

Základy matematické analýzy

Úvodní přednáška

Jitka Hrabáková¹, Tomáš Kalvoda², Ivo Petr³

¹jitka.hrabakova@fit.cvut.cz ²tomas.kalvoda@fit.cvut.cz, ³ivo.petr@fit.cvut.cz,

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze

4. září 2019
ZS 2018/2019



Hlavní body

- 1 Množina reálných čísel
- 2 Zobrazení
- 3 Reálná funkce reálné proměnné



Hlavní body

- 1 Množina reálných čísel
- 2 Zobrazení
- 3 Reálná funkce reálné proměnné



Číselné množiny

Znamé číselné množiny označujeme v BI-ZMA následovně:

- **přirozená** čísla $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$,
- **přirozená** čísla s nulou $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$,
- **celá** čísla $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$,
- **racionální** čísla $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \text{ a } q \in \mathbb{N} \text{ jsou nesoudělná} \right\}$,
- **reálná** čísla $\mathbb{R}$,
- **komplexní** čísla $\mathbb{C}$.

Platí inkluze $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Nejvíce se budeme pohybovat v množině reálných čísel. Připomeňme proto její základní vlastnosti. . .



Reálná čísla

Na množině reálných čísel existují dvě významné binární operace (jistá zobrazení, viz dále) nazývané **sčítání** a **násobení**,

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad a \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

splňující známé **komutativní**, **asociativní** a **distributivní** zákony:

$$\begin{aligned} a + b &= b + a, & a \cdot b &= b \cdot a, \\ (a + b) + c &= a + (b + c), & (a \cdot b) \cdot c &= a \cdot (b \cdot c), \\ a \cdot (b + c) &= (a \cdot b) + (a \cdot c), & \text{pro každé } a, b, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$



Reálná čísla

Na množině reálných čísel existují dvě významné binární operace (jistá zobrazení, viz dále) nazývané **sčítání** a **násobení**,

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad a \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

splňující známé **komutativní**, **asociativní** a **distributivní** zákony:

$$\begin{aligned} a + b &= b + a, & a \cdot b &= b \cdot a, \\ (a + b) + c &= a + (b + c), & (a \cdot b) \cdot c &= a \cdot (b \cdot c), \\ a \cdot (b + c) &= (a \cdot b) + (a \cdot c), & \text{pro každé } a, b, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

V reálných číslech máme k dispozici čísla 0 a 1 splňující

$$0 + a = a + 0 = a, \text{ pro lib. } a \in \mathbb{R}, \quad 1 \cdot a = a \cdot 1 = a, \text{ pro lib. nenulové } a \in \mathbb{R}.$$



Reálná čísla

Na množině reálných čísel existují dvě významné binární operace (jistá zobrazení, viz dále) nazývané **sčítání** a **násobení**,

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad a \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

splňující známé **komutativní**, **asociativní** a **distributivní** zákony:

$$\begin{aligned} a + b &= b + a, & a \cdot b &= b \cdot a, \\ (a + b) + c &= a + (b + c), & (a \cdot b) \cdot c &= a \cdot (b \cdot c), \\ a \cdot (b + c) &= (a \cdot b) + (a \cdot c), & \text{pro každé } a, b, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

V reálných číslech máme k dispozici čísla 0 a 1 splňující

$$0 + a = a + 0 = a, \text{ pro lib. } a \in \mathbb{R}, \quad 1 \cdot a = a \cdot 1 = a, \text{ pro lib. nenulové } a \in \mathbb{R}.$$

Pro každé $a \in \mathbb{R}$ existuje $-a \in \mathbb{R}$ splňující $a + (-a) = -a + a = 0$.



Reálná čísla

Na množině reálných čísel existují dvě významné binární operace (jistá zobrazení, viz dále) nazývané **sčítání** a **násobení**,

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad a \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

splňující známé **komutativní**, **asociativní** a **distributivní** zákony:

$$\begin{aligned} a + b &= b + a, & a \cdot b &= b \cdot a, \\ (a + b) + c &= a + (b + c), & (a \cdot b) \cdot c &= a \cdot (b \cdot c), \\ a \cdot (b + c) &= (a \cdot b) + (a \cdot c), & \text{pro každé } a, b, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

V reálných číslech máme k dispozici čísla 0 a 1 splňující

$$0 + a = a + 0 = a, \text{ pro lib. } a \in \mathbb{R}, \quad 1 \cdot a = a \cdot 1 = a, \text{ pro lib. nenulové } a \in \mathbb{R}.$$

Pro každé $a \in \mathbb{R}$ existuje $-a \in \mathbb{R}$ splňující $a + (-a) = -a + a = 0$.

Pro každé nenulové $a \in \mathbb{R}$ existuje $a^{-1} = \frac{1}{a} \in \mathbb{R}$ splňující $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$.



Reálná čísla

Na množině reálných čísel existují dvě významné binární operace (jistá zobrazení, viz dále) nazývané **sčítání** a **násobení**,

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad a \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

splňující známé **komutativní**, **asociativní** a **distributivní** zákony:

$$\begin{aligned} a + b &= b + a, & a \cdot b &= b \cdot a, \\ (a + b) + c &= a + (b + c), & (a \cdot b) \cdot c &= a \cdot (b \cdot c), \\ a \cdot (b + c) &= (a \cdot b) + (a \cdot c), & \text{pro každé } a, b, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

V reálných číslech máme k dispozici čísla 0 a 1 splňující

$$0 + a = a + 0 = a, \text{ pro lib. } a \in \mathbb{R}, \quad 1 \cdot a = a \cdot 1 = a, \text{ pro lib. nenulové } a \in \mathbb{R}.$$

Pro každé $a \in \mathbb{R}$ existuje $-a \in \mathbb{R}$ splňující $a + (-a) = -a + a = 0$.

Pro každé nenulové $a \in \mathbb{R}$ existuje $a^{-1} = \frac{1}{a} \in \mathbb{R}$ splňující $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$.

Říkáme, že množina reálných čísel s operacemi $+$ a $\cdot$ tvoří tzv. **těleso** (field; viz dále BI-LIN).



