Základy matematické analýzy

Derivace funkce

Jitka Hrabáková[1], Tomáš Kalvoda[2], Ivo Petr[3]

[1]jitka.hrabakova@fit.cvut.cz [2]tomas.kalvoda@fit.cvut.cz, [3]ivo.petr@fit.cvut.cz,

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze

4. září 2019
ZS 2018/2019

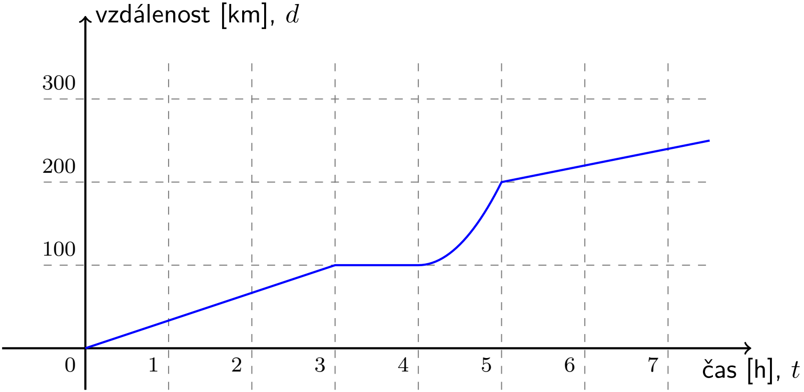
Hlavní body

1. Rychlost a hledání tečny
2. Derivace funkce
3. Vlastnosti derivace
4. Derivace elementárních funkcí: přehled a příklady
5. Další poznámky

Hlavní body

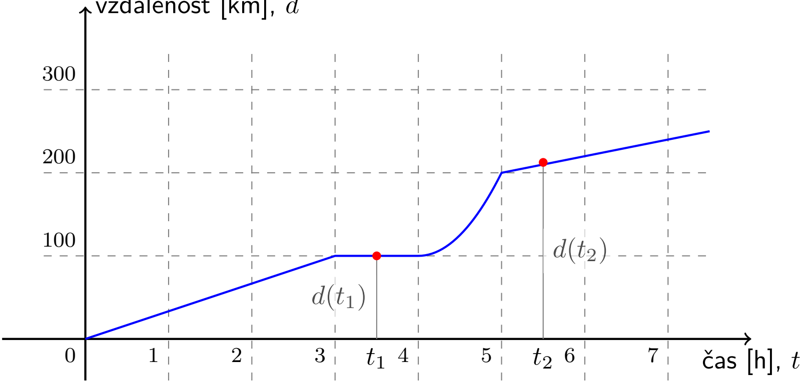
1. Rychlost a hledání tečny
2. Derivace funkce
3. Vlastnosti derivace
4. Derivace elementárních funkcí: přehled a příklady
5. Další poznámky

Rychlost



- Tento graf zachycuje vzdálenost uraženou tělesem (např. vozidlem) v závislosti na čase. Uražená vzdálenost tělesa d je tedy **funkcí** času t.

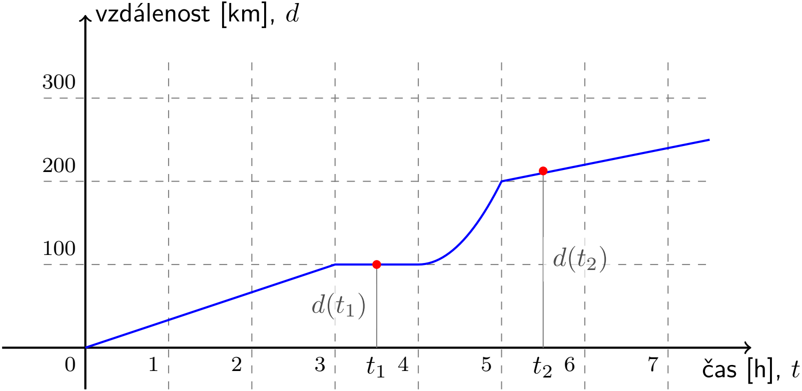
Rychlost



- Průměrná rychlost tělesa mezi okamžiky $t_1 < t_2$ je dána podílem

$$\frac{d(t_2) - d(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

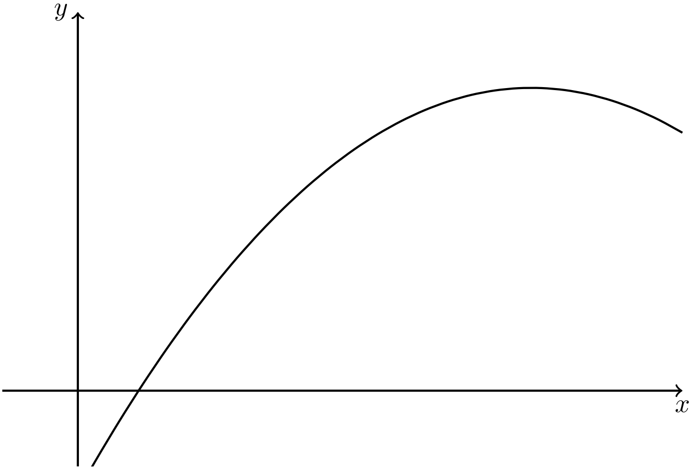
Rychlost



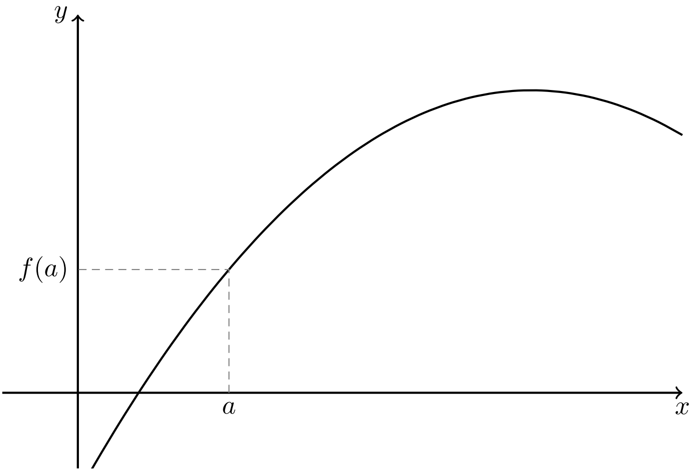
- Čím jsou t_1 a t_2 navzájem blíže, tím lépe průměrná rychlost odpovídá okamžité rychlosti vozidla. V čase t_1 se tedy těleso pohybuje okamžitou rychlostí

$$\lim_{t_2 \to t_1} \frac{d(t_2) - d(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

