

Základy matematické analýzy

Riemannův integrál

Jitka Hrabáková¹, Tomáš Kalvoda², Ivo Petr³

¹jitka.hrabakova@fit.cvut.cz ²tomas.kalvoda@fit.cvut.cz, ³ivo.petr@fit.cvut.cz,

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze

4. září 2019
ZS 2018/2019



Hlavní body

- 1 Supremum a infimum
- 2 Konstrukce Riemannova integrálu
- 3 Vlastnosti Riemannova integrálu
- 4 Per partes a substitute pro určitý integrál
- 5 Poznámky
- 6 Integrace sudých a lichých funkcí



Hlavní body

- 1 Supremum a infimum
- 2 Konstrukce Riemannova integrálu
- 3 Vlastnosti Riemannova integrálu
- 4 Per partes a substitute pro určitý integrál
- 5 Poznámky
- 6 Integrace sudých a lichých funkcí



Připomenutí: minimum a maximum množiny

Poznámka:

Bud' $M \subset \mathbb{R}$. Číslo $\alpha \in M$ nazveme

- **maximem** množiny M právě když pro všechna $x \in M$ platí $x \leq \alpha$.
- **minimem** množiny M právě když pro všechna $x \in M$ platí $\alpha \leq x$.

Maximum, resp. minimum, množiny M značíme $\max M$, resp. $\min M$.



Připomenutí: minimum a maximum množiny

Poznámka:

Bud' $M \subset \mathbb{R}$. Číslo $\alpha \in M$ nazveme

- **maximem** množiny M právě když pro všechna $x \in M$ platí $x \leq \alpha$.
- **minimem** množiny M právě když pro všechna $x \in M$ platí $\alpha \leq x$.

Maximum, resp. minimum, množiny M značíme $\max M$, resp. $\min M$.

Poznámka:

Některé množiny $M \subset \mathbb{R}$ nemusí mít minimum ani maximum. Například otevřený interval $M = (0, 1)$. Čísla 0 a 1 nejsou minimem/maximem, neboť $0, 1 \notin M$.



Infimum množiny $A \subset \mathbb{R}$

Definice:

Bud' A neprázdná zdola omezená podmnožina množiny reálných čísel. Číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ nazveme **infimem** množiny A , značíme $\inf A$, právě když

- ① pro každé $x \in A$ platí $\alpha \leq x$, (α je **dolní závora** A)
- ② pokud $\beta \in \mathbb{R}$ také splňuje předchozí bod, pak $\beta \leq \alpha$.
(α je největší dolní závora A)

Pokud množina A není zdola omezená, pak klademe $\inf A := -\infty$. Pro prázdnou množinu klademe $\inf \emptyset := +\infty$.



Infimum množiny $A \subset \mathbb{R}$

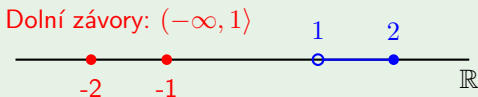
Definice:

Bud' A neprázdná zdola omezená podmnožina množiny reálných čísel. Číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ nazveme **infimem** množiny A , značíme $\inf A$, právě když

- 1 pro každé $x \in A$ platí $\alpha \leq x$, (α je **dolní závora** A)
- 2 pokud $\beta \in \mathbb{R}$ také splňuje předchozí bod, pak $\beta \leq \alpha$. (α je **největší dolní závora** A)

Pokud množina A není zdola omezená, pak klademe $\inf A := -\infty$. Pro prázdnou množinu klademe $\inf \emptyset := +\infty$.

Příklad ($\inf(1, 2) = 1$).



Největší dolní závora: 1

Supremum množiny $A \subset \mathbb{R}$

Definice:

Bud' A neprázdná shora omezená podmnožina množiny reálných čísel. Číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ nazveme **supremem** množiny A , značíme $\sup A$, právě když

- ① pro každé $x \in A$ platí $x \leq \alpha$, (α je **horní závora** A)
- ② pokud $\beta \in \mathbb{R}$ také splňuje předchozí bod, pak $\alpha \leq \beta$. (α je **nejmenší horní závora** A)

Pokud množina A není shora omezená, pak klademe $\sup A := +\infty$. Pro prázdnou množinu klademe $\sup \emptyset := -\infty$.



Supremum množiny $A \subset \mathbb{R}$

Definice:

Bud' A neprázdná shora omezená podmnožina množiny reálných čísel. Číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ nazveme **supremem** množiny A , značíme $\sup A$, právě když

- ① pro každé $x \in A$ platí $x \leq \alpha$, (α je **horní závora** A)
- ② pokud $\beta \in \mathbb{R}$ také splňuje předchozí bod, pak $\alpha \leq \beta$. (α je **nejmenší horní závora** A)

Pokud množina A není shora omezená, pak klademe $\sup A := +\infty$. Pro prázdnou množinu klademe $\sup \emptyset := -\infty$.

