

# Základy matematické analýzy

## Primitivní funkce

Jitka Hrabáková<sup>1</sup>, Tomáš Kalvoda<sup>2</sup>, Ivo Petr<sup>3</sup>

<sup>1</sup>jitka.hrabakova@fit.cvut.cz <sup>2</sup>tomas.kalvoda@fit.cvut.cz, <sup>3</sup>ivo.petr@fit.cvut.cz,

Katedra aplikované matematiky  
Fakulta informačních technologií  
České vysoké učení technické v Praze

4. září 2019  
ZS 2018/2019



# Hlavní body

- 1 Neurčitý integrál
- 2 Integrace per partes
- 3 Věty o substituci v neurčitém integrálu
- 4 Další příklady



# Hlavní body

- 1 Neurčitý integrál
- 2 Integrace per partes
- 3 Věty o substituci v neurčitém integrálu
- 4 Další příklady



# Primitivní funkce

## Definice (primitivní funkce / *antiderivative*):

Nechť funkce  $f$  je definována na intervalu  $(a, b)$ , kde  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ . Funkci  $F$  splňující podmínku

$$F'(x) = f(x) \text{ pro každé } x \in (a, b)$$

nazýváme **primitivní funkcí** k funkci  $f$  na intervalu  $(a, b)$ .

## Poznámka:

Z definice ihned plyne, že  $F$  je diferencovatelná v každém bodě intervalu  $(a, b)$  a tedy je i spojitá na  $(a, b)$ .



# Primitivní funkce

## Příklad.

Funkce  $F(x) = x^3$  je primitivní funkcí k funkci  $f(x) = 3x^2$  na libovolném intervalu  $(a, b)$ .



# Primitivní funkce

## Příklad.

Funkce  $F(x) = x^3$  je primitivní funkcí k funkci  $f(x) = 3x^2$  na libovolném intervalu  $(a, b)$ .

## Příklad.

Funkce  $F(x) = \ln x$  je primitivní funkcí k funkci  $f(x) = \frac{1}{x}$  na libovolném intervalu  $(a, b) \subset (0, +\infty)$ .



# Primitivní funkce

## Příklad.

Funkce  $F(x) = x^3$  je primitivní funkcí k funkci  $f(x) = 3x^2$  na libovolném intervalu  $(a, b)$ .

## Příklad.

Funkce  $F(x) = \ln x$  je primitivní funkcí k funkci  $f(x) = \frac{1}{x}$  na libovolném intervalu  $(a, b) \subset (0, +\infty)$ .

## Příklad.

Funkce  $F(x) = \operatorname{arctg} x$  je primitivní funkcí k funkci  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  na libovolném intervalu  $(a, b)$ .



# (Ne)jednoznačnost primitivní funkce

## Věta:

Nechť  $F$  je primitivní funkcí k funkci  $f$  na intervalu  $(a, b)$ . Pak  $G$  je primitivní funkcí k funkci  $f$  na intervalu  $(a, b)$  právě tehdy, když existuje konstanta  $c \in \mathbb{R}$  taková, že

$$G(x) = F(x) + c, \quad \text{pro každé } x \in (a, b).$$



# (Ne)jednoznačnost primitivní funkce

## Věta:

Nechť  $F$  je primitivní funkcí k funkci  $f$  na intervalu  $(a, b)$ . Pak  $G$  je primitivní funkcí k funkci  $f$  na intervalu  $(a, b)$  právě tehdy, když existuje konstanta  $c \in \mathbb{R}$  taková, že

$$G(x) = F(x) + c, \quad \text{pro každé } x \in (a, b).$$

## Důkaz.

Pokud  $F$  a  $G$  jsou funkce primitivní k  $f$  na intervalu  $(a, b)$ , potom

$$(F - G)'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0, \quad \text{pro všechna } x \in (a, b).$$

Funkce  $F - G$  je proto konstantní na intervalu  $(a, b)$ .



# (Ne)jednoznačnost primitivní funkce

## Věta:

Nechť  $F$  je primitivní funkcí k funkci  $f$  na intervalu  $(a, b)$ . Pak  $G$  je primitivní funkcí k funkci  $f$  na intervalu  $(a, b)$  právě tehdy, když existuje konstanta  $c \in \mathbb{R}$  taková, že

$$G(x) = F(x) + c, \quad \text{pro každé } x \in (a, b).$$

## Důkaz.

Pokud  $F$  a  $G$  jsou funkce primitivní k  $f$  na intervalu  $(a, b)$ , potom

$$(F - G)'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0, \quad \text{pro všechna } x \in (a, b).$$

Funkce  $F - G$  je proto konstantní na intervalu  $(a, b)$ .