Reálná čísla: uspořádání

Reálná čísla lze srovnávat podle velikosti, tj. existuje mezi nimi vztah (relace) **uspořádání**:

$$a < b \quad (\text{číslo } a \text{ je menší než číslo } b),$$

resp.

$$a \leq b \quad (\text{číslo } a \text{ je menší nebo rovno číslu } b).$$



Reálná čísla: uspořádání

Reálná čísla lze srovnávat podle velikosti, tj. existuje mezi nimi vztah (relace) **uspořádání**:

$$a < b \quad (\text{číslo } a \text{ je menší než číslo } b),$$

resp.

$$a \leq b \quad (\text{číslo } a \text{ je menší nebo rovno číslu } b).$$

Relace uspořádání je svázána s operací sčítání a násobení známými pravidly pro **počítání s nerovnicemi**. Připomeňme je zde explicitně:

$$a < b, \quad c > 0 \quad \Rightarrow \quad a \cdot c < b \cdot c,$$

$$a < b, \quad c < 0 \quad \Rightarrow \quad a \cdot c > b \cdot c.$$



Reálná čísla: uspořádání

Reálná čísla lze srovnávat podle velikosti, tj. existuje mezi nimi vztah (relace) **uspořádání**:

$$a < b \quad (\text{číslo } a \text{ je menší než číslo } b),$$

resp.

$$a \leq b \quad (\text{číslo } a \text{ je menší nebo rovno číslu } b).$$

Relace uspořádání je svázána s operací sčítání a násobení známými pravidly pro **počítání s nerovnicemi**. Připomeňme je zde explicitně:

$$a < b, c > 0 \quad \Rightarrow \quad a \cdot c < b \cdot c,$$

$$a < b, c < 0 \quad \Rightarrow \quad a \cdot c > b \cdot c.$$



Reálná čísla: intervaly

Pomocí uspořádání definujeme speciální podmnožiny $\mathbb{R}$, a to **intervaly**. Pro $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, klademe:

otevřený interval

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\},$$

uzavřený interval

$$\langle a, b \rangle := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\},$$

polootvřený (polouzavřený) interval

$$\langle a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\},$$

analogicky

$$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}.$$



Reálná čísla: intervaly

Pomocí uspořádání definujeme speciální podmnožiny $\mathbb{R}$, a to **intervaly**. Pro $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, klademe:

otevřený interval

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\},$$

uzavřený interval

$$\langle a, b \rangle := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\},$$

polootevřený (polouzavřený) interval

$$\langle a, b \rangle := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\},$$

analogicky

$$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}.$$

A neomezené intervaly

$$(c, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid c < x\},$$

$$(-\infty, c] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq c\}, \quad \text{atd.}$$

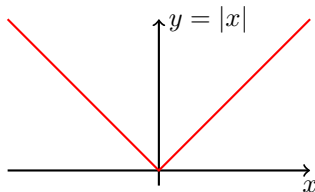
Ve všech těchto intervalech je a tzv. **počáteční** bod a b tzv. **koncový** bod příslušného intervalu.



Reálná čísla: absolutní hodnota a vzdálenost

Zavádíme **absolutní hodnotu** reálného čísla a předpisem

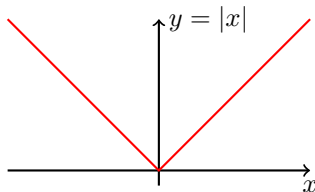
$$|a| := \begin{cases} a & \text{pro } a \geq 0 \\ -a & \text{pro } a < 0. \end{cases}$$



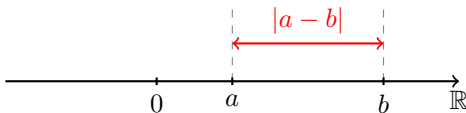
Reálná čísla: absolutní hodnota a vzdálenost

Zavádíme **absolutní hodnotu** reálného čísla a předpisem

$$|a| := \begin{cases} a & \text{pro } a \geq 0 \\ -a & \text{pro } a < 0. \end{cases}$$



Vzdálenost dvou čísel $a, b \in \mathbb{R}$ je rovna $|a - b| = |b - a|$.



Reálná čísla: vlastnosti absolutní hodnoty

Pro libovolná reálná čísla a, b platí

$$|a + b| \leq |a| + |b|, \quad |ab| = |a| \cdot |b|, \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}, \quad b \neq 0.$$

S uvedenou nerovností se ještě mnohokrát setkáme, nazývá se **trojúhelníková**.



Reálná čísla: vlastnosti absolutní hodnoty

Pro libovolná reálná čísla a, b platí

$$|a + b| \leq |a| + |b|, \quad |ab| = |a| \cdot |b|, \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}, \quad b \neq 0.$$

S uvedenou nerovností se ještě mnohokrát setkáme, nazývá se **trojúhelníková**.

Důkaz trojúhelníkové nerovnosti.

Mají-li obě čísla a a b stejné znaménko, dostáváme z definice absolutní hodnoty rovnost. Předpokládejme, že $a > 0$ a $b < 0$.

- Je-li $a + b \geq 0$, pak $|a + b| = a + b \leq a - b = |a| + |b|$.
- Je-li $a + b < 0$, pak $|a + b| = -a - b \leq a - b = |a| + |b|$.

Zde jsme využili nerovností $z \leq |z|$ a $-z \leq |z|$ platných pro každé $z \in \mathbb{R}$. □



Iracionální čísla

- Množina iracionálních čísel je poněkud „magická.“ Nelze ji popsat nijak jednoduše.

Z dosavadního studia jistě víte, že racionální čísla $\mathbb{Q}$ i reálná čísla $\mathbb{R}$ splňují vlastnosti **tělesa** uvedená dříve. Čím se tedy liší?



Iracionální čísla

- Množina iracionálních čísel je poněkud „magická.“ Nelze ji popsat nijak jednoduše.

Z dosavadního studia jistě víte, že racionální čísla $\mathbb{Q}$ i reálná čísla $\mathbb{R}$ splňují vlastnosti **tělesa** uvedené dříve. Čím se tedy liší?

- **Definovat** iracionální čísla jakožto reálná čísla, která nejsou racionální, převádí problém charakterizace iracionálního čísla na definici reálného čísla.



