Základy matematické analýzy

Číselné posloupnosti

Jitka Hrabáková[1], Tomáš Kalvoda[2], Ivo Petr[3]

[1]jitka.hrabakova@fit.cvut.cz [2]tomas.kalvoda@fit.cvut.cz, [3]ivo.petr@fit.cvut.cz,

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze

4. září 2019
ZS 2018/2019

Hlavní body

Hlavní body

1. Definice pojmu posloupnosti
2. Důležité podmnožiny $\mathbb{R}$ a rozšířená reálná osa
3. Limita číselné posloupnosti
4. Vybrané posloupnosti

Posloupnosti: úvodní poznámky

- Intuitivně je asi zřejmé co si pod slovním spojením „posloupnost reálných čísel“ představit. Definice stojí na pojmu zobrazení.

- Pomocí posloupností lze mimo jiné vyjadřovat a popisovat složitost algoritmů, časový průběh různorodých signálů, iterativní řešení úloh,...

Posloupnosti: úvodní poznámky

- Intuitivně je asi zřejmé co si pod slovním spojením „posloupnost reálných čísel" představit. Definice stojí na pojmu zobrazení.
- Pomocí posloupností lze mimo jiné vyjadřovat a popisovat složitost algoritmů, časový průběh různorodých signálů, iterativní řešení úloh,...
- „Limita posloupnosti" je **nejjednodušší** formou limitního procesu s kterým se během semestru setkáme (dále budeme studovat limity funkcí).
- Derivace funkce i konstrukce Riemannova integrálu jsou založeny na pojmu limity.
- **Dobré osvojení a pochopení** pojmu limity posloupnosti proto velmi usnadní další studium.

Posloupnosti: definice

Definice (Posloupnost / *sequence*):

Zobrazení množiny $\mathbb{N}$ do množiny $\mathbb{R}$ nazýváme **reálná posloupnost**.

Posloupnosti: definice

Definice (Posloupnost / *sequence*):

Zobrazení množiny $\mathbb{N}$ do množiny $\mathbb{R}$ nazýváme **reálná posloupnost**.

Poznámka (Terminologie):

1. Je-li $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ posloupnost, pak funkční hodnotu a v bodě $n \in D_a = \mathbb{N}$, tj. $a(n)$, označujeme a_n a nazýváme n-**tým členem posloupnosti** a. O n samotném v tomto kontextu mluvíme jako o **indexu**.

Posloupnosti: definice

Definice (Posloupnost / *sequence*):

Zobrazení množiny $\mathbb{N}$ do množiny $\mathbb{R}$ nazýváme **reálná posloupnost**.

Poznámka (Terminologie):

1. Je-li $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ posloupnost, pak funkční hodnotu a v bodě $n \in D_a = \mathbb{N}$, tj. $a(n)$, označujeme a_n a nazýváme n-**tým členem posloupnosti** a. O n samotném v tomto kontextu mluvíme jako o **indexu**.
2. Skutečnost, že $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ je posloupnost, zapisujeme také zkráceně symbolem $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Posloupnosti: definice

Definice (Posloupnost / *sequence*):

Zobrazení množiny $\mathbb{N}$ do množiny $\mathbb{R}$ nazýváme **reálná posloupnost**.

Poznámka (Terminologie):

1. Je-li $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ posloupnost, pak funkční hodnotu a v bodě $n \in D_a = \mathbb{N}$, tj. $a(n)$, označujeme a_n a nazýváme n-**tým členem posloupnosti** a. O n samotném v tomto kontextu mluvíme jako o **indexu**.
2. Skutečnost, že $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ je posloupnost, zapisujeme také zkráceně symbolem $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

- Indexová množina nemusí být nutně tvořena celou množinou $\mathbb{N}$. Pokud chceme omezit indexovou množinu například na nekonečnou $J \subset \mathbb{N}$, pak tento záměr značíme zápisem

$$(a_n)_{n \in J}.$$

Speciálně $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je ekvivalentní $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Příklad

Příklad.

Uvažme posloupnost $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem $a_n := (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Příklad

Příklad.

Uvažme posloupnost $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem $a_n := (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

- Například tedy platí $a_1 = -1$, $a_2 = 1$, či $a_{823} = -1$.

Příklad

Příklad.

Uvažme posloupnost $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem $a_n := (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

- Například tedy platí $a_1 = -1$, $a_2 = 1$, či $a_{823} = -1$.
- Tuto posloupnost jsme mohli zapsat i ekvivalentním způsobem:

$$a = \big((-1)^n\big)_{n=1}^{\infty}.$$

Příklad

Příklad.

Uvažme posloupnost $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem $a_n := (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

- Například tedy platí $a_1 = -1$, $a_2 = 1$, či $a_{823} = -1$.
- Tuto posloupnost jsme mohli zapsat i ekvivalentním způsobem:

$$a = \big((-1)^n\big)_{n=1}^{\infty}.$$

- Oborem hodnot a je množina obsahující pouze **dva** prvky, $\{-1, 1\}$. Tato posloupnost má ale nekonečný počet členů.