Naopak, je-li  $G(x) = F(x) + c$ , pro libovolné  $x \in (a, b)$ , pak  $G'(x) = F'(x)$ . □



# Neurčitý integrál

## Definice (neurčitý integrál / *indefinite integral*):

Nechť k funkci  $f$  existuje primitivní funkce na intervalu  $(a, b)$ . Množinu všech primitivních funkcí k funkci  $f$  na  $(a, b)$  nazýváme **neurčitým integrálem** a značíme jej  $\int f$  nebo  $\int f(x) dx$ .



# Neurčitý integrál

## Definice (neurčitý integrál / *indefinite integral*):

Nechť k funkci  $f$  existuje primitivní funkce na intervalu  $(a, b)$ . Množinu všech primitivních funkcí k funkci  $f$  na  $(a, b)$  nazýváme **neurčitým integrálem** a značíme jej  $\int f$  nebo  $\int f(x) dx$ .

## Poznámka (Terminologie):

Najdeme-li k  $f$  primitivní funkci  $F$  v intervalu  $(a, b)$ , zapisujeme tento fakt obvykle

$$\int f(x) dx = F(x) + c.$$

Funkci  $f$  nazýváme **integrovanou funkcí**,  $x$  **integrační proměnnou** a  $c$  **integrační konstantou**. Úkolu určit  $\int f(x) dx$  říkáme „najít primitivní funkci k  $f$ “, nebo „vypočítat integrál z  $f$ “, nebo „integrovat  $f$ “.



# Existence primitivní funkce

## Poznámka:

- Je-li funkce  $g$  diferencovatelná na intervalu  $(a, b)$ , pak přímo z definice plyne

$$\int g'(x) \, dx = g(x) + c, \quad x \in (a, b).$$



# Existence primitivní funkce

## Poznámka:

- Je-li funkce  $g$  diferencovatelná na intervalu  $(a, b)$ , pak přímo z definice plyne

$$\int g'(x) dx = g(x) + c, \quad x \in (a, b).$$

- Má-li funkce  $f$  primitivní funkci na intervalu  $(a, b)$ , potom opět přímo z definice plyne

$$\left( \int f \right)'(x) = f(x), \quad x \in (a, b).$$



# Existence primitivní funkce

## Poznámka:

- Je-li funkce  $g$  diferencovatelná na intervalu  $(a, b)$ , pak přímo z definice plyne

$$\int g'(x) dx = g(x) + c, \quad x \in (a, b).$$

- Má-li funkce  $f$  primitivní funkci na intervalu  $(a, b)$ , potom opět přímo z definice plyne

$$\left( \int f \right)'(x) = f(x), \quad x \in (a, b).$$

## Věta (Postačující podmínka pro existenci primitivní funkce):

Nechť funkce  $f$  je spojitá na intervalu  $(a, b)$ . Pak funkce  $f$  má na tomto intervalu primitivní funkci.

# Primitivní funkce elementárních funkcí...

Ze znalosti derivací můžeme ihned sestavit tabulku primitivních funkcí:

| vzorec                                                 | interval, parametry                                             |
|--------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|
| $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$                | $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_0$                          |
| $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$                | $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{Z}, n \leq -2$ |
| $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ | $x \in (0, +\infty), \alpha \notin \mathbb{Z}$                  |
| $\int \frac{1}{x} dx = \ln x  + C$                     | $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$                              |
| $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$                  | $x \in \mathbb{R}, a > 0 \text{ a } a \neq 1$                   |
| $\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$                       | $x \in \mathbb{R}$                                              |



# ... pokračování

| vzorec                                                         | interval, parametry                                                                |
|----------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| $\int \cos(x) \, dx = \sin(x) + C$                             | $x \in \mathbb{R}$                                                                 |
| $\int \frac{1}{\cos^2(x)} \, dx = \operatorname{tg}(x) + C$    | $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$ |
| $\int \frac{1}{\sin^2(x)} \, dx = -\operatorname{cotg}(x) + C$ | $x \in (k\pi, \pi + k\pi), k \in \mathbb{Z}$                                       |
| $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin(x) + C$           | $x \in (-1, 1)$                                                                    |
| $\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \operatorname{arctg}(x) + C$     | $x \in \mathbb{R}$                                                                 |



# Základní pravidla pro integrování

## Věta:

Nechť  $F$ , resp.  $G$ , je primitivní funkce k funkci  $f$ , resp.  $g$ , na intervalu  $(a, b)$  a nechť  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Pak



# Základní pravidla pro integrování

## Věta:

Nechť  $F$ , resp.  $G$ , je primitivní funkce k funkci  $f$ , resp.  $g$ , na intervalu  $(a, b)$  a nechť  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Pak

- $F + G$  je primitivní funkcí k funkci  $f + g$  na intervalu  $(a, b)$ ,



# Základní pravidla pro integrování

## Věta:

Nechť  $F$ , resp.  $G$ , je primitivní funkce k funkci  $f$ , resp.  $g$ , na intervalu  $(a, b)$  a nechť  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Pak

- $F + G$  je primitivní funkcí k funkci  $f + g$  na intervalu  $(a, b)$ ,
- $\alpha F$  je primitivní funkcí k funkci  $\alpha f$  na intervalu  $(a, b)$ .



