tj. konvergencí odpovídající číselné řady pro pevně zvolený bod $x \in \mathbb{R}$. Další kvalitativní vlastnosti konvergence posloupnosti funkcí lze vyjádřit pomocí následujícího užitečného pojmu. O posloupnosti funkcí $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ řekneme, že **stejněměrně konverguje k funkci f na množině M** , právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n > n_0$ a $x \in M$ platí $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

O Fourierově řadě řekneme, že **stejněměrně konverguje na množině M** , právě když posloupnost jejích částečných součtů je stejněměrně konvergentní na množině M .

Ekvivalentně bychom uvedenou podmínku mohli kompaktně vyjádřit takto: posloupnost $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ konverguje stejněměrně k funkci f na množině M , právě když

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_M |f_n - f| = 0.$$

Pokud naše posloupnost stejněměrně konverguje k funkci f na množině M , tak jistě v každém bodě $x \in M$ číselná posloupnost $f_n(x)$ konverguje k číslu $f(x)$, tj.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \quad x \in M.$$

Opak ale není pravdou. Bodová konvergence v každém bodě množiny M zřejmě nestačí k tomu, aby šlo o stejněměrnou konvergenci.

Dále zdůrazňujeme, že stejněměrná konvergence posloupnosti funkcí je pojem *relativní vzhledem k dané množině*. Tj. slovní spojení „posloupnost funkcí je stejněměrně konvergentní“ nemá smysl bez uvedení o jaké množině se mluví. K osvětlení tohoto konceptu a těchto poznámek dobře poslouží následující elementární příklad.

Příklad 2.8: Ne/stejněměrnost konvergence posloupnosti funkcí lze pěkně demonstrovat na jednoduchém příkladu posloupnosti $f_n(x) = x^n$. Níže porovnáme bodovou konvergenci a stejněměrnou konvergenci této posloupnosti na vhodně zvolených množinách.

Uvažme nejprve množinu $M = (0, 1)$. Pro každé x z M je bodovou limitou nulová funkce, tj.

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0.$$

Na druhou stranu ale

$$\sup_{x \in M} |x^n - 0| = \sup_{x \in M} x^n = 1$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$. Tudíž

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in M} |x^n - 0| = 1 \neq 0$$

a proto posloupnost funkcí $(x^n)_{n=0}^{\infty}$ nekonverguje stejněměrně na $M = (0, 1)$.

Jakmile se ovšem „odrazíme“ od 1, tak již vše bude v pořádku. Uvažme pro názornost například $M = (0, 1/2)$. Zde pak platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in M} |x^n - 0| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

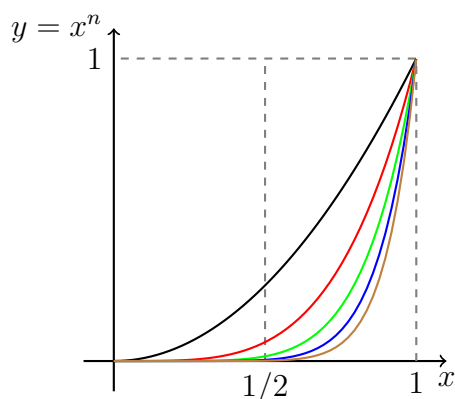
a posloupnost funkcí $(x^n)_{n=0}^{\infty}$ konverguje stejněměrně k 0 na množině $M = (0, 1/2)$. Pro ilustraci uvádíme Obrázek 6.

Vraťme se zpět k hlavnímu tématu této kapitoly, Fourierovým řadám. Nyní máme všechny pojmy nutné k zformulování následující věty.

Věta 2.9: Je-li f $2T$ -periodická funkce se spojitou první derivací na intervalu $\langle -T, T \rangle$, pak její Fourierova řada na intervalu $(-T, T)$ konverguje stejněměrně na celém \mathbb{R} .

Důkaz. Vynecháváme. □

K této problematice se ještě jednou vrátíme v podkapitole 2.3.



Obrázek 6: Ilustrace k Příkladu 2.8, graf funkcí x^n pro $n = 2, 4, 6, 8, 10$ na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.

2.3 Gibbsův efekt

Uvažme funkci

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

a její Fourierovu řadu na intervalu $(-\pi, \pi)$. Jedná se o lichou funkci a pro její Fourierovy koeficienty platí $a_k = 0$, $k \in \mathbb{N}$, a

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin kx \, dx = \frac{-2}{k\pi} [\cos kx]_0^{\pi} = \frac{2}{k\pi} (1 - (-1)^k), \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

Speciálně tedy pro $\ell \in \mathbb{N}^*$ platí

$$b_{2\ell-1} = \frac{4}{(2\ell-1)\pi} \quad \text{a} \quad b_{2\ell} = 0.$$

Pro součtovou funkci naší Fourierovy řady proto platí

$$s_{2n-1}(x) = s_{2n}(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{\ell=1}^n \frac{\sin(2\ell-1)x}{2\ell-1}. \quad (16)$$

Z dřívějšího výkladu plyne, že tato řada konverguje stejnoměrně například na intervalu $\langle \delta, \pi - \delta \rangle$ pro $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$. V násobcích π má součtová funkce ale neodstranitelnou nespojitost 1. druhu („konečný skok“). Z Obrázku 7 je patrné, že blízko u těchto skoků částečné součty divoce oscilují, přičemž maximální „amplituda“ těchto oscilací na první pohled příliš neubývá. Tento jev se nazývá **Gibbsův efekt**.

Pojďme podrobněji prozkoumat co se děje s částečným součtem řady (16) pro malé kladné x a velké n . K tomu použijeme úpravu

$$\frac{\sin kx}{k} = \int_0^x \cos kt \, dt, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

a tedy

$$s_{2n}(x) = \frac{4}{\pi} \int_0^x \sum_{\ell=1}^n \cos(2\ell - 1)t \, dt.$$

Dále, využitím vyjádření kosinu pomocí komplexní exponenciály a vzorce pro součet prvních několika členů geometrické posloupnosti, dostáváme

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^n \cos(2\ell - 1)t &= \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^n \left(e^{i(2\ell-1)t} + e^{-i(2\ell-1)t} \right) = \\ &= \frac{1}{2} e^{it} \frac{1 - e^{2int}}{1 - e^{2it}} + \frac{1}{2} e^{-it} \frac{1 - e^{-2int}}{1 - e^{-2it}} = \\ &= \frac{i}{4} \frac{1 - e^{2int}}{\sin t} - \frac{i}{4} \frac{1 - e^{-2int}}{\sin t} = \\ &= \frac{\sin 2nt}{2 \sin t}. \end{aligned}$$

a tedy

$$s_{2n}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\sin 2nt}{\sin t} \, dt = \underbrace{\frac{2}{\pi} \int_0^{2nx} \frac{\sin s}{s} \, ds}_{G(2nx):=} + \underbrace{\frac{2}{\pi} \int_0^x \left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} \right) \sin 2nt \, dt}_{F(x):=}. \quad (17)$$

Nejprve prozkoumejme funkci F . Existuje konstanta $C > 0$ splňující

$$|F(x)| \leq Cx^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pro derivaci funkce $G(x)$ platí

$$G'(x) = \frac{2 \sin x}{\pi x}, \quad x > 0.$$

Tato derivace je nulová v násobcích π a maximum funkce G proto je

$$G(\pi) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} \, dt \approx 1.17898.$$

Uvážíme-li tedy pravé okolí bodu 0, např. $(0, \varepsilon)$, tak vhodnou volnou ε můžeme člen $F(x)$ v (17) učinit libovolně malý. Poté lze zvolit dostatečně velké n takové, že první člen v (17), tj. $G(2nx)$ nabude hodnoty $G(\pi)$ pro nějaké $x \in (0, \varepsilon)$. Hodnota $G(\pi)$ je známa jako Wilbrahamova–Gibbsova konstanta.

2.4 Komplexní vyjádření

Podívejme se ještě na ekvivalentní formulaci trigonometrické řady (10) pomocí komplexní exponenciály. Tu lze vyjádřit takto:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{ik\pi x}{T}}, \quad (18)$$

kde $c_k \in \mathbb{C}$. Tento způsob zápisu je také bližší výrazům s kterými se budeme potýkat při studiu diskretní Fourierovy transformace. Všimněte si, že součet (18) je „dvojitě nekonečný“. Mezi koeficienty a_k , b_k a c_k lze najít jednoduchý vztah. Vzhledem k rovnosti

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{\frac{ik\pi x}{T}} &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_k e^{\frac{ik\pi x}{T}} + c_{-k} e^{-\frac{ik\pi x}{T}} \right) = \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left((c_k + c_{-k}) \cos \frac{k\pi x}{T} + i(c_k - c_{-k}) \sin \frac{k\pi x}{T} \right) \end{aligned}$$

platí následující vztahy mezi koeficienty

$$a_0 = 2c_0, \quad a_k = c_k + c_{-k}, \quad b_k = i(c_k - c_{-k}), \quad k \in \mathbb{N}^*$$

a naopak

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}, \quad k \in \mathbb{N}^*. \quad (19)$$

Je tedy otázkou vkusu, zda použijeme rozvoj pomocí a_k , b_k , či c_k . Typicky platí, že s výrazem (18) se snadněji pracuje. Na druhou stranu se někdy chceme vyhnout výrazům s komplexními čísly a v takových situacích použijeme spíše rozvoj (10).

Z předchozího odstavce také snadno nahlédneme, že koeficienty c_k můžeme přímo vypočítat pomocí vztahu

$$c_k = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(x) e^{-\frac{ik\pi x}{T}} dx, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (20)$$

Případně bychom tuto formuli mohli odvodit stejným způsobem jako dříve (nyní vynásobením vhodnou exponenciálou).

2.5 Parsevalova rovnost

Na tomto místě ještě uvedme jeden důležitý vztah, tzv. **Parsevalovu rovnost**.

Věta 2.10: Nechť je funkce f Riemannovsky integrabilní na intervalu $(-T, T)$ a nechť integrál $\int_{-T}^T f^2(x) dx$ existuje a je konečný. Potom platí:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f^2(x) dx. \quad (21)$$

Důkaz. Vynecháváme. □

Poznámka 2.11: Předpoklady Věty 2.10 jsou restriktivní. Rovnost (21) platí totiž pro každou funkci f , která je měřitelná a kvadraticky integrabilní na $(-T, T)$ v Lebesgueově smyslu. Tato skutečnost se obvykle vyjadřuje takto: $f \in L^2((-T, T), dx)$. Zde se dotýkáme teorie Lebesgueova integrálu a funkcionální analýzy, což jsou opět matematické disciplíny jdoucí nad rámec našeho kurzu. Podotkněme pouze, že funkcionální přístup k trigonometrickým řadám této problematice „sedí“. Téměř k dokonalosti ho přivedl francouzský matematik **H. Lebesgue** (1875 – 1941).

Podobně jako jsme z rozvoje (10) odvodili Eulerovy vzorce (11) a (12), můžeme i zde alespoň nekorektním způsobem dojít k Parsevalově rovnosti (21). Předpokládejme, že pro funkci f platí rozvoj

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{\frac{ik\pi x}{T}}, \quad \forall x \in (-T, T).$$

Dosazením za $f(x)$ do pravé strany rovnice (21) a prohozením (dvojitě) sumy a integrálu (neospravedlněný krok!) dostaneme

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^T f^2(x) dx = \frac{1}{2T} \sum_{\ell, k \in \mathbb{Z}} c_\ell c_k \int_{-T}^T e^{\frac{i(\ell+k)\pi x}{T}} dx$$

Protože pro libovolné $n \in \mathbb{Z}$ je

$$\int_{-T}^T e^{\frac{in\pi x}{T}} dx = \int_{-T}^T \cos \frac{n\pi x}{T} dx + i \int_{-T}^T \sin \frac{n\pi x}{T} dx = 2T \delta_{n,0},$$

docházíme k rovnosti

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^T f^2(x) dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k c_{-k}$$

Protože uvažujeme funkci f s reálnými hodnotami, vyplývá ze vztahu (20) rovnost $\overline{c_k} = c_{-k}$ pro $\forall k \in \mathbb{Z}$ a tudíž $c_k c_{-k} = |c_k|^2$.

Dále uveďme ještě Parsevalovu rovnost zapsanou pomocí koeficientů a_k a b_k . Sumu na levé straně rovnice (21) lze zapsat jako

$$|c_0|^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} c_k c_{-k}.$$

Dosazením vztahů (19) dostaneme Parsevalovu rovnost (21) ve tvaru

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f^2(x) dx. \quad (22)$$

V aplikacích, které uvedeme níže, lze Parsevalovu rovnost interpretovat např. jako vyjádření zachování celkové energie v původním a transformovaném signálu. Parsevalova rovnost představuje ale také silný nástroj pro sčítání řad.

Příklad 2.12: Vraťme se ještě k Příkladu 2.7. Pro periodické prodloužení funkce $f(x) = x$, $x \in (-\pi, \pi)$ jsme dostali Fourierovy koeficienty

$$a_k = 0, \quad b_k = \frac{2(-1)^{k+1}}{k}.$$

Proto

$$c_0 = 0, \quad c_k = -\frac{i}{2} \frac{2(-1)^{k+1}}{k}, \quad c_{-k} = \frac{i}{2} \frac{2(-1)^{k+1}}{k}, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

Parsevalova rovnost (21) potom dává

$$\sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^2} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}.$$

Celkem dostáváme známou formulku

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ke stejnému závěru dojdeme, použijeme-li Parsevalovu rovnost ve tvaru (22). (Zkuste si to!)

2.6 Poznámky a odkazy

Zájemce o podrobné studium problematiky Fourierových řad odkazujeme na klasickou monografii [7].

2.7 Cvičení

Cvičení 2.1: Následující dvě tvrzení se často hodí při počítání Fourierových koeficientů.