Věta:

Bud' A podmnožina množiny reálných čísel. Potom existuje její infimum ($\inf A$) a supremum ($\sup A$).



Supremum množiny $A \subset \mathbb{R}$

Definice:

Bud' A neprázdná shora omezená podmnožina množiny reálných čísel. Číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ nazveme **supremem** množiny A , značíme $\sup A$, právě když

- ① pro každé $x \in A$ platí $x \leq \alpha$, (α je **horní závora** A)
- ② pokud $\beta \in \mathbb{R}$ také splňuje předchozí bod, pak $\alpha \leq \beta$. (α je **nejmenší horní závora** A)

Pokud množina A není shora omezená, pak klademe $\sup A := +\infty$. Pro prázdnou množinu klademe $\sup \emptyset := -\infty$.

Věta:

Bud' A podmnožina množiny reálných čísel. Potom existuje její infimum ($\inf A$) a supremum ($\sup A$).

Důkaz.

Vynecháváme, plyne z Axiomu úplnosti množiny reálných čísel. □

Infimum a supremum: příklady

Příklad.

Pro interval $J = (-2, 1]$ platí

$$\max J = 1, \quad \sup J = 1, \quad \min J \text{ neexistuje}, \quad \inf J = -2.$$



Značení

Pro $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a množinu $M \subset D_f$ klademe

$$\inf_M f = \inf_{x \in M} f(x) := \inf\{f(x) \mid x \in M\},$$

$$\sup_M f = \sup_{x \in M} f(x) := \sup\{f(x) \mid x \in M\}.$$



Značení

Pro $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a množinu $M \subset D_f$ klademe

$$\inf_M f = \inf_{x \in M} f(x) := \inf \{f(x) \mid x \in M\},$$
$$\sup_M f = \sup_{x \in M} f(x) := \sup \{f(x) \mid x \in M\}.$$

Bud' $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spojitá funkce a $M \subset D_f$ uzavřený omezený interval. Potom klademe

$$\max_M f = \max_{x \in M} f(x) := \max \{f(x) \mid x \in M\},$$
$$\min_M f = \min_{x \in M} f(x) := \min \{f(x) \mid x \in M\}.$$

Připomeňme, že tato min a max existují díky spojitosti f a uzavřenosti M .

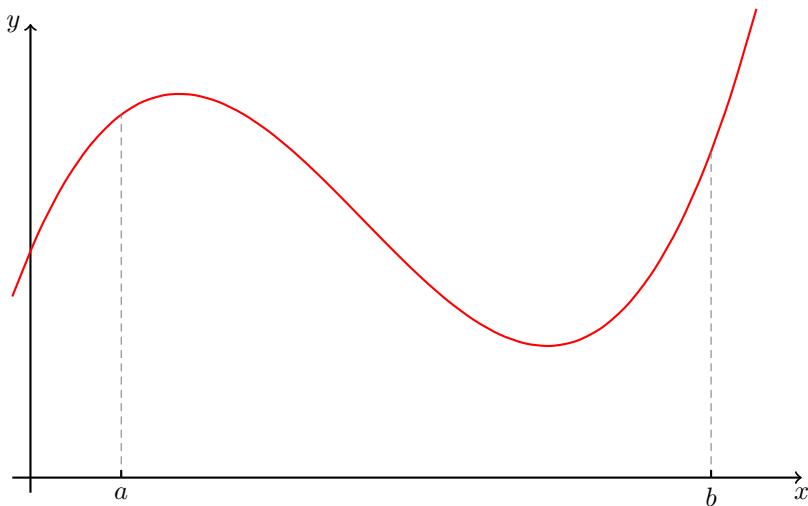


Hlavní body

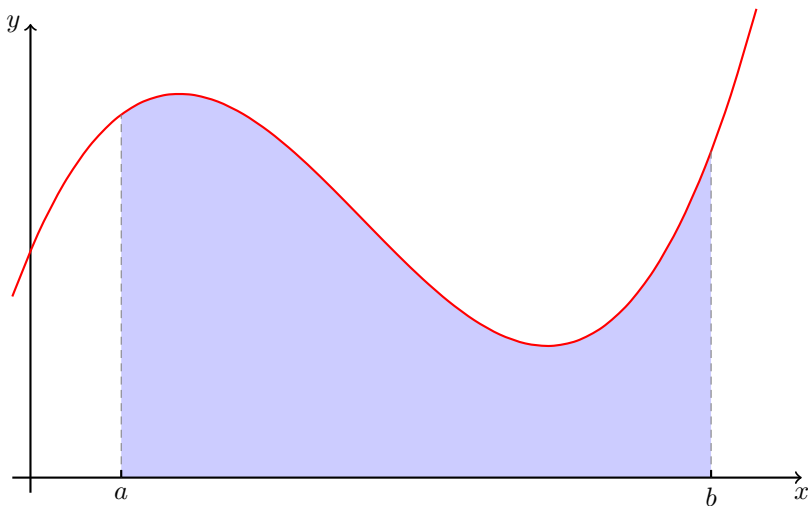
- 1 Supremum a infimum
- 2 Konstrukce Riemannova integrálu
- 3 Vlastnosti Riemannova integrálu
- 4 Per partes a substitute pro určitý integrál
- 5 Poznámky
- 6 Integrace sudých a lichých funkcí