# Základní pravidla pro integrování

## Věta:

Nechť  $F$ , resp.  $G$ , je primitivní funkce k funkci  $f$ , resp.  $g$ , na intervalu  $(a, b)$  a nechť  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Pak

- $F + G$  je primitivní funkcí k funkci  $f + g$  na intervalu  $(a, b)$ ,
- $\alpha F$  je primitivní funkcí k funkci  $\alpha f$  na intervalu  $(a, b)$ .

## Důkaz.

Plyne ihned z pravidla po derivaci součtu funkcí a konstantního násobku funkce.



# Základní pravidla pro integrování

## Věta:

Nechť  $F$ , resp.  $G$ , je primitivní funkce k funkci  $f$ , resp.  $g$ , na intervalu  $(a, b)$  a nechť  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Pak

- $F + G$  je primitivní funkcí k funkci  $f + g$  na intervalu  $(a, b)$ ,
- $\alpha F$  je primitivní funkcí k funkci  $\alpha f$  na intervalu  $(a, b)$ .

## Důkaz.

Plyne ihned z pravidla po derivaci součtu funkcí a konstantního násobku funkce. □

## Poznámka:

Větu symbolicky zapisujeme a při výpočtech využíváme takto:

$$\int (f + g) = \int f + \int g \quad \text{a} \quad \int (\alpha f) = \alpha \int f.$$

# Příklad

## Příklad.

Vypočtěte

$$\int \left( 4x^2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \right) dx.$$



# Příklad

## Příklad.

Vypočtěte

$$\int \left( 4x^2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \right) dx.$$

$$\begin{aligned} \int \left( 4x^2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \right) dx &= 4 \int x^2 dx - \int \frac{1}{x} dx + \int x^{-2/3} dx = \\ &= 4 \cdot \frac{x^3}{3} - \ln |x| + \frac{x^{1/3}}{1/3} + C = \frac{4}{3}x^3 - \ln |x| + 3x^{1/3} + C. \end{aligned}$$



# Příklad

## Příklad.

Vypočtěte

$$\int (2^x + 3^x)^2 dx.$$



# Příklad

## Příklad.

Vypočtěte

$$\int (2^x + 3^x)^2 dx.$$

$$\begin{aligned}\int (2^x + 3^x)^2 dx &= \int (2^{2x} + 2 \cdot 2^x \cdot 3^x + 3^{2x}) dx = \\ &= \int 4^x dx + 2 \int 6^x dx + \int 9^x dx = \\ &= \frac{4^x}{\ln 4} + 2 \cdot \frac{6^x}{\ln 6} + \frac{9^x}{\ln 9} + C.\end{aligned}$$



# Hlavní body

- 1 Neurčitý integrál
- 2 Integrace per partes
- 3 Věty o substituci v neurčitém integrálu
- 4 Další příklady



# Integrace per partes

## Věta (Per partes / *integration by parts*):

Nechť funkce  $f$  je diferencovatelná v intervalu  $(a, b)$  a  $G$  je primitivní funkce k funkci  $g$  na intervalu  $(a, b)$  a konečně nechť existuje primitivní funkce k funkci  $f'G$ . Potom existuje primitivní funkce k funkci  $fg$  a platí

$$\int fg = fG - \int f'G.$$



# Integrace per partes

## Věta (Per partes / integration by parts):

Nechť funkce  $f$  je diferencovatelná v intervalu  $(a, b)$  a  $G$  je primitivní funkce k funkci  $g$  na intervalu  $(a, b)$  a konečně nechť existuje primitivní funkce k funkci  $f'G$ . Potom existuje primitivní funkce k funkci  $fg$  a platí

$$\int fg = fG - \int f'G.$$

## Důkaz.

Tvrzení věty můžeme přímo ověřit derivováním

$$\left(fG - \int f'G\right)' = (fG)' - f'G = f'G + fG' - f'G = fG' = fg.$$

Všimněte si, že ve výpočtu jsme použili pravidlo pro derivování součinu dvou funkcí. □

# Integrace per partes

## Poznámka:

- „per partes“, česky „po částech“.
- Umožňuje integrovat **některé** součiny funkcí. Srovnejte obtížnost s výpočtem derivace součinu funkcí.