- Je-li f spojitá sudá funkce, tj. $f(-x) = f(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, pak pro koeficienty b_k její Fourierovy funkce na intervalu $(-T, T)$ platí $b_k = 0$, $k \in \mathbb{N}^*$.
- Je-li f spojitá lichá funkce, tj. $f(-x) = -f(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, pak pro koeficienty a_k její Fourierovy funkce na intervalu $(-T, T)$ platí $a_k = 0$, $k \in \mathbb{N}$.

Dokažte.

Řešení. Pro důkaz nejdříve potřebujeme ukázat následující tvrzení: *Mějme sudou funkci $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ a lichou funkci $g : X \rightarrow \mathbb{R}$, kde $X \subset \mathbb{R}$ splňující $\forall x \in X: -x \in X$. Pak $f \cdot g : X \rightarrow \mathbb{R}$ je lichá funkce.* Důkaz: Pro $x \in X$ platí

$$\begin{aligned} (f \cdot g)(-x) &= f(-x) \cdot g(-x) = \\ &= (-f(x)) \cdot g(x) = \\ &= -f(x) \cdot g(x) = \\ &= -(f \cdot g)(x). \end{aligned}$$

Tedy přímo z definice je $(f \cdot g)$ lichá funkce.

Dále z předmětu BI-ZMA víme, že určitý integrál liché funkce na symetrickém intervalu je roven 0. Nyní už snadno dokážeme obě tvrzení v zadání.

- Pro první případ: číselné koeficienty b_k máme v (12) definované vztahem

$$b_k = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(x) \sin \frac{k\pi x}{T} dx, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

Funkce \sin je lichá funkce a funkce f je z zádání sudá funkce. Proto z faktů zmíněných výše dostáváme:

$$b_k = \frac{1}{T} \cdot 0 = 0.$$

- Obdobně pro druhý případ: číselné koeficienty a_k máme v (11) definované vztahem

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(x) \cos \frac{k\pi x}{T} dx, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Funkce \cos je sudá funkce a funkce f je z zádání lichá funkce, tedy

$$a_k = \frac{1}{T} \cdot 0 = 0. \quad \square$$

Cvičení 2.2: Toto cvičení ukazuje jak „hladkost“ funkce souvisí s chováním jejích Fourierových koeficientů. Mějme $2T$ -periodickou funkci f mající spojitou n tou derivaci, potom existují konstanty C_a, C_b, C_c závislé pouze na f a T splňující

$$|a_k| \leq \frac{C_a}{k^n}, \quad |b_k| \leq \frac{C_b}{k^n} \quad \text{a} \quad |c_k| \leq \frac{C_c}{|k|^n}.$$

Cvičení 2.3: Ukažte, že pro každé $k, n \in \mathbb{N}$ platí

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos nx \, dx = 0, \quad (23)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx \, dx = \pi \delta_{k,n}. \quad (24)$$

U následujících příkladů doporučujeme použít svůj oblíbený počítačový algebraický systém a prozkoumat grafy zadaných funkcí a částečné součty zadaných Fourierových řad.

Cvičení 2.4: Nalezněte Fourierovu řadu funkce $f(x) = 1 - x^2$ na intervalu $(-1, 1)$.

Cvičení 2.5: Nalezněte Fourierovu řadu funkce

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x, & x > 0. \end{cases}$$

na intervalu $(-\pi, \pi)$.

Cvičení 2.6: Nalezněte Fourierovu řadu funkce $f(x) = \operatorname{sgn} x$ na intervalu $(-\pi, \pi)$. S pomocí nalezeného rozvoje určete součet číselné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Dále si všimněte, k jaké hodnotě konverguje vámi spočtená Fourierova řada pro $x = 0$, tento fakt lze brát jako další důvod pro definici $\operatorname{sgn}(0) = 0$.

Cvičení 2.7: Nalezněte Fourierovu řadu funkce $f(x) = x(x - \pi)(x + \pi)$ na intervalu $(-\pi, \pi)$. S pomocí nalezeného rozvoje určete součet číselné řady

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}.$$

Cvičení 2.8: Nalezněte Fourierovu řadu funkce $f(x) = |x|$ na intervalu $(-\pi, \pi)$ a pomocí Parsevalovy rovnosti určete součet číselné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Cvičení 2.9: Nalezněte Fourierovu řadu funkce $f(x) = \sin(\alpha x)$, resp. $f(x) = \cos(\alpha x)$ na intervalu $(-\pi, \pi)$, kde $\alpha \notin \mathbb{Z}$.

Cvičení 2.10: Nalezněte Fourierovu řadu funkce $f(x) = x^2$ na intervalu $(-\pi, \pi)$ a pomocí Parsevalovy rovnosti určete součet číselné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}.$$

Cvičení 2.11: Nalezněte Fourierovu řadu funkce $f(x) = \sinh x$ na intervalu $(-\pi, \pi)$.

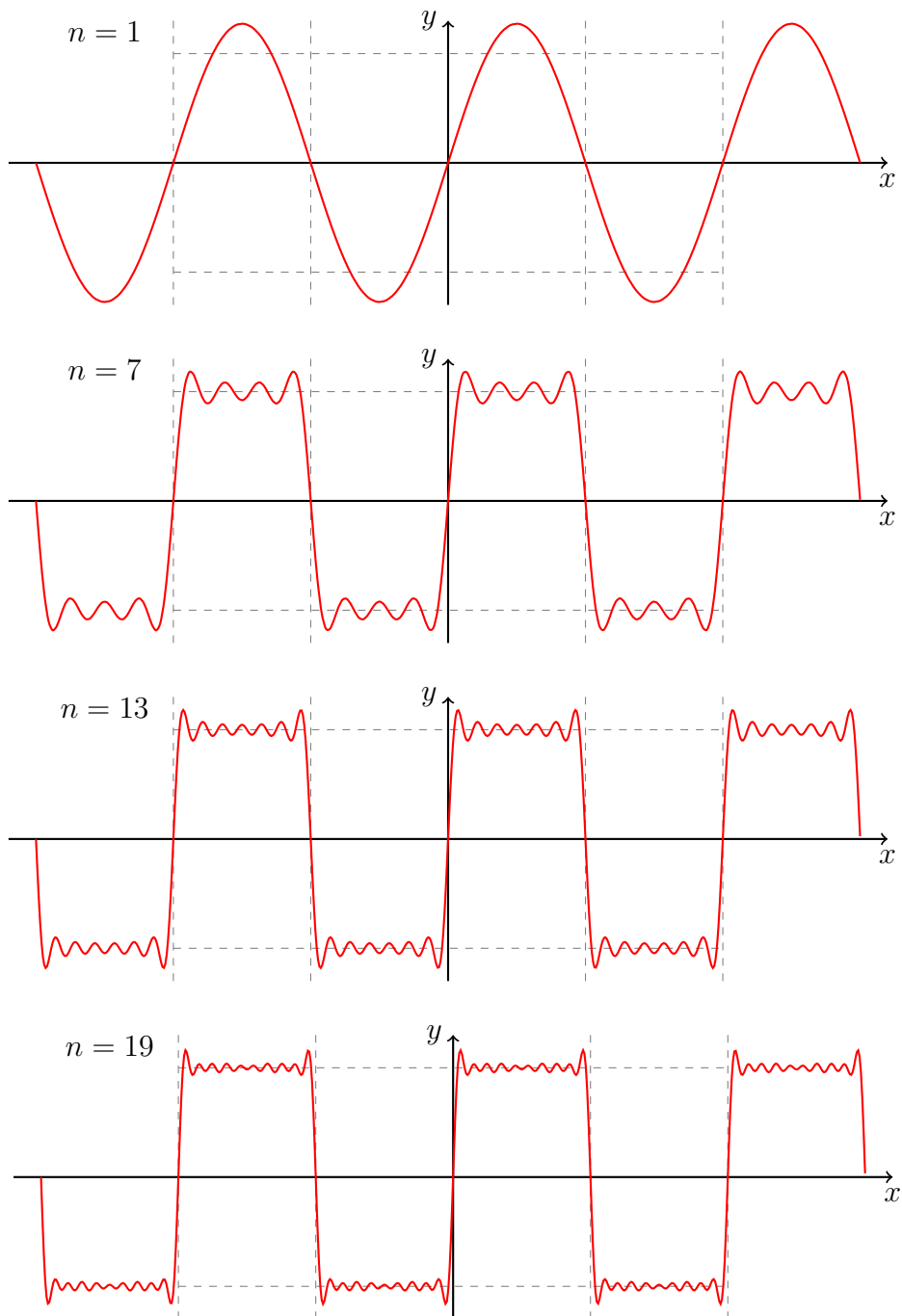
Cvičení 2.12: Nalezněte Fourierovu řadu funkce $f(x) = e^{\alpha x}$ na intervalu $(-T, T)$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$ a $T > 0$.

Cvičení 2.13: Nalezněte Fourierovu řadu funkce

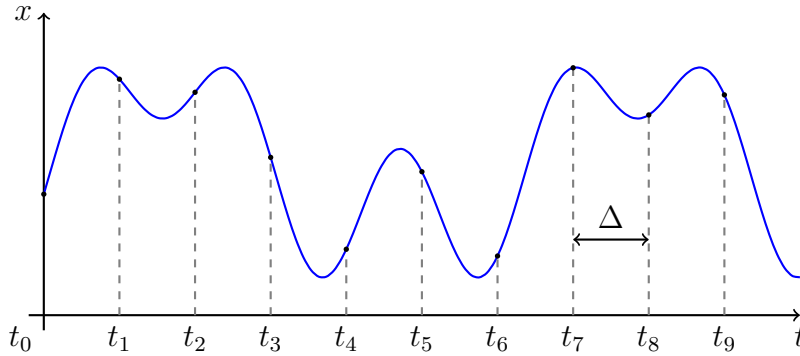
$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{pro } |x| \leq \alpha, \\ 0, & \text{pro } \alpha < |x| < \pi, \end{cases}$$

na intervalu $(-\pi, \pi)$, kde $\alpha \in (0, \pi)$. Pomocí Parsevalovy rovnosti vypočtete součty řad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2} \quad \text{a} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(n\alpha)}{n^2}.$$



Obrázek 7: Částečné součty Fourierovy řady (16) funkce signum na intervalu $(-\pi, \pi)$, n opět označuje počet sčítanců v částečném součtu.



Obrázek 8: Vzorkování signálu $x(t)$ s vzorkovací frekvencí $f = 1/\Delta$.

3 Diskrétní Fourierova transformace (DFT)

V této kapitole se budeme podrobně věnovat diskrétní Fourierově transformaci (DFT). Ukážeme si jednu z jejích možných interpretací jako nástroje pro spektrální analýzu signálu a prozkoumáme její základní vlastnosti. Podrobný, čtenáři přístupný, přehled vlastností DFT a jejích aplikací ve zpracování audiosignálu lze nalézt například v [6].

3.1 Úvod

Představme si, že v N po sobě jdoucích časových okamžicích $t_n = \Delta \cdot n$, $n = 0, 1, \dots, N-1$, vzájemně od sebe vzdálených o $\Delta > 0$ sekund, naměříme hodnoty jistého signálu $x(t_n)$. Pro ilustraci uvádíme Obrázek 8. Může jít o záznam zvuku, teploty, zemětřesení, kurz bitcoinu vůči dolaru atp. Diskrétní Fourierovou transformací tohoto záznamu pak rozumíme¹⁴

$$\hat{x}(\omega_k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x(t_n) e^{-i\omega_k t_n}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Komplexní číslo $\hat{x}(\omega_k)$ je „spektrum“ odpovídající úhlové frekvenci $\omega_k = k\Omega$ (měřena v radiánech za sekundu) a $\Omega = \frac{2\pi}{N\Delta}$ je základní úhlová frekvence. Dále ještě poznamenejme, že $f = \frac{1}{\Delta}$ představuje vzorkovací frekvenci (*sampling rate*). Velikost (v absolutní hodnotě) $\hat{x}(\omega_k)$ udává, jak významně do signálu přispívá harmonická oscilace s úhlovou frekvencí ω_k .

Z výše uvedeného je patrné, že budeme pracovat v komplexním vektorovém prostoru \mathbb{C}^N . Z praktických důvodů budeme v sekcích věnovaných DFT indexovat složky vektorů z \mathbb{C}^N od nuly, tzn.

$$x = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1}) \in \mathbb{C}^N.$$

Nyní můžeme přistoupit k obvyklé definici.

¹⁴K tomuto vzorci lze dospět například diskretizací Eulerova vzorce pro koeficient c_k v komplexním vyjádření Fourierovy řady. Tedy přechodem od spojité funkce k diskrétnímu signálu při němž se integrál nahradí konečným součtem.

Definice 3.1: Diskrétní Fourierova transformace vektoru $x = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$ je opět vektor $\hat{x} \in \mathbb{C}^N$, jehož složky jsou definovány předpisem

$$\hat{x}_k := \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2\pi i kn/N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (25)$$

Na prostoru \mathbb{C}^N je tímto způsobem definováno zobrazení $\mathcal{F} : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$, které každému vektoru $x \in \mathbb{C}^N$ přiřadí opět vektor $\hat{x} \in \mathbb{C}^N$,

$$\mathcal{F}x := \hat{x}.$$

Tomuto \mathcal{F} přirozeně říkáme diskrétní Fourierova transformace.

Vlastnostmi tohoto zobrazení se budeme zabývat. Nejprve si ale připomeneme několik základních poznatků z lineární algebry týkající se vektorových prostorů se skalárním součinem. DFT odpovídá volbě velice speciálního lineárního zobrazení definovaného na prostoru se skalárním součinem, jde o tzv. unitární operátor. O těchto operátorech si také povíme víc v následující podsekci. Všechny fundamentální vlastnosti DFT potom vyplynou z obecných vlastností unitárních operátorů jako speciální případ.