Iracionální čísla

- Množina iracionálních čísel je poněkud „magická.“ Nelze ji popsat nijak jednoduše.

Z dosavadního studia jistě víte, že racionální čísla $\mathbb{Q}$ i reálná čísla $\mathbb{R}$ splňují vlastnosti **tělesa** uvedené dříve. Čím se tedy liší?

- **Definovat** iracionální čísla jakožto reálná čísla, která nejsou racionální, převádí problém charakterizace iracionálního čísla na definici reálného čísla.
- Použijeme-li geometrického znázornění $\mathbb{R}$ jako přímky, pak lze požadovat, aby přímka nebyla nikde přetržená, jinými slovy množina reálných čísel „neobsahuje díry.“



Iracionální čísla

- Množina iracionálních čísel je poněkud „magická.“ Nelze ji popsat nijak jednoduše.

Z dosavadního studia jistě víte, že racionální čísla $\mathbb{Q}$ i reálná čísla $\mathbb{R}$ splňují vlastnosti **tělesa** uvedené dříve. Čím se tedy liší?

- **Definovat** iracionální čísla jakožto reálná čísla, která nejsou racionální, převádí problém charakterizace iracionálního čísla na definici reálného čísla.
- Použijeme-li geometrického znázornění $\mathbb{R}$ jako přímky, pak lze požadovat, aby přímka nebyla nikde přetržená, jinými slovy množina reálných čísel „neobsahuje díry.“
- Objasníme tento požadavek na následujícím příkladu.



Iracionalita $\sqrt{2}$

Příklad.

Existuje kladné řešení rovnice $x^2 = 2$, které označujeme symbolem $\sqrt{2}$.

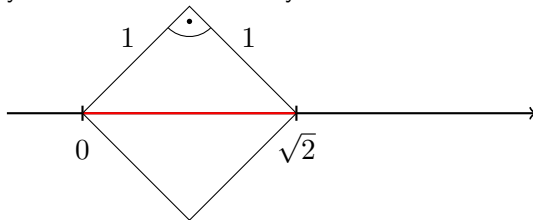


Iracionalita $\sqrt{2}$

Příklad.

Existuje kladné řešení rovnice $x^2 = 2$, které označujeme symbolem $\sqrt{2}$.

- Motivací, či geometrickou interpretací, této úlohy může být problém nalezení délky úhlopříčky ve čtverci o straně délky 1.

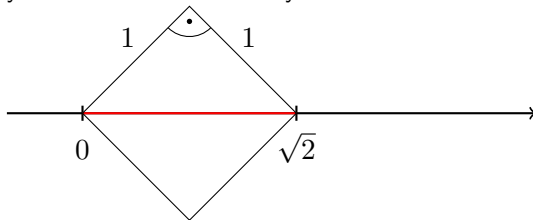


Iracionalita $\sqrt{2}$

Příklad.

Existuje kladné řešení rovnice $x^2 = 2$, které označujeme symbolem $\sqrt{2}$.

- Motivací, či geometrickou interpretací, této úlohy může být problém nalezení délky úhlopříčky ve čtverci o straně délky 1.



- Dokažme (pomocí sporu), že takovéto x **nemůže** být racionální číslo.

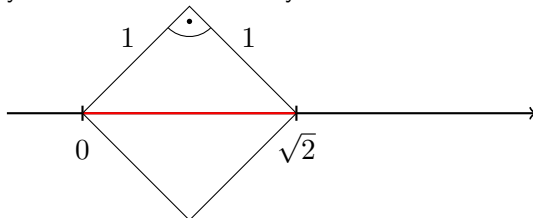


Iracionalita $\sqrt{2}$

Příklad.

Existuje kladné řešení rovnice $x^2 = 2$, které označujeme symbolem $\sqrt{2}$.

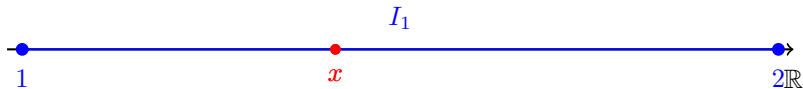
- Motivací, či geometrickou interpretací, této úlohy může být problém nalezení délky úhlopříčky ve čtverci o straně délky 1.



- Dokažme (pomocí sporu), že takovéto x **nemůže** být racionální číslo.
- Pravý koncový bod výše zkonstruované červené úsečky odpovídá číslu x , které není racionální. Jak zformulovat obecný požadavek „bezděrovosti“ reálné osy?



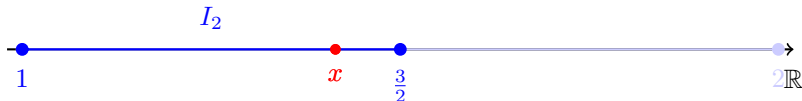
Iracionalita $\sqrt{2}$



- Určitě musí být $x \in I_1 := \langle 1, 2 \rangle$.

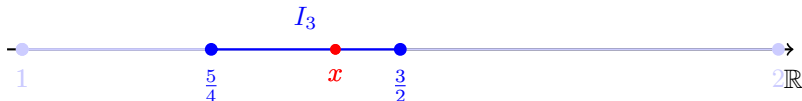


Iracionalita $\sqrt{2}$



- Určitě musí být $x \in I_1 := \langle 1, 2 \rangle$.
- Rozpůlením intervalu I_1 zjistíme, že $x \in I_2 := \langle 1, \frac{3}{2} \rangle$.

