

Základy matematické analýzy

Spojitost funkce

Jitka Hrabáková¹, Tomáš Kalvoda², Ivo Petr³

¹jitka.hrabakova@fit.cvut.cz ²tomas.kalvoda@fit.cvut.cz, ³ivo.petr@fit.cvut.cz,

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze

4. září 2019
ZS 2018/2019



Hlavní body

- 1 Definice a kritéria spojitosti
- 2 Důsledky spojitosti
- 3 Spojitost elementárních funkcí
- 4 Důsledky



Hlavní body

- 1 Definice a kritéria spojitosti
- 2 Důsledky spojitosti
- 3 Spojitost elementárních funkcí
- 4 Důsledky



Spojítost funkce v bodě

Na základě vztahu funkční hodnoty a limity funkce v jistém bodě zavádíme následující pojmy.

Definice (Spojítost funkce v bodě):

Nechť f je reálná funkce reálné proměnné a nechť bod $a \in D_f$. Řekneme, že funkce f je **spojitá v bodě** a jestliže nastává alespoň jedna z následujících možností

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a),$

Spojítost funkce v bodě

Na základě vztahu funkční hodnoty a limity funkce v jistém bodě zavádíme následující pojmy.

Definice (Spojítost funkce v bodě):

Nechť f je reálná funkce reálné proměnné a nechť bod $a \in D_f$. Řekneme, že funkce f je **spojitá v bodě** a jestliže nastává alespoň jedna z následujících možností

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$,
- funkce f je definována na pravém okolí bodu a , přesněji $(\exists H_a)(H_a \cap D_f = H_a^+)$, a $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = f(a)$,

Spojitost funkce v bodě

Na základě vztahu funkční hodnoty a limity funkce v jistém bodě zavádíme následující pojmy.

Definice (Spojitost funkce v bodě):

Nechť f je reálná funkce reálné proměnné a nechť bod $a \in D_f$. Řekneme, že funkce f je **spojitá v bodě** a jestliže nastává alespoň jedna z následujících možností

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$,
- funkce f je definována na pravém okolí bodu a , přesněji $(\exists H_a)(H_a \cap D_f = H_a^+)$, a $\lim_{x \rightarrow a_+} f(x) = f(a)$,
- funkce f je definována na levém okolí bodu a , přesněji $(\exists H_a)(H_a \cap D_f = H_a^-)$, a $\lim_{x \rightarrow a_-} f(x) = f(a)$.

Spojitost funkce v bodě

Na základě vztahu funkční hodnoty a limity funkce v jistém bodě zavádíme následující pojmy.

Definice (Spojitost funkce v bodě):

Nechť f je reálná funkce reálné proměnné a nechť bod $a \in D_f$. Řekneme, že funkce f je **spojitá v bodě** a jestliže nastává alespoň jedna z následujících možností

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$,
- funkce f je definována na pravém okolí bodu a , přesněji $(\exists H_a)(H_a \cap D_f = H_a^+)$, a $\lim_{x \rightarrow a_+} f(x) = f(a)$,
- funkce f je definována na levém okolí bodu a , přesněji $(\exists H_a)(H_a \cap D_f = H_a^-)$, a $\lim_{x \rightarrow a_-} f(x) = f(a)$.

Funkce f je **spojitá v bodě** a **zprava**, pokud $\lim_{x \rightarrow a_+} f(x) = f(a)$.

Spojitost funkce v bodě

Na základě vztahu funkční hodnoty a limity funkce v jistém bodě zavádíme následující pojmy.

Definice (Spojitost funkce v bodě):

Nechť f je reálná funkce reálné proměnné a nechť bod $a \in D_f$. Řekneme, že funkce f je **spojitá v bodě** a jestliže nastává alespoň jedna z následujících možností

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$,
- funkce f je definována na pravém okolí bodu a , přesněji $(\exists H_a)(H_a \cap D_f = H_a^+)$, a $\lim_{x \rightarrow a_+} f(x) = f(a)$,
- funkce f je definována na levém okolí bodu a , přesněji $(\exists H_a)(H_a \cap D_f = H_a^-)$, a $\lim_{x \rightarrow a_-} f(x) = f(a)$.

Funkce f je **spojitá v bodě** a **zprava**, pokud $\lim_{x \rightarrow a_+} f(x) = f(a)$.

Funkce f je **spojitá v bodě** a **zleva**, pokud $\lim_{x \rightarrow a_-} f(x) = f(a)$.

ε - δ formulace spojitosti v bodě

- Vágně řečeno, drobná změna vstupu u spojitě funkce má za následek drobnou změnu výstupu, funkční hodnoty.



ε - δ formulace spojitosti v bodě

- Vágně řečeno, drobná změna vstupu u spojitě funkce má za následek drobnou změnu výstupu, funkční hodnoty.
- Je-li f funkce a $a \in D_f$, pak a i $f(a) \in \mathbb{R}$. Dostáváme proto alternativní formulaci definice, kterou lze využít při ověřování spojitosti:



ε - δ formulace spojitosti v bodě

- Vágně řečeno, drobná změna vstupu u spojitě funkce má za následek drobnou změnu výstupu, funkční hodnoty.
- Je-li f funkce a $a \in D_f$, pak a i $f(a) \in \mathbb{R}$. Dostáváme proto alternativní formulaci definice, kterou lze využít při ověřování spojitosti:

Funkce f definovaná na okolí bodu $a \in D_f$ je spojitá v bodě $a \in D_f$, právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ splňující $|x - a| < \delta$ platí $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.



Vlastnosti funkcí spojitých v bodě

Následující tvrzení jsou bezprostředními důsledky vlastností limity funkce:



Vlastnosti funkcí spojitých v bodě

Následující tvrzení jsou bezprostředními důsledky vlastností limity funkce:

Věta:

Funkce f definovaná na okolí bodu $a \in D_f$ je spojitá v bodě a , právě když je spojitá v bodě a zleva i zprava.