3.2 Hilbertův prostor konečné dimenze

Mathematical science is in my opinion an indivisible whole, an organism whose vitality is conditioned upon the connection of its parts. *David Hilbert*

V této kapitole shrneme některé pojmy z lineární algebry. Začneme skalárním součinem. Buď V vektorový (někdy též lineární) prostor nad tělesem komplexních čísel \mathbb{C} . Zobrazení

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$$

splňující podmínky

i) pro každé $x, y, z \in V$ a $\alpha \in \mathbb{C}$ platí

$$\langle x + \alpha y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \alpha \langle y, z \rangle,$$

ii) pro každé $x, y \in V$ platí $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$,

iii) pro každé $x \in V$ je $\langle x, x \rangle \geq 0$ a rovnost platí právě tehdy, když $x = 0$,

nazýváme **skalárním součinem** na prostoru V . O vektorovém prostoru V konečné dimenze vybaveném skalárním součinem mluvíme jako o **Hilbertově prostoru**¹⁵.

¹⁵Předpoklad konečnosti dimenze uvažovaného vektorového prostoru je podstatný. Vektorový prostor se skalárním součinem se nazývá **pre-Hilbertův** prostor. Hilbertův prostor je pre-Hilbertův prostor, který je úplný. Ukazuje se ovšem, že každý pre-Hilbertův prostor konečné dimenze je úplný a tedy i Hilbertův. Protože se zde prostory nekonečné dimenze nebudeme zabývat, je naše označení konzistentní se zbytkem světa.

Podmínka *i)* říká, že skalární součin je lineární ve svém prvním argumentu. Kombinací podmínek *i)* a *ii)* zjišťujeme, že je antilineární ve své druhé složce. Přesněji, pro každé $x, y, z \in V$ a $\alpha \in \mathbb{C}$ platí

$$\langle z, x + \alpha y \rangle = \overline{\langle x + \alpha y, z \rangle} = \overline{\langle x, z \rangle + \alpha \langle y, z \rangle} = \overline{\langle x, z \rangle} + \bar{\alpha} \overline{\langle y, z \rangle} = \langle z, x \rangle + \bar{\alpha} \langle z, y \rangle.$$

Na skalární součin je navázáno několik další pojmů, tím nejznámějším je ortogonalita (kolmost) vektorů. Pokud pro vektory $x, y \in V$ platí rovnost $\langle x, y \rangle = 0$, pak o nich mluvíme jako o vzájemně **kolmých (ortogonálních)**¹⁶ vektorech. Symbolicky tento fakt zapisujeme: $x \perp y$. Z kontextu musí být vždy jasné jaký skalární součin na prostoru V uvažujeme.

Lemma 3.2: Jsou-li nenulové vektory $x_1, \dots, x_n \in V$ vzájemně kolmé, pak tvoří lineárně nezávislý soubor.

Důkaz. Skutečně, předpokládejme že máme nulovou lineární kombinaci daného souboru vektorů, tj. máme čísla $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ taková, že

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k = 0.$$

Uvážíme-li postupně $\ell = 1, 2, \dots, n$, pak díky vlastnostem skalárního součinu a předpokladu vzájemné kolmosti vektorů x_1, \dots, x_n platí rovnost

$$\left\langle \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k, x_\ell \right\rangle = \sum_{k=1}^n \alpha_k \langle x_k, x_\ell \rangle = \alpha_\ell \underbrace{\langle x_\ell, x_\ell \rangle}_{\neq 0}.$$

Na druhou stranu ale i triviálně platí

$$\left\langle \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k, x_\ell \right\rangle = \langle 0, x_\ell \rangle = 0.$$

Shrneme, že $\alpha_\ell = 0$ pro každé $\ell = 1, 2, \dots, n$. Jediná nulová lineární kombinace vektorů x_1, \dots, x_n je právě triviální lineární kombinace. Tento soubor vektorů je proto lineárně nezávislý. \square

Máme-li vektorový prostor V se skalárním součinem $\langle \cdot, \cdot \rangle$, pak klademe

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}. \tag{26}$$

Zobrazení $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ nazýváme **norma indukovaná skalárním součinem** $\langle \cdot, \cdot \rangle$ na prostoru V (viz také Definici ??). Norma je zobecněním Euklidovské délky vektoru v \mathbb{R}^3 . Vektorovým prostorům s normou se budeme ještě podrobněji věnovat později v semestru. V tento okamžik nám postačí pouze několik základních informací. Mezi skalárním součinem a jím indukovanou normou platí následující důležitá nerovnost.

¹⁶Tento pojem samozřejmě závisí na volbě skalárního součinu! Jisté dva vektory mohou být kolmé vzhledem k jednomu, ale ne vzhledem k jinému skalárnímu součinu.

Věta 3.3 (Schwarzova nerovnost): Pro normu $\|\cdot\|$ na vektorovém prostoru V indukovanou skalárním součinem $\langle \cdot, \cdot \rangle$ platí pro každé $x, y \in V$ nerovnost

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

Důkaz. Uvažme $x, y \in V$ a $\alpha \in \mathbb{C}$. Je-li x nebo y rovno nule, pak nerovnost triviálně platí. Předpokládejme dále, že obě x i y jsou nenulová. Z vlastností skalárního součinu plyne nerovnost

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle x + \alpha y, x + \alpha y \rangle = \|x\|^2 + \bar{\alpha} \langle x, y \rangle + \alpha \langle y, x \rangle + |\alpha|^2 \|y\|^2 = \\ &= \|x\|^2 + 2\Re \bar{\alpha} \langle x, y \rangle + |\alpha|^2 \|y\|^2. \end{aligned}$$

platná pro každé $\alpha \in \mathbb{C}$. Položme speciálně

$$\alpha := -\frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2} \in \mathbb{C}.$$

Potom po dosazení do odvozené nerovnosti dostáváme

$$0 \leq \|x\|^2 + |\langle x, y \rangle|^2 \frac{-1}{\|y\|^2}$$

a po elementární úpravě

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2. \quad \square$$

Jakožto důsledek Schwarzovy nerovnosti si ukážeme trojúhelníkovou nerovnost pro normu indukovanou skalárním součinem.

Věta 3.4 (Trojúhelníková nerovnost): Pro normu $\|\cdot\|$ na vektorovém prostoru V indukovanou skalárním součinem $\langle \cdot, \cdot \rangle$ platí pro každé $x, y \in V$ nerovnost

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Důkaz. Pro $x, y \in V$ platí

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \|y\|^2 = \|x\|^2 + 2\Re \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \leq \\ &\leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

Tvrzení ihned dostáváme prostým odmocněním. Ve výpočtu jsme použili vlastnosti skalárního součinu, nerovnost $\Re z \leq |z|$ platnou pro libovolné $z \in \mathbb{C}$ a Schwarzovu nerovnost. \square

Poznámka 3.5: Uvedme ještě jednu důležitou vlastnost normy indukované skalárním součinem. Pro každý vektor $x \in V$ a číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ platí

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{|\lambda|^2 \langle x, x \rangle} = |\lambda| \|x\|.$$

Toto pozorování nám říká, jak se norma indukovaná skalárním součinem chová vůči škálování vektorů. Zanedlouho uvidíme, že tuto vlastnost použijeme při axiomatizaci pojmu „normy“ ne nutně indukované skalárním součinem.

Každý vektorový prostor má bázi. V Hilbertových prostorech, tedy v našem případě vektorových prostorech konečné dimenze se skalárním součinem, hrají důležitou roli jisté typy bází, které si teď popíšeme.

Bázi $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ prostoru V se skalárním součinem $\langle \cdot, \cdot \rangle$ nazýváme **ortonormální**, právě když pro každé $\ell, k \in \{1, 2, \dots, n\}$ platí

$$\langle b_k, b_\ell \rangle = \delta_{k,\ell}.$$

Jinak řečeno, vektory z ortonormální báze \mathcal{B} jsou vzájemně kolmé a navíc mají všechny jednotkovou normu. Skutečně, $\langle b_k, b_k \rangle = \|b_k\|^2 = 1$, čili $\|b_k\| = 1$.

Souřadnice vektoru vzhledem k ortonormální bázi lze velmi snadno¹⁷ napočítat. Z předmětu **BI-LIN** víme, že každý vektor $x \in V$ lze jednoznačně vyjádřit ve tvaru

$$x = \sum_{k=1}^n \alpha_k b_k, \quad (27)$$

kde $\alpha_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, 2, \dots, n$, jsou souřadnice vektoru x vzhledem k bázi \mathcal{B} . Všimněte si ovšem, že díky ortonormalitě báze \mathcal{B} a vlastnostem skalárního součinu pro toto x platí

$$\langle x, b_\ell \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n \alpha_k b_k, b_\ell \right\rangle = \sum_{k=1}^n \alpha_k \underbrace{\langle b_k, b_\ell \rangle}_{\delta_{k,\ell}} = \alpha_\ell,$$

pro každé $\ell = 1, 2, \dots, n$. Rozvoj (27) tedy můžeme zapsat ve tvaru

$$x = \sum_{k=1}^n \langle x, b_k \rangle b_k, \quad (28)$$

a mluvíme o něm jako o **Fourierově rozvoji** vektoru x do ortonormální báze \mathcal{B} . Příslušné číselné koeficienty nazýváme **Fourierovými koeficienty vektoru x** . Vektor $\langle x, b_k \rangle b_k$ odpovídá **ortogonální projekci** vektoru x na jednorozměrný podprostor $\langle b_k \rangle \equiv \{\alpha b_k \mid \alpha \in \mathbb{C}\}$, viz obrázek 9.

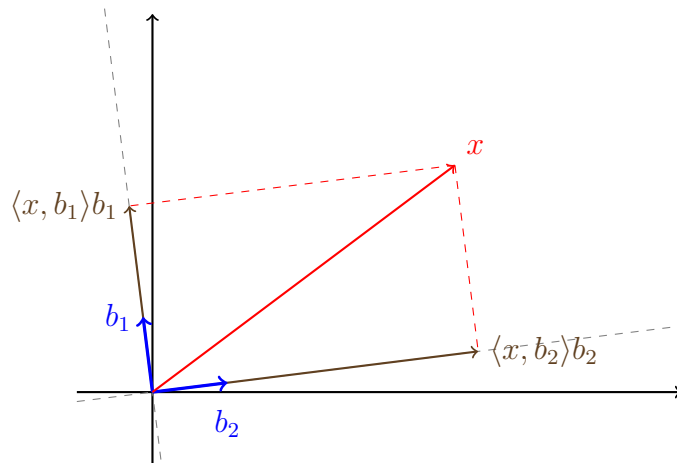
Mezi Fourierovými koeficienty vektoru x a jeho normou platí tzv. Parsevalova rovnost.

Věta 3.6 (Parsevalova rovnost): Je-li $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ ortonormální báze prostoru V vybaveného skalárním součinem $\langle \cdot, \cdot \rangle$, pak pro každý vektor $x \in V$ platí **Parsevalova rovnost**:

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^n |\langle x, b_k \rangle|^2, \quad (29)$$

kde $\|\cdot\|$ je norma indukovaná skalárním součinem $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

¹⁷Nemusíme se zabývat GEM!



Obrázek 9: Ilustrace k Fourierově rozvoji (27). Vektory $\langle x, b_i \rangle b_i$ představují projekci vektoru x do směru, který odpovídá vektoru b_i , $i = 1, 2$.

Důkaz. Tvrzení stačí ověřit přímým výpočtem. Využijeme-li Fourierova rozvoje (28) a vlastností skalárního součinu, ihned dostáváme

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \langle x, x \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n \langle x, b_k \rangle b_k, \sum_{\ell=1}^n \langle x, b_\ell \rangle b_\ell \right\rangle = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n \langle x, b_k \rangle \overline{\langle x, b_\ell \rangle} \underbrace{\langle b_k, b_\ell \rangle}_{\delta_{k,\ell}} = \\ &= \sum_{k=1}^n |\langle x, b_k \rangle|^2. \end{aligned} \quad \square$$

Nyní si ukážeme dva příklady vektorových prostorů vybavených skalárním součinem.

Příklad 3.7: Připomeňme, že na prostoru \mathbb{C}^n lze zavést (Euklidovský, standardní) skalární součin:

$$\langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^n x_k \overline{y_k}.$$

Jako domácí cvičení ověřte splnění všech požadavků z definice skalárního součinu. Příslušnou indukovanou normou je¹⁸

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2}.$$

¹⁸Spodní index souvisí s druhou mocninou a odmocninou vyskytující se v tomto výrazu. Na \mathbb{C}^n lze obecně zavést normy pro každé $p \geq 1$ předpisem

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^n |x_k|^p}.$$

Pouze $\|x\|_2$ je ale indukována (uvedeným) skalárním součinem.

Všimněte si, že Schwarzova nerovnost rozepsaná do sum nám dává značně netriviální tvrzení

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k \overline{y_k} \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^n |y_k|^2},$$

platné pro libovolný vektor $x \in \mathbb{C}^n$. Analogicky, pokud rozepíšeme trojúhelníkovou nerovnost, pak dostáváme nerovnost

$$\sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n |y_k|^2},$$

platnou pro libovolné $x, y \in \mathbb{C}^n$.

Příklad 3.8: Prostor $C(J)$ všech spojitých reálných funkcí na uzavřeném intervalu J lze vybavit skalárním součinem

$$\langle f, g \rangle := \int_J f(x)g(x) dx. \quad (30)$$

Toto je příklad lineárního prostoru nad \mathbb{R} nekonečné dimenze se skalárním součinem.

Připomeňme, že $C(J)$ skutečně tvoří vektorový prostor nad tělesem reálných čísel. Algebraické operace jsou definovány standardně bodově. Z BI-ZMA také víme, že součin dvou spojitých funkcí je opět spojitá funkce a součet dvou spojitých funkcí je spojitá funkce. Dále víme, že pro funkce spojitě na uzavřeném intervalu J existuje jejich Riemannův integrál. Výraz na pravé straně rovnice (30) je tedy dobře definovaný pro libovolné dva prvky $f, g \in C(J)$.