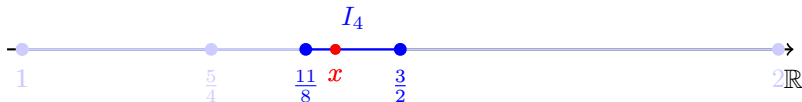


Iracionalita $\sqrt{2}$ 

- Určitě musí být $x \in I_1 := \langle 1, 2 \rangle$.
- Rozpůlením intervalu I_1 zjistíme, že $x \in I_2 := \langle 1, \frac{3}{2} \rangle$.
- Pokračujeme nadále půlením intervalů. Protože konce intervalů jsou racionální čísla lze postup libovolně opakovat a dostáváme tak intervaly I_n , $n \in \mathbb{N}$, uvnitř kterých musí ležet x . Pro tyto intervaly je $I_{n+1} \subset I_n$ a délka n -tého intervalu je $\frac{1}{2^{n-1}}$. Náš požadavek, aby reálná osa neměla díru v bodě $x = \sqrt{2}$ v tomto případě znamená, že

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n = \{\sqrt{2}\}.$$

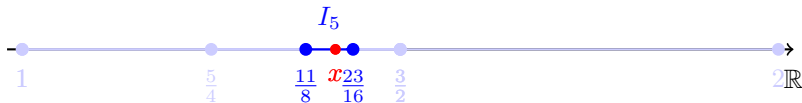


Iracionalita $\sqrt{2}$ 

- Určitě musí být $x \in I_1 := \langle 1, 2 \rangle$.
- Rozpůlením intervalu I_1 zjistíme, že $x \in I_2 := \langle 1, \frac{3}{2} \rangle$.
- Pokračujeme nadále půlením intervalů. Protože konce intervalů jsou racionální čísla lze postup libovolně opakovat a dostáváme tak intervaly I_n , $n \in \mathbb{N}$, uvnitř kterých musí ležet x . Pro tyto intervaly je $I_{n+1} \subset I_n$ a délka n -tého intervalu je $\frac{1}{2^{n-1}}$. Náš požadavek, aby reálná osa neměla díru v bodě $x = \sqrt{2}$ v tomto případě znamená, že

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n = \{\sqrt{2}\}.$$



Iracionalita $\sqrt{2}$ 

- Určitě musí být $x \in I_1 := \langle 1, 2 \rangle$.
- Rozpůlením intervalu I_1 zjistíme, že $x \in I_2 := \langle 1, \frac{3}{2} \rangle$.
- Pokračujeme nadále půlením intervalů. Protože konce intervalů jsou racionální čísla lze postup libovolně opakovat a dostáváme tak intervaly I_n , $n \in \mathbb{N}$, uvnitř kterých musí ležet x . Pro tyto intervaly je $I_{n+1} \subset I_n$ a délka n -tého intervalu je $\frac{1}{2^{n-1}}$. Náš požadavek, aby reálná osa neměla díru v bodě $x = \sqrt{2}$ v tomto případě znamená, že

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n = \{\sqrt{2}\}.$$



Axiom úplnosti

Požadavek aby množina reálných čísel „neměla díry“ můžeme přesně formulovat jako tzv. **axiom úplnosti**.



Axiom úplnosti

Požadavek aby množina reálných čísel „neměla díry“ můžeme přesně formulovat jako tzv. **axiom úplnosti**.

Každý smršťující se systém uzavřených intervalů, jejichž délky jsou libovolně malé, má neprázdný průnik.



Axiom úplnosti

Požadavek aby množina reálných čísel „neměla díry“ můžeme přesně formulovat jako tzv. **axiom úplnosti**.

Každý smršťující se systém uzavřených intervalů, jejichž délky jsou libovolně malé, má neprázdný průnik.

Přesněji, pokud jsou I_n , $n = 1, 2, \dots$, uzavřené intervaly splňující

- $I_n \supset I_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$,
- pro každé $\varepsilon > 0$ existuje n tak, že délka I_n je menší než ε ,

pak

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset.$$



Axiom úplnosti

Požadavek aby množina reálných čísel „neměla díry“ můžeme přesně formulovat jako tzv. **axiom úplnosti**.

Každý smřštující se systém uzavřených intervalů, jejichž délky jsou libovolně malé, má neprázdný průnik.

Přesněji, pokud jsou I_n , $n = 1, 2, \dots$, uzavřené intervaly splňující

- $I_n \supset I_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$,
- pro každé $\varepsilon > 0$ existuje n tak, že délka I_n je menší než ε ,

pak

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset.$$

$\mathbb{R}$ vs. $\mathbb{Q}$

Množina $\mathbb{R}$ reálných čísel axiom úplnosti splňuje. Množina racionálních čísel $\mathbb{Q}$ ho nesplňuje.

V jistém smyslu je čísel v $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ podstatně více než v $\mathbb{Q}$!

Hlavní body

- 1 Množina reálných čísel
- 2 Zobrazení
- 3 Reálná funkce reálné proměnné



Zobrazení

Zobrazení patří mezi ústřední matematické objekty. Funkce, posloupnosti, pole (v programátorském smyslu), matice, permutace, binární operace, to vše jsou příklady zobrazení.

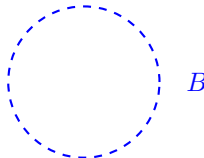


Zobrazení

Zobrazení patří mezi ústřední matematické objekty. Funkce, posloupnosti, pole (v programátorském smyslu), matice, permutace, binární operace, to vše jsou příklady zobrazení.

Definice (Zobrazení / *mapping*, *map*):

Nechť jsou dány dvě množiny A , B a předpokládejme, že ke každému prvku x z množiny A je jednoznačným způsobem přiřazen právě jeden prvek z množiny B , který označíme $f(x)$. Potom říkáme, že f je **zobrazení množiny A do množiny B** , a tento fakt značíme zápisem $f : A \rightarrow B$. Množinu A nazýváme **definičním oborem** zobrazení f .

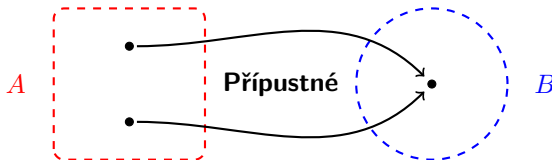


Zobrazení

Zobrazení patří mezi ústřední matematické objekty. Funkce, posloupnosti, pole (v programátorském smyslu), matice, permutace, binární operace, to vše jsou příklady zobrazení.

Definice (Zobrazení / *mapping, map*):

Nechť jsou dány dvě množiny A , B a předpokládejme, že ke každému prvku x z množiny A je jednoznačným způsobem přiřazen právě jeden prvek z množiny B , který označíme $f(x)$. Potom říkáme, že f je **zobrazení množiny A do množiny B** , a tento fakt značíme zápisem $f : A \rightarrow B$. Množinu A nazýváme **definičním oborem** zobrazení f .