Aby bylo jasné jak per partes používáme budeme v následujících výpočtech používat jednoduchou notaci:

$$\int fg = \left| \begin{array}{c} f \\ g \end{array} \right| =$$



# Integrace per partes

## Poznámka:

- „per partes“, česky „po částech“.
- Umožňuje integrovat **některé** součiny funkcí. Srovnajte obtížnost s výpočtem derivace součinu funkcí.

Aby bylo jasné jak per partes používáme budeme v následujících výpočtech používat jednoduchou notaci:

$$\int fg = \left| \begin{array}{c} f \\ \downarrow \\ f' \end{array} \quad \begin{array}{c} g \\ \downarrow \\ G \end{array} \right| =$$



# Integrace per partes

## Poznámka:

- „per partes“, česky „po částech“.
- Umožňuje integrovat **některé** součiny funkcí. Srovnajte obtížnost s výpočtem derivace součinu funkcí.

Aby bylo jasné jak per partes používáme budeme v následujících výpočtech používat jednoduchou notaci:

$$\int fg = \left| \begin{array}{cc} f & g \\ f' & G \end{array} \right| = fg$$



# Integrace per partes

## Poznámka:

- „per partes“, česky „po částech“.
- Umožňuje integrovat **některé** součiny funkcí. Srovnajte obtížnost s výpočtem derivace součinu funkcí.

Aby bylo jasné jak per partes používáme budeme v následujících výpočtech používat jednoduchou notaci:

$$\int fg = \left| \begin{array}{cc} f & g \\ f' & \text{---} G \end{array} \right| = \textcolor{red}{f}G - \int \textcolor{blue}{f}'G.$$



# Příklady

## Příklad.

Vypočtěte neurčitý integrál  $\int x \sin x \, dx$ .



# Příklady

## Příklad.

Vypočtěte neurčitý integrál  $\int x \sin x \, dx$ .

Řešení:

$$\begin{aligned} \int x \sin x \, dx &= \left| \begin{array}{ll} f(x) = x & g(x) = \sin x \\ f'(x) = 1 & G(x) = -\cos x \end{array} \right| = -x \cos x + \int \cos x \, dx = \\ &= -x \cos x + \sin x + C. \end{aligned}$$



# Příklady

## Příklad.

Vypočtěte neurčitý integrál  $\int x \sin x \, dx$ .

Řešení:

$$\begin{aligned} \int x \sin x \, dx &= \left| \begin{array}{ll} f(x) = x & g(x) = \sin x \\ f'(x) = 1 & G(x) = -\cos x \end{array} \right| = -x \cos x + \int \cos x \, dx = \\ &= -x \cos x + \sin x + C. \end{aligned}$$

Připomeňme, že výsledek můžeme snadno ověřit:

$$(-x \cos x + \sin x + C)' = -\cos x + x \sin x + \cos x + 0 = x \sin x.$$



# Příklady

## Příklad.

Vypočtěte neurčitý integrál  $\int x^2 e^x dx$ .



# Příklady

## Příklad.

Vypočtete neurčitý integrál  $\int x^2 e^x dx$ .

Nyní je potřeba per partes použít dvakrát.

$$\begin{aligned}\int x^2 e^x dx &= \begin{vmatrix} x^2 & e^x \\ 2x & e^x \end{vmatrix} = x^2 e^x - \int 2x e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx = \\ &= \begin{vmatrix} x & e^x \\ 1 & e^x \end{vmatrix} = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C = \\ &= (x^2 - 2x + 2) e^x + C.\end{aligned}$$



# Příklady

## Příklad.

Vypočtete neurčitý integrál  $\int \operatorname{arctg} x \, dx$ .



# Příklady

## Příklad.

Vypočtete neurčitý integrál  $\int \operatorname{arctg} x \, dx$ .

Integrand sice na první pohled není ve tvaru součinu, ale můžeme postupovat následovně:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{arctg} x \, dx &= \int \underset{\frac{1}{1+x^2}}{\color{red}1} \cdot \operatorname{arctg} x \, dx = \left| \begin{array}{cc} \operatorname{arctg} x & \color{red}1 \\ \frac{1}{1+x^2} & x \end{array} \right| = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx = \\ &= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \underbrace{\frac{2x}{1+x^2}}_{(\ln(1+x^2))'} \, dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C. \end{aligned}$$



# Hlavní body

- 1 Neurčitý integrál
- 2 Integrace per partes
- 3 Věty o substituci v neurčitém integrálu
- 4 Další příklady



# Substituce v neurčitém integrálu (v1)

## Věta (O substituci I):

Nechť pro funkce  $f$  a  $\varphi$  platí

- ①  $f$  má primitivní funkci  $F$  na intervalu  $(a, b)$ ,
- ②  $\varphi$  je na intervalu  $(\alpha, \beta)$  diferencovatelná,
- ③  $\varphi((\alpha, \beta)) \subset (a, b)$ .