Příklad

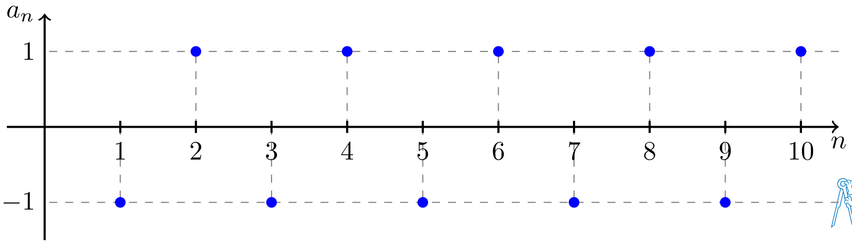
Příklad.

Uvažme posloupnost $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem $a_n := (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

- Například tedy platí $a_1 = -1$, $a_2 = 1$, či $a_{823} = -1$.
- Tuto posloupnost jsme mohli zapsat i ekvivalentním způsobem:

$$a = \left((-1)^n\right)_{n=1}^{\infty}.$$

- Oborem hodnot a je množina obsahující pouze **dva** prvky, $\{-1, 1\}$. Tato posloupnost má ale nekonečný počet členů.



Vlastnosti posloupností

Podobně jako u funkcí se nám budou k popisu chování posloupností hodit následující pojmy.

- $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je **rostoucí** (resp. **klesající**) pokud $a_n \leq a_{n+1}$ (resp. $a_n \geq a_{n+1}$) pro každé $n \in \mathbb{N}$,

Vlastnosti posloupností

Podobně jako u funkcí se nám budou k popisu chování posloupností hodit následující pojmy.

- $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je **rostoucí** (resp. **klesající**) pokud $a_n \leq a_{n+1}$ (resp. $a_n \geq a_{n+1}$) pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je **ostře rostoucí** (resp. **ostře klesající**) pokud $a_n < a_{n+1}$ (resp. $a_n > a_{n+1}$), pro každé $n \in \mathbb{N}$,

Vlastnosti posloupností

Podobně jako u funkcí se nám budou k popisu chování posloupností hodit následující pojmy.

- $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je **rostoucí** (resp. **klesající**) pokud $a_n \leq a_{n+1}$ (resp. $a_n \geq a_{n+1}$) pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je **ostře rostoucí** (resp. **ostře klesající**) pokud $a_n < a_{n+1}$ (resp. $a_n > a_{n+1}$), pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je **monotonní** pokud je rostoucí nebo klesající. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je **ryze monotonní** pokud je ostře rostoucí nebo ostře klesající.

Příklad

Příklad.

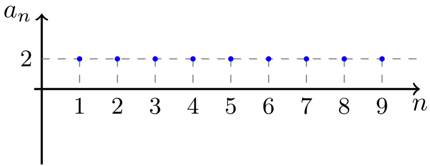
Diskutujte vlastnosti následujících posloupností.

Příklad

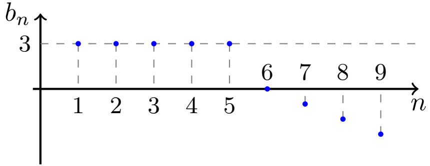
Příklad.

Diskutujte vlastnosti následujících posloupností.

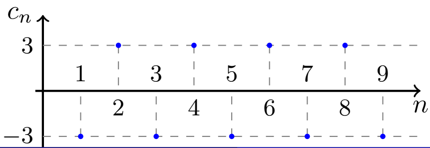
$$a_n = 2$$



$$b_n = \begin{cases} 3, & n \leq 5 \\ 6 - n, & n > 5 \end{cases}$$



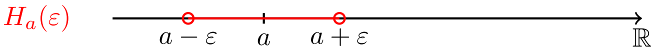
$$c_n = 3(-1)^n$$



Hlavní body

Okolí bodu $a \in \mathbb{R}$

Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$. Otevřený interval $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$ nazýváme **ε-okolím bodu a v $\mathbb{R}$** a značíme ho $H_a(\varepsilon)$.



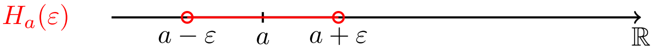
Okolí bodu $a \in \mathbb{R}$

Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$. Otevřený interval $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$ nazýváme ε-**okolím bodu** a **v** $\mathbb{R}$ a značíme ho $H_a(\varepsilon)$.

Poznámka:

Je-li $a \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$, pak $x \in H_a(\varepsilon)$, právě když platí nerovnost $|x - a| < \varepsilon$. Tedy

$$H_a(\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon\}.$$



Okolí bodu $a \in \mathbb{R}$

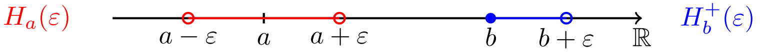
Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$. Otevřený interval $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$ nazýváme ε-**okolím bodu** a **v** $\mathbb{R}$ a značíme ho $H_a(\varepsilon)$.

Poznámka:

Je-li $a \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$, pak $x \in H_a(\varepsilon)$, právě když platí nerovnost $|x - a| < \varepsilon$. Tedy

$$H_a(\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon\}.$$

Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$. Polouzavřený interval $\langle a,\ a + \varepsilon)$, resp. $(a - \varepsilon,\ a\rangle$, nazýváme **pravým**, resp. **levým**, ε-**okolím bodu** a **v** $\mathbb{R}$ a značíme $H_a^+(\varepsilon)$, resp. $H_a^-(\varepsilon)$.