Vlastnosti funkcí spojitých v bodě

Následující tvrzení jsou bezprostředními důsledky vlastností limity funkce:

Věta:

Funkce f definovaná na okolí bodu $a \in D_f$ je spojitá v bodě a , právě když je spojitá v bodě a zleva i zprava.

Věta:

Součet a součin dvou funkcí f a g definovaných na okolí bodu a a spojitých v bodě a je funkce spojitá v bodě a . Pokud navíc $g(a) \neq 0$, pak podíl $\frac{f}{g}$ je funkce spojitá v bodě a .



Vlastnosti funkcí spojitých v bodě

Následující tvrzení jsou bezprostředními důsledky vlastností limity funkce:

Věta:

Funkce f definovaná na okolí bodu $a \in D_f$ je spojitá v bodě a , právě když je spojitá v bodě a zleva i zprava.

Věta:

Součet a součin dvou funkcí f a g definovaných na okolí bodu a a spojitých v bodě a je funkce spojitá v bodě a . Pokud navíc $g(a) \neq 0$, pak podíl $\frac{f}{g}$ je funkce spojitá v bodě a .

Věta:

Bud' g funkce definovaná na okolí bodu a a spojitá v bodě a a f funkce definovaná na okolí bodu $g(a)$ a spojitá v bodě $g(a)$. Potom složená funkce $f \circ g$ je spojitá v bodě a .

Příklad: Spojitost polynomů

Příklad.

V předchozí přednášce jsme ukázali, že pro libovolné reálné a a libovolný polynom $P(x)$ platí

$$\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a).$$

Každý polynom je proto **spojitou funkcí** v každém bodě $a \in \mathbb{R}$.



Příklad

Příklad.

Zkoumejte spojitost funkce $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$.



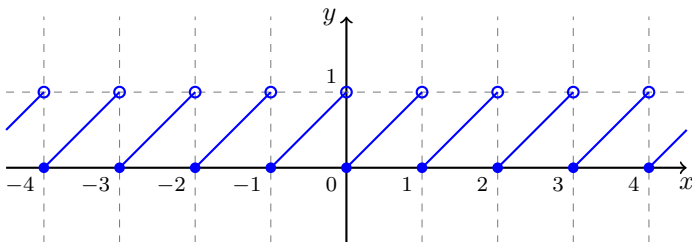
Příklad

Příklad.

Zkoumejte spojitost funkce $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$.

Přirozeným definičním oborem funkce f je $D_f = \mathbb{R}$. Funkce f je spojitá v každém bodě $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. V bodech $a \in \mathbb{Z}$ je spojitá zprava, ale ne zleva.

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = f(a) \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = f(a) + 1.$$



Spojítost na intervalu

Doposud jsme pojem spojitosti měli zaveden pouze v jednom jediném bodě. Nyní ho rozšíříme na celý interval.



Spojítost na intervalu

Doposud jsme pojem spojitosti měli zaveden pouze v jednom jediném bodě. Nyní ho rozšíříme na celý interval.

Definice (Funkce spojitá na intervalu):

Funkce f je **spojitá na intervalu** J , právě když $f|_J$ (f zúženo na J) je spojitá v každém bodě intervalu J .



Spojítost na intervalu

Doposud jsme pojem spojitosti měli zaveden pouze v jednom jediném bodě. Nyní ho rozšíříme na celý interval.

Definice (Funkce spojitá na intervalu):

Funkce f je **spojitá na intervalu** J , právě když $f|_J$ (f zúženo na J) je spojitá v každém bodě intervalu J .

Poznámka:

Speciálně tedy platí

- **spojitá na intervalu** (a, b) , právě když f je spojitá v každém bodě $x \in (a, b)$.

Spojítost na intervalu

Doposud jsme pojem spojitosti měli zaveden pouze v jednom jediném bodě. Nyní ho rozšíříme na celý interval.

Definice (Funkce spojitá na intervalu):

Funkce f je **spojitá na intervalu** J , právě když $f|_J$ (f zúženo na J) je spojitá v každém bodě intervalu J .

Poznámka:

Speciálně tedy platí

- **spojitá na intervalu** (a, b) , právě když f je spojitá v každém bodě $x \in (a, b)$.
- **spojitá na intervalu** $\langle a, b \rangle$, právě když f je spojitá v každém bodě $x \in (a, b)$ a v bodě a je spojitá zprava.

Spojitost na intervalu

Doposud jsme pojem spojitosti měli zaveden pouze v jednom jediném bodě. Nyní ho rozšíříme na celý interval.

Definice (Funkce spojitá na intervalu):

Funkce f je **spojitá na intervalu** J , právě když $f|_J$ (f zúženo na J) je spojitá v každém bodě intervalu J .

Poznámka:

Speciálně tedy platí

- **spojitá na intervalu** (a, b) , právě když f je spojitá v každém bodě $x \in (a, b)$.
- **spojitá na intervalu** $\langle a, b \rangle$, právě když f je spojitá v každém bodě $x \in (a, b)$ a v bodě a je spojitá zprava.
- **spojitá na intervalu** $(a, b]$, právě když f je spojitá v každém bodě $x \in (a, b)$ a v bodě b je spojitá zleva.

Spojítost na intervalu

Doposud jsme pojem spojitosti měli zaveden pouze v jednom jediném bodě. Nyní ho rozšíříme na celý interval.

Definice (Funkce spojitá na intervalu):

Funkce f je **spojitá na intervalu** J , právě když $f|_J$ (f zúženo na J) je spojitá v každém bodě intervalu J .

Poznámka:

Speciálně tedy platí

- **spojitá na intervalu** (a, b) , právě když f je spojitá v každém bodě $x \in (a, b)$.
- **spojitá na intervalu** $\langle a, b \rangle$, právě když f je spojitá v každém bodě $x \in (a, b)$ a v bodě a je spojitá zprava.
- **spojitá na intervalu** $(a, b]$, právě když f je spojitá v každém bodě $x \in (a, b)$ a v bodě b je spojitá zleva.
- **spojitá na intervalu** $\langle a, b \rangle$, právě když f je spojitá v každém bodě $x \in (a, b)$, v bodě a je spojitá zprava a v bodě b je spojitá zleva.