Pojďme ověřit, že (30) skutečně zadává skalární součin. Nejprve prozkoumejme linearitu v prvním argumentu,

$$\begin{aligned} \langle \alpha f + g, h \rangle &= \int_J (\alpha f(x) + g(x))h(x) dx = \alpha \int_J f(x)h(x) dx + \int_J g(x)h(x) dx = \\ &= \alpha \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle, \quad f, g \in C(J), \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Druhý požadavek v definici skalárního součinu se v prostoru nad tělesem reálných čísel redukuje na symetrii. Ta v našem případě plyne z komutativity násobení reálných čísel,

$$\langle f, g \rangle = \int_J f(x)g(x) dx = \int_J g(x)f(x) dx = \langle g, f \rangle, \quad g, f \in C(J).$$

Konečně pojďme ověřit třetí požadavek. Pro libovolné $f \in C(J)$ platí (vzpomeňte na větu o nerovnosti mezi integrály formulovanou v BI-ZMA)

$$\langle f, f \rangle = \int_J f(x)^2 dx \geq \int_J 0 dx = 0.$$

Nyní musíme ověřit, že rovnost nastává skutečně pouze pro nulovou funkci. To ukážeme sporem. Předpokládejme, že existuje nenulová funkce $f \in C(J)$, pro niž platí

$$\langle f, f \rangle = \int_J f(x)^2 dx = 0.$$

Protože je funkce f nenulová, musí existovat bod x_0 takový, že $f(x_0)^2 = c > 0$. Ze spojitosti funkce f^2 ale také plyne, že pro $\varepsilon = c/2 > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že $3c/2 > f(x)^2 > c/2$ pro každé $x \in M := (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap J$. Odtud dostáváme odhad

$$\begin{aligned} \langle f, f \rangle &= \int_J f(x)^2 dx \geq \int_M f(x)^2 dx \geq \int_M \frac{c}{2} dx \geq \\ &\geq \delta \cdot \frac{c}{2} > 0. \end{aligned}$$

To je ovšem spor.

Všimněte si, že výpočet koeficientů Fourierových řad zmíněných v předchozí části textu není nic jiného než počítání jistých skalárních součinů.

3.3 Unitární matice a operátory

Pro naše potřeby v další části této kapitoly bude docela stačit, vyšetříme-li základní vlastnosti unitárních operátorů definovaných na speciálním Hilbertově prostoru komplexních n -tic \mathbb{C}^n vybaveným skalárním součinem

$$\langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^n x_k \bar{y}_k.$$

Celou teorii lze vyložit v obecném Hilbertově prostoru (téměř ve stejné podobě).

Bud $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Matici $\mathbf{A}^* \in \mathbb{C}^{n,n}$ s prvky definovanými vztahem

$$\mathbf{A}_{i,j}^* := \overline{\mathbf{A}_{j,i}},$$

pro $\forall i, j \in \hat{n}$, nazýváme maticí (**hermitovskými**) **sduženou** k matici \mathbf{A} . Matici \mathbf{A}^* tedy získáme tak, že transponujeme matici \mathbf{A} a komplexně sdužíme („opruhujeme“) její prvky.

Následující vlastnosti sdužených matic ověřte jako cvičení (Cvičení 3.3): $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n,n}$, $x, y \in \mathbb{C}^n$, $\alpha \in \mathbb{C}$,

1. $(\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B})^* = \mathbf{A}^* + \bar{\alpha}\mathbf{B}^*$,
2. $(\mathbf{AB})^* = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^*$,
3. $(\mathbf{A}^*)^* = \mathbf{A}$, $\mathbf{E}^* = \mathbf{E}$, kde \mathbf{E} označuje jednotkovou matici,
4. $\langle x, \mathbf{A}y \rangle = \langle \mathbf{A}^*x, y \rangle$.

Pomocí hermitovského sdužení definujeme speciální třídu matic.

Definice 3.9: Matici $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{n,n}$ nazveme **unitární**, právě když platí $\mathbf{U}^*\mathbf{U} = \mathbf{E}$.

Z vlastností sdužení a definice unitární matice ihned vyplývá, že unitární matice zachovávají hodnotu skalárního součinu dvou vektorů. Přesněji, pro libovolná $x, y \in \mathbb{C}^n$ a unitární matici $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{n,n}$ platí

$$\langle \mathbf{U}x, \mathbf{U}y \rangle = \langle \mathbf{U}^*\mathbf{U}x, y \rangle = \langle x, y \rangle. \quad (31)$$

Poznámka 3.10: Připomeňme jedno tvrzení dokazované v předmětu **BI-LIN**: Pokud $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n,n}$ splňují $\mathbf{AB} = \mathbf{E}$ (resp. $\mathbf{BA} = \mathbf{E}$), je matice \mathbf{A} regulární a $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$. Z definice unitární matice \mathbf{U} proto vyplývá, že \mathbf{U} je regulární a $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^*$.

Další důležitou vlastnost, resp. charakterizaci, unitárních matic nám odhaluje následující věta. Vidíme, že unitární matice vlastně hrají podobnou roli jako ortogonální matice v $\mathbb{R}^{n,n}$.

Věta 3.11: Matice $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{n,n}$ je unitární právě tehdy, když sloupce \mathbf{U} tvoří ortonormální bázi \mathbb{C}^n .

Důkaz. Označme $\mathbf{U}_{\bullet,i} \in \mathbb{C}^n$ i -tý sloupec matice \mathbf{U} . Potom pro $i, j \in \hat{n}$ máme

$$\langle \mathbf{U}_{\bullet,i}, \mathbf{U}_{\bullet,j} \rangle = \sum_{k=1}^n \mathbf{U}_{k,i} \overline{\mathbf{U}_{k,j}} = \sum_{k=1}^n (\mathbf{U}^*)_{j,k} \mathbf{U}_{k,i} = (\mathbf{U}^* \mathbf{U})_{j,i}.$$

Tedy rovnost $\mathbf{U}^* \mathbf{U} = \mathbf{E}$ platí právě tehdy, když pro $\forall i, j \in \hat{n}$ je $\langle \mathbf{U}_{\bullet,i}, \mathbf{U}_{\bullet,j} \rangle = \delta_{i,j}$. Odtud už plyne ekvivalence z tvrzení věty. \square

Na závěr této části textu obraťme naši pozornost k lineárním zobrazením, která, jak víme, úzce souvisejí s maticemi. Definujeme unitární zobrazení a ukážeme jeho vlastnosti.

Definice 3.12: Lineární zobrazení $U : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, jehož matice $\mathbf{U} \equiv {}^{\mathcal{E}}U$ ve standardní bázi \mathcal{E} prostoru \mathbb{C}^n je unitární, nazýváme **unitární operátor**.

Věta 3.13: Buď $U : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ unitární operátor, potom U je izomorfismus na \mathbb{C}^n a ${}^{\mathcal{E}}(U^{-1}) = \mathbf{U}^*$.

Důkaz. Z lineární algebry víme, že lineární zobrazení $A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ je izomorfismus, právě když je jeho matice ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$ (v libovolných bázích \mathcal{X} a \mathcal{Y}) regulární. Navíc pro inverzní zobrazení A^{-1} platí

$${}^{\mathcal{Y}}(A^{-1})^{\mathcal{X}} = ({}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}})^{-1}.$$

Unitární operátor $U : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ je proto izomorfismus, neboť unitární matice $\mathbf{U} \equiv {}^{\mathcal{E}}U$ je regulární a

$${}^{\mathcal{E}}(U^{-1}) = ({}^{\mathcal{E}}U)^{-1} = \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^*. \quad \square$$

3.4 DFT jako unitární operátor na \mathbb{C}^N

Na tomto místě dokážeme¹⁹ ty nejzákladnější vlastnosti DFT. Připomeňme, že nyní opět indexujeme složky vektorů z \mathbb{C}^N od nuly.

Úmluva: Nebudeme rozlišovat mezi lineárním zobrazením $A : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$ a jeho maticí ve standardní bázi ${}^{\mathcal{E}}A$ a pro oba objekty použijeme stejné písmeno A (podobně jako pro vektor souřadnic $(v)_{\mathcal{E}}$ stručně píšeme jen v).

Začněme tou nejzákladnější vlastností. DFT je lineární zobrazení zadané pomocí jisté matice bohaté na komplexní exponenciálu.

¹⁹V podstatě jen použijeme výsledky předchozí kapitoly 3.3.

Věta 3.14: DFT $\mathcal{F} : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$ zavedené v Definicí 3.1 je lineární zobrazení s maticí

$$\mathcal{F} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-2\pi i/N} & e^{-4\pi i/N} & \dots & e^{-2\pi i(N-1)/N} \\ 1 & e^{-4\pi i/N} & e^{-8\pi i/N} & \dots & e^{-4\pi i(N-1)/N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{-2\pi i(N-1)/N} & e^{-4\pi i(N-1)/N} & \dots & e^{-2\pi i(N-1)^2/N} \end{pmatrix}.$$

Důkaz. Nejprve dokažme linearitu. Budte $x, y \in \mathbb{C}^N$ a $\alpha \in \mathbb{C}$. Potom

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}(x + \alpha y))_k &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-2\pi i kn/N} \underbrace{(x + \alpha y)_n}_{x_n + \alpha y_n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-2\pi i kn/N} x_n + \alpha \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-2\pi i kn/N} y_n = (\mathcal{F}x)_k + \alpha (\mathcal{F}y)_k \end{aligned}$$

pro $\forall k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$. Dále pro $j, k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ máme

$$\mathcal{F}_{k,j} = (\mathcal{F}e_j)_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \delta_{jn} e^{-2\pi i kn/N} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-2\pi i jk/N}. \quad \square$$

Matice, která zadává DFT, v předchozí větě je ale dokonce unitární. To má pro DFT závažné důsledky shrnuté v následující větě.

Věta 3.15: DFT $\mathcal{F} : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$ je izomorfismus na \mathbb{C}^N . Pro inverzi \mathcal{F} platí $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^*$, nebo-li

$$(\mathcal{F}^{-1}x)_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{2\pi i kn/N}, \quad x \in \mathbb{C}^N.$$

Důkaz. Stačí ověřit, že matice \mathcal{F} uvedená ve větě 3.14 je unitární, tedy že platí $\mathcal{F}^* \mathcal{F} = \mathbf{E}$. Tvrzení potom vyplývá z Věty 3.13.

Skutečně, pro $j, k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ máme²⁰

$$(\mathcal{F}^* \mathcal{F})_{j,k} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i jn/N} e^{-2\pi i kn/N} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{2\pi i (j-k)/N} \right)^n = \begin{cases} \frac{1 - e^{2\pi i (j-k)}}{N(1 - e^{2\pi i (j-k)/N})}, & j \neq k, \\ 1, & j = k. \end{cases}$$

Nyní si stačí uvědomit, že pro libovolné $m \in \mathbb{Z}$ je $e^{2\pi i m} = \cos(2\pi m) + i \sin(2\pi m) = 1$. Proto je pro $j \neq k$

$$\frac{1 - e^{2\pi i (j-k)}}{N(1 - e^{2\pi i (j-k)/N})} = 0$$

a my celkem dostáváme $(\mathcal{F}^* \mathcal{F})_{j,k} = \delta_{jk}$. □

²⁰V posledním kroku jsme použili známý vzorec pro součet prvních několika členů geometrické posloupnosti s kvocientem $e^{2\pi i (j-k)/N}$ a prvním členem 1.

Poznámka 3.16: Podívejme se ještě na jednu interpretaci DFT. Označme f_j j -tý sloupec matice \mathcal{F}^* , tedy $(f_j)_k \equiv \mathcal{F}_{k,j}^* = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{2\pi i j k / N}$. Protože je \mathcal{F}^* unitární, je soubor $\mathcal{F} = (f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$ ortonormální báze \mathbb{C}^N . Pro k -tou souřadnici vektoru $\mathcal{F}x$ (ve standardní bázi) máme

$$(\mathcal{F}x)_k = \langle \mathcal{F}x, e_k \rangle = \langle x, \mathcal{F}^* e_k \rangle = \langle x, f_k \rangle,$$

neboli $\mathcal{F}x = (x)_{\mathcal{F}}$. Vidíme tedy, že složky DFT vektoru x jsou souřadnice vektoru x ve speciálně volené bázi \mathcal{F} !

V teorii signálu se zavádí mnoho různých charakteristik vzorku $x \in \mathbb{C}^N$. Jedním z nich je jeho energie, která není nic jiného než norma x , tedy

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{N-1} |x_n|^2}.$$

Veledůležitou vlastností DFT je, že zachovává celkovou energii. Přesněji platí následující věta.

Věta 3.17 (Plancherelova a Parsevalova rovnost): Pro libovolné $x, y \in \mathbb{C}^N$ platí **Plancherelova rovnost**

$$\langle x, y \rangle = \langle \hat{x}, \hat{y} \rangle$$

a speciálně **Parsevalova rovnost**

$$\|x\|_2 = \|\hat{x}\|_2.$$

Důkaz. Stačí dosadit za unitární matici \mathbf{U} do rovnosti (31) matici DFT \mathcal{F} . Proč se druhé rovnosti říká Parsevalova je patrné z předchozí Poznámky. \square

Na závěr této části zformulujeme jednoduché tvrzení popisující, jak se DFT vektoru $x \in \mathbb{C}^N$ chová vzhledem ke komplexnímu sdružení.