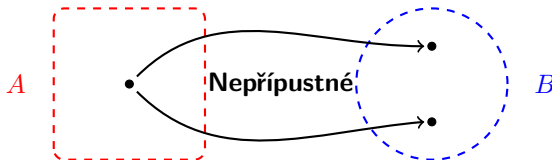


Zobrazení

Zobrazení patří mezi ústřední matematické objekty. Funkce, posloupnosti, pole (v programátorském smyslu), matice, permutace, binární operace, to vše jsou příklady zobrazení.

Definice (Zobrazení / *mapping, map*):

Nechť jsou dány dvě množiny A , B a předpokládejme, že ke každému prvku x z množiny A je jednoznačným způsobem přiřazen právě jeden prvek z množiny B , který označíme $f(x)$. Potom říkáme, že f je **zobrazení množiny A do množiny B** , a tento fakt značíme zápisem $f : A \rightarrow B$. Množinu A nazýváme **definičním oborem** zobrazení f .



Terminologie spojená se zobrazeními

Buď $f : A \rightarrow B$ zobrazení a nechť $y = f(x)$ pro $x \in A$, $y \in B$.



Terminologie spojená se zobrazeními

Bud' $f : A \rightarrow B$ zobrazení a necht' $y = f(x)$ pro $x \in A$, $y \in B$.

- Prvek y nazýváme **hodnota** f v **bodě** x , nebo **obraz** x při zobrazení f .



Terminologie spojená se zobrazeními

Bud' $f : A \rightarrow B$ zobrazení a nechť $y = f(x)$ pro $x \in A$, $y \in B$.

- Prvek y nazýváme **hodnota** f v **bodě** x , nebo **obraz** x při zobrazení f .
- Prvku x říkáme **vzor** prvku y při zobrazení f .



Terminologie spojená se zobrazeními

Bud' $f : A \rightarrow B$ zobrazení a nechť $y = f(x)$ pro $x \in A$, $y \in B$.

- Prvek y nazýváme **hodnota** f v **bodě** x , nebo **obraz** x při zobrazení f .
- Prvku x říkáme **vzor** prvku y při zobrazení f .
- **Definiční obor** zobrazení f , tedy množinu A značíme též symbolem D_f nebo $D(f)$.



Terminologie spojená se zobrazeními

Bud' $f : A \rightarrow B$ zobrazení a nechť $y = f(x)$ pro $x \in A$, $y \in B$.

- Prvek y nazýváme **hodnota** f v **bodě** x , nebo **obraz** x při zobrazení f .
- Prvku x říkáme **vzor** prvku y při zobrazení f .
- **Definiční obor** zobrazení f , tedy množinu A značíme též symbolem D_f nebo $D(f)$.
- Množina všech obrazů při zobrazení f se nazývá **obor hodnot** zobrazení f a značí se H_f . Tedy

$$H_f = \{y \in B \mid \text{existuje } x \in A \text{ splňující } y = f(x)\}.$$



Terminologie spojená se zobrazeními

Bud' $f : A \rightarrow B$ zobrazení a nechť $y = f(x)$ pro $x \in A$, $y \in B$.

- Prvek y nazýváme **hodnota** f v **bodě** x , nebo **obraz** x při zobrazení f .
- Prvku x říkáme **vzor** prvku y při zobrazení f .
- **Definiční obor** zobrazení f , tedy množinu A značíme též symbolem D_f nebo $D(f)$.
- Množina všech obrazů při zobrazení f se nazývá **obor hodnot** zobrazení f a značí se H_f . Tedy

$$H_f = \{y \in B \mid \text{existuje } x \in A \text{ splňující } y = f(x)\}.$$

Častý omyl

Mějme $f : A \rightarrow B$. Množina B nutně není oborem hodnot!



Terminologie spojená se zobrazeními

Buď $f : A \rightarrow B$ zobrazení a nechť $y = f(x)$ pro $x \in A$, $y \in B$.

- Prvek y nazýváme **hodnota** f v **bodě** x , nebo **obraz** x při zobrazení f .
- Prvku x říkáme **vzor** prvku y při zobrazení f .
- **Definiční obor** zobrazení f , tedy množinu A značíme též symbolem D_f nebo $D(f)$.
- Množina všech obrazů při zobrazení f se nazývá **obor hodnot** zobrazení f a značí se H_f . Tedy

$$H_f = \{y \in B \mid \text{existuje } x \in A \text{ splňující } y = f(x)\}.$$

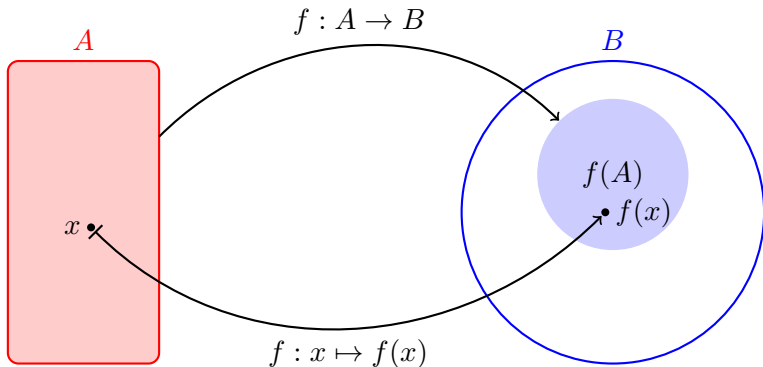
Častý omyl

Mějme $f : A \rightarrow B$. Množina B nutně není oborem hodnot!

Definice (Rovnost zobrazení):

Dvě zobrazení $f : A \rightarrow B$ a $g : A \rightarrow B$ jsou si rovny, píšeme $f = g$, právě když $f(x) = g(x)$ pro každé $x \in A = D_f = D_g$.

Zobrazení: ilustrace



Zúžení, vzor a obraz množiny

Bud' $f : A \rightarrow B$.

- Zobrazení $g : E \rightarrow B$, $E \subset D_f = A$, definované předpisem $g(x) := f(x)$ pro libovolné $x \in E$ nazýváme **zúžením zobrazení f na množinu E** .
Zapisujeme $g = f|_E$.