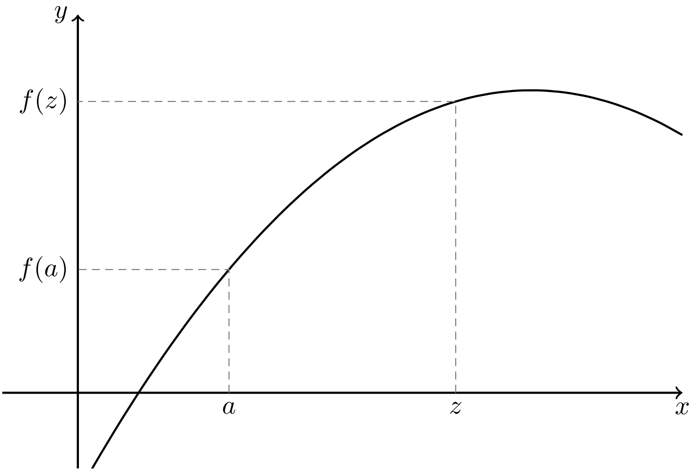
Tečna ke grafu funkce



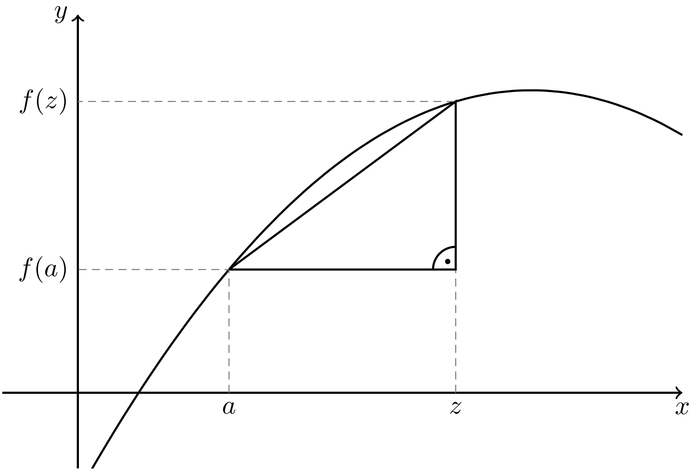
Tečna ke grafu funkce



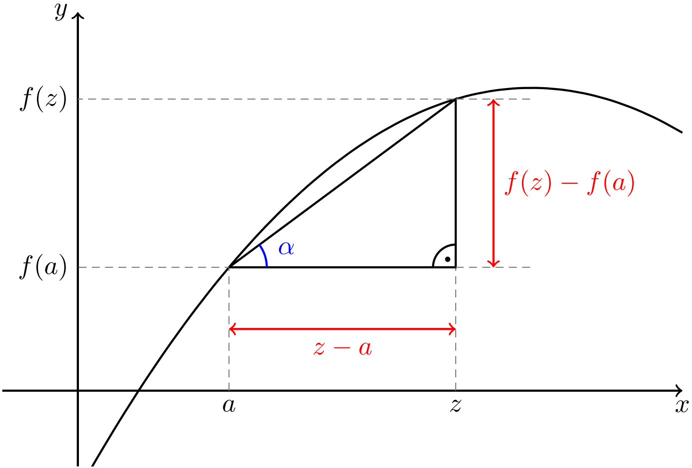
Tečna ke grafu funkce



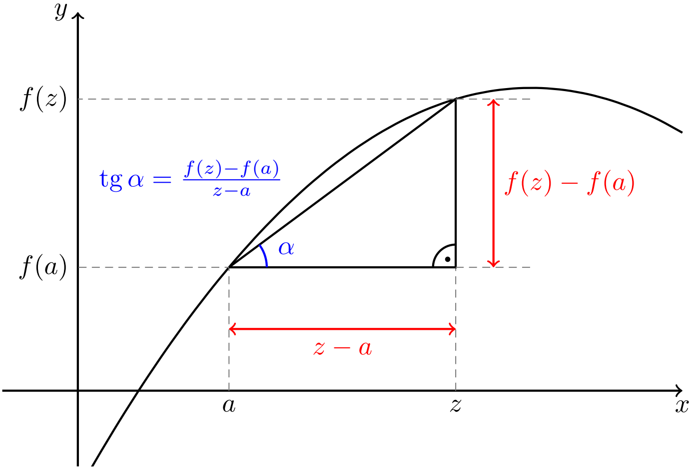
Tečna ke grafu funkce



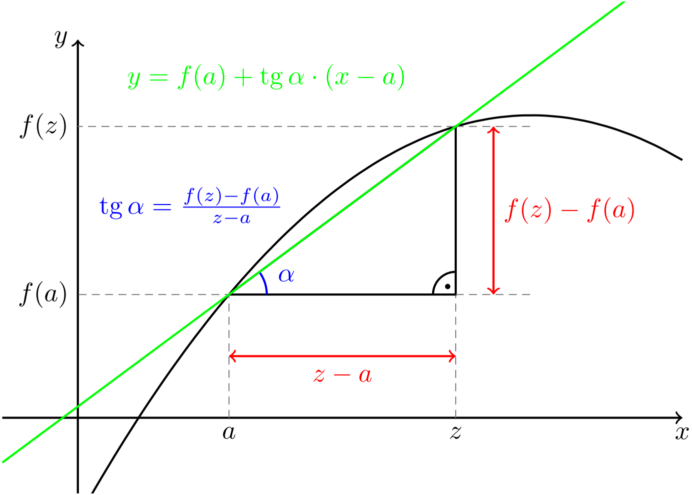
Tečna ke grafu funkce



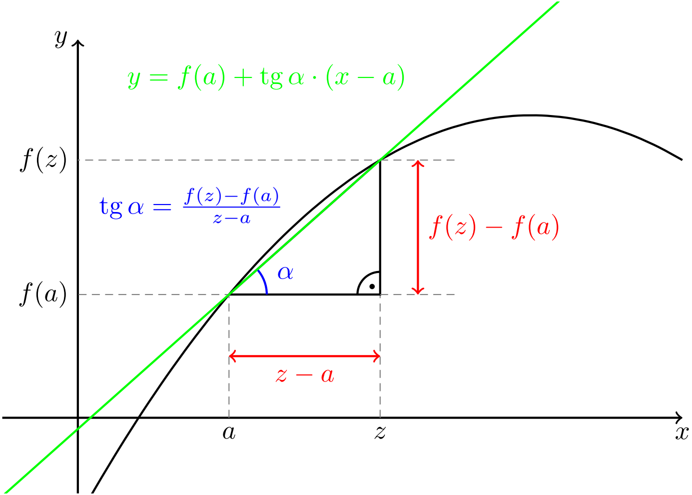
Tečna ke grafu funkce



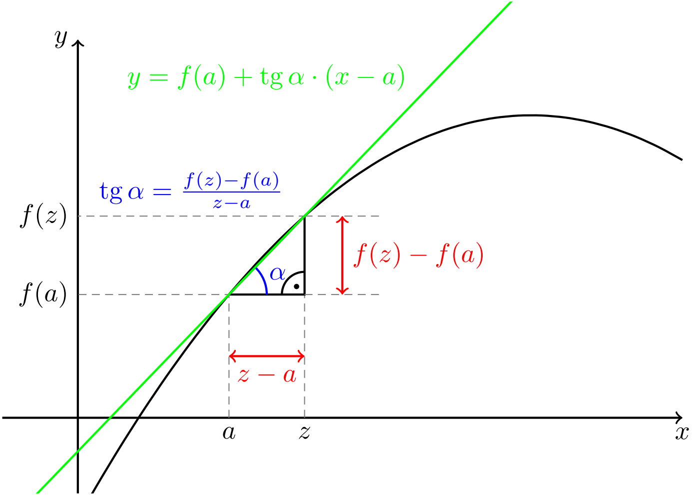
Tečna ke grafu funkce



Tečna ke grafu funkce



Tečna ke grafu funkce



Hlavní body

1 Rychlost a hledání tečny

2 Derivace funkce

3 Vlastnosti derivace

4 Derivace elementárních funkcí: přehled a příklady

5 Další poznámky

Definice derivace funkce

Definice (derivace / *derivative*):

Nechť f je funkce definovaná na okolí bodu $a \in \mathbb{R}$. Pokud existuje limita

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

nazveme její hodnotu **derivací funkce** f **v bodě** a a označíme $f'(a)$. Pokud je tato konečná (tj. $f'(a) \in \mathbb{R}$) řekneme, že funkce f je **diferencovatelná v bodě** a.

Definice derivace funkce

Definice (derivace / *derivative*):

Nechť f je funkce definovaná na okolí bodu $a \in \mathbb{R}$. Pokud existuje limita

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

nazveme její hodnotu **derivací funkce** f **v bodě** a a označíme $f'(a)$. Pokud je tato konečná (tj. $f'(a) \in \mathbb{R}$) řekneme, že funkce f je **diferencovatelná v bodě** a.

Definice:

Buď f funkce s definičním oborem D_f. Nechť M označuje množinu všech $x \in D_f$ takových, že existuje konečná derivace $f'(x)$. **Derivací funkce** f nazýváme funkci s definičním oborem M, která každému $x \in M$ přiřadí $f'(x)$. Tuto funkci značíme symbolem f'.

Definice derivace funkce

Poznámka:

Derivace funkce f v bodě a se z různých historických důvodů značí i následujícími ekvivalentními způsoby

$$f'(a), \quad \dot{f}(a), \quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a).$$

Definice derivace funkce

Poznámka:

Derivace funkce f v bodě a se z různých historických důvodů značí i následujícími ekvivalentními způsoby

$$f'(a), \quad \dot{f}(a), \quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a).$$

Poznámka:

Limitu v definici derivace lze ekvivalentně přepsat do tvaru, který je někdy výhodnější pro výpočty,

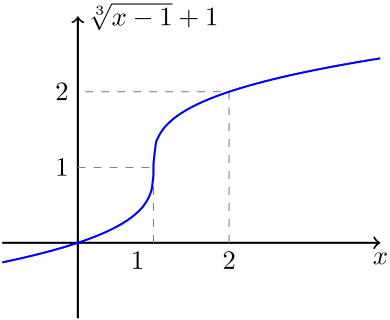
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Tečna ke grafu funkce

Definice (tečna / *tangent*):

Nechť existuje $f'(a)$. **Tečnou funkce f v bodě a** nazýváme

1. přímku s rovnicí $x = a$ je-li funkce f spojitá v bodě a a $f'(a) = +\infty$ nebo $f'(a) = -\infty$.
2. přímku s rovnicí $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ je-li $f'(a) \in \mathbb{R}$.

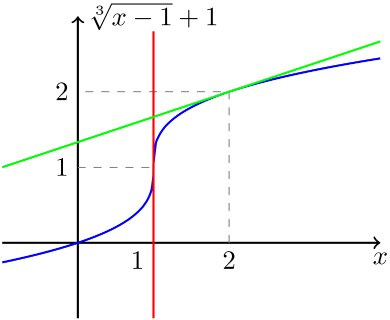


Tečna ke grafu funkce

Definice (tečna / *tangent*):

Nechť existuje $f'(a)$. **Tečnou funkce f v bodě a** nazýváme

1. přímku s rovnicí $x = a$ je-li funkce f spojitá v bodě a a $f'(a) = +\infty$ nebo $f'(a) = -\infty$.
2. přímku s rovnicí $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ je-li $f'(a) \in \mathbb{R}$.