Lemma 3.18: Pro každé $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ platí

$$\overline{(\mathcal{F}x)_k} = (\mathcal{F}\bar{x})_{N-k},$$

kde pro $k = 0$ na pravé straně klademe $(\mathcal{F}\bar{x})_N := (\mathcal{F}\bar{x})_0$. Speciálně proto pro reálný vektor $x \in \mathbb{R}^N$ platí

$$\overline{(\mathcal{F}x)_k} = (\mathcal{F}x)_{N-k}.$$

Důkaz. Skutečně, tvrzení lze přímo ověřit následujícím výpočtem

$$\begin{aligned} \overline{(\mathcal{F}x)_k} &= \overline{\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2\pi i n k / N}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \bar{x}_n e^{2\pi i n k / N} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \bar{x}_n e^{-2\pi i n (N-k) / N} = (\mathcal{F}\bar{x})_{N-k}. \end{aligned} \quad \square$$

3.5 DFT a konvoluce

K zjednodušení následujícího výkladu je výhodné **periodicky prodloužit** vektory z našeho prostoru \mathbb{C}^N . Jinak řečeno, ztotožníme vektorový prostor \mathbb{C}^N s vektorovým prostorem oboustranně nekonečných komplexních posloupností $(x_k)_{k=-\infty}^{\infty}$ periodických s periodou N ,

$$x_{k+mN} = x_k, \quad \forall m \in \mathbb{Z}.$$

Tedy index v x_k lze chápat jako modulo N , tj. $x_k = x_{k \bmod N}$.

Rozšíříme si definici DFT i na vektory z periodicky prodlouženého prostoru \mathbb{C}^N . Uvidíme, že vektor $\mathcal{F}x$ lze opět chápat jako periodickou posloupnost s periodou N a tedy prvek (nově chápaného) prostoru \mathbb{C}^N . Buď $k \in \mathbb{Z}$ a označme ℓ zbytek k po dělení N . Tzn., že $\ell \in \{0, \dots, N-1\}$ a $k = \ell + mN$ pro nějaké $m \in \mathbb{Z}$. Rozšíříme-li definici DFT použitím stejného vzorečku (25), dostaneme

$$\begin{aligned} \hat{x}_k &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2\pi i n k / N} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2\pi i n (\ell + mN) / N} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2\pi i n \ell / N} \underbrace{e^{-2\pi i n m}}_{=1} = \hat{x}_\ell. \end{aligned}$$

Tedy skutečně

$$\hat{x}_{\ell+mN} = \hat{x}_\ell.$$

Této vlastnosti se často říká **periodicita DFT**.

Chápeme-li vektor x jako oboustranně nekonečnou komplexní posloupnost periodickou s periodou N , můžeme k výpočtu DFT vektoru x počítat přes libovolnou periodu délky N . Přesněji

$$\hat{x}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2\pi i n k / N} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=\ell}^{\ell+N-1} x_n e^{-2\pi i n k / N} \quad (32)$$

pro libovolné $\ell \in \mathbb{Z}$. Tento pohled je konzistentní s naším zjištěním, že \hat{x}_k je periodické v k s periodou N . Navíc analogický trik jsme uplatňovali i v kontextu funkcí a Fourierových řad.

Pro dva vektory $x, y \in \mathbb{C}^N$ definujeme jejich **konvoluci** (propletení) jako nový vektor $x * y \in \mathbb{C}^N$ se složkami

$$(x * y)_k := \sum_{n=0}^{N-1} x_n y_{k-n}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (33)$$

Nejprve ověříme, že vektor $x * y$ lze skutečně chápat jako prvek \mathbb{C}^N , tj. jeho periodicitu s periodou N ve spodním indexu:

$$(x * y)_{k+N} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \underbrace{y_{k+N-n}}_{=y_{k-n}} = (x * y)_k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Lemma 3.19: Konvoluce je binární operace $*$: $\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$, která je lineární v obou svých argumentech, platí

$$(x + \alpha y) * z = x * z + \alpha y * z \quad \text{a} \quad x * (y + \alpha z) = x * y + \alpha x * z,$$

pro každé $x, y, z \in \mathbb{C}^N$ a $\alpha \in \mathbb{C}$. Konvoluce je komutativní operace. Pro libovolné $x, y \in \mathbb{C}^N$ platí

$$x * y = y * x.$$

Důkaz. Nejprve dokažme komutativitu. Stačí provést záměnu sčítacího indexu:

$$(x * y)_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n y_{k-n} = \sum_{m=k-N+1}^k x_{k-m} y_m = \sum_{m=0}^{N-1} y_m x_{k-m} = (y * x)_k,$$

kde jsme od sčítacího indexu $n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ přešli k novému sčítacímu indexu $m = k - n \in \{k, k-1, \dots, k-N+1\}$, tedy $n = k - m$. Nakonec jsme vhodně posunuli sčítací obor, neboť posloupnost v sumě je opět periodická s periodou N .

Dále stačí dokázat linearitu třeba v prvním argumentu (v druhém už plyne z komutativity). Pro libovolná $x, y, z \in \mathbb{C}^N$ a $\alpha \in \mathbb{C}$ platí

$$\left((x + \alpha y) * z \right)_k = \sum_{n=0}^{N-1} (x + \alpha y)_n z_{k-n} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n z_{k-n} + \alpha \sum_{n=0}^{N-1} y_n z_{k-n} = x * z + \alpha y * z. \quad \square$$

Věta 3.20: Fourierova transformace převádí konvoluci na součin. Pro libovolné $x, y \in \mathbb{C}^N$ platí:

$$\mathcal{F}(x * y) = \sqrt{N}(\hat{x} \cdot \hat{y}).$$

Pozor, zde tečka **není** skalární součin, ale obyčejný součin po složkách,

$$(x \cdot y)_k := x_k y_k,$$

jehož výsledkem je **vektor**. Tečku je zde nutné chápat jako vektorovou binární operaci na vektorech, $\cdot : \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$.

Důkaz. Tvrzení ověříme přímým výpočtem. Pro $k = 0, 1, \dots, N-1$ platí

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}(x * y))_k &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} (x * y)_n e^{-2\pi i n k / N} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{\ell=0}^{N-1} x_\ell y_{n-\ell} \right) e^{-2\pi i n k / N} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\ell=0}^{N-1} x_\ell \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{N-1} y_{n-\ell} e^{-2\pi i (n-\ell) k / N} \right)}_{=\sqrt{N} \hat{y}_k} e^{-2\pi i \ell k / N} = \hat{y}_k \underbrace{\sum_{\ell=0}^{N-1} x_\ell e^{-2\pi i \ell k / N}}_{=\sqrt{N} \hat{x}_k} = \\ &= \sqrt{N} \hat{x}_k \hat{y}_k. \quad \square \end{aligned}$$

Díky předchozí větě proto platí, že pro výpočet konvoluce můžeme použít veledůležitý vzorec

$$x * y = \sqrt{N} \mathcal{F}^{-1}(\hat{x} \cdot \hat{y}).$$

Jak uvidíme níže, DFT můžeme efektivně počítat pomocí FFT. Díky tomu lze pak efektivně počítat i konvoluci!

3.6 Poznámky a odkazy

Látka probraná v první části této kapitoly (tedy částí 3.1, 3.2 a 3.3) představují poměrně standardní úvod do základní geometrie pre-Hilbertových prostorů (tj. bez zkoumání úplnosti) a lze je nalézt ve většině textů pojednávajících o Lineární algebře.

Druhá část kapitoly týkající se DFT lze chápat jako aplikaci výše abstraktní látky uvedené v předchozím odstavci. Dopodrobna tato látka nebývá v základních kurzech Lineární algebry probírána. Na DFT lze ale často narazit v samostatných předmětech zabývajících se jejími inženýrskými aplikacemi ve zprazování a analýze signálu.

3.7 Cvičení

Cvičení 3.1: Dokažte zobecněnou Pythagorovu větu: je-li V vektorový prostor vybavený skalárním součinem $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a x, y dva kolmé vektory (vzhledem k uvedenému skalárnímu součinu), pak platí pro indukovanou normu platí

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x + y\|^2.$$

Často je potřeba umět přecházet od „obyčejné“ báze k ortonormální bázi. Jeden z možných přístupů jak toho lze docílit ukazuje následující cvičení.

Cvičení 3.2 (Gramm–Schmidtův ortonormalizační proces): Uvažme vektorový prostor V se skalárním součinem $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a lineárně nezávislý soubor vektorů (x_1, \dots, x_k) . Ukažte, že existuje ortonormální soubor (y_1, \dots, y_k) mající stejný lineární obal jako původní soubor. *Nápověda:* Postupujte induktivně. Vektor y_1 bude jistě pouze normalizovaný vektor x_1 . Vektor y_2 hledejte jako lineární kombinaci vektorů x_1 a x_2 kolmou na y_1 , atd.

Řešení. Nejdřív poznamenejme, že pro libovolný nenulový $x \in V$ platí

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = \sqrt{\left\langle \frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle} = \sqrt{\frac{1}{\|x\|^2} \langle x, x \rangle} = \sqrt{\frac{\langle x, x \rangle}{\langle x, x \rangle}} = 1.$$

To znamená, že v zadání zmíněné *normalizace* se dá dosáhnout pouhým vydělením vektoru jeho normou. Tím pádem máme-li ortogonální soubor (z_1, \dots, z_k) , mající stejný lineární obal jako (x_1, \dots, x_k) , pak hledaným ortonormálním souborem je soubor $(y_1, \dots, y_k) = \left(\frac{z_1}{\|z_1\|}, \dots, \frac{z_k}{\|z_k\|} \right)$. Ukážeme, že takový (z_1, \dots, z_k) existuje.

Položme $z_1 = x_1$ a další z_n (tj. $n = 2, 3, \dots, k$) získáme induktivně jako lineární kombinaci vektorů x_1, \dots, x_n kolmou na z_1, \dots, z_{n-1} . Tedy musí platit

$$\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C} : z_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$$

a zároveň

$$\langle z_n, z_1 \rangle = \dots = \langle z_n, z_{n-1} \rangle = 0,$$

což vede na homogenní soustavu rovnic

$$\left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle x_i, z_j \rangle = 0 \mid j \in \{1, \dots, n-1\} \right\},$$

nebot'

$$\langle z_n, z_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, z_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle x_i, z_j \rangle.$$

V každém indukčním kroku taková soustava v maticovém tvaru má n proměnných a má plnou hodnotu rovnou $n-1$, a tudíž podle Frobeniovy věty má i netriviální řešení. Z toho plyne, že nenulové vektory z_1, \dots, z_k existují. Každý z těchto vektorů je lineární kombinací vektorů x_1, \dots, x_n , což implikuje $\langle z_1, \dots, z_k \rangle \subset \langle x_1, \dots, x_n \rangle$. Na druhou stranu je (z_1, \dots, z_k) ortogonální soubor nenulových vektorů a podle lemmatu dokázaného na začátku kapitoly je i lineárně nezávislý a generuje tedy prostor stejné dimenze jako (x_1, \dots, x_n) . To je samozřejmě možné pouze v případě, že (z_1, \dots, z_k) generuje právě celý $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ ²¹. Tím je dokázáno, že hledaný soubor (z_1, \dots, z_k) existuje. \square

Cvičení 3.3: Dokažte vlastnosti hermitovského sdružení matice. Pro $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n,n}$ a $\alpha \in \mathbb{C}$ platí rovnosti

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} + \alpha \mathbf{B})^* &= \mathbf{A}^* + \bar{\alpha} \mathbf{B}^*, & (\mathbf{AB})^* &= \mathbf{B}^* \mathbf{A}^*, \\ (\mathbf{A}^*)^* &= \mathbf{A}, & \langle x, \mathbf{A}y \rangle &= \langle \mathbf{A}^*x, y \rangle, \quad x, y \in \mathbb{C}^n, \end{aligned}$$

a uvažujeme standardní skalární součin.

Následující dvě cvičení ukazují zajímavou paralelu mezi operacemi hermitovského sdružení matic a komplexním sdružením komplexních čísel.

Cvičení 3.4: Ukažte, že všechna vlastní čísla zadané unitární matice $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{n,n}$ leží na jednotkové kružnici v \mathbb{C} . Podrobněji, je-li λ vlastní číslo unitární matice \mathbf{U} , pak $|\lambda| = 1$. *Poznámka:* Toto pozorování lze chápat jako vysvětlení volby jména „unitární“ (česky bychom asi řekli jednotková, ale to už znamená něco jiného) matice. *Nápověda:* Využijte rovnost (31) a vhodný vektor.

Řešení. Je-li λ vlastní číslo unitární matice \mathbf{U} , pak k němu existuje příslušný vlastní vektor $x \neq 0$. Podle rovnosti (31) a definice vlastního čísla platí

$$\langle x, x \rangle = \langle \mathbf{U}x, \mathbf{U}x \rangle = \langle \lambda x, \lambda x \rangle = \lambda \bar{\lambda} \langle x, x \rangle = |\lambda|^2 \langle x, x \rangle.$$

Po vydělení obou stran rovnice (podle definice skalárního součinu kladným) $\langle x, x \rangle$ a odmocnění dostáváme

$$1 = |\lambda|.$$

\square

²¹důsledek 2.62 v aktuální verzi studijního textu **BI-LIN**: *Bud' $P \subset \subset V$ a $\dim P = \dim V < \infty$. Potom $P = V$*

Cvičení 3.5: Další zajímavou a důležitou třídou matic jsou tzv. **hermitovské matice**. Zvědavý čtenář by se s nimi mohl setkat například v teorii Kvantového počítání. Matici $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^n$ nazýváme hermitovskou, právě když $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}$.

Dokažte, že spektrum každé hermitovské matice je podmnožinou reálné osy (tj. každé vlastní číslo hermitovské matice je reálné). *Nápověda:* Využijte výsledky Cvičení 3.3.