Zúžení, vzor a obraz množiny

Bud' $f : A \rightarrow B$.

- Zobrazení $g : E \rightarrow B$, $E \subset D_f = A$, definované předpisem $g(x) := f(x)$ pro libovolné $x \in E$ nazýváme **zúžením zobrazení f na množinu E** .
Zapisujeme $g = f|_E$.
- Množinu

$$f(S) := \{y \in B \mid \text{existuje } x \in S \text{ splňující } f(x) = y\},$$

kde $S \subset A$, nazveme **obrazem množiny S při zobrazení f** .



Zúžení, vzor a obraz množiny

Bud' $f : A \rightarrow B$.

- Zobrazení $g : E \rightarrow B$, $E \subset D_f = A$, definované předpisem $g(x) := f(x)$ pro libovolné $x \in E$ nazýváme **zúžením zobrazení f na množinu E** .
Zapisujeme $g = f|_E$.

- Množinu

$$f(S) := \{y \in B \mid \text{existuje } x \in S \text{ splňující } f(x) = y\},$$

kde $S \subset A$, nazveme **obrazem množiny S při zobrazení f** .

- Je-li $N \subset B$, potom množinu

$$f^{-1}(N) := \{x \in A \mid \text{existuje } y \in N \text{ splňující } f(x) = y\}$$

nazveme **vzorem množiny N při zobrazení f** .



Zúžení, vzor a obraz množiny

Bud' $f : A \rightarrow B$.

- Zobrazení $g : E \rightarrow B$, $E \subset D_f = A$, definované předpisem $g(x) := f(x)$ pro libovolné $x \in E$ nazýváme **zúžením zobrazení f na množinu E** .
Zapisujeme $g = f|_E$.

- Množinu

$$f(S) := \{y \in B \mid \text{existuje } x \in S \text{ splňující } f(x) = y\},$$

kde $S \subset A$, nazveme **obrazem množiny S při zobrazení f** .

- Je-li $N \subset B$, potom množinu

$$f^{-1}(N) := \{x \in A \mid \text{existuje } y \in N \text{ splňující } f(x) = y\}$$

nazveme **vzorem množiny N při zobrazení f** .

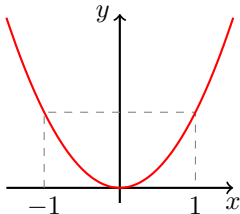
Poznámka:

Symbol pro vzor množiny, $f^{-1}(N)$, je nutno chápat jako nedělitelný. Netvrdíme nic o existenci inverzního zobrazení (viz dále).

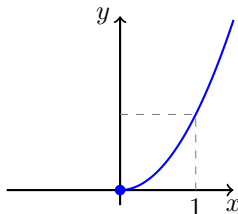
Zúžení, vzor a obraz množiny: příklad

Ukažme si příklad zobrazení $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a jednoho jeho zúžení g .

$$f(x) = x^2, D_f = \mathbb{R}$$



$$g(x) = x^2, D_g = \langle 0, +\infty \rangle$$



Jaký je obraz množiny $S = (-1, 1)$ vzhledem k těmto zobrazením?

Jaký je vzor množiny $N = (-1, 1)$ vzhledem k těmto zobrazením?



Složené zobrazení

Zobrazení lze skládat a vytvářet tak nová zobrazení.

Definice (Složené zobrazení):

Jsou-li $f : A \rightarrow B$ a $g : E \rightarrow C$ zobrazení, kde $E \subset B$, pak definujeme **složené zobrazení** $g \circ f : D_{g \circ f} \rightarrow C$ předpisem

$$(g \circ f)(x) := g(f(x))$$

pro všechna

$$x \in D_{g \circ f} := \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = f^{-1}(E) \subset A.$$



Složené zobrazení

Zobrazení lze skládat a vytvářet tak nová zobrazení.

Definice (Složené zobrazení):

Jsou-li $f : A \rightarrow B$ a $g : E \rightarrow C$ zobrazení, kde $E \subset B$, pak definujeme **složené zobrazení** $g \circ f : D_{g \circ f} \rightarrow C$ předpisem

$$(g \circ f)(x) := g(f(x))$$

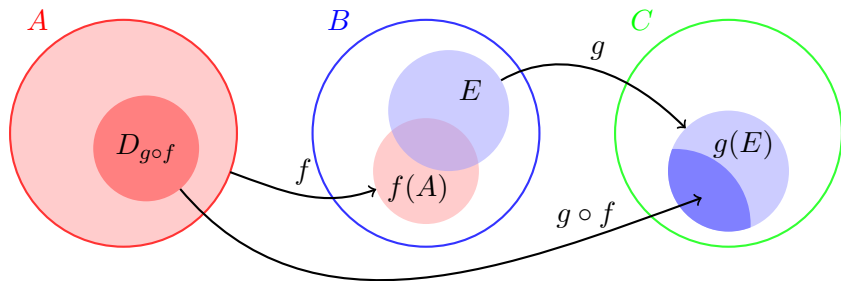
pro všechna

$$x \in D_{g \circ f} := \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = f^{-1}(E) \subset A.$$

Poznámka:

- Tedy $D_{g \circ f} \subset D_f$. I v případě, že $D_f \neq \emptyset$ a $D_g \neq \emptyset$ může nastat situace $D_{g \circ f} = \emptyset$.
- O f často mluvíme jako o **vnitřním** a o g jako o **vnějším** zobrazení.

Složené zobrazení: ilustrace



Důležité druhy zobrazení

Zobrazení $f : A \rightarrow B$ je

Definice:

- **prosté** (injektivní), jestliže pro každou dvojici $x_1, x_2 \in D_f$, $x_1 \neq x_2$, platí $f(x_1) \neq f(x_2)$.



Důležité druhy zobrazení

Zobrazení $f : A \rightarrow B$ je

Definice:

- **prosté** (injektivní), jestliže pro každou dvojici $x_1, x_2 \in D_f$, $x_1 \neq x_2$, platí $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- **na** (surjektivní), jestliže pro každé $y \in B$ existuje $x \in D_f$ splňující $f(x) = y$.