Motivace: Výpočet obsahu plochy pod grafem funkce



Motivace: Výpočet obsahu plochy pod grafem funkce



Dělení intervalu $\langle a, b \rangle$

Definice:

Bud' dán interval $\langle a, b \rangle$. Konečnou množinu

$$\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$$

takovou, že

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

nazýváme **dělením intervalu** $\langle a, b \rangle$. Bodům x_k , $k = 1, 2, \dots, n-1$, říkáme **dělicí body intervalu** $\langle a, b \rangle$. Intervalu $\langle x_{k-1}, x_k \rangle$ říkáme **k -tý částečný interval** intervalu $\langle a, b \rangle$ při dělení σ . Číslo

$$\nu(\sigma) := \max\{\Delta_k \mid k = 1, 2, \dots, n\}, \quad \text{kde} \quad \Delta_k := x_k - x_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

nazýváme **normou dělení** σ .



Příklad dělení

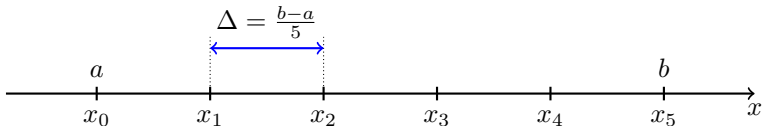
Příklad (Ekvidistantní dělení).

Pro interval $\langle a, b \rangle$ a $n \in \mathbb{N}$ položme $\Delta := \frac{b-a}{n}$ a

$$x_i := a + i \cdot \Delta, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Tedy

$$\sigma = \{a, a + \Delta, a + 2\Delta, \dots, a + (n-1)\Delta, a + n\Delta = b\}.$$



Horní a dolní součet

Bud'te funkce f definovaná a omezená na intervalu $J = \langle a, b \rangle$ a $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ dělení intervalu J . Označme

$$M_i(\sigma, f) := \sup_{\langle x_{i-1}, x_i \rangle} f \quad \text{a} \quad m_i(\sigma, f) := \inf_{\langle x_{i-1}, x_i \rangle} f.$$

pro každé $i = 1, 2, \dots, n$.



Horní a dolní součet

Bud'te funkce f definovaná a omezená na intervalu $J = \langle a, b \rangle$ a $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ dělení intervalu J . Označme

$$M_i(\sigma, f) := \sup_{\langle x_{i-1}, x_i \rangle} f \quad \text{a} \quad m_i(\sigma, f) := \inf_{\langle x_{i-1}, x_i \rangle} f.$$

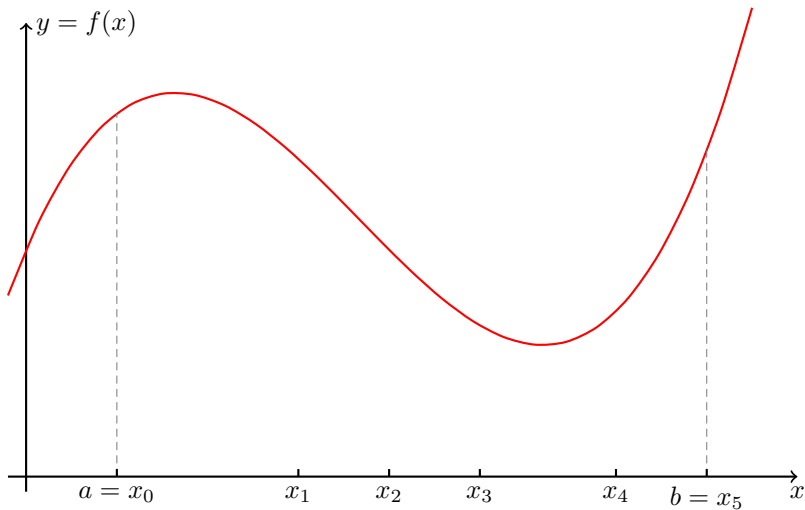
pro každé $i = 1, 2, \dots, n$.