Řešení. Necht λ je libovolné vlastní číslo matice \mathbf{A} . Dle definice tedy platí

$$\exists x \in \mathbb{C}^{n,n}, x \neq \theta : \mathbf{A}x = \lambda x.$$

Jelikož $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$, pro stejný vektor x platí i vztah

$$\mathbf{A}^*x = \lambda x.$$

Nyní využijeme skalárního součinu.

$$\langle \mathbf{A}x, x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle.$$

Díky čtvrtému vztahu Cvičení 3.3 platí i

$$\langle \mathbf{A}x, x \rangle = \langle x, \mathbf{A}^*x \rangle = \langle x, \lambda x \rangle = \bar{\lambda} \langle x, x \rangle.$$

Zjistili jsme, že $\lambda \langle x, x \rangle = \bar{\lambda} \langle x, x \rangle$, a díky nenulovosti x tedy platí i $\lambda = \bar{\lambda}$. Aby tato rovnost platila, λ musí být reálné číslo. \square

Cvičení 3.6: Dokažte následující vlastnosti diskrétní Fourierovy transformace,

i. obrácení času (*time reversal*): $(\mathcal{F}x)_{-k} = (\mathcal{F}^{-1}x)_k$,

ii. posun času (*time shift*): $(\mathcal{F}T_{k_0}x)_k = e^{-2\pi i k k_0/N} (\mathcal{F}x)_k$, kde $(T_{k_0}x)_k = x_{k-k_0}$.

pro každé $x \in \mathbb{C}^N$

Řešení. Pro důkaz vlastnosti *time reversal* využijeme definici DFT a Větu 3.15.

$$(\mathcal{F}x)_{-k} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2\pi i (-k)n/N} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{2\pi i kn/N} \stackrel{3.15}{=} (\mathcal{F}^{-1}x)_k.$$

Nyní dokážeme vlastnost *time shift*. K tomu kromě definic budeme potřebovat rovnost (32),

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}T_{k_0}x)_k &\stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} (T_{k_0}x)_n e^{-2\pi i kn/N} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x_{n-k_0} e^{-2\pi i kn/N} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=-k_0}^{N-1-k_0} x_n e^{-2\pi i k(n+k_0)/N} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=-k_0}^{N-1-k_0} x_n e^{-2\pi i kn/N} e^{-2\pi i k k_0/N} \\ &= e^{-2\pi i k k_0/N} \cdot \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=-k_0}^{N-1-k_0} x_n e^{-2\pi i kn/N} \stackrel{(32)}{=} e^{-2\pi i k k_0/N} (\mathcal{F}x)_k. \end{aligned} \quad \square$$

Cvičení 3.7: Nalezněte kandidáty na vlastní čísla diskrétní Fourierovy transformace jakožto linárního operátoru na \mathbb{C}^N , $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 4$. *Nápověda:* Nelze nalézt nějaké $n \in \mathbb{N}^*$ pro které je \mathcal{F}^n identita? Co to pak znamená pro případná vlastní čísla?

Řešení. Podívejme se, jak bude vypadat matice \mathcal{F}^2 . Z důvodu přehlednosti a v souladu s předchozím výkladem budeme řádky i sloupce matice \mathcal{F} číslovat od 0 do $N - 1$.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{m,n}^2 &= \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{F}_{mk} \cdot \mathcal{F}_{kn} = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-mk2\pi i/N} \cdot \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-kn2\pi i/N} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-k2\pi i(m+n)/N},\end{aligned}$$

kde číslo $m + n$ je z množiny $\{0, 1, \dots, 2N - 2\}$.

Pokud $m = n = 0$, pak

$$\mathcal{F}_{0,0}^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-k2\pi i(0)/N} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^0 = 1.$$

Pokud $m + n = N$, pak

$$\mathcal{F}_{m,n}^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-k2\pi i(N)/N} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-k2\pi i} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} 1 = 1.$$

Jinak si uvědomme, že čísla $e^{-k2\pi i(m+n)/N}$ jsou v komplexní rovině body na jednotkové kružnici se středem v bodě 0 a výraz $\mathcal{F}_{m,n}^2$ představuje jejich průměrnou hodnotu. Tyto body rovnoměrně rozdělují úhel $(m+n) \cdot 2\pi$ na N segmentů o úhlu $\frac{(m+n) \cdot 2\pi}{N}$. Můžeme na ně nahlížet jako na vrcholy nějakého pravidelného mnohoúhelníku (nebo úsečky, pokud $m+n = N/2$), vepsaného do jednotkové kružnice. Průměrná hodnota těchto čísel pak odpovídá těžišti tohoto mnohoúhelníku, které se rovná středu jeho opsané kružnice, v tomto případě 0. (Alternativně by šlo opět sečíst odpovídající sumu a využít vzorec pro součet geometrické posloupnosti.)

Celkově tedy:

$$\mathcal{F}_{m,n}^2 = \begin{cases} 1, & \text{pokud } (m+n) \equiv 0 \pmod{N}, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Tato matice má první řádek a sloupec shodný s jednotkovou maticí a zbytek má tvar horizontálně překlopené jednotkové matice. Její aplikací na vektor $x \in \mathbb{C}^N$, dostaneme vektor, který zachovává svojí první složku a ostatní složky má v obráceném pořadí, tedy

$$\mathcal{F}^2 \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_{N-1} \\ x_{N-2} \\ \vdots \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Druhá mocnina matice \mathcal{F}^2 je pak triviálně rovna jednotkové matici a tedy $\mathcal{F}^4 = \mathbf{E}$. Pokud x je vlastní vektor operátoru \mathcal{F} a λ jemu odpovídající vlastní číslo, z definice vlastního čísla je $\mathcal{F}x = \lambda x$ a opakovaným aplikováním \mathcal{F} dostaneme $\mathcal{F}^4x = \lambda^4x$. Protože zobrazení \mathcal{F}^4 je identita, musí platit $\lambda^4x = x$ a nutně $\lambda^4 = 1$ pro všechny vlastní čísla λ operátoru \mathcal{F} . Vyřešením této rovnice dostáváme 4 možné hodnoty vlastních čísel matice \mathcal{F} :

$$\lambda \in \{1, -1, i, -i\}.$$

Poznámka: Lze ukázat, že tato uvedená množina skutečně tvoří spektrum DFT. Argumentace je však nad rámec tohoto kurzu. V současnosti se znají i násobnosti těchto vlastních hodnot v závislosti na N . Otázka vlastních vektorů není doposud zcela uspokojivě vyřešena. \square

Cvičení 3.8: Explicitně vypočtěte diskrétní Fourierovu transformaci (viz Definici 3.1) následujících vektorů

- i. $x = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{C}^N$,
- ii. $x = (1, -1, 1, -1, \dots, 1, -1) \in \mathbb{C}^N$ pro sudé N ,
- iii. $x = (0, \dots, 1, \dots, 0) \in \mathbb{C}^N$, kde 1 je právě v j té složce a ostatní jsou nulové.

Řešení. i. Dosadíme do Definice 3.1 (všechny x_n jsou rovny 1). k -tý prvek výsledného vektoru je pak

$$\hat{x}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-2\pi i k n / N}$$

Povšimněme si, že suma v tomto výrazu se dá sečíst pomocí vzorečku pro částečné součty geometrické posloupnosti. První člen a_1 je roven 1 (kvůli $n = 0$ v exponentu) a kvocient je $q = e^{-2\pi i k / N}$. Vzoreček

$$s_N = a_1 \frac{q^N - 1}{q - 1}$$

lze použít v případě že $q \neq 1$. Pokud $q = 1$ pak je součet prostě $N \cdot a_1$. Náš kvocient je triviálně roven 1 pouze pro $k = 0$. Jinak by mohl být roven jedné pouze pokud by exponent nad e byl celočíselným (nenulovým) násobkem $2\pi i$, to se ale stát nemůže, protože index k běží od 0 do $N - 1$ a nikdy se tedy nezkrátí se jmenovatelem N . Pro $k = 0$ tedy máme

$$\hat{x}_0 = \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot N \cdot a_1$$

a po zjednodušení

$$\hat{x}_0 = \sqrt{N}.$$

Pro $k \neq 0$ (a tedy $q \neq 1$) použijeme výše uvedený vzoreček a dostáváme

$$\hat{x}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \frac{(e^{-2\pi i k / N})^N - 1}{e^{-2\pi i k / N} - 1} = \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \frac{e^{-2\pi i k} - 1}{e^{-2\pi i k / N} - 1} = \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \frac{1 - 1}{e^{-2\pi i k / N} - 1} = 0.$$

Výsledný vektor má tedy podobu

$$\hat{x} = (\sqrt{N}, 0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^N.$$

ii. Po dosazení zadaných hodnot vektoru do definice 3.1 dostáváme výraz

$$\hat{x}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n e^{-2\pi i k n / N} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} (-e^{-2\pi i k / N})^n.$$

Suma ve výrazu opět odpovídá částečnému součtu geometrické posloupnosti s prvním členem rovným 1. Kvocient má hodnotu $q = -(e^{-2\pi i k / N})$. Vyřešíme nejprve situaci, kdy $q = 1$:

$$q = 1 \Leftrightarrow e^{-2\pi i k / N} = -1 \Leftrightarrow \frac{-2\pi i k}{N} = (2l + 1)\pi i, \quad l \in \mathbb{Z}$$

(e je umocněno na lichý násobek πi). Získaný výraz upravíme

$$k = -\frac{(2l + 1)\pi i N}{2\pi i} = -(2l + 1)\frac{N}{2}$$

a zjistili jsme, že aby byl kvocient roven 1, musí k být lichý násobek $N/2$ – to je ale v daném rozsahu hodnot možné pouze pokud $k = N/2$. Tím pádem

$$\hat{x}_{N/2} = \frac{N}{\sqrt{N}}.$$

Pro ostatní členy výsledného vektoru ($k \neq N/2$) můžeme opět použít již zmíněný vzoreček a dostáváme

$$\hat{x}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{(-e^{-2\pi i k / N})^N - 1}{-e^{-2\pi i k / N} - 1}.$$

Zdálo by se, že tento výraz se od prvního příkladu liší pouze znaménkem kvocientu. V čitateli je ale kvocient umocněn na sudou mocninu a tím pádem dostáváme v čitateli úplně stejný výraz jako v prvním příkladu. Celý výraz je tedy roven 0. Výsledný vektor je pak

$$\hat{x} = \left(0, 0, \dots, \frac{N}{\sqrt{N}}, \dots, 0, 0\right) \in \mathbb{C}^N,$$

kde právě na pozici $\frac{N}{2}$ je výraz $\frac{N}{\sqrt{N}}$ a ostatní jsou nulové.

iii. Vzhledem k tomu, že $x_n = 0$ pro všechny $n \neq j$ zbude nám ze sumy v definici vždy pouze jediný sčítanec – ten kde $n = j$. Dostáváme tedy výraz

$$\hat{x}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-2\pi i k j / N}.$$

A výsledný vektor má podobu

$$\hat{x} = \frac{1}{\sqrt{N}} \left(1, e^{-2\pi i j / N}, e^{-4\pi i j / N}, e^{-6\pi i j / N}, \dots, e^{-2(N-2)\pi i j / N}, e^{-2(N-1)\pi i j / N}\right).$$

□

Cvičení 3.9: Explicitně vypočtete konvoluci následujících dvojic vektorů z \mathbb{C}^N .

- i. $x = y = (1, 1, \dots, 1)$,
- ii. $x = (\delta_{1,k})_{k=0}^{N-1}$, $y = (\delta_{N-1,k})_{k=0}^{N-1}$,
- iii. $x = (1, 0, \dots, 0)$, $y = (1, 1, \dots, 1)$.

Řešení. i. Nacházíme se na periodicky prodlouženém prostoru \mathbb{C}^N . Po dosazení do Definiční 33 tedy dostáváme výraz

$$(x * y)_k = \sum_{n=0}^{N-1} 1 \cdot 1 = N$$

a výsledný vektor má podobu

$$x * y = (N, N, \dots, N) \in \mathbb{C}^N.$$

- ii. Vzhledem k tomu, že x_n je rovno 0 pro $n \neq 1$ a $x_1 = 1$ zůstane nám pro každý člen výsledného vektoru pouze

$$(x * y)_k = y_{k-1}.$$

Tento výraz je ale roven 0 pro všechny k kromě $k = 0 + lN$, $l \in \mathbb{Z}$ (pro které je roven 1). Výsledný vektor má tedy podobu

$$x * y = (1, 0, \dots, 0, 0) \in \mathbb{C}^N.$$

- iii. x_n je rovno 0 pro $n \neq 0$ a $x_0 = 1$. Opět nám tedy zůstává pouze jeden sčítanec pro každý člen vektoru a to

$$(x * y)_k = y_k.$$

y_k je ale vždy rovno 1 a výsledný vektor je tím pádem

$$x * y = (1, 1, \dots, 1, 1) \in \mathbb{C}^N.$$

□

4 Rychlá Fourierova transformace (FFT)

The best thing about being a statistician is that you get to play in everyone's backyard.
John Tukey

Nyní se zabývejme otázkou, jak zrychlit výpočet DFT. Složitost naivního způsobu výpočtu DFT, viz např. vzorec (25), je $\mathcal{O}(N^2)$, kde N je délka vstupu. V následujícím odstavci si představíme speciální případ metody výpočtu DFT se složitostí $\mathcal{O}(N \log N)$ pro N mocninu dvou pocházející z článku Cooleyho a Tukeyho [3] z roku 1965. Základní myšlenka algoritmu je metoda “rozděl a panuj”, která se v souvislosti s DFT objevila už v článku Danielsona a Lanczose z roku 1942 [4]. O DFT počítané metodou s lepší složitostí než $\mathcal{O}(N^2)$ se mluví jako o rychlé Fourierově transformaci (FFT).