Okolí bodu $a \in \mathbb{R}$

Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$. Otevřený interval $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ nazýváme ε-**okolím bodu** a **v** $\mathbb{R}$ a značíme ho $H_a(\varepsilon)$.

Poznámka:

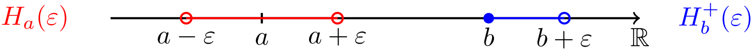
Je-li $a \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$, pak $x \in H_a(\varepsilon)$, právě když platí nerovnost $|x-a| < \varepsilon$. Tedy

$$H_a(\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| < \varepsilon\}.$$

Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$. Polouzavřený interval $\langle a,\ a+\varepsilon)$, resp. $(a-\varepsilon,\ a\rangle$, nazýváme **pravým**, resp. **levým**, ε-**okolím bodu** a **v** $\mathbb{R}$ a značíme $H_a^+(\varepsilon)$, resp. $H_a^-(\varepsilon)$.

Poznámka:

O množině $H_a^\pm(\varepsilon)$ někdy též mluvíme jako o **jednostranném** okolí, a o $H_a(\varepsilon)$ jako o **oboustranném** okolí bodu $a \in \mathbb{R}$.



Okolí a rozšířená reálná osa

Definice:

Množinu $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ nazýváme **rozšířenou reálnou osou**.

Okolí a rozšířená reálná osa

Definice:

Množinu $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ nazýváme **rozšířenou reálnou osou**.

Nechť $c \in \mathbb{R}$. Otevřený interval $(c,\ +\infty)$, resp. $(-\infty, c)$, nazýváme **okolím bodu** $+\infty$, resp. $-\infty$, v $\mathbb{R}$ a značíme $H_{+\infty}(c)$, resp. $H_{-\infty}(c)$.

Okolí a rozšířená reálná osa

Definice:

Množinu $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ nazýváme **rozšířenou reálnou osou**.

Nechť $c \in \mathbb{R}$. Otevřený interval $(c,\ +\infty)$, resp. $(-\infty, c)$, nazýváme **okolím bodu** $+\infty$, resp. $-\infty$, v $\mathbb{R}$ a značíme $H_{+\infty}(c)$, resp. $H_{-\infty}(c)$.

- Každý prvek množiny $\overline{\mathbb{R}}$ je tedy buď reálné číslo, nebo jeden ze symbolů $+\infty$, $-\infty$.
- Není-li potřeba specifikovat velikost okolí, píšeme zkráceně H_a, $H_{+\infty}$, $H_{-\infty}$.
- Okolí bodu a jsme definovali pro libovolné $a \in \overline{\mathbb{R}}$, avšak toto okolí je vždy podmnožinou $\mathbb{R}$.

Hlavní body

Limita posloupnosti: O co jde?

- Častou **praktickou otázkou** týkající se posloupností je jejich chování pro velké hodnoty n, tedy tzv. chování v ∞. Co tím myslíme?

Limita posloupnosti: O co jde?

- Častou **praktickou otázkou** týkající se posloupností je jejich chování pro velké hodnoty n, tedy tzv. chování v ∞. Co tím myslíme?

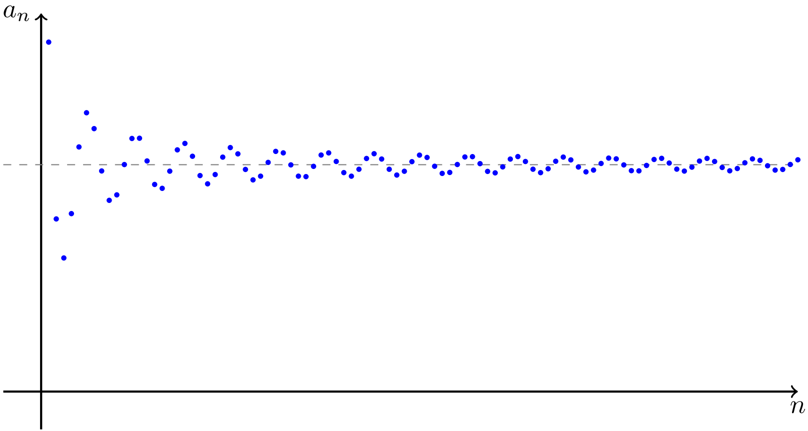
- Můžeme se například ptát, jestli se členy posloupnosti aproximující řešení dané úlohy skutečně blíží ke správnému řešení.

Limita posloupnosti: O co jde?

- Častou **praktickou otázkou** týkající se posloupností je jejich chování pro velké hodnoty n, tedy tzv. chování v ∞. Co tím myslíme?
- Můžeme se například ptát, jestli se členy posloupnosti aproximující řešení dané úlohy skutečně blíží ke správnému řešení.
- Cílem první části této přednášky je toto chování přesněji popsat.

Limita posloupnosti: Ilustrace

Vágně: členy posloupnosti se s rostoucím indexem n libovolně blíží jistému číslu[1].



[1] Toto není definice! V písemce za nula bodů.