Pak funkce  $f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$  má primitivní funkci na intervalu  $(\alpha, \beta)$  a platí

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = F(\varphi(x)) + C.$$



# Substituce v neurčitém integrálu (v1)

## Důkaz.

$F$  je primitivní funkcí k funkci  $f$ , tj.  $F'(x) = f(x)$  pro každé  $x \in (a, b)$ . Podle věty o derivaci složené funkce dostaneme

$$(F \circ \varphi)'(x) = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x),$$

pro každé  $x \in (\alpha, \beta)$ .



# Substituce v neurčitém integrálu (v1)

## Důkaz.

$F$  je primitivní funkcí k funkci  $f$ , tj.  $F'(x) = f(x)$  pro každé  $x \in (a, b)$ . Podle věty o derivaci složené funkce dostaneme

$$(F \circ \varphi)'(x) = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x),$$

pro každé  $x \in (\alpha, \beta)$ . □

## Poznámka:

Jedná se vlastně o „derivaci složené funkce naruby“.



# Příklad

## Příklad.

Vypočtěte

$$\int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} \, dx.$$



# Příklad

## Příklad.

Vypočtěte

$$\int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx.$$

Použijeme substituci  $y = \varphi(x) = \frac{1}{x}$ . Potom  $\varphi'(x) = -\frac{1}{x^2}$ . Proto

$$\int \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{-\varphi'(x)} \sin \underbrace{\frac{1}{x}}_{\varphi(x)} dx = - \int \sin y dy = \cos y + C = \cos \frac{1}{x} + C.$$



## Příklad.

Nalezněte primitivní funkci k funkci  $f(x) = \operatorname{tg}(x)$  na intervalu  $J = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ .



**Příklad.**

Nalezněte primitivní funkci k funkci  $f(x) = \operatorname{tg}(x)$  na intervalu  $J = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ .

Funkce  $f$  je na intervalu  $J$  spojitá a má zde tedy primitivní funkci. Nejprve upravme integrand

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx = - \int \frac{1}{\cos(x)} \cdot (-\sin(x)) dx.$$

Použijeme větu o substituci, kde zvolíme  $f(y) = \frac{1}{y}$  a  $y = \varphi(x) = \cos(x)$ .



**Příklad.**

Nalezněte primitivní funkci k funkci  $f(x) = \operatorname{tg}(x)$  na intervalu  $J = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ .

Funkce  $f$  je na intervalu  $J$  spojitá a má zde tedy primitivní funkci. Nejprve upravme integrand

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx = - \int \frac{1}{\cos(x)} \cdot (-\sin(x)) dx.$$

Použijeme větu o substituci, kde zvolíme  $f(y) = \frac{1}{y}$  a  $y = \varphi(x) = \cos(x)$ .

Funkce  $\varphi$  zobrazuje interval  $J$  na interval  $(-1, 0)$  kde má  $f$  primitivní funkci  $F(y) = \ln(-y)$ . Navíc  $\varphi'(x) = -\sin(x)$ . Větu lze tudíž použít a dostáváme

$$\int \operatorname{tg}(x) \, dx = -\ln(-\cos(x)) + C, \quad x \in J.$$



## Příklad.

Nalezněte primitivní funkci k funkci  $f(x) = \operatorname{tg}(x)$  na intervalu  $J = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ .

Funkce  $f$  je na intervalu  $J$  spojitá a má zde tedy primitivní funkci. Nejprve upravme integrand

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx = - \int \frac{1}{\cos(x)} \cdot (-\sin(x)) dx.$$

Použijeme větu o substituci, kde zvolíme  $f(y) = \frac{1}{y}$  a  $y = \varphi(x) = \cos(x)$ .