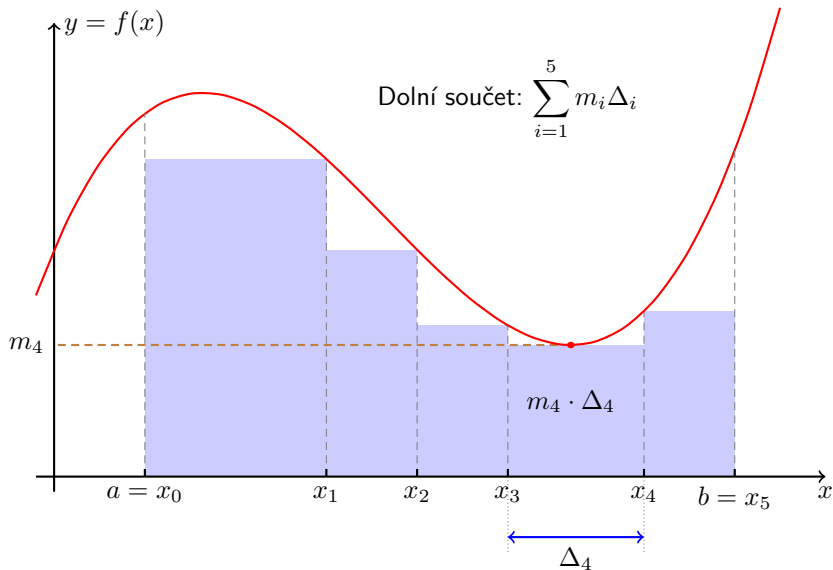
Potom součty

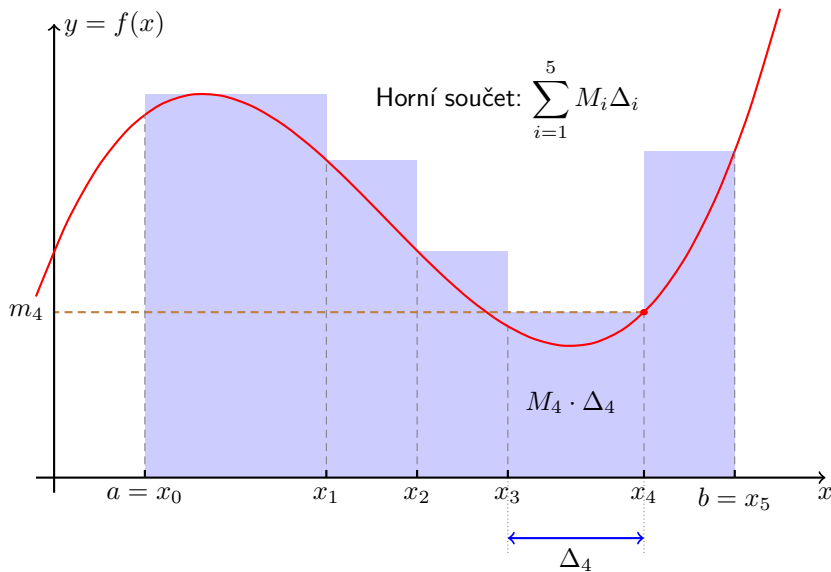
$$S(\sigma, f) := \sum_{i=1}^n M_i(\sigma, f) \Delta_i \quad \text{a} \quad s(\sigma, f) := \sum_{i=1}^n m_i(\sigma, f) \Delta_i$$

nazýváme **horním**, resp. **dolním**, **součtem funkce f** při dělení σ .









Horní a dolní integrál

Pro funkci f definovanou a omezenou na uzavřeném intervalu $J = \langle a, b \rangle$ definujeme čísla

$$\overline{\int_a^b} f(x) dx := \inf \{S(\sigma) | \sigma \text{ dělení } J\} \text{ a } \underline{\int_a^b} f(x) dx := \sup \{s(\sigma) | \sigma \text{ dělení } J\}.$$

a nazýváme **horním**, resp. **dolním**, **integrálem** funkce f na intervalu J .



Horní a dolní integrál

Pro funkci f definovanou a omezenou na uzavřeném intervalu $J = \langle a, b \rangle$ definujeme čísla

$$\overline{\int_a^b} f(x) \, dx := \inf \{ S(\sigma) \mid \sigma \text{ dělení } J \} \text{ a } \underline{\int_a^b} f(x) \, dx := \sup \{ s(\sigma) \mid \sigma \text{ dělení } J \}.$$

a nazýváme **horním**, resp. **dolním**, **integrálem** funkce f na intervalu J .

Definice:

Pokud pro funkci f definovanou a omezenou na uzavřeném intervalu J platí

$$\overline{\int_a^b} f(x) \, dx = \underline{\int_a^b} f(x) \, dx \in \mathbb{R},$$

pak jejich společnou hodnotu nazýváme **Riemannovým integrálem** funkce f na intervalu J a toto číslo značíme symboly

$$\int_a^b f, \quad \text{případně} \quad \int_a^b f(x) \, dx.$$

Postačující podmínka pro existenci Riemannova integrálu

Posloupnost dělení σ_n nazveme **normální**, pokud pro její normy platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu(\sigma_n) = 0.$$



Postačující podmínka pro existenci Riemannova integrálu

Posloupnost dělení σ_n nazveme **normální**, pokud pro její normy platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu(\sigma_n) = 0.$$

Věta (Postačující podmínka pro existenci Riemannova integrálu):

Bud' f spojitá funkce na intervalu $\langle a, b \rangle$. Potom existuje její Riemannův integrál na intervalu $\langle a, b \rangle$.