Limita posloupnosti: Definice

Definice (Limita posloupnosti / *limit of a sequence*):

Řekneme, že reálná posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má **limitu** $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, právě když pro každé okolí H_α bodu α lze nalézt $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ větší než n_0 platí $a_n \in H_\alpha$. V symbolech

$$\big(\forall H_\alpha\big)\big(\exists n_0 \in \mathbb{N}\big)\big(\forall n \in \mathbb{N}\big)\big(n > n_0 \;\Rightarrow\; a_n \in H_\alpha\big).$$

Tuto skutečnost můžeme zapsat několika možnými způsoby:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \quad \text{nebo} \quad \lim a_n = \alpha \quad \text{nebo} \quad a_n \to \alpha.$$

Poznámky k definici limity posloupnosti

- Ekvivalentní pojem dostaneme, zaměníme-li „$n_0 \in \mathbb{N}$“ za „$n_0 \in \mathbb{R}$“. Význam také zůstane zachován připustíme-li „$n \geq n_0$“ místo „$n > n_0$“.

Poznámky k definici limity posloupnosti

- Ekvivalentní pojem dostaneme, zaměníme-li „$n_0 \in \mathbb{N}$“ za „$n_0 \in \mathbb{R}$“. Význam také zůstane zachován připustíme-li „$n \geq n_0$“ místo „$n > n_0$“.

- Pokud uvažujeme $\alpha \in \mathbb{R}$, můžeme definici přeformulovat:

  Každé okolí H_α je v tomto případě tvaru $(\alpha - \varepsilon,\ \alpha + \varepsilon)$ pro nějaké kladné ε. Dále $a_n \in H_\alpha$ znamená $|a_n - \alpha| < \varepsilon$. Dostáváme tedy:

$$\big(\forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0\big)\big(\exists n_0 \in \mathbb{N}\big)\big(\forall n \in \mathbb{N}\big)\big(n > n_0 \ \Rightarrow\ |a_n - \alpha| < \varepsilon\big).$$

Poznámky k definici limity posloupnosti

- Ekvivalentní pojem dostaneme, zaměníme-li „$n_0 \in \mathbb{N}$“ za „$n_0 \in \mathbb{R}$“. Význam také zůstane zachován připustíme-li „$n \geq n_0$“ místo „$n > n_0$“.

- Pokud uvažujeme $\alpha \in \mathbb{R}$, můžeme definici přeformulovat:

  Každé okolí H_α je v tomto případě tvaru $(\alpha - \varepsilon,\ \alpha + \varepsilon)$ pro nějaké kladné ε. Dále $a_n \in H_\alpha$ znamená $|a_n - \alpha| < \varepsilon$. Dostáváme tedy:

$$\big(\forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0\big)\big(\exists n_0 \in \mathbb{N}\big)\big(\forall n \in \mathbb{N}\big)\big(n > n_0 \ \Rightarrow\ |a_n - \alpha| < \varepsilon\big).$$

- Podobnou úvahou pro případ $\alpha = +\infty$ dostáváme podmínku

$$\big(\forall c \in \mathbb{R}\big)\big(\exists n_0 \in \mathbb{N}\big)\big(\forall n \in \mathbb{N}\big)\big(n > n_0 \ \Rightarrow\ a_n > c\big).$$

Poznámky k definici limity posloupnosti

- Ekvivalentní pojem dostaneme, zaměníme-li „$n_0 \in \mathbb{N}$“ za „$n_0 \in \mathbb{R}$“. Význam také zůstane zachován připustíme-li „$n \geq n_0$“ místo „$n > n_0$“.

- Pokud uvažujeme $\alpha \in \mathbb{R}$, můžeme definici přeformulovat:

  Každé okolí H_α je v tomto případě tvaru $(\alpha - \varepsilon,\ \alpha + \varepsilon)$ pro nějaké kladné ε. Dále $a_n \in H_\alpha$ znamená $|a_n - \alpha| < \varepsilon$. Dostáváme tedy:

$$\big(\forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0\big)\big(\exists n_0 \in \mathbb{N}\big)\big(\forall n \in \mathbb{N}\big)\big(n > n_0 \ \Rightarrow\ |a_n - \alpha| < \varepsilon\big).$$

- Podobnou úvahou pro případ $\alpha = +\infty$ dostáváme podmínku

$$\big(\forall c \in \mathbb{R}\big)\big(\exists n_0 \in \mathbb{N}\big)\big(\forall n \in \mathbb{N}\big)\big(n > n_0 \ \Rightarrow\ a_n > c\big).$$

- Udejte podmínku pro $\alpha = -\infty$.

Poznámky k definici limity

- Dokázat tvrzení „ $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$" znamená ke každému okolí H_α, určenému parametrem ε nebo c, nalézt $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby $a_n \in H_\alpha$ pro všechna $n > n_0$.

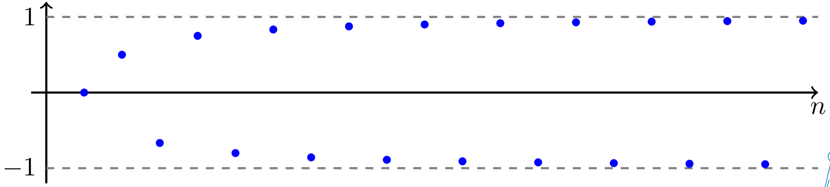
Poznámky k definici limity

- Dokázat tvrzení „$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$“ znamená ke každému okolí H_α, určenému parametrem ε nebo c, nalézt $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby $a_n \in H_\alpha$ pro všechna $n > n_0$.
- Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má limitu $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, právě když v každém okolí bodu α leží všechny členy posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ až na konečný počet výjimek.