Hlavní body

- 1 Definice a kritéria spojitosti
- 2 Důsledky spojitosti
- 3 Spojitost elementárních funkcí
- 4 Důsledky



Řešení rovnic

Řadu problémů lze formulovat jako hledání řešení rovnice

$$f(x) = 0.$$

V této části ukážeme jednoduchou postačující podmínku pro existenci řešení takovéto rovnice a algoritmus hledající alespoň jedno z možných řešení.

Příklad.

Vypočítat numerickou hodnotu $\sqrt{2}$ znamená řešit rovnici

$$f(x) = x^2 - 2 = 0$$

pro neznámou x .



Řešení rovnic: metoda půlení intervalu

Věta (Metoda půlení intervalu / *bisection method*):

Nechť funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ a nechť $f(a) \cdot f(b) < 0$.
Potom existuje bod $c \in (a, b)$ takový, že $f(c) = 0$.



Řešení rovnic: metoda půlení intervalu

Věta (Metoda půlení intervalu / *bisection method*):

Nechť funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ a necht' $f(a) \cdot f(b) < 0$.
Potom existuje bod $c \in (a, b)$ takový, že $f(c) = 0$.

Položme $a_1 := a$ a $b_1 := b$. Protože znaménka $f(a_1)$ a $f(b_1)$ jsou **různá**, nastane právě jedna ze tří možností

- ❶ $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) = 0$,
- ❷ znaménka $f(a_1)$ a $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)$ jsou různá,
- ❸ znaménka $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)$ a $f(b_1)$ jsou různá.



Řešení rovnic: metoda půlení intervalu

Věta (Metoda půlení intervalu / *bisection method*):

Nechť funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ a necht' $f(a) \cdot f(b) < 0$. Potom existuje bod $c \in (a, b)$ takový, že $f(c) = 0$.

Položme $a_1 := a$ a $b_1 := b$. Protože znaménka $f(a_1)$ a $f(b_1)$ jsou **různá**, nastane právě jedna ze tří možností

- ① $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) = 0$,
- ② znaménka $f(a_1)$ a $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)$ jsou různá,
- ③ znaménka $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)$ a $f(b_1)$ jsou různá.

Dále postupujeme podle toho, která z těchto možností nastala:

- ① Hledaným bodem c je $\frac{a_1+b_1}{2}$ a věta je dokázána.
- ② Položme $a_2 := a_1$ a $b_2 := \frac{a_1+b_1}{2}$.
- ③ Položme $a_2 := \frac{a_1+b_1}{2}$ a $b_2 = b_1$.

Pokud nenastala první možnost, provedme stejnou úvahu s a_2 a b_2 místo a_1 a b_1 .



Tímto způsobem postupně konstruujeme další a_3 , b_3 , atd. Pokud v některém z kroků nastane první možnost (tj. existuje n tak, že $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) = 0$), pak je věta dokázána.



Tímto způsobem postupně konstruujeme další a_3, b_3 , atd. Pokud v některém z kroků nastane první možnost (tj. existuje n tak, že $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) = 0$), pak je věta dokázána.

V opačném případě jsme zkonstruovali posloupnosti $(a_n)_{n=1}^\infty, (b_n)_{n=1}^\infty$ splňující

$$a_n, b_n \in \langle a, b \rangle, \quad a \leq a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n \leq b, \quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}},$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$.



Tímto způsobem postupně konstruujeme další a_3, b_3 , atd. Pokud v některém z kroků nastane první možnost (tj. existuje n tak, že $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) = 0$), pak je věta dokázána.

V opačném případě jsme zkonstruovali posloupnosti $(a_n)_{n=1}^\infty, (b_n)_{n=1}^\infty$ splňující

$$a_n, b_n \in \langle a, b \rangle, \quad a \leq a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n \leq b, \quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}},$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Obě posloupnosti jsou monotónní a omezené, tudíž existují jejich konečné limity, $a_n \rightarrow \alpha$ a $b_n \rightarrow \beta$ při $n \rightarrow \infty$. Navíc

$$\beta - \alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{2^{n-1}} = 0.$$

Obě posloupnosti tedy mají stejnou limitu, označme ji $c := \alpha = \beta \in \langle a, b \rangle$.



Tímto způsobem postupně konstruujeme další a_3, b_3 , atd. Pokud v některém z kroků nastane první možnost (tj. existuje n tak, že $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) = 0$), pak je věta dokázána.

V opačném případě jsme zkonstruovali posloupnosti $(a_n)_{n=1}^\infty, (b_n)_{n=1}^\infty$ splňující

$$a_n, b_n \in \langle a, b \rangle, \quad a \leq a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n \leq b, \quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}},$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Obě posloupnosti jsou monotónní a omezené, tudíž existují jejich konečné limity, $a_n \rightarrow \alpha$ a $b_n \rightarrow \beta$ při $n \rightarrow \infty$. Navíc

$$\beta - \alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{2^{n-1}} = 0.$$