Postačující podmínka pro existenci Riemannova integrálu

Posloupnost dělení σ_n nazveme **normální**, pokud pro její normy platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu(\sigma_n) = 0.$$

Věta (Postačující podmínka pro existenci Riemannova integrálu):

Bud' f spojitá funkce na intervalu $\langle a, b \rangle$. Potom existuje její Riemannův integrál na intervalu $\langle a, b \rangle$.

Pokud je navíc $(\sigma_n)_{n=1}^{\infty}$ normální posloupnost dělení intervalu $\langle a, b \rangle$ potom limity

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s(\sigma_n, f) \quad \text{a} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S(\sigma_n, f)$$

existují, a jsou rovny Riemannově integrálu funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$.



Definice:

Pro funkci f spojitou na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ a dělení $\sigma = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\}$ tohoto intervalu definujeme **integrální součet funkce f při dělení σ** předpisem

$$\mathcal{J}(\sigma) \equiv \mathcal{J}(\sigma, \alpha) = \sum_{i=1}^n f(\alpha_i) \Delta_i,$$

kde $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ a α_i patří do intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$, $i = 1, 2, \dots, n$.



Definice:

Pro funkci f spojitou na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ a dělení $\sigma = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\}$ tohoto intervalu definujeme **integrální součet funkce f při dělení σ** předpisem

$$\mathcal{J}(\sigma) \equiv \mathcal{J}(\sigma, \alpha) = \sum_{i=1}^n f(\alpha_i) \Delta_i,$$

kde $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ a α_i patří do intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Vztah mezi dolním a horním součtem a integrálním součtem funkce f při dělení σ je dán nerovnostmi

$$s(\sigma) \leq \mathcal{J}(\sigma) \leq S(\sigma).$$



Definice:

Pro funkci f spojitou na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ a dělení $\sigma = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\}$ tohoto intervalu definujeme **integrální součet funkce f při dělení σ** předpisem

$$\mathcal{J}(\sigma) \equiv \mathcal{J}(\sigma, \alpha) = \sum_{i=1}^n f(\alpha_i) \Delta_i,$$

kde $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ a α_i patří do intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Vztah mezi dolním a horním součtem a integrálním součtem funkce f při dělení σ je dán nerovnostmi

$$s(\sigma) \leq \mathcal{J}(\sigma) \leq S(\sigma).$$

Riemannův integrál funkce f spojitě na intervalu $\langle a, b \rangle$ lze tedy počítat i jako limitu z integrálních součtů

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{J}(\sigma_n),$$

kde $(\sigma_n)_{n=1}^{\infty}$ je libovolná normální posloupnost dělení.



Příklady

Příklad.

Vypočtete integrál z konstantní funkce $f(x) = c$ na intervalu $\langle a, b \rangle$.



Příklady

Příklad.

Vypočtete integrál z konstantní funkce $f(x) = c$ na intervalu $\langle a, b \rangle$.

Pro libovolné dělení σ intervalu $\langle a, b \rangle$ platí

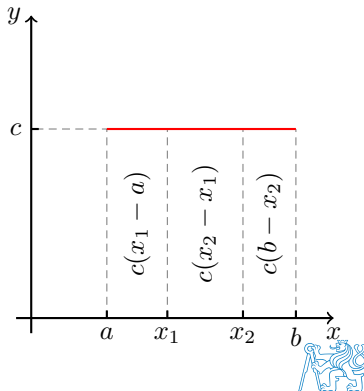
$$s(\sigma) = S(\sigma) = \mathcal{J}(\sigma) = c(b - a).$$

Takže pro libovolnou normální posloupnost (σ_n) dělení intervalu $\langle a, b \rangle$ dostáváme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s(\sigma_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(\sigma_n) = c(b - a).$$

Riemannův integrál funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$ je pak

$$\int_a^b f = c(b - a).$$



Příklad.

Vypočtete Riemannův integrál funkce $f(x) = x$ na intervalu $J = \langle 0, 1 \rangle$.



Příklad.

Vypočtete Riemannův integrál funkce $f(x) = x$ na intervalu $J = \langle 0, 1 \rangle$.

Zvolme normální posloupnost $(\sigma_n)_{n=1}^{\infty}$ ekvidistantních dělení intervalu J .