Poznámky k definici limity

- Dokázat tvrzení „$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$“ znamená ke každému okolí H_α, určenému parametrem ε nebo c, nalézt $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby $a_n \in H_\alpha$ pro všechna $n > n_0$.
- Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má limitu $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, právě když v každém okolí bodu α leží všechny členy posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ až na konečný počet výjimek.
- K tomu aby $\lim a_n = \alpha$ ale nestačí, aby v každém okolí bodu α leželo nekonečně mnoho členů posloupnosti.

$$a_n = (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$



Kolik limit může posloupnost mít?

Věta (Jednoznačnost limity):

Každá číselná posloupnost má nejvýše jednu limitu.

„Nejvýše jednu“ znamená buď žádnou, nebo právě jednu.

Kolik limit může posloupnost mít?

Věta (Jednoznačnost limity):

Každá číselná posloupnost má nejvýše jednu limitu.

„Nejvýše jednu“ znamená buď žádnou, nebo právě jednu.

Důkaz sporem.

Předpokládejme, že $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má dvě různé limity $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$, $\alpha \neq \beta$. Potom existují dvě disjunktní okolí H_α a H_β, tj. $H_\alpha \cap H_\beta = \emptyset$. Z definice limity ovšem máme k dispozici $n_0 \in \mathbb{N}$ a $m_0 \in \mathbb{N}$ taková, že pro všechna $n > n_0$ je $a_n \in H_\alpha$ a pro všechna $n > m_0$ je $a_n \in H_\beta$. Tudíž pro $n > \max\{n_0,\ m_0\}$ platí

$$a_n \in H_\alpha \cap H_\beta = \emptyset$$

což není možné. $\square$

Příklady: limity jednoduchých posloupností

Příklad.

Limita konstantní posloupnosti $a_n = \alpha$, $n \in \mathbb{N}$ je rovna α.

Příklady: limity jednoduchých posloupností

Příklad.

Limita konstantní posloupnosti $a_n = \alpha$, $n \in \mathbb{N}$ je rovna α.

Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Zvolíme-li libovolné $n_0 \in \mathbb{N}$ potom pro $n > n_0$ triviálně platí

$$|a_n - \alpha| = 0 < \varepsilon.$$

Příklady: limity jednoduchých posloupností

Příklad.

Limita konstantní posloupnosti $a_n = \alpha$, $n \in \mathbb{N}$ je rovna α.

Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Zvolíme-li libovolné $n_0 \in \mathbb{N}$ potom pro $n > n_0$ triviálně platí

$$|a_n - \alpha| = 0 < \varepsilon.$$

Příklad.

Limita posloupnosti $a_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}$, je $+\infty$.

Příklady: limity jednoduchých posloupností

Příklad.

Limita konstantní posloupnosti $a_n = \alpha$, $n \in \mathbb{N}$ je rovna α.

Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Zvolíme-li libovolné $n_0 \in \mathbb{N}$ potom pro $n > n_0$ triviálně platí

$$|a_n - \alpha| = 0 < \varepsilon.$$

Příklad.

Limita posloupnosti $a_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}$, je $+\infty$.

Buď $K > 0$ libovolné. Zvolíme-li přirozené $n_0 > \sqrt{K}$, pak pro každé $n > n_0$ platí $n > n_0 > \sqrt{K}$ a tudíž $a_n = n^2 > K$.

Příklady: limity jednoduchých posloupností

Příklad.

Dokažte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Příklady: limity jednoduchých posloupností

Příklad.

Dokažte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Buď $\varepsilon > 0$ libovolné.

Příklady: limity jednoduchých posloupností

Příklad.

Dokažte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Požadavek

$$|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \overset{!}{<} \varepsilon$$

je ekvivalentní podmínce $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Příklady: limity jednoduchých posloupností

Příklad.

Dokažte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Požadavek

$$|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \stackrel{!}{<} \varepsilon$$

je ekvivalentní podmínce $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Stačí tedy k danému ε volit libovolné $n_0 \in \mathbb{N}$ splňující $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$.

Příklady: limity jednoduchých posloupností

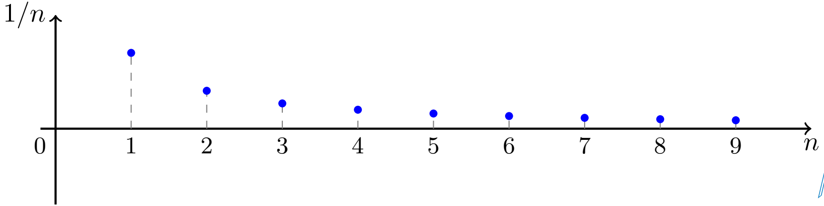
Příklad.

Dokažte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Požadavek

$$|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \overset{!}{<} \varepsilon$$

je ekvivalentní podmínce $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Stačí tedy k danému ε volit libovolné $n_0 \in \mathbb{N}$ splňující $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$.