Funkce  $\varphi$  zobrazuje interval  $J$  na interval  $(-1, 0)$  kde má  $f$  primitivní funkci  $F(y) = \ln(-y)$ . Navíc  $\varphi'(x) = -\sin(x)$ . Větu lze tudíž použít a dostáváme

$$\int \operatorname{tg}(x) \, dx = -\ln(-\cos(x)) + C, \quad x \in J.$$

Často se též substitute zapisuje jako  $y = \cos x$ ,  $dy = -\sin x \, dx$  a

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = - \int \frac{1}{y} dy = -\ln|y| + C = -\ln(-\cos(x)) + C.$$



# Substituce v neurčitém integrálu (v2)

## Věta (O substituci II):

Nechť  $f$  je definována na intervalu  $(a, b)$  a nechť  $\varphi$  je bijekce intervalu  $(\alpha, \beta)$  na  $(a, b)$  s nenulovou konečnou derivací v každém bodě intervalu  $(\alpha, \beta)$ . Pak platí

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = G(t) + C \implies \int f(x)dx = G(\varphi^{-1}(x)) + C$$



# Substituce v neurčitém integrálu (v2)

## Věta (O substituci II):

Nechť  $f$  je definována na intervalu  $(a, b)$  a nechť  $\varphi$  je bijekce intervalu  $(\alpha, \beta)$  na  $(a, b)$  s nenulovou konečnou derivací v každém bodě intervalu  $(\alpha, \beta)$ . Pak platí

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = G(t) + C \implies \int f(x)dx = G(\varphi^{-1}(x)) + C$$

## Důkaz.

Pomocí věty o derivaci inverzní funkce odvodíme, že

$$\begin{aligned} \left(G(\varphi^{-1}(x))\right)' &= G'(\varphi^{-1}(x)) \cdot \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = \\ &= f(\varphi(\varphi^{-1}(x))) \cdot \varphi'(\varphi^{-1}(x)) \cdot \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = f(x). \quad \square \end{aligned}$$

# Příklad

## Příklad.

Pomocí předchozí věty spočtete známý integrál

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C.$$



# Příklad

## Příklad.

Pomocí předchozí věty spočtete známý integrál

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C.$$

Integrand

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

je definován na intervalu  $(a, b) = (-1, 1)$ . Abychom se zbavili odmocniny ve jmenovateli položíme

$$x = \varphi(t) = \sin(t), \quad t \in (\alpha, \beta) := (-\pi/2, \pi/2).$$



# Příklad, pokračování. . .

Funkce  $\sin$  je na intervalu  $(\alpha, \beta)$  rostoucí s nenulovou derivací  $\varphi'(t) = \cos t$ . Dále

$$\begin{aligned} G(t) &= \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 t}} \cos t dt = \\ &= \int \frac{\cos t}{\cos t} dt = \int 1 dt = t + C. \end{aligned}$$

Protože  $t = \arcsin(x)$  uzavíráme,

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \arcsin(x) + C.$$



# Hlavní body

- 1 Neurčitý integrál
- 2 Integrace per partes
- 3 Věty o substituci v neurčitém integrálu
- 4 Další příklady



# Hledání neurčitého integrálu

- Jenom malá část elementárních funkcí má primitivní funkci, která by byla elementární. Víme jen, že primitivní funkce existuje, ale nelze ji vyjádřit pomocí konečně mnoha operací (součet, součin, podíl, skládání a invertování) ze základních funkcí. Jako příklad uveďme

$$\int e^{-x^2} dx, \quad \int \frac{\sin(x)}{x} dx, \quad \int \frac{1}{\ln(x)} dx.$$

Důkaz tohoto tvrzení v této přednášce nebude podán.



# Hledání neurčitého integrálu

- Jenom malá část elementárních funkcí má primitivní funkci, která by byla elementární. Víme jen, že primitivní funkce existuje, ale nelze ji vyjádřit pomocí konečně mnoha operací (součet, součin, podíl, skládání a invertování) ze základních funkcí. Jako příklad uveďme

$$\int e^{-x^2} dx, \quad \int \frac{\sin(x)}{x} dx, \quad \int \frac{1}{\ln(x)} dx.$$

Důkaz tohoto tvrzení v této přednášce nebude podán.

- Rozpoznat, kdy funkce má „rozumnou“ primitivní funkci, je často složité. Obecný návod (algoritmus) „jak integrovat“ lze dát pouze v případě racionálních funkcí a funkcí které lze na racionální vhodnou substitucí převést.



# Hledání neurčitého integrálu

- Jenom malá část elementárních funkcí má primitivní funkci, která by byla elementární. Víme jen, že primitivní funkce existuje, ale nelze ji vyjádřit pomocí konečně mnoha operací (součet, součin, podíl, skládání a invertování) ze základních funkcí. Jako příklad uveďme

$$\int e^{-x^2} dx, \quad \int \frac{\sin(x)}{x} dx, \quad \int \frac{1}{\ln(x)} dx.$$

Důkaz tohoto tvrzení v této přednášce nebude podán.