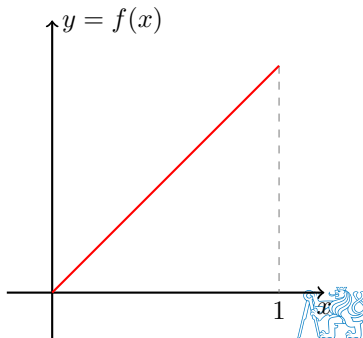
$$\sigma_n = \left\{ 0 = x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)} = 1 \right\}, \quad x_i^{(n)} = i \cdot \frac{1}{n}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Pro dolní součet při dělení σ_n dostáváme

$$s(\sigma_n) = \sum_{i=1}^n x_{i-1}^{(n)} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2}.$$

Tudíž

$$\int_0^1 x \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} s(\sigma_n) = \frac{1}{2}.$$



Příklad.

Vypočtete Riemannův integrál funkce $f(x) = x$ na intervalu $J = \langle 0, 1 \rangle$.

Zvolme normální posloupnost $(\sigma_n)_{n=1}^{\infty}$ ekvidistantních dělení intervalu J .

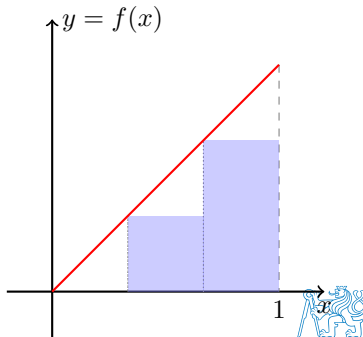
$$\sigma_n = \left\{ 0 = x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)} = 1 \right\}, \quad x_i^{(n)} = i \cdot \frac{1}{n}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Pro dolní součet při dělení σ_n dostáváme

$$s(\sigma_n) = \sum_{i=1}^n x_{i-1}^{(n)} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2}.$$

Tudíž

$$\int_0^1 x \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} s(\sigma_n) = \frac{1}{2}.$$



Příklad.

Vypočtěte Riemannův integrál funkce $f(x) = x$ na intervalu $J = \langle 0, 1 \rangle$.

Zvolme normální posloupnost $(\sigma_n)_{n=1}^{\infty}$ ekvidistantních dělení intervalu J .

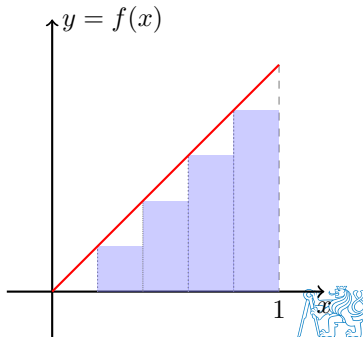
$$\sigma_n = \left\{ 0 = x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)} = 1 \right\}, \quad x_i^{(n)} = i \cdot \frac{1}{n}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Pro dolní součet při dělení σ_n dostáváme

$$s(\sigma_n) = \sum_{i=1}^n x_{i-1}^{(n)} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2}.$$

Tudíž

$$\int_0^1 x \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} s(\sigma_n) = \frac{1}{2}.$$



Příklad.

Vypočtete Riemannův integrál funkce $f(x) = x$ na intervalu $J = \langle 0, 1 \rangle$.

Zvolme normální posloupnost $(\sigma_n)_{n=1}^{\infty}$ ekvidistantních dělení intervalu J .

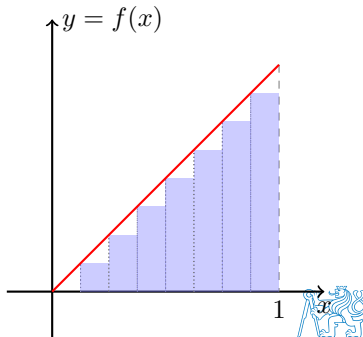
$$\sigma_n = \left\{ 0 = x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)} = 1 \right\}, \quad x_i^{(n)} = i \cdot \frac{1}{n}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Pro dolní součet při dělení σ_n dostáváme

$$s(\sigma_n) = \sum_{i=1}^n x_{i-1}^{(n)} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2}.$$

Tudíž

$$\int_0^1 x \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} s(\sigma_n) = \frac{1}{2}.$$



Příklad.

Vypočtěte Riemannův integrál funkce $f(x) = x$ na intervalu $J = \langle 0, 1 \rangle$.

Zvolme normální posloupnost $(\sigma_n)_{n=1}^{\infty}$ ekvidistantních dělení intervalu J .