4.1 Cooleyho-Tukeyho algoritmus

Pro účely této části textu označme

$$w_N := e^{-2\pi i/N}, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Všimněte si, že w_N je řešení komplexní rovnice $z^N = 1$ s nejmenším kladným argumentem²², z toho důvodu se w_N také často nazývá primitivní kořen jedničky. Platí pro něj $w_N^N = 1$.

DFT vektoru $x \in \mathbb{C}^N$ definovanou rovnicí (25) pak lze zapsat zkráceně ve tvaru

$$\hat{x}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x_n w_N^{nk}.$$

Pro účely tohoto odstavce vypustíme multiplikativní faktor $\frac{1}{\sqrt{N}}$ v předpisu pro DFT. Pozor, je pak nutné vhodně upravit i vztahy pro inverzi, nebo Parsevalovu rovnost. Položme tedy

$$(\tilde{\mathcal{F}}x)_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n w_N^{nk}, \quad x \in \mathbb{C}^N. \quad (34)$$

Tato volba je častá a setkáte se s ní v řadě implementací. Na vlastnostech DFT prakticky nic nemění, jen je třeba některé vzorce modifikovat právě o faktor \sqrt{N} . Například platí

$$(\tilde{\mathcal{F}}^{-1}x)_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n w_N^{-nk}, \quad x \in \mathbb{C}^N.$$

V následujícím textu budeme o \mathcal{F} i o $\tilde{\mathcal{F}}$ mluvit jako diskrétní Fourierově transformaci.

Předpokládejme, že N je sudé. Potom lze součet v (34) rozdělit na součet přes liché a sudé členy,

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathcal{F}}x)_k &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2n} w_N^{2nk} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2n+1} w_N^{(2n+1)k} = \\ &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2n} w_{N/2}^{nk} + w_N^k \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2n+1} w_{N/2}^{nk}. \end{aligned} \quad (35)$$

Definujme lineární zobrazení

$$E : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^{N/2} \quad \text{a} \quad O : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^{N/2},$$

předpisy

$$Ex := (x_0, x_2, \dots, x_{N-2}) \quad \text{a} \quad Ox := (x_1, x_3, \dots, x_{N-1}).$$

²²Argument nenulového komplexního čísla z je úhel v $(-\pi, \pi]$, který svírá vektor spojující 0 a z s kladným směrem reálné osy.

Stručně řečeno, pro sudé N zobrazení E (resp. O) z vektoru $x \in \mathbb{C}^N$ extrahuje pouze složky se sudým (resp. lichým) indexem. Výše odvozený vztah (35) pro DFT pak můžeme zkráceně zapsat ve tvaru

$$(\tilde{\mathcal{F}}x)_k = (\tilde{\mathcal{F}}Ex)_k + w_N^k(\tilde{\mathcal{F}}Ox)_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (36)$$

Podstatné v předchozím vztahu je, že DFT na pravé straně se již provádějí na vektorech **poloviční** délky, než s kterou jsme začali. Tento proces se v kontextu zpracování signálu nazývá *decimace v čase*. Zdůrazněme také, že ačkoliv vektor $\tilde{\mathcal{F}}Ox$ má poloviční délku než x , chápeme ho opět jako oboustranně nekonečný a $(\tilde{\mathcal{F}}Ox)_k$ má dobrý smysl dokonce pro všechna $k \in \mathbb{Z}$.

Předpokládejme, že prvotní N je mocninou dvou, $N = 2^K$, $K \in \mathbb{N}$. Provedeme-li operaci (36) **rekurentně** $K-1$ krát, pak skončíme s nutností výpočtu DFT vektorů délky 2, což je velmi snadné. Pro zadané N je těchto dělení (decimací) potřeba provést přibližně $\log N$. V každé fázi je nutno provést přibližně N operací. Celková složitost výpočtu je tedy $\mathcal{O}(N \log N)$. Tento rekurentní výpočet DFT se nazývá rychlá Fourierova transformace (FFT) a jde o speciální případ Cooley-Tukeyho algoritmu pro N mocninou dvou. Existují varianty tohoto algoritmu aplikovatelné i na jiná složená čísla N , než jen mocninou dvou.

Zcela stejným způsobem jako v předchozím textu bychom odvodili podobný vztah pro inverzní DFT, přesněji

$$(\tilde{\mathcal{F}}^{-1}x)_k = (\tilde{\mathcal{F}}^{-1}Ex)_k + \overline{w_N^k}(\tilde{\mathcal{F}}^{-1}Ox)_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (37)$$

Inverzní DFT lze tedy také počítat tímto způsobem.

K přednášce od DFT, resp. FFT, je jako doplněk připraven IPython (nově Jupyter) notebook s ukázkami použití FFT v jazyce Julia. Navíc je zde porovnáváme různé metody výpočtu DFT (naivní dle definice, rekurentní implementace výše popsaného algoritmu a implementace z knihovny FFTW). Tabulka 1 ilustruje propastné rozdíly v časové délce výpočtu DFT v závislosti na délce vstupu.

4.2 Frekvenční spektrum audiosignálu (spektrogram)

Připomeňme jeden z možných významů Fourierovy transformace. Vzorec pro inverzní Fourierovu transformaci signálu $x \in \mathbb{C}^N$ s vzorkovací frekvencí $f = 1/\Delta$ a celkovou délkou $T = N\Delta$ dle věty 3.15 zní

$$x_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{x}_n e^{2\pi i kn/N}.$$

Původní signál je zde tedy vyjádřen jako superpozice (lineární kombinace) harmonických oscilací s frekvencemi $f_n = n/T$ (resp. úhlovými frekvencemi $\omega_n = 2\pi n/T$), $n = 0, 1, \dots, N-1$. Koeficienty \hat{x}_n pak udávají, jakou mírou harmonická oscilace s frekvencí f_n přispívá do celkového signálu x . Touto mírou může být například kvadrát absolutní hodnoty n -té složky Fourierovy transformace, tj. velikost $|\hat{x}_n|^2$.

N	naivní DFT	naše FFT	FFTW
8	4.86e-5	1.17e-5	1.81e-5
16	17.55e-5	2.62e-5	1.55e-5
32	64.27e-5	5.88e-5	1.50e-5
64	242.85e-5	13.08e-5	3.23e-5
128	1.43e-2	28.32e-5	6.14e-5
256	4.99e-2	61.23e-5	3.86e-5
512	20.22e-2	779.38e-5	4.18e-5
1024	84.60e-2	2.81e-3	5.27e-5
2048	3.54646	6.06e-3	8.48e-5
4096	14.23836	12.89e-3	12.59e-5

Tabulka 1: Porovnání časové délky (v sekundách) výpočtu DFT pomocí naivní implementace (25), FFT pomocí rekurze (36) a FFT z knihovny FFTW. Implementace byla provedena v jazyce Julia, výpočet na stroji s procesorem Intel Core i3-3227U 1.90GHz. N označuje délku vstupního vektoru.

Nyní si ukážeme, jak výše popsané informace využít k analýze frekvenčního spektra zvukového záznamu. Předpokládejme, že máme k dispozici záznam $x \in \mathbb{R}^N$ se vzorkovací frekvencí $f = \frac{1}{\Delta}$ (typicky např. $f = 44\,100$ Hz). Abychom získali informaci o harmonických složkách zvuku v jistém okamžiku, rozdělíme si záznam na (nejlépe překrývající se) úseky o N_w vzorcích. Tyto krátké úseky se často nazývají okna (*window*). Volba délky tohoto okna závisí na konkrétní aplikaci, například při analýze záznamu řeči se používá délka okolo 25 ms.

Nechť $y \in \mathbb{R}^{N_w}$ je jedno z oken. Před aplikací FFT je vhodné tento záznam přenásobit tzv. okénkovou funkcí (*window function*). Častou volbou je Hannova funkce

$$H_k = \frac{1}{2} (1 - \cos(2\pi k / (N_w - 1))) , \quad k = 0, 1, \dots, N_w - 1. \quad (38)$$

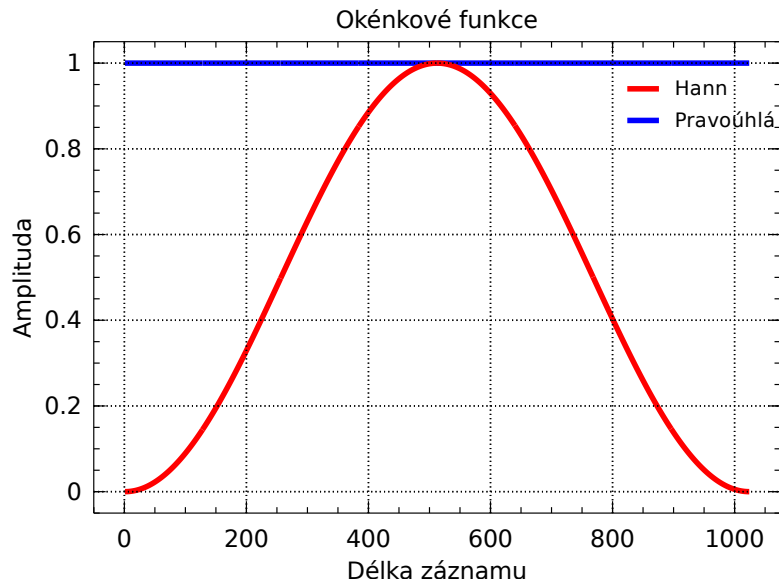
Její graf je vyneseno na obrázku 10. Tato úprava má za následek potlačení některých nežádoucích efektů způsobených diskretizací signálu, dojde k potlačení signálu na okrajích okna. V praxi lze narazit i na jiné volby „okénkových“ funkcí. FFT poté aplikujeme na součin (po složkách) $y \cdot H$.

Z Fourierovy transformace $\widehat{y \cdot H}$ pak vyčteme frekvence obsažené v signálu v okamžiku odpovídajícímu vybranému oknu y . Složky $(\widehat{y \cdot H})_n$ pak odpovídají frekvencím $f_n = n / (\Delta N_w)$.

Než začneme spektrogramy vykreslovat, je dobré si připomenout Lemma 3.18. Protože chápeme nyní prvky prostoru \mathbb{C}^N jako periodicky prodloužené, můžeme znění Lemmatu přeformulovat takto: pro $x \in \mathbb{R}^N$ platí

$$(\mathcal{F}x)_k = \overline{(\mathcal{F}x)_{-k}}. \quad (39)$$

Důsledkem tohoto pozorování je, že z Fourierovy transformace daného okna vyčteme

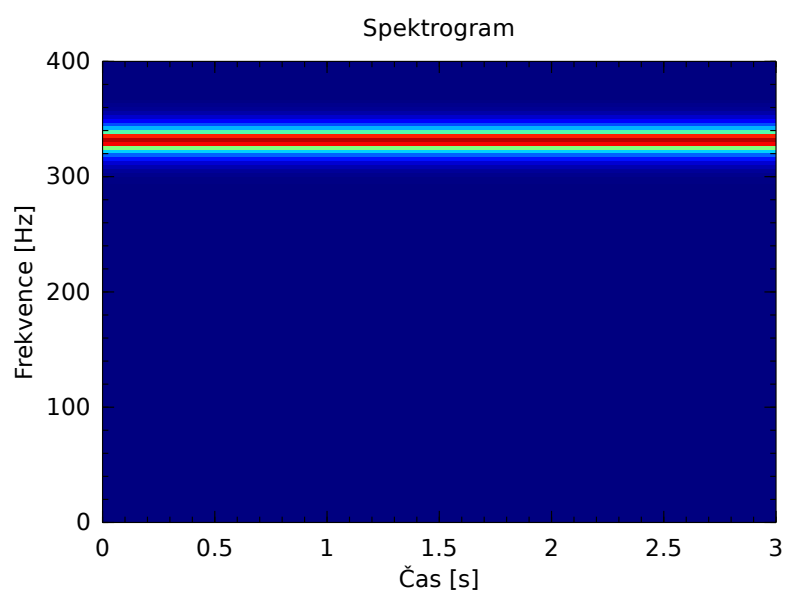


Obrázek 10: Hannova „okénková“ funkce (38).

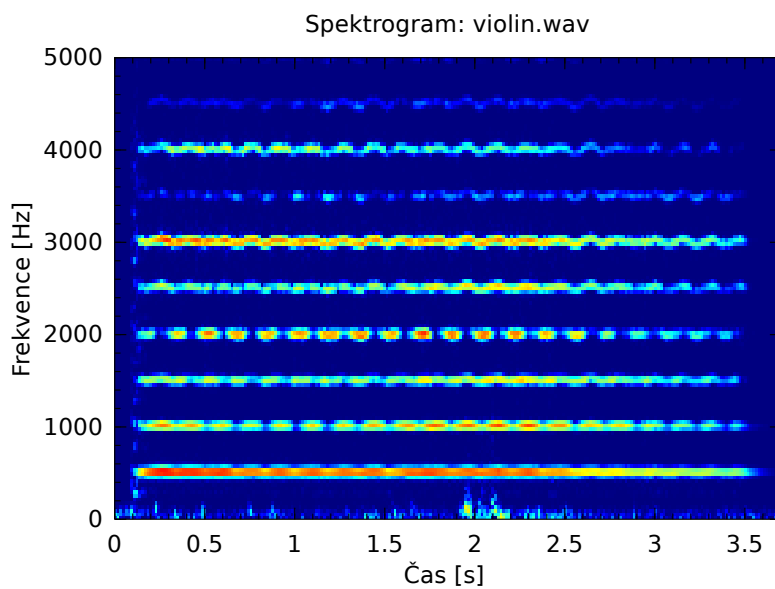
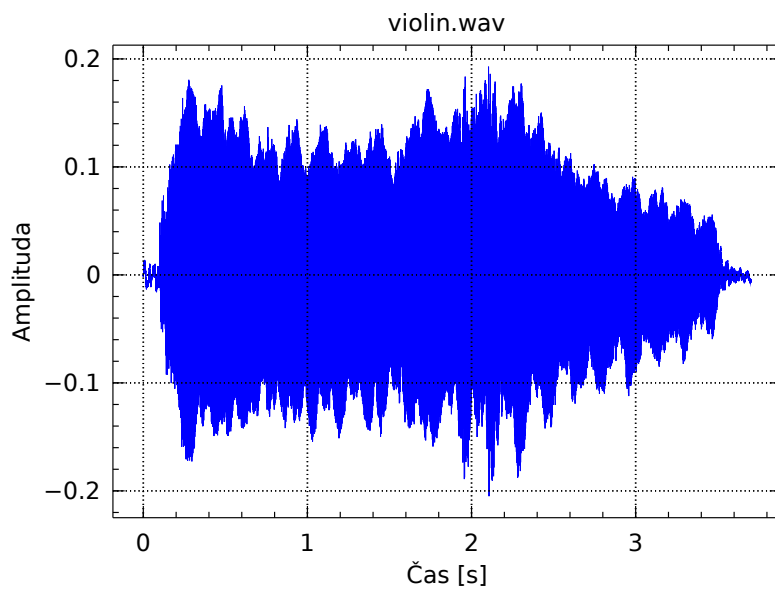
frekvence do maximálně $(N_w/2)/(\Delta N_w) = 1/(2\Delta)$. Tedy do poloviny vzorkovací frekvence. Všimněte si ale, že čím je delší délka okna, tím máme jemnější frekvenční rozlišení.