Příklady: limity jednoduchých posloupností

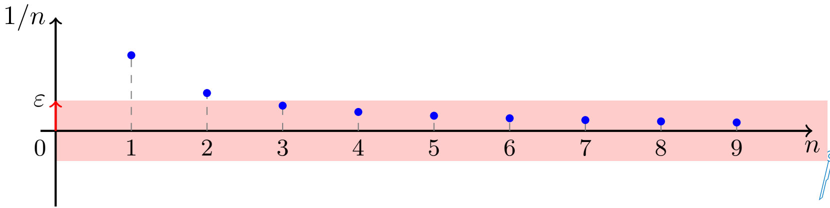
Příklad.

Dokažte $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Požadavek

$$|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \overset{!}{<} \varepsilon$$

je ekvivalentní podmínce $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Stačí tedy k danému ε volit libovolné $n_0 \in \mathbb{N}$ splňující $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$.



Příklady: limity jednoduchých posloupností

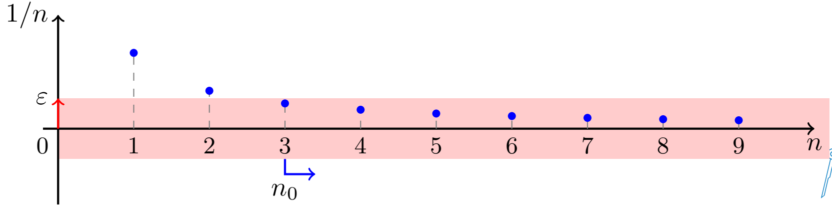
Příklad.

Dokažte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Požadavek

$$|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \overset{!}{<} \varepsilon$$

je ekvivalentní podmínce $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Stačí tedy k danému ε volit libovolné $n_0 \in \mathbb{N}$ splňující $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$.



Konvergence a divergence posloupností

Podle ne/existence limity posloupnosti a její hodnoty rozlišujeme následující typy posloupností.

Definice:

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá **konvergentní**, právě když její limita existuje a je prvkem $\mathbb{R}$. V ostatních případech ji nazýváme **divergentní**.

Pokud limita posloupnosti existuje, pak také říkáme, že „posloupnost má limitu“. V tom případě její hodnota patří do $\overline{\mathbb{R}}$.

Konvergence a divergence posloupností

Podle ne/existence limity posloupnosti a její hodnoty rozlišujeme následující typy posloupností.

Definice:

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá **konvergentní**, právě když její limita existuje a je prvkem $\mathbb{R}$. V ostatních případech ji nazýváme **divergentní**.

Pokud limita posloupnosti existuje, pak také říkáme, že „posloupnost má limitu“. V tom případě její hodnota patří do $\overline{\mathbb{R}}$.

Příklad.

Na základě výsledků předchozích příkladů dostáváme:

- posloupnost $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní,
- libovolná konstantní posloupnost je konvergentní,
- posloupnost $(n^2)_{n=1}^{\infty}$ je divergentní.

Všechny tři uvedené posloupnosti mají limitu.

Výpočet limity posloupnosti

Výpočet limity posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ pomocí definice spočívá v úspěšném provedení dvou kroků:

1. Uhodni kandidáta na limitu, ozn. $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$.
2. Pomocí definice dokaž, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$.

V příští přednášce si ukážeme další nástroje pro výpočet limit.

Výpočet limity posloupnosti

Výpočet limity posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ pomocí definice spočívá v úspěšném provedení dvou kroků:

1. Uhodni kandidáta na limitu, ozn. $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$.
2. Pomocí definice dokaž, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$.

V příští přednášce si ukážeme další nástroje pro výpočet limit.

Velmi často je nám však hodnota limity (pokud vůbec existuje) **neznámá**. Typicky je její případná hodnota právě to, co **hledáme**. Vyvstává proto přirozená otázka:

> *Lze rozhodnout o konvergenci posloupnosti* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *pouze na základě znalosti jejích členů?*

Na tuto otázku **kladně** odpovíme v následující přednášce.

Příklad

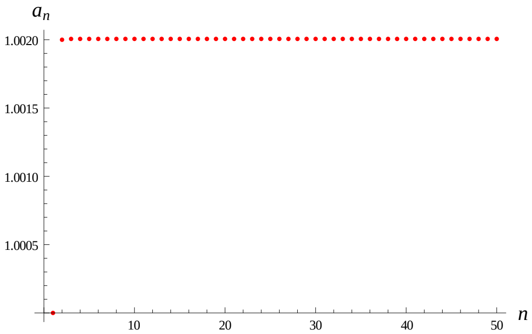
Odhadování hodnoty limity posloupnosti **výpočtem prvních několika členů** (tj. dosazováním malých n, vykreslováním konečného počtu členů na počítači) může vést ke špatným závěrům. Jako jednoduchý příklad uvažme posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ definovanou předpisem

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{10^{3k-3}}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Příklad

Odhadování hodnoty limity posloupnosti **výpočtem prvních několika členů** (tj. dosazováním malých n, vykreslováním konečného počtu členů na počítači) může vést ke špatným závěrům. Jako jednoduchý příklad uvažme posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ definovanou předpisem