Důležité druhy zobrazení

Zobrazení $f : A \rightarrow B$ je

Definice:

- **prosté** (injektivní), jestliže pro každou dvojici $x_1, x_2 \in D_f$, $x_1 \neq x_2$, platí $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- **na** (surjektivní), jestliže pro každé $y \in B$ existuje $x \in D_f$ splňující $f(x) = y$.
- **vzájemně jednoznačné** (bijektivní), jestliže f je prosté a na.



Důležité druhy zobrazení

Zobrazení $f : A \rightarrow B$ je

Definice:

- **prosté** (injektivní), jestliže pro každou dvojici $x_1, x_2 \in D_f$, $x_1 \neq x_2$, platí $f(x_1) \neq f(x_2)$.
 - **na** (surjektivní), jestliže pro každé $y \in B$ existuje $x \in D_f$ splňující $f(x) = y$.
 - **vzájemně jednoznačné** (bijektivní), jestliže f je prosté a na.
- Prostotu zobrazení $f : A \rightarrow B$ lze ekvivalentně vyjádřit požadavkem

$$(\forall x_1, x_2 \in D_f)((f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2).$$

Slovně řečeno, každý prvek H_f má právě jeden vzor v D_f vzhledem k f .



Důležité druhy zobrazení

Zobrazení $f : A \rightarrow B$ je

Definice:

- **prosté** (injektivní), jestliže pro každou dvojici $x_1, x_2 \in D_f$, $x_1 \neq x_2$, platí $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- **na** (surjektivní), jestliže pro každé $y \in B$ existuje $x \in D_f$ splňující $f(x) = y$.
- **vzájemně jednoznačné** (bijektivní), jestliže f je prosté a na.

- Prostotu zobrazení $f : A \rightarrow B$ lze ekvivalentně vyjádřit požadavkem

$$(\forall x_1, x_2 \in D_f)((f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2).$$

Slovně řečeno, každý prvek H_f má právě jeden vzor v D_f vzhledem k f .

- $f : A \rightarrow B$ je surjektivní, právě když $H_f = B$. Použití slůvka „na“ by tedy mělo být zřejmé (*sur* je „na“ francouzsky).



Důležité druhy zobrazení

Zobrazení $f : A \rightarrow B$ je

Definice:

- **prosté** (injektivní), jestliže pro každou dvojici $x_1, x_2 \in D_f$, $x_1 \neq x_2$, platí $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- **na** (surjektivní), jestliže pro každé $y \in B$ existuje $x \in D_f$ splňující $f(x) = y$.
- **vzájemně jednoznačné** (bijektivní), jestliže f je prosté a na.

- Prostotu zobrazení $f : A \rightarrow B$ lze ekvivalentně vyjádřit požadavkem

$$(\forall x_1, x_2 \in D_f)((f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2).$$

Slovně řečeno, každý prvek H_f má právě jeden vzor v D_f vzhledem k f .

- $f : A \rightarrow B$ je surjektivní, právě když $H_f = B$. Použití slůvka „na“ by tedy mělo být zřejmé (*sur* je „na“ francouzsky).
- Je-li $f : A \rightarrow B$ bijekce, pak každému prvku $x \in A$ odpovídá právě jeden prvek množiny $y \in B$ splňující $f(x) = y$, a naopak. Proto se o bijekcích občas také mluví jako o zobrazeních 1–1 (jedna ku jedné).



Příklad

Příklad (Identické zobrazení).

Bud' A množina. Zobrazení $\text{id}_A : A \rightarrow A$ definované předpisem

$$\text{id}_A(x) := x, \quad x \in D_{\text{id}_A},$$

nazýváme **identické zobrazení**.

Zobrazení id_A je injektivní, surjektivní a tedy i bijektivní.



Inverzní zobrazení

Definice:

Je-li $f : A \rightarrow B$ prosté zobrazení, pak každému prvku x z oboru hodnot H_f lze přiřadit právě jedno y z množiny $D_f = A$ tak, že $x = f(y)$. Takto získané zobrazení nazýváme **inverzní** zobrazení k zobrazení f a značíme ho f^{-1} .



Inverzní zobrazení

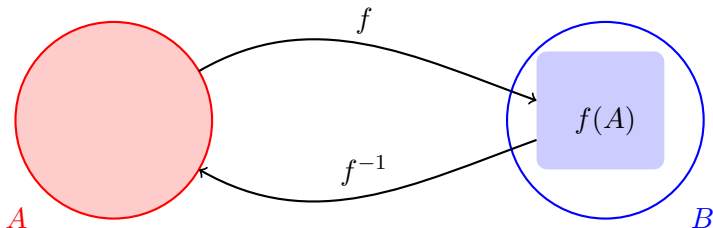
Definice:

Je-li $f : A \rightarrow B$ prosté zobrazení, pak každému prvku x z oboru hodnot H_f lze přiřadit právě jedno y z množiny $D_f = A$ tak, že $x = f(y)$. Takto získané zobrazení nazýváme **inverzní** zobrazení k zobrazení f a značíme ho f^{-1} .

Poznámka:

Z definice ihned plyne, že $f^{-1} : H_f \rightarrow A$ a dále

$$D_{f^{-1}} = H_f, \quad H_{f^{-1}} = D_f, \quad f^{-1} \circ f = \text{id}_{D_f}, \quad f \circ f^{-1} = \text{id}_{H_f}.$$



Hlavní body

- 1 Množina reálných čísel
- 2 Zobrazení
- 3 Reálná funkce reálné proměnné



Reálná funkce reálné proměnné

Definice:

Zobrazení $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, kde $A \subset \mathbb{R}$, nazýváme **reálnou funkcí reálné proměnné**.



Reálná funkce reálné proměnné

Definice:

Zobrazení $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, kde $A \subset \mathbb{R}$, nazýváme **reálnou funkcí reálné proměnné**.

Poznámka:

Reálná funkce reálné proměnné je často zadána tzv. **explicitně**. Tedy pomocí předpisu typu $y := f(x)$. **Přirozeným definičním oborem** pak nazýváme množinu všech reálných x pro které má výraz $f(x)$ smysl jakožto reálné číslo.