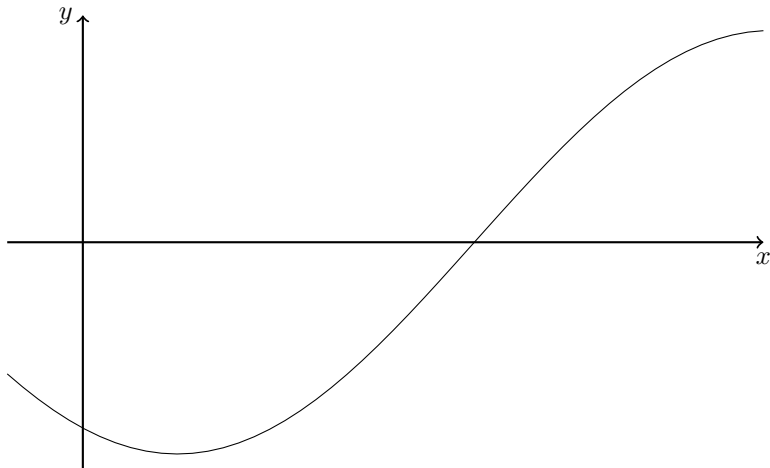
Obě posloupnosti tedy mají stejnou limitu, označme ji $c := \alpha = \beta \in \langle a, b \rangle$. Ze spojitosti funkce f v bodě c a Heineho věty nyní plyne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = f(c).$$

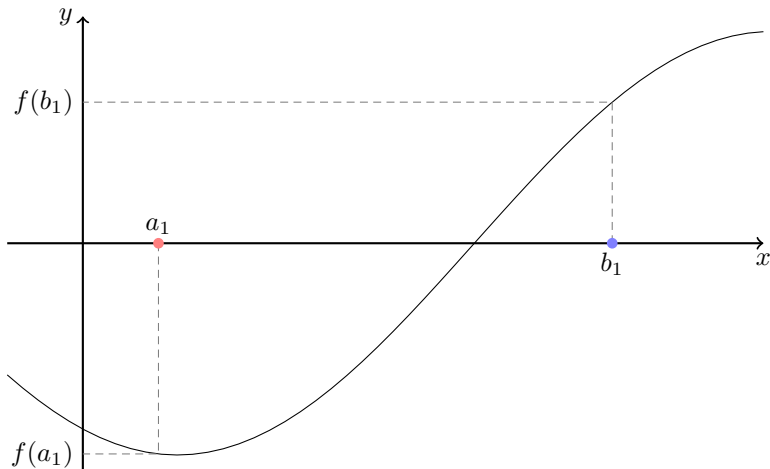
Ale protože všechny $f(a_n)$ mají různé znaménko od $f(b_n)$ mohou poslední rovnosti nastat pouze v případě že $f(c) = 0$.



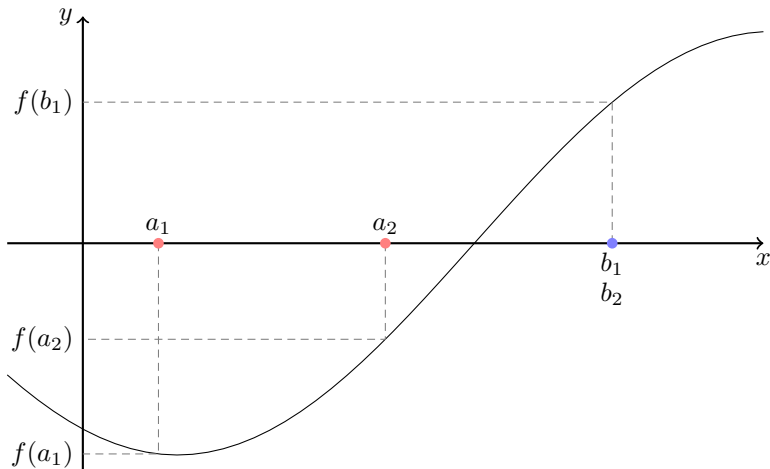
Ilustrace metody půlení intervalu



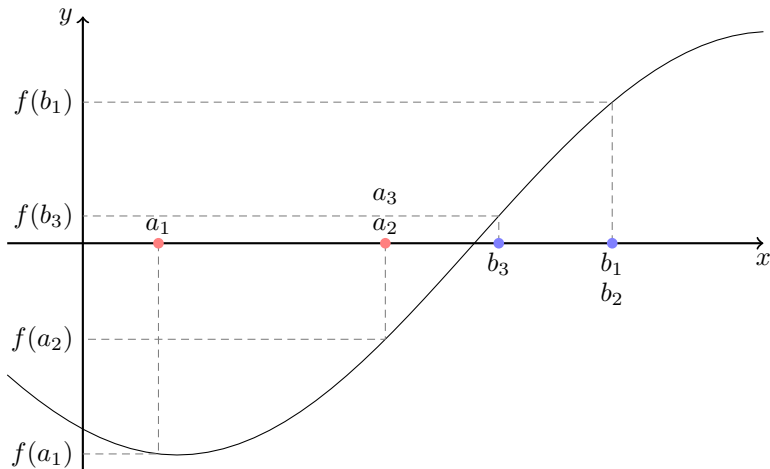
Ilustrace metody půlení intervalu



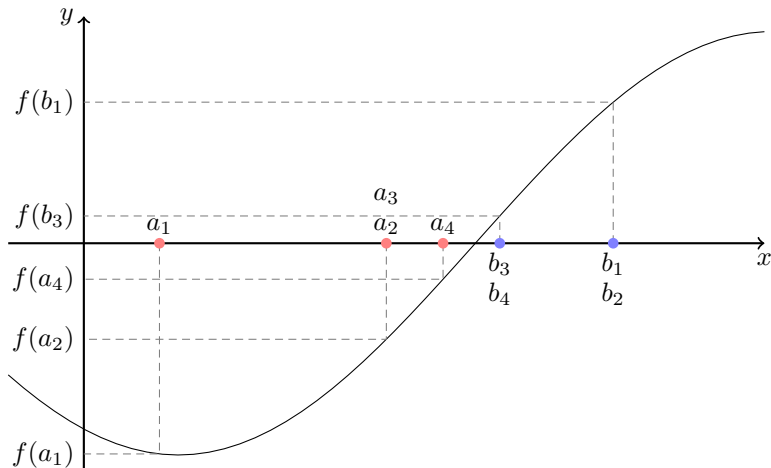
Ilustrace metody půlení intervalu



Ilustrace metody půlení intervalu



Ilustrace metody půlení intervalu



Řešení rovnic: metoda půlení intervalu

Poznámka (Komentář k důkazu):

- V důkazu jsme **využili** celou řadu výsledků z předchozích přednášek (věta o limitě monotónní posloupnosti, Heineho věta, spojitost, aj.)
- Důkaz předcházející věty se nazývá **konstruktivní**. Tvrzení věty, existenci čísla c , jsme dokázali jeho konstrukcí.
- Algoritmus použitý v důkazu se nazývá **metoda půlení intervalu** (*bisection method*) a lze ho prakticky použít k hledání řešení rovnice $f(x) = 0$.
- Algoritmus kontroluje i přesnost výpočtu, v každém kroku iterace platí nerovnosti $a_n \leq c \leq b_n$, $n = 1, 2, 3 \dots$. Víme proto kdy výpočetní smyčku ukončit.