- Rozpoznat, kdy funkce má „rozumnou“ primitivní funkci, je často složité. Obecný návod (algoritmus) „jak integrovat“ lze dát pouze v případě racionálních funkcí a funkcí které lze na racionální vhodnou substitucí převést.
- Integrace, na rozdíl od rutinního derivování, vyžaduje **cvik a zkušenost**.



**Poznámka:**

Vždy je však pomocí derivování možné ověřit, zda jsme ve výpočtu neudělali chybu!



**Poznámka:**

Vždy je však pomocí derivování možné ověřit, zda jsme ve výpočtu neudělali chybu!

**Příklad.**

Vypočtěte  $\int x e^{x^2} dx$  a výsledek ověřte.

Pomocí substituce  $y = x^2$ ,

$$\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^y dy = \frac{1}{2} e^y + C = \frac{1}{2} e^{x^2} + C.$$

Ověření,

$$\left( \frac{1}{2} e^{x^2} + C \right)' = \frac{1}{2} (e^{x^2})' + 0 = \frac{1}{2} \cdot 2x e^{x^2} = x e^{x^2}.$$



# Racionální lomené funkce

- Pro **racionální lomené funkce**, tedy funkce tvaru

$$\frac{p(x)}{q(x)},$$

kde  $p$  a  $q$  jsou polynomy, lze dát obecný algoritmus pro jejich integraci (metoda integrace pomocí rozkladu na parciální zlomky).



# Racionální lomené funkce

- Pro **racionální lomené funkce**, tedy funkce tvaru

$$\frac{p(x)}{q(x)},$$

kde  $p$  a  $q$  jsou polynomy, lze dát obecný algoritmus pro jejich integraci (metoda integrace pomocí rozkladu na parciální zlomky).

- Touto problematikou se zde nebudeme plně zabývat. Omezíme se na případ kdy polynom  $q(x)$  ve jmenovateli je stupně nejvýše dvě.



# Racionální lomené funkce

- Pro **racionální lomené funkce**, tedy funkce tvaru

$$\frac{p(x)}{q(x)},$$

kde  $p$  a  $q$  jsou polynomy, lze dát obecný algoritmus pro jejich integraci (metoda integrace pomocí rozkladu na parciální zlomky).

- Touto problematikou se zde nebudeme plně zabývat. Omezíme se na případ kdy polynom  $q(x)$  ve jmenovateli je stupně nejvýše dvě.
- V následující části přednášky tedy rozebereme, jak integrovat

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx,$$

kde  $p$  je libovolný polynom a  $q$  je polynom stupně **nejvýše** dvě.



# Stručný popis metody

Integrujeme  $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$ , stupeň  $q$  je menší nebo roven 2.



# Stručný popis metody

Integrujeme  $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$ , stupeň  $q$  je menší nebo roven 2.

- ❶ Pokud to lze, **vyděl** polynom  $p$  polynomem  $q$ , pak

$$\frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)},$$

kde stupeň polynomu  $r$  je nejvýše 1. Polynom  $s$  zintegrujeme snadno.



# Stručný popis metody

Integrujeme  $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$ , stupeň  $q$  je menší nebo roven 2.

- ❶ Pokud to lze, **vyděl** polynom  $p$  polynomem  $q$ , pak

$$\frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)},$$

kde stupeň polynomu  $r$  je nejvýše 1. Polynom  $s$  zintegrujeme snadno.

- ❷ Pokud je stupeň polynomu  $q$  roven 1, pak použijeme

$$\int \frac{b}{x-a} dx = b \ln |x-a| + C.$$



# Stručný popis metody

Integrujeme  $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$ , stupeň  $q$  je menší nebo roven 2.

- ❶ Pokud to lze, **vyděl** polynom  $p$  polynomem  $q$ , pak

$$\frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)},$$

kde stupeň polynomu  $r$  je nejvýše 1. Polynom  $s$  zintegrujeme snadno.

- ❷ Pokud je stupeň polynomu  $q$  roven 1, pak použijeme

$$\int \frac{b}{x-a} dx = b \ln |x-a| + C.$$

- ❸ Pokud má polynom  $q$  dvojnásobný kořen  $c$ , pak

$$\int \frac{ax+b}{(x-c)^2} dx = \int \frac{a}{x-c} + \frac{b+ac}{(x-c)^2} dx = a \ln |x-c| - \frac{b+ac}{x-c} + C.$$



# Stručný popis metody

Integrujeme  $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$ , stupeň  $q$  je menší nebo roven 2.

- ❶ Pokud to lze, **vyděl** polynom  $p$  polynomem  $q$ , pak

$$\frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)},$$

kde stupeň polynomu  $r$  je nejvýše 1. Polynom  $s$  zintegrujeme snadno.