Derivace funkce: příklady

Příklad.

Derivace konstantní funkce je rovna 0 v každém bodě.

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Derivace konstantní funkce je rovna 0 v každém bodě.

Je-li $f(x) = c \in \mathbb{R}$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, pak

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{c - c}{x - a} = \lim_{x \to a} 0 = 0$$

pro každé $a \in \mathbb{R}$.

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Pro derivaci funkce $f(x) = e^x$ platí $f'(x) = e^x$. Pro každé $a \in \mathbb{R}$ platí

$$\lim_{x \to a} \frac{e^x - e^a}{x - a} = e^a.$$

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Pro derivaci funkce $f(x) = e^x$ platí $f'(x) = e^x$. Pro každé $a \in \mathbb{R}$ platí

$$\lim_{x \to a} \frac{e^x - e^a}{x - a} = e^a.$$

V minulé přednášce jsme odvodili vztah

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Pro derivaci funkce $f(x) = e^x$ platí $f'(x) = e^x$. Pro každé $a \in \mathbb{R}$ platí

$$\lim_{x \to a} \frac{e^x - e^a}{x - a} = e^a.$$

V minulé přednášce jsme odvodili vztah

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Podle věty o limitě složené funkce a o limitě součinu funkcí platí

$$\lim_{x \to a} \frac{e^x - e^a}{x - a} = \lim_{x \to a} e^a \cdot \frac{e^{x-a} - 1}{x - a} = e^a \cdot 1 = e^a.$$

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Pro derivaci funkce $f(x) = \ln x$ platí $f'(x) = \frac{1}{x}$, $x \in D_f = (0, +\infty)$. Pro každé kladné $a \in (0, +\infty)$ platí

$$\lim_{x \to a} \frac{\ln(x) - \ln(a)}{x - a} = \frac{1}{a}.$$

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Pro derivaci funkce $f(x) = \ln x$ platí $f'(x) = \frac{1}{x}$, $x \in D_f = (0, +\infty)$. Pro každé kladné $a \in (0, +\infty)$ platí

$$\lim_{x \to a} \frac{\ln(x) - \ln(a)}{x - a} = \frac{1}{a}.$$

V minulé přednášce jsme odvodili vztah

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1.$$

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Pro derivaci funkce $f(x) = \ln x$ platí $f'(x) = \frac{1}{x}$, $x \in D_f = (0, +\infty)$. Pro každé kladné $a \in (0, +\infty)$ platí

$$\lim_{x \to a} \frac{\ln(x) - \ln(a)}{x - a} = \frac{1}{a}.$$

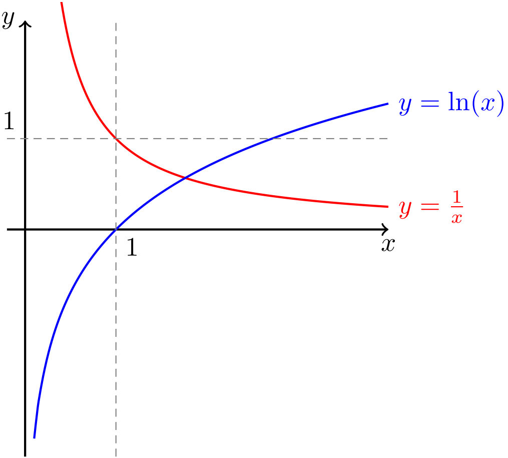
V minulé přednášce jsme odvodili vztah

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1.$$

Podobně jako v předchozím příkladu nyní

$$\lim_{x \to a} \frac{\ln(x) - \ln(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\ln \frac{x}{a}}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\ln \left(1 + \frac{x}{a} - 1\right)}{a\left(\frac{x}{a} - 1\right)} = \frac{1}{a} \cdot 1 = \frac{1}{a}.$$

Grafy funkcí $f(x) = \ln(x)$ a $g(x) = \frac{1}{x}$ pro $x > 0$.



Derivace funkce: příklady

Příklad.

Pro derivaci funkce $f(x) = x^n$ platí $f'(x) = nx^{n-1}$, kde $n \in \mathbb{N}$ a $x \in D_f$. Platí totiž

$$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}.$$

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Pro derivaci funkce $f(x) = x^n$ platí $f'(x) = nx^{n-1}$, kde $n \in \mathbb{N}$ a $x \in D_f$. Platí totiž

$$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}.$$

Nejprve vhodně upravme zkoumaný výraz,

$$\begin{aligned} \frac{x^n - a^n}{x - a} &= \frac{1}{x-a} \cdot (x-a)\big(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1}\big) \\ &= \underbrace{x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1}}_{n \text{ členů}}. \end{aligned}$$

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Pro derivaci funkce $f(x) = x^n$ platí $f'(x) = nx^{n-1}$, kde $n \in \mathbb{N}$ a $x \in D_f$. Platí totiž

$$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}.$$

Nejprve vhodně upravme zkoumaný výraz,

$$\begin{aligned} \frac{x^n - a^n}{x - a} &= \frac{1}{x-a} \cdot (x-a)\big(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1}\big) \\ &= \underbrace{x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1}}_{n \text{ členů}}. \end{aligned}$$

Tudíž

$$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}.$$

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Derivace funkce $\sin x$ je funkce $\cos x$ a derivace funkce $\cos x$ je funkce $-\sin x$.

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Derivace funkce $\sin x$ je funkce $\cos x$ a derivace funkce $\cos x$ je funkce $-\sin x$.