Řešení rovnic: metoda půlení intervalu

Poznámka (Komentář k důkazu):

- V důkazu jsme **využili** celou řadu výsledků z předchozích přednášek (věta o limitě monotónní posloupnosti, Heineho věta, spojitost, aj.)
- Důkaz předcházející věty se nazývá **konstruktivní**. Tvrzení věty, existenci čísla c , jsme dokázali jeho konstrukcí.
- Algoritmus použitý v důkazu se nazývá **metoda půlení intervalu** (*bisection method*) a lze ho prakticky použít k hledání řešení rovnice $f(x) = 0$.
- Algoritmus kontroluje i přesnost výpočtu, v každém kroku iterace platí nerovnosti $a_n \leq c \leq b_n$, $n = 1, 2, 3 \dots$. Víme proto kdy výpočetní smyčku ukončit.

Důsledek:

Bud' f spojitá funkce na intervalu J a necht' platí $f(x) \neq 0$ pro všechna $x \in J$. Potom pro všechna $x \in J$ platí buď $f(x) > 0$ nebo $f(x) < 0$.

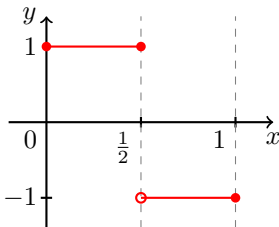
Řešení rovnic: metoda půlení intervalu

Poznámka:

Předpoklad spojitosti v předešlé větě je podstatný. Jako příklad uvažme funkci

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle, \\ -1, & x \in (\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$

na intervalu $\langle a, b \rangle = \langle 0, 1 \rangle$. Sice $f(0) \cdot f(1) = -1 < 0$, ale neexistuje bod $x \in (0, 1)$ splňující $f(x) = 0$.



Další důsledek

Následující tvrzení využijeme později v semestru při studiu extrémů funkcí.

Věta:

Bud' f funkce spojitá na intervalu J . Potom obraz $f(J)$ intervalu J je buď interval, nebo jednoprvková množina.



Další důsledek

Následující tvrzení využijeme později v semestru při studiu extrémů funkcí.

Věta:

Buď f funkce spojitá na intervalu J . Potom obraz $f(J)$ intervalu J je buď interval, nebo jednoprvková množina.

Důkaz.

$f(J)$ je jednoprvková množina právě tehdy, když funkce f je konstantní. Ve zbytku důkazu předpokládejme, že f není konstantní.

Další důsledek

Následující tvrzení využijeme později v semestru při studiu extrémů funkcí.

Věta:

Buď f funkce spojitá na intervalu J . Potom obraz $f(J)$ intervalu J je buď interval, nebo jednoprvková množina.

Důkaz.

$f(J)$ je jednoprvková množina právě tehdy, když funkce f je konstantní. Ve zbytku důkazu předpokládejme, že f není konstantní.

Ukažme, že $f(J)$ je interval. K tomu je třeba ukázat, že pro libovolné dva prvky $\alpha, \beta \in f(J)$, $\alpha \neq \beta$, leží všechna γ mezi α a β také v $f(J)$.

Další důsledek

Následující tvrzení využijeme později v semestru při studiu extrémů funkcí.

Věta:

Buď f funkce spojitá na intervalu J . Potom obraz $f(J)$ intervalu J je buď interval, nebo jednoprvková množina.

Důkaz.

$f(J)$ je jednoprvková množina právě tehdy, když funkce f je konstantní. Ve zbytku důkazu předpokládejme, že f není konstantní.

Ukažme, že $f(J)$ je interval. K tomu je třeba ukázat, že pro libovolné dva prvky $\alpha, \beta \in f(J)$, $\alpha \neq \beta$, leží všechna γ mezi α a β také v $f(J)$.

Jistě existují $a, b \in J$, $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$ a BÚNO $a < b$. Položme $g(x) := f(x) - \gamma$. Funkce g je spojitá na $\langle a, b \rangle$, $g(a) = \alpha - \gamma$ a $g(b) = \beta - \gamma$ jsou nenulová s rozdílným znaménkem. Podle věty existuje $c \in (a, b)$ takové, že $g(c) = 0$, tj. $f(c) = \gamma$. □

Spojítost inverzní funkce

Věta (O inverzní funkci):

Bud' f **ryze monotónní** a spojitá funkce na intervalu I . Potom její inverzní funkce f^{-1} je také ryze monotónní a spojitá na intervalu $J := f(I)$.



Spojítost inverzní funkce

Věta (O inverzní funkci):

Bud' f **ryze monotónní** a spojitá funkce na intervalu I . Potom její inverzní funkce f^{-1} je také ryze monotónní a spojitá na intervalu $J := f(I)$.

Důkaz.

f^{-1} existuje a je ryze monotónní. J je skutečně interval, jak tvrdí předchozí věta. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že funkce f je ostře rostoucí. Ukažme, že f^{-1} je spojitá zprava v každém bodě $b \in J$, který není pravým koncovým bodem. Ozn. $a := f^{-1}(b)$, tj. $f(a) = b$.