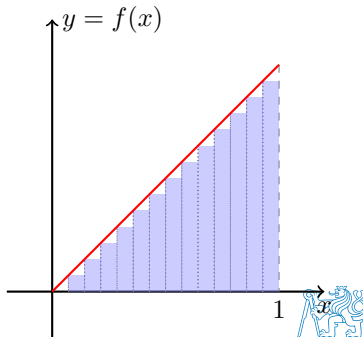
$$\sigma_n = \left\{ 0 = x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)} = 1 \right\}, \quad x_i^{(n)} = i \cdot \frac{1}{n}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Pro dolní součet při dělení σ_n dostáváme

$$s(\sigma_n) = \sum_{i=1}^n x_{i-1}^{(n)} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2}.$$

Tudíž

$$\int_0^1 x \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} s(\sigma_n) = \frac{1}{2}.$$



Hlavní body

- 1 Supremum a infimum
- 2 Konstrukce Riemannova integrálu
- 3 Vlastnosti Riemannova integrálu**
- 4 Per partes a substitute pro určitý integrál
- 5 Poznámky
- 6 Integrace sudých a lichých funkcí



Linearita integrálu

Věta (Aditivita integrálu):

Nechť f a g jsou spojité funkce na intervalu $\langle a, b \rangle$. Potom pro Riemannův integrál funkce $f + g$ (která je také automaticky spojitá na $\langle a, b \rangle$) platí

$$\int_a^b (f + g)(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx.$$



Linearita integrálu

Věta (Aditivita integrálu):

Nechť f a g jsou spojité funkce na intervalu $\langle a, b \rangle$. Potom pro Riemannův integrál funkce $f + g$ (která je také automaticky spojitá na $\langle a, b \rangle$) platí

$$\int_a^b (f + g)(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx.$$

Věta (Multiplikativita integrálu):

Nechť f je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ a $c \in \mathbb{R}$ je konstanta. Potom pro Riemannův integrál funkce cf platí

$$\int_a^b (cf)(x) \, dx = c \int_a^b f(x) \, dx.$$



Chování v mezích

Věta (Aditivita integrálu v mezích):

Riemannův integrál funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$ existuje, právě když pro každé $c \in (a, b)$ existují Riemannovy integrály funkce f na intervalech $\langle a, c \rangle$ a $\langle c, b \rangle$. V takovém případě navíc platí

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx.$$



Chování v mezích

Věta (Aditivita integrálu v mezích):

Riemannův integrál funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$ existuje, právě když pro každé $c \in (a, b)$ existují Riemannovy integrály funkce f na intervalech $\langle a, c \rangle$ a $\langle c, b \rangle$. V takovém případě navíc platí

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx.$$

Věta (Nerovnosti mezi integrály):

Nechť jsou f a g spojité funkce na intervalu $\langle a, b \rangle$ a necht' platí nerovnost $f(x) \leq g(x)$ pro všechna $x \in \langle a, b \rangle$. Potom pro jejich Riemannovy integrály platí

$$\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx.$$

Newtonova formule

Poznámka:

Následující věta odhaluje vztah mezi určitým (Riemannův) a neurčitým (primitivní funkce) integrálem. Umožňuje nám počítat Riemannův integrál bez explicitního použití limitní definice.



Newtonova formule

Poznámka:

Následující věta odhaluje vztah mezi určitým (Riemannův) a neurčitým (primitivní funkce) integrálem. Umožňuje nám počítat Riemannův integrál bez explicitního použití limitní definice.

Věta (Newtonova formule):

Nechť f je funkce spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ s primitivní funkcí F . Pak platí rovnost

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a) =: \left[F(x) \right]_a^b.$$



Důkaz.

Uvažme $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ dělení intervalu $\langle a, b \rangle$. Použijeme Lagrangeovu větu o přírůstku funkce na funkci F a intervaly $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ postupně pro $i = 1, 2, \dots, n$,

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \sum_{i=1}^n \left(F(x_i) - F(x_{i-1}) \right) = \sum_{i=1}^n F'(\alpha_i)(x_i - x_{i-1}) = \\ &= \sum_{i=1}^n f(\alpha_i) \Delta_i, \end{aligned}$$

kde $\alpha_i \in (x_{i-1}, x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Důkaz.

Uvažme $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ dělení intervalu $\langle a, b \rangle$. Použijeme Lagrangeovu větu o přírůstku funkce na funkci F a intervaly $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ postupně pro $i = 1, 2, \dots, n$,

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \sum_{i=1}^n \left(F(x_i) - F(x_{i-1}) \right) = \sum_{i=1}^n F'(\alpha_i)(x_i - x_{i-1}) = \\ &= \sum_{i=1}^n f(\alpha_i) \Delta_i, \end{aligned}$$

kde $\alpha_i \in (x_{i-1}, x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Takže

$$F(b) - F(a) = \mathcal{J}(\sigma).$$

Uvážíme-li nyní libovolnou normální posloupnost dělení (σ_n) pak

$$F(b) - F(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{J}(\sigma_n) = \int_a^b f(x) dx.$$



Příklady

Příklad.