Pomocí součtového vzorce pro $\sin$ dostáváme

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{\sin(x)-\sin(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a}\frac{\sin(x-a+a)-\sin(a)}{x-a} = \\ &= \lim_{x\to a}\frac{\sin(x-a)\cos(a)+\cos(x-a)\sin(a)-\sin(a)}{x-a} = \\ &= \cos(a)\lim_{x\to a}\frac{\sin(x-a)}{x-a}+\sin(a)\lim_{x\to a}\frac{\cos(x-a)-1}{x-a} = \\ &= \cos(a)\cdot 1+\sin(a)\cdot 0 = \cos(a).\end{aligned}$$

Využili jsme znalosti již spočtených limit a věty o limitě složené funkce.

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Derivace funkce $\sin x$ je funkce $\cos x$ a derivace funkce $\cos x$ je funkce $-\sin x$.

Pomocí součtového vzorce pro $\sin$ dostáváme

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{\sin(x)-\sin(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a}\frac{\sin(x-a+a)-\sin(a)}{x-a} = \\ &= \lim_{x\to a}\frac{\sin(x-a)\cos(a)+\cos(x-a)\sin(a)-\sin(a)}{x-a} = \\ &= \cos(a)\lim_{x\to a}\frac{\sin(x-a)}{x-a} + \sin(a)\lim_{x\to a}\frac{\cos(x-a)-1}{x-a} = \\ &= \cos(a)\cdot 1 + \sin(a)\cdot 0 = \cos(a).\end{aligned}$$

Využili jsme znalosti již spočtených limit a věty o limitě složené funkce. Podobným způsobem můžeme odvodit

$$\lim_{x\to a}\frac{\cos(x)-\cos(a)}{x-a} = -\sin(a),$$

pro každé $a \in \mathbb{R}$.

Derivace funkce: příklady

Poznámka:

Ve výpočtu výše jsme použili znalost limity

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

a jejího důsledku

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cos^2 h - 1}{h} \cdot \frac{1}{\cos h + 1} =$$
$$= -\lim_{h \to 0} \frac{\sin^2 h}{h^2} \cdot \frac{h}{\cos h + 1} = -1 \cdot \frac{0}{1+1} = 0.$$

Hlavní body

1 Rychlost a hledání tečny

2 Derivace funkce

3 Vlastnosti derivace

4 Derivace elementárních funkcí: přehled a příklady

5 Další poznámky

Vztah spojitosti a diferencovatelnosti

Věta:

Je-li f funkce diferencovatelná v bodě a, pak je spojitá v bodě a. Tj. platí

$$f'(a) \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Vztah spojitosti a diferencovatelnosti

Věta:

Je-li f funkce diferencovatelná v bodě a, pak je spojitá v bodě a. Tj. platí

$$f'(a) \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Důkaz.

Elementární úpravou a použitím věty o limitě součinu

$$\begin{aligned}\lim_{x \to a} \big(f(x) - f(a)\big) &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) = \\ &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \to a} (x - a) = f'(a) \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

Tedy $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Poznamenejme, že „diferencovatelnost“ znamená $f'(a) \in \mathbb{R}$ a výraz na konci výpočtu proto má smysl. $\square$

Vztah spojitosti a diferencovatelnosti

Poznámka:

- Obrácené tvrzení neplatí. Přesněji, ze spojitosti funkce f v bodě a neplyne její diferencovatelnost v bodě a.

  Jako příklad lze uvážit funkci $f(x) = |x|$ a bod $a = 0$.

Vztah spojitosti a diferencovatelnosti

Poznámka:

- Obrácené tvrzení neplatí. Přesněji, ze spojitosti funkce f v bodě a neplyne její diferencovatelnost v bodě a.

  Jako příklad lze uvážit funkci $f(x) = |x|$ a bod $a = 0$.

- Dokonce, existují funkce **spojité** na celém $\mathbb{R}$ **nemající derivaci** ani v jednom bodě. Např.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{10^n \cdot x\}}{10^n},$$

  kde $\{x\}$ značí vzdálenost reálného čísla x od nejbližšího celého čísla.

Vztah spojitosti a diferencovatelnosti

Poznámka:

- Obrácené tvrzení neplatí. Přesněji, ze spojitosti funkce f v bodě a neplyne její diferencovatelnost v bodě a.

  Jako příklad lze uvážit funkci $f(x) = |x|$ a bod $a = 0$.

- Dokonce, existují funkce **spojité** na celém $\mathbb{R}$ **nemající derivaci** ani v jednom bodě. Např.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{10^n \cdot x\}}{10^n},$$

  kde $\{x\}$ značí vzdálenost reálného čísla x od nejbližšího celého čísla. Protože $0 \leq \{x\} < 1$ konverguje řada absolutně pro každé x. Definičním oborem funkce f je proto celá reálná osa $D_f = \mathbb{R}$. Ukázat spojitost a diferencovatelnost je však už složitější.

Nástroje pro výpočet derivací

Věta (Derivace součtu, součinu a podílu):

Nechť funkce f a g jsou diferencovatelné v bodě a. Potom platí

- $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,
- $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$,
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$, pokud $g(a) \neq 0$.

Nástroje pro výpočet derivací

Věta (Derivace součtu, součinu a podílu):

Nechť funkce f a g jsou diferencovatelné v bodě a. Potom platí

- $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,
- $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$,
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$, pokud $g(a) \neq 0$.