Spojitost inverzní funkce

Věta (O inverzní funkci):

Bud' f **ryze monotónní** a spojitá funkce na intervalu I . Potom její inverzní funkce f^{-1} je také ryze monotónní a spojitá na intervalu $J := f(I)$.

Důkaz.

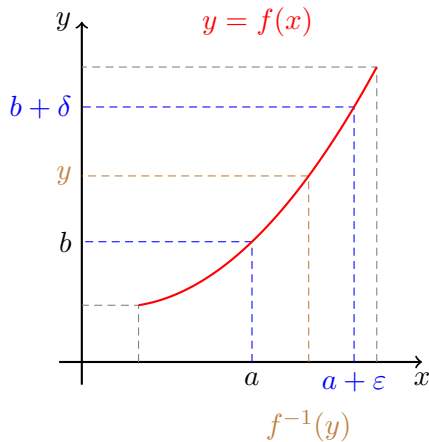
f^{-1} existuje a je ryze monotónní. J je skutečně interval, jak tvrdí předchozí věta. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že funkce f je ostře rostoucí. Ukažme, že f^{-1} je spojitá zprava v každém bodě $b \in J$, který není pravým koncovým bodem. Ozn. $a := f^{-1}(b)$, tj. $f(a) = b$.

Bud' $\varepsilon > 0$. Potom pro $\delta := f(a + \varepsilon) - b$ a $y \in (b, b + \delta)$ platí

$$\begin{aligned} b < y < b + \delta &= f(a + \varepsilon) \\ a &= f^{-1}(b) < f^{-1}(y) < a + \varepsilon. \end{aligned}$$

Tedy $f^{-1}(y) \in H_a(\varepsilon)$, $a = f^{-1}(b)$. Podobně pro spojitost zleva. □

Spojitost inverzní funkce



Hlavní body

- 1 Definice a kritéria spojitosti
- 2 Důsledky spojitosti
- 3 **Spojitost elementárních funkcí**
- 4 Důsledky



Příklad.

Funkce $\sin$ a $\cos$ jsou **spojité** v každém bodě $a \in \mathbb{R}$.



Příklad.

Funkce $\sin$ a $\cos$ jsou **spojité** v každém bodě $a \in \mathbb{R}$.

Připomeňme známé, v minulé přednášce vypočtené, limity

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1.$$



Příklad.

Funkce $\sin$ a $\cos$ jsou **spojité** v každém bodě $a \in \mathbb{R}$.

Připomeňme známé, v minulé přednášce vypočtené, limity

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1.$$

Podle součtového vzorce pro funkci $\sin$ platí

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin((x - a) + a) \\ &= \sin(x - a) \cos(a) + \cos(x - a) \sin(a) \end{aligned}$$



Příklad.

Funkce $\sin$ a $\cos$ jsou **spojité** v každém bodě $a \in \mathbb{R}$.

Připomeňme známé, v minulé přednášce vypočtené, limity

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1.$$

Podle součtového vzorce pro funkci $\sin$ platí

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin((x - a) + a) \\ &= \sin(x - a) \cos(a) + \cos(x - a) \sin(a) \end{aligned}$$

Tudíž podle věty o limitě složené funkce a součinu/součtu limit platí

$$\lim_{x \rightarrow a} \sin x = 0 \cdot \cos(a) + 1 \cdot \sin a = \sin a.$$

Což ukazuje spojitost funkce $\sin$. Spojitost funkce $\cos$ se ukáže analogicky.



Příklad.

Funkce $\sin$ a $\cos$ jsou **spojité** v každém bodě $a \in \mathbb{R}$.

Připomeňme známé, v minulé přednášce vypočtené, limity

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1.$$

Podle součtového vzorce pro funkci $\sin$ platí

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin((x - a) + a) \\ &= \sin(x - a) \cos(a) + \cos(x - a) \sin(a) \end{aligned}$$

Tudíž podle věty o limitě složené funkce a součinu/součtu limit platí

$$\lim_{x \rightarrow a} \sin x = 0 \cdot \cos(a) + 1 \cdot \sin a = \sin a.$$

Což ukazuje spojitost funkce $\sin$. Spojitost funkce $\cos$ se ukáže analogicky.

Důsledek:

Z tohoto příkladu a z věty o spojitosti podílu dvou funkcí ihned plyne, že funkce tg a cotg jsou **spojité** v každém bodě svého definičního oboru.

Příklad.

Funkce e^x je **spojitá** v každém bodě $a \in \mathbb{R}$



Příklad.

Funkce e^x je **spojitá** v každém bodě $a \in \mathbb{R}$

Nejprve dokažme, že exponenciála je spojitá v bodě 0.



Příklad.

Funkce e^x je **spojitá** v každém bodě $a \in \mathbb{R}$

Nejprve dokažme, že exponenciála je spojitá v bodě 0. Pro každé přirozené n a $x \in (-1, 1)$ platí nerovnost

$$\left| \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} - 1 \right| = \left| \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq \sum_{k=1}^n \frac{|x|^k}{k!} \leq |x| \sum_{k=1}^n \frac{|x|^{k-1}}{2^{k-1}} \leq \frac{|x|}{1 - |x|/2} \leq 2|x|.$$

Při odhadech jsme využili nerovnost $k! \geq 2^{k-1}$ platnou pro každé $k \in \mathbb{N}$ a nerovnost

$$\frac{1}{1 - |x|/2} \leq \frac{1}{1 - 1/2} = 2$$

platnou pro každé $x \in (-1, 1)$.



Příklad.