- ❷ Pokud je stupeň polynomu  $q$  roven 1, pak použijeme

$$\int \frac{b}{x-a} dx = b \ln |x-a| + C.$$

- ❸ Pokud má polynom  $q$  dvojnásobný kořen  $c$ , pak

$$\int \frac{ax+b}{(x-c)^2} dx = \int \frac{a}{x-c} + \frac{b+ac}{(x-c)^2} dx = a \ln |x-c| - \frac{b+ac}{x-c} + C.$$

- ❹ Pokud je stupeň polynomu  $q$  roven 2 a jeho diskriminant je kladný, pak  $\frac{r}{q}$  převedeme na tvar  $\frac{b_1}{x-a_1} + \frac{b_2}{x-a_2}$  a použijeme **předchozí bod**.



# Stručný popis metody

Integrujeme  $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$ , stupeň  $q$  je menší nebo roven 2.

- ❶ Pokud to lze, **vyděl** polynom  $p$  polynomem  $q$ , pak

$$\frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)},$$

kde stupeň polynomu  $r$  je nejvýše 1. Polynom  $s$  zintegrujeme snadno.

- ❷ Pokud je stupeň polynomu  $q$  roven 1, pak použijeme

$$\int \frac{b}{x-a} dx = b \ln |x-a| + C.$$

- ❸ Pokud má polynom  $q$  dvojnásobný kořen  $c$ , pak

$$\int \frac{ax+b}{(x-c)^2} dx = \int \frac{a}{x-c} + \frac{b+ac}{(x-c)^2} dx = a \ln |x-c| - \frac{b+ac}{x-c} + C.$$

- ❹ Pokud je stupeň polynomu  $q$  roven 2 a jeho diskriminant je kladný, pak  $\frac{r}{q}$  převedeme na tvar  $\frac{b_1}{x-a_1} + \frac{b_2}{x-a_2}$  a použijeme **předchozí bod**.

- ❺ Pokud je stupeň polynomu  $q$  roven 2 a jeho diskriminant je záporný, pak použijeme **doplnění jmenovatele na čtverec**, integrál pak vede na  $\arctg$ .



# Příklady

Ukázky použití metody na postupně se komplikujících příkladech.



# Příklady

Ukázky použití metody na postupně se komplikujících příkladech.

- $$\int \frac{x^2}{x+1} dx = \int x - 1 + \frac{1}{x+1} dx = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + C.$$



# Příklady

Ukázky použití metody na postupně se komplikujících příkladech.

- $\int \frac{x^2}{x+1} dx = \int x - 1 + \frac{1}{x+1} dx = \frac{x^2}{2} - x + \ln |x+1| + C.$
- $\int \frac{3x-3}{(x-2)(x+1)} dx = \int \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x+1} dx = \ln |x-2| + 2 \ln |x+1| + C.$



# Příklady

Ukázky použití metody na postupně se komplikujících příkladech.

- $\int \frac{x^2}{x+1} dx = \int x - 1 + \frac{1}{x+1} dx = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + C.$
- $\int \frac{3x-3}{(x-2)(x+1)} dx = \int \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x+1} dx = \ln|x-2| + 2\ln|x+1| + C.$
- $\int \frac{1}{x^2-2x+2} dx = \int \frac{1}{1+(x-1)^2} dx = \int \frac{1}{1+y^2} dy = \operatorname{arctg} y + C = \operatorname{arctg}(x-1) + C,$  kde jsme použili substituci  $y = x - 1$ .



# Příklady

Ukázky použití metody na postupně se komplikujících příkladech.

- $\int \frac{x^2}{x+1} dx = \int x - 1 + \frac{1}{x+1} dx = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + C.$
- $\int \frac{3x-3}{(x-2)(x+1)} dx = \int \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x+1} dx = \ln|x-2| + 2\ln|x+1| + C.$
- $\int \frac{1}{x^2 - 2x + 2} dx = \int \frac{1}{1 + (x-1)^2} dx = \int \frac{1}{1 + y^2} dy = \operatorname{arctg} y + C = \operatorname{arctg}(x-1) + C,$  kde jsme použili substituci  $y = x - 1$ .
- $\int \frac{x}{x^2 - 2x + 2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x - 2 + 2}{1 + (x-1)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{((x-1)^2)'}{1 + (x-1)^2} dx + \int \frac{1}{1 + (x-1)^2} dx = \frac{1}{2} \ln(1 + (x-1)^2) + \int \frac{1}{1 + (x-1)^2} dx,$  a na druhý integrál použijeme předchozí bod.