Poznámka:

Pravidlo pro derivaci součinu se někdy též nazývá **Leibnizovo pravidlo**. Platí tedy například

$$\begin{aligned}(\sin(x)\cos(x))' &= \cos(x)\cos(x) - \sin(x)\sin(x) = \cos(2x),\\ (x\sin(x))' &= 1 \cdot \sin(x) + x \cdot \cos(x)\end{aligned}$$

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Pro derivace funkcí tg a cotg platí

$$\operatorname{tg}'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}, \quad x \in \mathbb{R} \smallsetminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z} \right\},$$
$$\operatorname{cotg}'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}, \quad x \in \mathbb{R} \smallsetminus \left\{ k\pi \middle| k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Pro derivace funkcí tg a cotg platí

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}'(x) &= \frac{1}{\cos^2(x)}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z} \right\}, \\ \operatorname{cotg}'(x) &= -\frac{1}{\sin^2(x)}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ k\pi \middle| k \in \mathbb{Z} \right\}. \end{aligned}$$

Pomocí pravidla pro derivaci podílu dostáváme vztahy

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}'(x) &= \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \right)' = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}, \\ \operatorname{cotg}'(x) &= \left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)} \right)' = \frac{-\sin^2(x) - \cos^2(x)}{\sin^2(x)} = -\frac{1}{\sin^2(x)}, \end{aligned}$$

platné na příslušných definičních oborech.

Derivace složené funkce

Věta (Derivace složené funkce):

Nechť g je funkce diferencovatelná v bodě a, f je diferencovatelná v bodě $g(a)$. Potom funkce $f \circ g$ je diferencovatelná v bodě a a platí

$$(f \circ g)'(a) = f'\big(g(a)\big) \cdot g'(a).$$

Derivace složené funkce

Věta (Derivace složené funkce):

Nechť g je funkce diferencovatelná v bodě a, f je diferencovatelná v bodě $g(a)$. Potom funkce $f \circ g$ je diferencovatelná v bodě a a platí

$$(f \circ g)'(a) = f'\big(g(a)\big) \cdot g'(a).$$

Důkaz.

Na přednášce vynecháváme. □

Derivace složené funkce

Věta (Derivace složené funkce):

Nechť g je funkce diferencovatelná v bodě a, f je diferencovatelná v bodě $g(a)$. Potom funkce $f \circ g$ je diferencovatelná v bodě a a platí

$$(f \circ g)'(a) = f'\big(g(a)\big) \cdot g'(a).$$

Důkaz.

Na přednášce vynecháváme. □

Příklad.

Platí tedy například:

$$\left(e^{x^2}\right)' = e^{x^2} \cdot 2x, \quad \big(\sin\big(\cos(x)\big)\big)' = \cos\big(\cos(x)\big) \cdot \big(-\sin(x)\big).$$

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Derivace funkce $h(x) = x^\alpha$, $x > 0$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, je opět $h'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Derivace funkce $h(x) = x^\alpha$, $x > 0$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, je opět $h'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

- Víme, že pro kladné $x > 0$ platí $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$. Označme $f(x) = e^x$ vnější funkci a $g(x) = \alpha \ln(x)$ vnitřní funkcí, tedy $x^\alpha = f(g(x))$.

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Derivace funkce $h(x) = x^\alpha$, $x > 0$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, je opět $h'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

- Víme, že pro kladné $x > 0$ platí $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$. Označme $f(x) = e^x$ vnější funkci a $g(x) = \alpha \ln(x)$ vnitřní funkcí, tedy $x^\alpha = f(g(x))$.
- Potom podle věty o derivaci složené funkce máme

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = e^{\alpha \ln x} \cdot \frac{\alpha}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}, \quad x > 0.$$

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Derivace funkce $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, kde $a > 0$ je $f'(x) = a^x \ln a$.

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Derivace funkce $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, kde $a > 0$ je $f'(x) = a^x \ln a$.

- Platí $h(x) = e^{x \ln a}$. Označme vnější funkci $f(x) = e^x$ a vnitřní funkci $g(x) = x \ln a$.

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Derivace funkce $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, kde $a > 0$ je $f'(x) = a^x \ln a$.

- Platí $h(x) = e^{x \ln a}$. Označme vnější funkci $f(x) = e^x$ a vnitřní funkci $g(x) = x \ln a$.
- Potom
$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \ln a.$$

Derivace inverzní funkce

Věta (Derivace inverzní funkce):

Buďte f spojitá a ryze monotónní na intervalu $I = (a, b)$ a bod $c \in I$. Má-li inverzní funkce f^{-1} konečnou nenulovou derivaci v bodě $f(c)$, potom má f derivaci v bodě c a platí

$$f'(c) = \frac{1}{(f^{-1})'(f(c))}.$$

Derivace inverzní funkce

Věta (Derivace inverzní funkce):

Buďte f spojitá a ryze monotónní na intervalu $I = (a, b)$ a bod $c \in I$. Má-li inverzní funkce f^{-1} konečnou nenulovou derivaci v bodě $f(c)$, potom má f derivaci v bodě c a platí

$$f'(c) = \frac{1}{(f^{-1})'(f(c))}.$$

Důkaz: Označme $d = f(c)$. Všimněme si, že pro $x \in I$, $x \neq c$ platí

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \left(\frac{f^{-1}\big(f(x)\big) - f^{-1}(d)}{f(x) - d} \right)^{-1} = \Big(g\big(f(x)\big)\Big)^{-1},$$

kde

$$g(x) = \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(d)}{x - d}, \quad \text{pro } x \in f(I),\ x \neq d.$$

Derivace inverzní funkce

Podle předpokladu je ale

$$\lim_{x \to d} g(x) = \left(f^{-1}\right)'(d)$$

konečná nenulová, $\lim\limits_{x \to c} f(x) = d$ a $f(x) \neq d$ pro $x \neq c$.

Derivace inverzní funkce

Podle předpokladu je ale

$$\lim_{x \to d} g(x) = \left(f^{-1}\right)'(d)$$

konečná nenulová, $\lim_{x \to c} f(x) = d$ a $f(x) \neq d$ pro $x \neq c$.

Podle věty o limitě složené funkce pak tedy

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \frac{1}{\left(f^{-1}\right)'(d)}.$$

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Již víme, že derivace $\ln$ je funkce $\frac{1}{x}$. $\ln$ je ale inverzní funkce k funkci e^x. Ověřme si vztah pro derivaci znovu pomocí věty o derivaci inverzní funkce.

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Již víme, že derivace $\ln$ je funkce $\frac{1}{x}$. $\ln$ je ale inverzní funkce k funkci e^x. Ověřme si vztah pro derivaci znovu pomocí věty o derivaci inverzní funkce.