Funkce e^x je **spojitá** v každém bodě $a \in \mathbb{R}$

Nejprve dokažme, že exponenciála je spojitá v bodě 0. Pro každé přirozené n a $x \in (-1, 1)$ platí nerovnost

$$\left| \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} - 1 \right| = \left| \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq \sum_{k=1}^n \frac{|x|^k}{k!} \leq |x| \sum_{k=1}^n \frac{|x|^{k-1}}{2^{k-1}} \leq \frac{|x|}{1 - |x|/2} \leq 2|x|.$$

Při odhadech jsme využili nerovnost $k! \geq 2^{k-1}$ platnou pro každé $k \in \mathbb{N}$ a nerovnost

$$\frac{1}{1 - |x|/2} \leq \frac{1}{1 - 1/2} = 2$$

platnou pro každé $x \in (-1, 1)$. Dle věty o nerovnosti mezi limitami posloupností dostáváme nyní nerovnost

$$0 \leq |e^x - 1| \leq 2|x|$$

platnou pro každé $x \in (-1, 1)$.



Příklad.

Funkce e^x je **spojitá** v každém bodě $a \in \mathbb{R}$

Nejprve dokažme, že exponenciála je spojitá v bodě 0. Pro každé přirozené n a $x \in (-1, 1)$ platí nerovnost

$$\left| \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} - 1 \right| = \left| \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq \sum_{k=1}^n \frac{|x|^k}{k!} \leq |x| \sum_{k=1}^n \frac{|x|^{k-1}}{2^{k-1}} \leq \frac{|x|}{1 - |x|/2} \leq 2|x|.$$

Při odhadech jsme využili nerovnost $k! \geq 2^{k-1}$ platnou pro každé $k \in \mathbb{N}$ a nerovnost

$$\frac{1}{1 - |x|/2} \leq \frac{1}{1 - 1/2} = 2$$

platnou pro každé $x \in (-1, 1)$. Dle věty o nerovnosti mezi limitami posloupností dostáváme nyní nerovnost

$$0 \leq |e^x - 1| \leq 2|x|$$

platnou pro každé $x \in (-1, 1)$. Věta o limitě sevřené funkce nyní implikuje

$$\lim_{x \rightarrow 0} |e^x - 1| = 0$$

a tedy i $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$.



Pokračování příkladu. . .

Z předchozích úvah, z bodu ii) věty o základních vlastnostech exponenciály a z věty o limitě složené funkce nyní plyne spojitost exponenciální funkce v libovolném bodě $a \in \mathbb{R}$. Skutečně, platí

$$\lim_{x \rightarrow a} e^x = \lim_{x \rightarrow a} e^{a+x-a} = e^a \lim_{x \rightarrow a} e^{x-a} = e^a \cdot 1 = e^a.$$



Příklad

Příklad.

Funkce $\ln$ je **spojitá** v každém bodě $a \in \mathbb{R}^+$.



Příklad

Příklad.

Funkce $\ln$ je **spojitá** v každém bodě $a \in \mathbb{R}^+$.

Již víme, že exponenciála je spojitá funkce v každém bodě svého definičního oboru. Navíc víme, že je ostře rostoucí (tedy i ryze monotonní).



Příklad

Příklad.

Funkce $\ln$ je **spojitá** v každém bodě $a \in \mathbb{R}^+$.

Již víme, že exponenciála je spojitá funkce v každém bodě svého definičního oboru. Navíc víme, že je ostře rostoucí (tedy i ryze monotonní).

Z věty O inverzní funkci ihned plyne spojitost logaritmu $\ln$ v libovolném bodě svého definičního oboru.



Příklad

Příklad.

Funkce $\ln$ je **spojitá** v každém bodě $a \in \mathbb{R}^+$.

Již víme, že exponenciála je spojitá funkce v každém bodě svého definičního oboru. Navíc víme, že je ostře rostoucí (tedy i ryze monotonní).

Z věty O inverzní funkci ihned plyne spojitost logaritmu $\ln$ v libovolném bodě svého definičního oboru.

Platí tedy

$$\lim_{x \rightarrow a} \ln x = \ln a,$$

pro každé $a \in (0, +\infty)$. Navíc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty.$$



Příklad

Příklad.

Protože už víme, že funkce $\sin$, $\cos$, tg a cotg jsou spojité na svých definičních oborech, a vhodně zúžené jsou i ryze monotónní, ihned odtud dostáváme spojitost inverzních funkcí

$$\arcsin = \left(\sin \Big|_{\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle} \right)^{-1},$$

$$\arccos = \left(\cos \Big|_{\langle 0, \pi \rangle} \right)^{-1},$$

$$\operatorname{arctg} = \left(\operatorname{tg} \Big|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} \right)^{-1},$$

$$\operatorname{arccotg} = \left(\operatorname{cotg} \Big|_{(0, \pi)} \right)^{-1}.$$



Spojítost $\sqrt[k]{x}$ a $|x|$

- Ze známých limit posloupností a Heineho věty okamžitě plyne spojitost odmocnin a absolutní hodnoty. Víme, že platí

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[k]{x} = \sqrt[k]{a} \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow 0_+} \sqrt[k]{x} = 0$$

pro $a > 0$ a $k = 2, 3, \dots$, a tedy $\sqrt[k]{x}$ je spojitá na intervalu $\langle 0, +\infty \rangle$.



Spojitost $\sqrt[k]{x}$ a $|x|$

- Ze známých limit posloupností a Heineho věty okamžitě plyne spojitost odmocnin a absolutní hodnoty. Víme, že platí

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[k]{x} = \sqrt[k]{a} \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow 0_+} \sqrt[k]{x} = 0$$

pro $a > 0$ a $k = 2, 3, \dots$, a tedy $\sqrt[k]{x}$ je spojitá na intervalu $\langle 0, +\infty \rangle$.

- Obdobně, protože

$$\lim_{x \rightarrow a} |x| = |a|$$

pro $a \in \mathbb{R}$, platí, že $|x|$ je spojitá na $\mathbb{R}$.



Hlavní body

- 1 Definice a kritéria spojitosti
- 2 Důsledky spojitosti
- 3 Spojítost elementárních funkcí
- 4 Důsledky**



Nyní odvodíme několik tvrzení, která využijeme hned v následující přednášce.

Lemma:

Platí

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$



Nyní odvodíme několik tvrzení, která využijeme hned v následující přednášce.