Reálná funkce reálné proměnné

Definice:

Zobrazení $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, kde $A \subset \mathbb{R}$, nazýváme **reálnou funkcí reálné proměnné**.

Poznámka:

Reálná funkce reálné proměnné je často zadána tzv. **explicitně**. Tedy pomocí předpisu typu $y := f(x)$. **Přirozeným definičním oborem** pak nazýváme množinu všech reálných x pro které má výraz $f(x)$ smysl jakožto reálné číslo.

Příklad.

Uvažme výraz $f(x) := \frac{\sqrt{x}}{x-1}$. Přirozeným definičním oborem je množina

$$D_f = \langle 0, 1 \rangle \cup (1, +\infty).$$



Graf funkce

Grafem funkce f nazýváme množinu

$$\text{graf } f := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \in D_f\}.$$



Graf funkce

Grafem funkce f nazýváme množinu

$$\text{graf } f := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \in D_f\}.$$

- O x se také mluví jako o **nezávisle** proměnné. Znázorňujeme ji zpravidla na vodorovné ose a $y = f(x)$ je hodnota funkce f v bodě x (o y mluvíme jako o **závisle** proměnné), která se znázorňuje na svislé ose.



Graf funkce

Grafem funkce f nazýváme množinu

$$\text{graf } f := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \in D_f\}.$$

- O x se také mluví jako o **nezávisle** proměnné. Znázorňujeme ji zpravidla na vodorovné ose a $y = f(x)$ je hodnota funkce f v bodě x (o y mluvíme jako o **závisle** proměnné), která se znázorňuje na svislé ose.
- Graf funkce f je podmnožinou kartézského součinu $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, který teď chápeme jako rovinu s vyznačeným počátkem (bodem $(0, 0)$) a s vodorovnou souřadnou osou

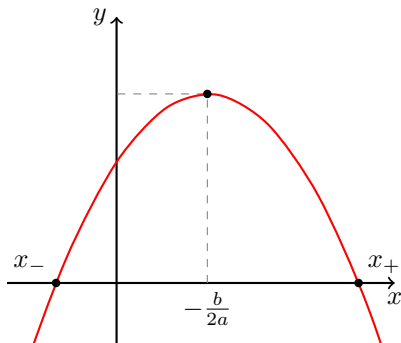
$$\{(x, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{R}\},$$

a svislou souřadnou osou

$$\{(0, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y \in \mathbb{R}\}.$$



Graf funkce: příklad paraboly



Připomeňme graf paraboly

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Reálné kořeny

$$x_{\pm} = \frac{1}{2a} \left(-b \pm \sqrt{D} \right),$$

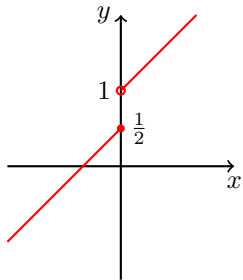
pokud $D = b^2 - 4ac \geq 0$.



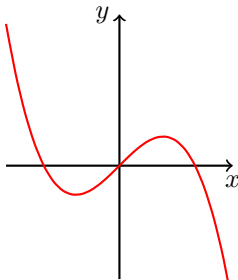
Příklady funkcí a jejich grafů

Příklad.

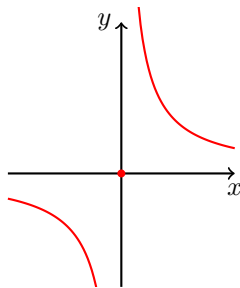
Která z následujících funkcí ($\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) je prostá, na, či bijekce?



$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & x \leq 0 \\ x + 1, & x > 0 \end{cases}$$



$$f(x) = x(1 - x^2)$$



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$



Definice:

Funkci f definovanou na množině M nazýváme

- **rostoucí na množině M** , právě když pro každé $x_1, x_2 \in M$ splňující $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- **klesající na množině M** , právě když pro každé $x_1, x_2 \in M$ splňující $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) \geq f(x_2)$.
- **ostře rostoucí na množině M** , právě když pro každé $x_1, x_2 \in M$ splňující $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) < f(x_2)$.
- **ostře klesající na množině M** , právě když pro každé $x_1, x_2 \in M$ splňující $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) > f(x_2)$.

Funkci, která je rostoucí nebo klesající nazýváme **monotonní**. Funkci, která je ostře rostoucí nebo ostře klesající nazýváme **ryze monotonní**.



Definice:

Funkci f definovanou na množině M nazýváme

- **rostoucí na množině M** , právě když pro každé $x_1, x_2 \in M$ splňující $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- **klesající na množině M** , právě když pro každé $x_1, x_2 \in M$ splňující $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) \geq f(x_2)$.
- **ostře rostoucí na množině M** , právě když pro každé $x_1, x_2 \in M$ splňující $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) < f(x_2)$.
- **ostře klesající na množině M** , právě když pro každé $x_1, x_2 \in M$ splňující $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) > f(x_2)$.

Funkci, která je rostoucí nebo klesající nazýváme **monotónní**. Funkci, která je ostře rostoucí nebo ostře klesající nazýváme **ryze monotónní**.

Každá ryze monotónní funkce je prostá.



Definice:

Funkci f definovanou na množině M nazýváme

- **rostoucí na množině M** , právě když pro každé $x_1, x_2 \in M$ splňující $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- **klesající na množině M** , právě když pro každé $x_1, x_2 \in M$ splňující $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) \geq f(x_2)$.
- **ostře rostoucí na množině M** , právě když pro každé $x_1, x_2 \in M$ splňující $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) < f(x_2)$.
- **ostře klesající na množině M** , právě když pro každé $x_1, x_2 \in M$ splňující $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) > f(x_2)$.

Funkci, která je rostoucí nebo klesající nazýváme **monotonní**. Funkci, která je ostře rostoucí nebo ostře klesající nazýváme **ryze monotonní**.

Každá ryze monotonní funkce je prostá.

Příklad.

Příkladem rostoucí funkce na $\mathbb{R}$ je x^3 (a také $\sqrt[3]{x}$). Funkce $f(x) = x^2$ není na $\mathbb{R}$ ani rostoucí ani klesající, ale je klesající na intervalu $(-\infty, 0)$ a rostoucí na intervalu $\langle 0, +\infty)$.