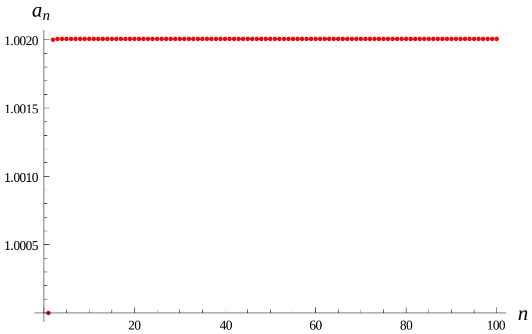
$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{10^{3k-3}}, \ \ n \in \mathbb{N}.$$



Příklad

Odhadování hodnoty limity posloupnosti **výpočtem prvních několika členů** (tj. dosazováním malých n, vykreslováním konečného počtu členů na počítači) může vést ke špatným závěrům. Jako jednoduchý příklad uvažme posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ definovanou předpisem

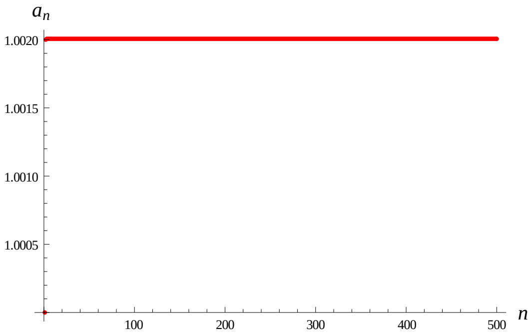
$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{10^{3k-3}}, \ \ n \in \mathbb{N}.$$



Příklad

Odhadování hodnoty limity posloupnosti **výpočtem prvních několika členů** (tj. dosazováním malých n, vykreslováním konečného počtu členů na počítači) může vést ke špatným závěrům. Jako jednoduchý příklad uvažme posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ definovanou předpisem

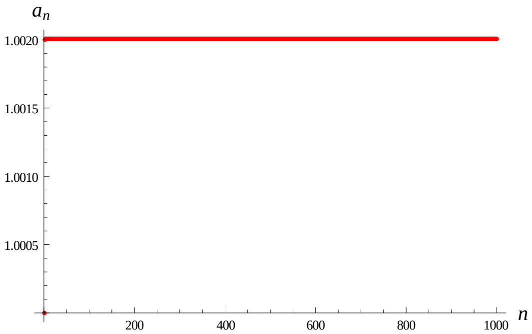
$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{10^{3k-3}}, \ \ n \in \mathbb{N}.$$



Příklad

Odhadování hodnoty limity posloupnosti **výpočtem prvních několika členů** (tj. dosazováním malých n, vykreslováním konečného počtu členů na počítači) může vést ke špatným závěrům. Jako jednoduchý příklad uvažme posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ definovanou předpisem

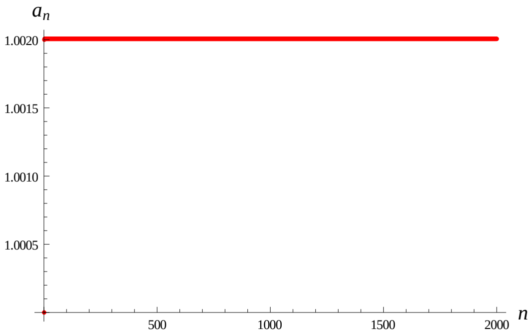
$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{10^{3k-3}}, \ \ n \in \mathbb{N}.$$



Příklad

Odhadování hodnoty limity posloupnosti **výpočtem prvních několika členů** (tj. dosazováním malých n, vykreslováním konečného počtu členů na počítači) může vést ke špatným závěrům. Jako jednoduchý příklad uvažme posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ definovanou předpisem

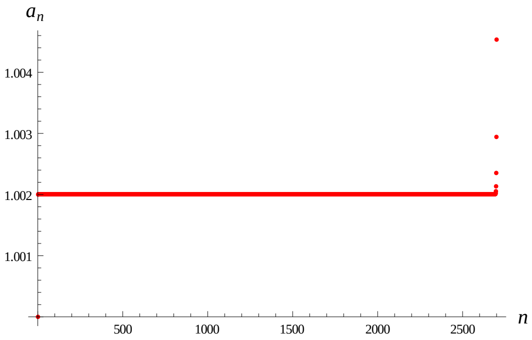
$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{10^{3k-3}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$



Příklad

Odhadování hodnoty limity posloupnosti **výpočtem prvních několika členů** (tj. dosazováním malých n, vykreslováním konečného počtu členů na počítači) může vést ke špatným závěrům. Jako jednoduchý příklad uvažme posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ definovanou předpisem

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{10^{3k-3}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$



Hlavní body

Definice vybrané posloupnosti

Definice:

Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je libovolná posloupnost a $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ je ostře rostoucí posloupnost přirozených čísel. Pak posloupnost $\left(a_{k_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ nazýváme **posloupností vybranou** z posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Posloupnost $\left(a_{k_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ nazýváme také **podposloupností** posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Definice vybrané posloupnosti

Definice:

Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je libovolná posloupnost a $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ je ostře rostoucí posloupnost přirozených čísel. Pak posloupnost $\left(a_{k_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ nazýváme **posloupností vybranou** z posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Posloupnost $\left(a_{k_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ nazýváme také **podposloupností** posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

$n:$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$
$a_n:$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	$\cdots$

Definice vybrané posloupnosti

Definice:

Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je libovolná posloupnost a $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ je ostře rostoucí posloupnost přirozených čísel. Pak posloupnost $\left(a_{k_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ nazýváme **posloupností vybranou** z posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Posloupnost $\left(a_{k_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ nazýváme také **podposloupností** posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

$n:$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$
$a_n:$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	$\cdots$

Definice vybrané posloupnosti

Definice:

Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je libovolná posloupnost a $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ je ostře rostoucí posloupnost přirozených čísel. Pak posloupnost $\left(a_{k_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ nazýváme **posloupností vybranou** z posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Posloupnost $\left(a_{k_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ nazýváme také **podposloupností** posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

$n:$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$
$a_n:$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	$\cdots$
$k_n:$	2	5	6	9	$\cdots$						

Definice vybrané posloupnosti

Definice:

Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je libovolná posloupnost a $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ je ostře rostoucí posloupnost přirozených čísel. Pak posloupnost $\left(a_{k_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ nazýváme **posloupností vybranou** z posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Posloupnost $\left(a_{k_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ nazýváme také **podposloupností** posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

$n:$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$
$a_n:$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	$\cdots$
$k_n:$	2	5	6	9	$\cdots$						
$a_{k_n}:$	a_2	a_5	a_6	a_9	$\cdots$						

Definice vybrané posloupnosti

Definice:

Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je libovolná posloupnost a $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ je ostře rostoucí posloupnost přirozených čísel. Pak posloupnost $\left(a_{k_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ nazýváme **posloupností vybranou** z posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Posloupnost $\left(a_{k_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ nazýváme také **podposloupností** posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

$n:$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$
$a_n:$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	$\cdots$
$k_n:$	2	5	6	9	$\cdots$						
$a_{k_n}:$	a_2	a_5	a_6	a_9	$\cdots$						

Členy posloupnosti $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ udávají **indexy** členů posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, které z $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ **vybereme**.

Příklady

Příklad.

Posloupnost $(1)_{n=1}^{\infty}$ je vybraná z $\big((-1)^n\big)_{n=1}^{\infty}$. Skutečně, stačí vzít sudé členy, tedy $k_n = 2n$ pro $n \in \mathbb{N}$.

Příklady

Příklad.

Posloupnost $(1)_{n=1}^{\infty}$ je vybraná z $\left((-1)^n\right)_{n=1}^{\infty}$. Skutečně, stačí vzít sudé členy, tedy $k_n = 2n$ pro $n \in \mathbb{N}$.

Příklad.

Uvažme posloupnost $a_n = (-1)^n n$, $n \in \mathbb{N}$. Prvních pár členů tedy je $-1, 2, -3, 4, \ldots$

- Posloupnost $(2n)_{n=1}^{\infty}$ je vybraná z $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Ano, stačí volit rostoucí $k_n = 2n$ a pak $a_{k_n} = 2n$.
- Posloupnost $(2)_{n=1}^{\infty}$ není vybraná z $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Sice platí, že když položíme $k_n = 2$, pak $a_{k_n} = 2$, ale $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ není ostře rostoucí.

Je důležité si povšimnout, že při výběru členů musíme zachovat jejich pořadí v původní posloupnosti, proto v definic požadujeme aby $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ byla ostře rostoucí.

Co lze říci o limitě vybrané posloupnosti?

Přímo z definice ihned nahlédneme:

Věta (O limitě vybrané posloupnosti):

Nechť posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má limitu $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$. Pak každá podposloupnost vybraná z $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má také limitu α.

Co lze říci o limitě vybrané posloupnosti?

Přímo z definice ihned nahlédneme:

Věta (O limitě vybrané posloupnosti):

Nechť posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má limitu $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$. Pak každá podposloupnost vybraná z $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má také limitu α.

Příklad.

Platí $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{4n! + n^2} = 0$. Posloupnost $\left(\frac{1}{4n!+n^2}\right)_{n=1}^{\infty}$ je totiž vybraná posloupnost z $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ a již víme, že $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Co lze říci o limitě vybrané posloupnosti?

Přímo z definice ihned nahlédneme:

Věta (O limitě vybrané posloupnosti):

Nechť posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má limitu $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$. Pak každá podposloupnost vybraná z $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má také limitu α.

Příklad.

Platí $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{4n!+n^2} = 0$. Posloupnost $\left(\frac{1}{4n!+n^2}\right)_{n=1}^{\infty}$ je totiž vybraná posloupnost z $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ a již víme, že $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Důsledek:

Lze-li z posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ vybrat dvě podposloupnosti s **různými** limitami, pak limita původní posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ neexistuje.

Příklad

Příklad.

Limita posloupnosti $\left((-1)^n\right)_{n=1}^{\infty}$ neexistuje.

Příklad

Příklad.

Limita posloupnosti $\left((-1)^n\right)_{n=1}^{\infty}$ neexistuje.

Vybereme podposloupnosti se sudými a lichými indexy. Tj. položíme $k_n := 2n$ a $\ell_n := 2n - 1$ pro $n = 1, 2, \ldots$. Potom obě vybrané podposloupnosti jsou konstantní s různými limitami:

$$a_{k_n} = 1 \to 1, \quad a_{\ell_n} = -1 \to -1.$$