Lemma:

Platí

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Uvažme $x \in (-1, 1)$, $x \neq 0$, a $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Potom

$$\frac{\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} - 1}{x} - 1 = \frac{\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!}}{x} - 1 = \sum_{k=1}^n \frac{x^{k-1}}{k!} - 1 = x \sum_{k=2}^n \frac{x^{k-2}}{k!}.$$



Nyní odvodíme několik tvrzení, která využijeme hned v následující přednášce.

Lemma:

Platí

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Uvažme $x \in (-1, 1)$, $x \neq 0$, a $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Potom

$$\frac{\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} - 1}{x} - 1 = \frac{\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!}}{x} - 1 = \sum_{k=1}^n \frac{x^{k-1}}{k!} - 1 = x \sum_{k=2}^n \frac{x^{k-2}}{k!}.$$

Za stejných předpokladů z těchto rovností plyne odhad

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \frac{\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} - 1}{x} - 1 \right| \leq |x| \sum_{k=2}^n \frac{|x|^{k-2}}{k!} \leq |x| \sum_{k=2}^n \frac{|x|^{k-2}}{2^{k-1}} = \\ &= \frac{|x|}{2} \sum_{k=2}^n \left(\frac{|x|}{2} \right)^{k-2} \leq \frac{|x|}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{|x|}{2} \right)^{k-2} = \frac{|x|}{2} \frac{1}{1 - |x|/2} \leq \frac{|x|}{2} \frac{1}{1 - 1/2} = |x|. \end{aligned}$$



Odtud ihned plyne nerovnost

$$0 \leq \left| \frac{e^x - 1}{x} - 1 \right| \leq |x|$$

pro každé $x \in (-1, 1)$, $x \neq 0$.



Odtud ihned plyne nerovnost

$$0 \leq \left| \frac{e^x - 1}{x} - 1 \right| \leq |x|$$

pro každé $x \in (-1, 1)$, $x \neq 0$. Konečně věta o limitě sevřené funkce implikuje

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{e^x - 1}{x} - 1 \right| = 0.$$



Odtud ihned plyne nerovnost

$$0 \leq \left| \frac{e^x - 1}{x} - 1 \right| \leq |x|$$

pro každé $x \in (-1, 1)$, $x \neq 0$. Konečně věta o limitě sevřené funkce implikuje

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{e^x - 1}{x} - 1 \right| = 0.$$

Celkem tedy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$



Lemma:

Platí

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$



Lemma:

Platí

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

Důkaz.

Nejprve zkoumaný výraz vhodně upravme,

$$\frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{\ln(x+1)}{x+1-1} = \frac{1}{\frac{e^{\ln(x+1)}-1}{\ln(x+1)}}.$$

Ze spojitosti logaritmu víme, že $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x+1) = 0$. Věta o limitě složené funkce a předcházející lemma dávají kýžený výsledek. □



Lemma:

Platí

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$



Lemma:

Platí

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Důkaz.

Opět zkoumaný výraz nejprve upravme (v podstatě podle definice obecné mocniny), $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$.

Lemma:

Platí

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Důkaz.

Opět zkoumaný výraz nejprve upravme (v podstatě podle definice obecné mocniny), $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$.

Díky spojitosti exponenciály stačí zkoumat limitu jejího argumentu. Pro ten však platí $x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$.

Lemma:

Platí

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Důkaz.

Opět zkoumaný výraz nejprve upravme (v podstatě podle definice obecné mocniny), $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$.

Díky spojitosti exponenciály stačí zkoumat limitu jejího argumentu. Pro ten však platí $x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$.

O funkci $\frac{1}{x}$ víme, že má limitu v $+\infty$ i v $-\infty$ rovnou 0. Z předchozího lemmatu a věty o limitě složené funkce pak ihned dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1 \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1.$$

Tudíž

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^1 = e \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^1 = e. \quad \square$$

Důsledek:

Pro libovolnou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ splňující $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = +\infty$ platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

Speciálně platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$



Důsledek:

Pro libovolnou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ splňující $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = +\infty$ platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

Speciálně platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$

Důkaz: V důsledku předchozího lemmatu a Heineho věty dostáváme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{|a_n|}\right)^{|a_n|} = e \quad \text{a} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{-|a_n|}\right)^{-|a_n|} = e.$$



Důsledek:

Pro libovolnou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ splňující $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = +\infty$ platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

Speciálně platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

Důkaz: V důsledku předchozího lemmatu a Heineho věty dostáváme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{|a_n|}\right)^{|a_n|} = e \quad \text{a} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{-|a_n|}\right)^{-|a_n|} = e.$$

Vezměme nyní libovolné $\varepsilon > 0$. Z platnosti předchozích limit plyne existence $m_0 \in \mathbb{N}$ a $k_0 \in \mathbb{N}$ takových, že pro každé $n > m_0$ platí

$$\left| \left(1 + \frac{1}{|a_n|}\right)^{|a_n|} - e \right| < \varepsilon$$



a pro každé $n > k_0$ platí

$$\left| \left(1 + \frac{1}{-|a_n|} \right)^{-|a_n|} - e \right| < \varepsilon.$$



a pro každé $n > k_0$ platí

$$\left| \left(1 + \frac{1}{-|a_n|} \right)^{-|a_n|} - e \right| < \varepsilon.$$

Položme $n_0 = \max(m_0, k_0)$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $a_n = |a_n|$ nebo $a_n = -|a_n|$.



a pro každé $n > k_0$ platí

$$\left| \left(1 + \frac{1}{-|a_n|} \right)^{-|a_n|} - e \right| < \varepsilon.$$

Položme $n_0 = \max(m_0, k_0)$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $a_n = |a_n|$ nebo $a_n = -|a_n|$.

Tudíž pro každé $n > n_0$ dostáváme

$$\left| \left(1 + \frac{1}{a_n} \right)^{a_n} - e \right| < \varepsilon,$$

čímž je platnost limity dokázána z definice.