Chceme derivovat $f(x) = \ln(x)$ na intervalu $I = (0, +\infty)$. Tato je spojitá, ryze monotónní a její inverzní funkcí je $f^{-1}(x) = e^x$.

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Již víme, že derivace $\ln$ je funkce $\frac{1}{x}$. $\ln$ je ale inverzní funkce k funkci e^x. Ověřme si vztah pro derivaci znovu pomocí věty o derivaci inverzní funkce.

Chceme derivovat $f(x) = \ln(x)$ na intervalu $I = (0, +\infty)$. Tato je spojitá, ryze monotónní a její inverzní funkcí je $f^{-1}(x) = e^x$.

Je-li $x \in I$, pak pro derivaci f^{-1} v bodě $f(x)$ platí

$$\left(f^{-1}\right)'\big(f(x)\big) = e^{\ln(x)} = x \in I.$$

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Již víme, že derivace $\ln$ je funkce $\frac{1}{x}$. $\ln$ je ale inverzní funkce k funkci e^x. Ověřme si vztah pro derivaci znovu pomocí věty o derivaci inverzní funkce.

Chceme derivovat $f(x) = \ln(x)$ na intervalu $I = (0, +\infty)$. Tato je spojitá, ryze monotónní a její inverzní funkcí je $f^{-1}(x) = e^x$.

Je-li $x \in I$, pak pro derivaci f^{-1} v bodě $f(x)$ platí

$$\left(f^{-1}\right)'\big(f(x)\big) = e^{\ln(x)} = x \in I.$$

Podle naší věty tedy je

$$\ln'(x) = f'(x) = \frac{1}{\left(f^{-1}\right)'(f(x))} = \frac{1}{x},$$

což jsme očekávali.

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Pro derivaci funkce $\arcsin$ platí $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1, 1)$.

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Pro derivaci funkce arcsin platí $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1,1)$.

Funkce $f = \arcsin$ je inverzní funkcí k funkci $\sin$ zúžené na interval $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$. Tj. $f^{-1} = \sin\big|_{\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle}$. Pro každé $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ již víme, že platí

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \cos x \neq 0.$$

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Pro derivaci funkce arcsin platí $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1, 1)$.

Funkce $f = \arcsin$ je inverzní funkcí k funkci $\sin$ zúžené na interval $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$. Tj. $f^{-1} = \sin\big|_{\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle}$. Pro každé $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ již víme, že platí

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \cos x \neq 0.$$

Podle věty o derivaci inverzní funkce máme pro každé $x \in (-1, 1)$ rovnost

$$\arcsin'(x) = f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(f(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}.$$

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Pro derivaci funkce arcsin platí $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1,1)$.

Funkce $f = \arcsin$ je inverzní funkcí k funkci $\sin$ zúžené na interval $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$. Tj. $f^{-1} = \sin\big|_{\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle}$. Pro každé $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ již víme, že platí

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \cos x \neq 0.$$

Podle věty o derivaci inverzní funkce máme pro každé $x \in (-1,1)$ rovnost

$$\arcsin'(x) = f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(f(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}.$$

Pro $x \in (-1,1)$ je ale

$$\cos\big(\arcsin(x)\big) = \sqrt{1 - \sin^2\big(\arcsin(x)\big)} = \sqrt{1-x^2} \neq 0,$$

a tudíž

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1,1).$$

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Pro derivaci funkce arctg platí

$$\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Pro derivaci funkce arctg platí

$$\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Chceme derivovat $f = \operatorname{arctg}$ na $I = \mathbb{R}$, kde je spojitá a monotónnní. Její inverzní funkce je $f^{-1} = \operatorname{tg}\big|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}$.

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Pro derivaci funkce arctg platí

$$\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Chceme derivovat $f = \operatorname{arctg}$ na $I = \mathbb{R}$, kde je spojitá a monotónnní. Její inverzní funkce je $f^{-1} = \operatorname{tg}\big|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}$. Pro každé $x \in I$ platí

$$\left(f^{-1}\right)'\big(f(x)\big) = \operatorname{tg}'\big(\operatorname{arctg}(x)\big) = \frac{1}{\cos^2\big(\operatorname{arctg}(x)\big)} \neq 0,$$

protože $\operatorname{arctg}(x) \in \Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big)$.

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Pro derivaci funkce arctg platí

$$\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Chceme derivovat $f = \operatorname{arctg}$ na $I = \mathbb{R}$, kde je spojitá a monotónnní. Její inverzní funkce je $f^{-1} = \operatorname{tg}\big|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}$. Pro každé $x \in I$ platí

$$(f^{-1})'(f(x)) = \operatorname{tg}'\left(\operatorname{arctg}(x)\right) = \frac{1}{\cos^2\left(\operatorname{arctg}(x)\right)} \neq 0,$$

protože $\operatorname{arctg}(x) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Navíc je

$$\cos^2\left(\operatorname{arctg} x\right) = \frac{\cos^2\left(\operatorname{arctg} x\right)}{\sin^2\left(\operatorname{arctg} x\right) + \cos^2\left(\operatorname{arctg} x\right)} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arctg} x\right)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Pro derivaci funkce arctg platí

$$\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Chceme derivovat $f = \operatorname{arctg}$ na $I = \mathbb{R}$, kde je spojitá a monotónnní. Její inverzní funkce je $f^{-1} = \operatorname{tg}\big|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}$. Pro každé $x \in I$ platí

$$(f^{-1})'(f(x)) = \operatorname{tg}'\left(\operatorname{arctg}(x)\right) = \frac{1}{\cos^2\left(\operatorname{arctg}(x)\right)} \neq 0,$$

protože $\operatorname{arctg}(x) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Navíc je

$$\cos^2\left(\operatorname{arctg} x\right) = \frac{\cos^2\left(\operatorname{arctg} x\right)}{\sin^2\left(\operatorname{arctg} x\right) + \cos^2\left(\operatorname{arctg} x\right)} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arctg} x\right)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Odtud

$$\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Hlavní body

1 Rychlost a hledání tečny

2 Derivace funkce

3 Vlastnosti derivace

4 Derivace elementárních funkcí: přehled a příklady

5 Další poznámky

Rekapitulace

Tabulka zatím známých derivací:

$f(x)$	$f'(x)$	
x^n	nx^{n-1}	$x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$
x^n	nx^{n-1}	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n = -1, -2, \ldots$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$x > 0$ a $\alpha \in \mathbb{R}$
e^x	e^x	$x \in \mathbb{R}$
a^x	$a^x \ln a$	$x \in \mathbb{R}$, $a > 0$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$x \in \mathbb{R}$
$\operatorname{tg}(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{cotg}(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$	$x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Rekapitulace

Pokračování. . .