Na obrázku 11 je zobrazen spektrogram harmonické sinusové oscilace s frekvencí 329.63 Hz vzorkované s frekvencí $f = 44\,100$ Hz. Na vodorovné ose je vyneseno čas a na svislé frekvence. Bod v grafu pak v odstínech šedi zobrazuje kvadrát absolutní hodnoty Fourierova koeficientu transformace příslušného okénka a frekvence.

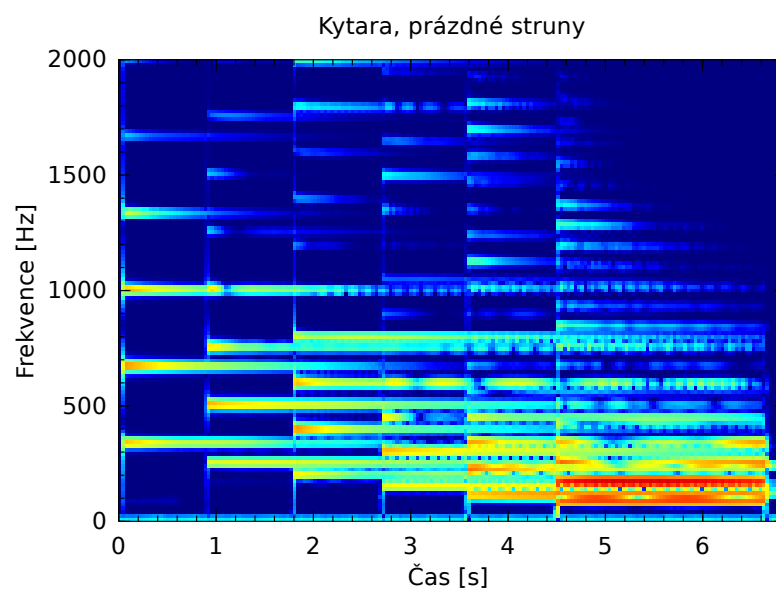
Na obrázku 12 uvádíme zajímavější příklad analýzy záznamu zvuku houslí. Dále na obrázku 13 může prozkoumat spektrogram zvuk šesti prázdných kytarových strun. Všechny uvedené obrázky a způsob jejich výpočtu lze prozkoumat ve zmíněném IPython notebooku.



Obrázek 11: Očekávané frekvenční spektrum harmonické oscilace. Záznam představuje signál tvaru funkce \sin s frekvencí 329.63 Hz dlouhý jednu sekundu a vzorkovaný s frekvencí 44 100 Hz.



Obrázek 12: Frekvenční spektrum tónu houslí. Použitý WAV je vzorkovaný s frekvencí 44 100 Hz, na každý vzorek připadá 16 bitů. Hráč rozeznívá jeden tón na struně. Všimněte si, že vyjma základní frekvence se ve spektru objevují i její vyšší násobky.



Obrázek 13: Spektrum postupně zahráných prázdných strun na kytáře.

4.3 Aplikace konvoluce: Gaussovské vyhlazování

Představuje-li $x \in \mathbb{C}^N$ vstupní signál, pak pod konvolučním filtrem máme na mysli transformaci

$$\mathcal{K} : x \mapsto K * x, \quad \mathcal{K} : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N,$$

kde $K \in \mathbb{C}^N$ je pevně zvolené tzv. konvoluční jádro (*kernel*). Různé volby jádra dávají různé filtry, schopné plnit různé úkoly. Ukážeme si volbu jádra vhodného pro vyhlazování/rozmazávání a jádro vhodné pro detekci hran. Poznamenejme, že konvoluční filtr prakticky implementujeme pomocí rychlé Fourierovy transformace (jinak by byl velmi pomalý)

$$\mathcal{K}x = \sqrt{N} \mathcal{F}^{-1}(\hat{K} \cdot \hat{x}),$$

kde tečka označuje násobení po složkách.

Kdybychom zkoumali spojitý signál, pak bychom pro každé kladné $\sigma > 0$ volili jádro

$$h_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/(2\sigma^2)}. \quad (40)$$

Grafy této funkce pro různé volby parametru σ jsou vyneseny na obrázku 14. Koeficienty jsou zvoleny tak, že pro každou hodnotu $\sigma > 0$ je plocha pod grafem funkce h_σ rovna jedné, tedy

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_\sigma(x) dx = 1. \quad (41)$$

Pomocí Gausiánu (40) definujeme Gaussovo jádro. Je-li $x \in \mathbb{C}^N$ vstupní signál a N je sudé, pak klademe

$$K_{\sigma,k} = c_\sigma e^{-k^2/(2\sigma^2)}, \quad k = -N/2 + 1, \dots, N/2,$$

pro lichá N pak podobně

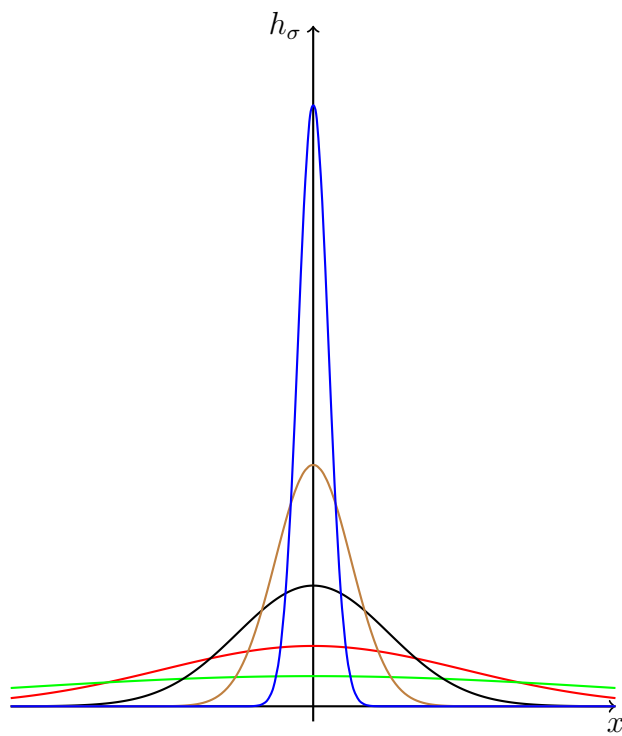
$$K_{\sigma,k} = c_\sigma e^{-k^2/(2\sigma^2)}, \quad k = -(N-1)/2, \dots, (N-1)/2.$$

Nezapomeňte, že v indexy chápeme modulo N . Konstanta c_σ je volena tak, aby (diskrétní analogie (41))

$$\sum_{k=0}^{N-1} K_{\sigma,k} = 1.$$

Pokud bychom aplikovali tento filtr s tímto Gaussovským jádrem na vstupní signál, získali bychom vyhlazenou verzi signálu na výstupu. Volba σ pak kontroluje citlivost filtru. Čím menší je σ , tím citlivější je filtr.

Ukažme si jedno možné a zajímavé použití konvolučního filtru v grafice. Každý zdigitalizovaný obrázek lze chápat jako matici pixelů, jejíž prvky označují barvu příslušného pixelu (ta může být udána třemi čísly (RGB), nebo třeba jedním číslem popisujícím odstín šedi, jak je tomu v našem příkladě). Pro zvolené σ pak můžeme aplikovat výše zmíněný konvoluční filtr na řádky a poté na sloupce matice. Tím získáme Gaussovsky rozmazanou verzi vstupního obrázku. Všimněte si, že tuto operaci lze i snadno paralelizovat a tedy ještě dále významně urychlit. Ukázka takového rozmazávání je na obrázku 15.



Obrázek 14: Graf funkce (40) pro hodnoty σ rovné 2 (zelená), 1 (červená), $1/2$ (černá), $1/4$ (hnědá) a $1/10$ (modrá).



Obrázek 15: Gaussovské rozmazávání Johanna Carla Friedricha Gausse (levý horní), aplikace konvolučního filtru po řádcích (pravý horní), po sloupcích (levý dolní) a v obou směrech (pravý dolní).

4.3.1 Rychlé násobení polynomů

Označme si p polynom s komplexními koeficienty tvaru

$$p(x) = \sum_{j=0}^{N-1} a_j x^j.$$

Všiměte si, že hodnoty polynomu p v bodech jednotkové kružnice

$$\omega_N^k = e^{-2\pi i k/N}$$

lze vyjádřit pomocí DFT jako

$$p(\omega_N^k) = (\tilde{\mathcal{F}}a)_k, \quad \forall k \in \{0, 1, \dots, N-1\},$$

kde $a = (a_0, a_1, \dots, a_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$ je vektor koeficientů polynomu a .

Na tomto pozorování je založený algoritmus pro rychlé násobení dvou polynomů

$$p(x) = \sum_{j=0}^{N-1} a_j x^j \quad \text{a} \quad q(x) = \sum_{j=0}^{N-1} b_j x^j.$$

Horní meze v sumách výše lze volit obě stejné bez újmy na obecnosti, jinak bychom doplnili příslušný počet nulových koeficientů k jednomu z polynomů. Cílem bude rychle najít koeficienty polynomu, který je součinem

$$p(x) \cdot q(x) = \sum_{j=0}^{2N-2} c_j x^j,$$

kde

$$c_j = \sum_{\substack{0 \leq r, s \leq N-1 \\ r+s=j}} a_r b_s.$$

Krok 1: Pomocí DFT vypočítáme hodnoty p a q v bodech ω_{2N}^k pro $k = 0, 1, \dots, 2N-1$:

$$p(\omega_{2N}^k) = (\tilde{\mathcal{F}}a)_k, \quad k \in \{0, 1, \dots, 2N-1\},$$

kde nyní je $a = (a_0, a_1, \dots, a_{N-1}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^{2N}$ vektor koeficientů polynomu p doplněný o N nul, aby měl odpovídající délku. Podobně najdeme stejné hodnoty pro polynom q . Složitost tohoto kroku je při použití FFT rovna $O(N \log N)$.

Krok 2: Vynásobíme komplexní čísla

$$p(\omega_{2N}^k) \cdot q(\omega_{2N}^k) =: \tilde{c}_k, \quad k \in \{0, 1, \dots, 2N-1\}.$$

Tedy číslo \tilde{c}_k je rovno hodnotě součinu $p \cdot q$ v bodě ω_{2N}^k . V tomto kroku provádíme $2N$ násobení, a proto je složitost řádově $O(N)$.

Krok 3: Pomocí inverzní DFT spočítáme hledané koeficienty součinu $p \cdot q$:

$$c_k = (\tilde{\mathcal{F}}^{-1}\tilde{c})_k, \quad k \in \{0, 1, \dots, 2N - 2\},$$

kde $\tilde{c} = (\tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_{2N-1}) \in \mathbb{C}^{2N}$ je vektor hodnot nalezených v předchozím kroku. Využijeme-li FFT, je složitost opět $O(N \log N)$. A tedy i celková složitost tohoto algoritmu pro násobení polynomů je $O(N \log N)$.

Na závěr poznamenejme, že tento algoritmus lze poměrně snadno upravit k násobení velkých čísel (v bázi o libovolném základu).

4.4 Poznámky a odkazy

4.5 Cvičení

Seznam symbolů

\mathbb{N}	množina přirozených čísel, $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$
\mathbb{N}^*	množina přirozených čísel bez nuly, $\mathbb{N} \setminus \{0\}$
\mathbb{Z}	množina celých čísel, $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
\mathbb{R}	množina reálných čísel
\mathbb{C}	množina komplexní čísel
$:=$	definitorní rovnost, výraz vpravo definuje symbol vlevo

Reference

- [1] Ahlfors, Lars V.: *Complex Analysis*. McGraw-Hill, 1979.
- [2] Conway, John B.: *Functions of One Complex Variable*. Springer, 1978.
- [3] Cooley, James W. a John W. Tukey: *An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series*. Math. Comput., 19:297–301, 1965.
- [4] Danielson, G. C. a C. Lanczos: *Some improvements in practical Fourier analysis and their application to X-ray scattering from liquids*. J. Franklin Inst., 233:365–380, 435–452, 1942.
- [5] Rudin, Walter: *Analýza v reálném a komplexním oboru*. Academia, 2003.
- [6] Smith III, Julius O.: *Mathematics of the Discrete Fourier Transform (DFT), with Audio Applications*. W3K Publishing, second edition edice, 2007. <https://ccrma.stanford.edu/~jos/mdft/>.
- [7] Zygmund, A.: *Trigonometric Series*. Cambridge University Press, third edition edice, 2002.