$f(x)$	$f'(x)$	
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1,1)$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1,1)$
$\operatorname{arctg}(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
$\operatorname{arccotg}(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Nalezněte derivaci funkce

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) + \operatorname{arctg} x, \quad x \neq 0.$$

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Nalezněte derivaci funkce

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) + \operatorname{arctg} x, \quad x \neq 0.$$

Postupně použijeme:

1. derivace součtu,

$$f'(x) \stackrel{1}{=} \left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)' + \operatorname{arctg}'(x)$$

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Nalezněte derivaci funkce

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) + \operatorname{arctg} x, \quad x \neq 0.$$

Postupně použijeme:

1. derivace součtu,
2. znalost derivace funkcí $\operatorname{arctg}(x)$, x^{-1} a derivace složené funkce,

$$f'(x) \stackrel{1}{=} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{x}\right)' + \operatorname{arctg}'(x) \stackrel{2}{=} \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{1+x^2}$$

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Nalezněte derivaci funkce

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) + \operatorname{arctg} x, \quad x \neq 0.$$

Postupně použijeme:

1. derivace součtu,
2. znalost derivace funkcí $\operatorname{arctg}(x)$, x^{-1} a derivace složené funkce,
3. algebraické úpravy.

$$f'(x) \overset{1}{=} \left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)' + \operatorname{arctg}'(x) \overset{2}{=} \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{1+x^2} \overset{3}{=} 0$$

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Nalezněte derivaci funkce

$$f(x) = x^x, \quad x > 0.$$

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Nalezněte derivaci funkce
$$f(x) = x^x, \quad x > 0.$$

Postupně použijeme:

1. úprava výrazu před samotnou derivací,

$$f'(x) \overset{1}{=} \left(e^{x \ln x}\right)'$$

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Nalezněte derivaci funkce
$$f(x) = x^x, \quad x > 0.$$

Postupně použijeme:

1. úprava výrazu před samotnou derivací,
2. derivace složené funkce, znalost derivace funkce e^x,

$$f'(x) \overset{1}{=} \left(e^{x \ln x}\right)' \overset{2}{=} e^{x \ln x} \cdot \left(x \ln x\right)'$$

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Nalezněte derivaci funkce
$$f(x) = x^x, \quad x > 0.$$

Postupně použijeme:

1. úprava výrazu před samotnou derivací,
2. derivace složené funkce, znalost derivace funkce e^x,
3. derivace součinu a znalost derivace $\ln x$, resp. x,

$$f'(x) \overset{1}{=} \left(e^{x \ln x}\right)' \overset{2}{=} e^{x \ln x} \cdot (x \ln x)' \overset{3}{=} e^{x \ln x} \cdot \left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right)$$

Derivace funkce: příklady

Příklad.

Nalezněte derivaci funkce

$$f(x) = x^x, \quad x > 0.$$

Postupně použijeme:

1. úprava výrazu před samotnou derivací,
2. derivace složené funkce, znalost derivace funkce e^x,
3. derivace součinu a znalost derivace $\ln x$, resp. x,
4. algebraické úpravy.

$$f'(x) \stackrel{1}{=} \left(e^{x \ln x}\right)' \stackrel{2}{=} e^{x \ln x} \cdot (x \ln x)' \stackrel{3}{=} e^{x \ln x} \cdot \left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) \stackrel{4}{=} x^x (1 + \ln x).$$

Hlavní body

1 Rychlost a hledání tečny

2 Derivace funkce

3 Vlastnosti derivace

4 Derivace elementárních funkcí: přehled a příklady

5 Další poznámky

Jednostranné derivace

Poznámka:

Lze definovat derivaci funkce f v bodě a zleva i zprava jako limity

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a_+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{a} \quad f'_-(a) = \lim_{x \to a_-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Příklad.

Uvažme funkci $f(x) = |x|$. Pro $x \neq 0 = a$ platí

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{|x|}{x} = \operatorname{sgn} x.$$

Tudíž

$$f'_+(0) = 1 \quad \text{a} \quad f'_-(0) = -1,$$

ale $f'(0)$ neexistuje.

Derivace vyšších řádů

Poznámka:

Derivací funkce f dostáváme novou funkci f', jejíž definiční obor ovšem může být menší než původní D_f. Nyní můžeme znovu derivovat f', tj. sestrojit f''. Rekurzivně tedy definujeme

$$f^{(0)}(x) = f(x), \quad f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}\right)'(x), \quad n \geq 1.$$

Derivace vyšších řádů

Poznámka:

Derivací funkce f dostáváme novou funkci f', jejíž definiční obor ovšem může být menší než původní D_f. Nyní můžeme znovu derivovat f', tj. sestrojit f''.
Rekurzivně tedy definujeme

$$f^{(0)}(x) = f(x), \quad f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}\right)'(x), \quad n \geq 1.$$

Příklad.

Například pro $f(x) = x^3 - 2x + 4$ máme

$$f'(x) = 3x^2 - 2, \quad f''(x) = 6x, \quad f'''(x) = 6, \quad f^{(n)}(x) = 0 \ n \geq 4.$$