Pro $a < b$ vypočtěte integrál

$$\int_a^b e^x dx.$$



Příklady

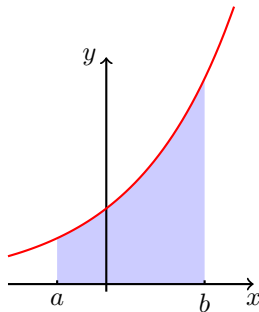
Příklad.

Pro $a < b$ vypočtěte integrál

$$\int_a^b e^x dx.$$

Primitivní funkcí k e^x je funkce e^x . Pak

$$\int_a^b e^x dx = \left[e^x \right]_a^b = e^b - e^a.$$



Příklad.

Spočítejte integrál

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx.$$



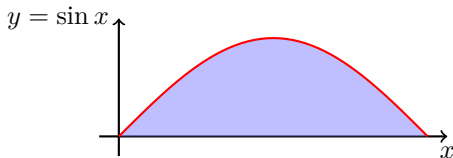
Příklad.

Spočítejte integrál

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx.$$

Primitivní funkcí k funkci $\sin x$ je funkce $-\cos x$. Proto

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = \left[-\cos x \right]_0^{\pi} = -\cos \pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2.$$

Plocha jednoho „hrbu“ grafu funkce $\sin$ je tedy 2 (v daných jednotkách plochy).

Hlavní body

- 1 Supremum a infimum
- 2 Konstrukce Riemannova integrálu
- 3 Vlastnosti Riemannova integrálu
- 4 Per partes a substitute pro určitý integrál
- 5 Poznámky
- 6 Integrace sudých a lichých funkcí



Per partes pro určitý integrál

Věta:

Nechť f a g jsou funkce spojité na $\langle a, b \rangle$, f má spojitou derivaci na intervalu $\langle a, b \rangle$ a nechť G je primitivní funkce k funkci g na intervalu $\langle a, b \rangle$. Potom

$$\int_a^b f(x)g(x) \, dx = [f(x)G(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x) \, dx.$$



Per partes pro určitý integrál

Věta:

Nechť f a g jsou funkce spojité na $\langle a, b \rangle$, f má spojitou derivaci na intervalu $\langle a, b \rangle$ a nechť G je primitivní funkce k funkci g na intervalu $\langle a, b \rangle$. Potom

$$\int_a^b f(x)g(x) \, dx = [f(x)G(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x) \, dx.$$

Důkaz.

Funkce fG je primitivní funkcí k funkci $f'G + fg$ na intervalu (a, b) a spojitá na $\langle a, b \rangle$. Předpoklady spojitosti na intervalu $\langle a, b \rangle$ zaručují existenci integrálů $\int_a^b f'G$ a $\int_a^b fg$. Použijeme-li linearitu integrálu a Newtonovu formuli, dostáváme

$$\int_a^b f'(x)G(x) \, dx + \int_a^b f(x)g(x) \, dx = \int_a^b (fG)'(x) \, dx = [f(x)G(x)]_a^b. \quad \square$$

Příklad.

Vypočtěte

$$\int_0^1 \ln(1+x) \, dx.$$



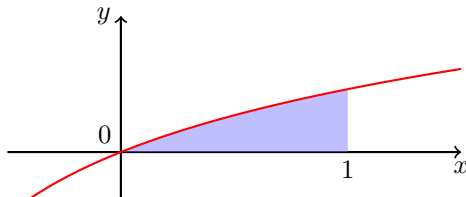
Příklad.

Vypočtete

$$\int_0^1 \ln(1+x) \, dx.$$

Derivujeme $\ln(1+x)$ a integrujeme 1,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln(1+x) \, dx &= \left[x \ln(1+x) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x} \, dx = \\ &= \ln(2) - \left[x - \ln|1+x| \right]_0^1 = 2 \ln(2) - 1. \end{aligned}$$



Substituce v určitém integrálu

Poznámka:

Zavádíme následující značení

- $\int_a^a f := 0$,
- pro $a > b$ klademe $\int_a^b f := -\int_b^a f$.

Věta (O substituci I):

Nechť pro funkce f a φ platí

- 1 φ a její derivace φ' jsou spojité na $\langle \alpha, \beta \rangle$,
- 2 f je spojitá na $\varphi(\langle \alpha, \beta \rangle)$.

Potom

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx.$$

Podobně můžeme formulovat i druhou větu o substituci, kterou známe pro neurčitý integrál.



Příklad.

Vypočtete integrál

$$\int_0^{\ln(2)} \frac{e^{-x}}{\frac{1}{2} + e^{-x}} dx.$$

Použijeme substituci $y = \varphi(x) = \frac{1}{2} + e^{-x}$. Potom

$$\int_0^{\ln(2)} \frac{e^{-x}}{\frac{1}{2} + e^{-x}} dx = - \int_{3/2}^1 \frac{1}{y} dy = \left[\ln |y| \right]_1^{3/2} = \ln \frac{3}{2}.$$



Hlavní body

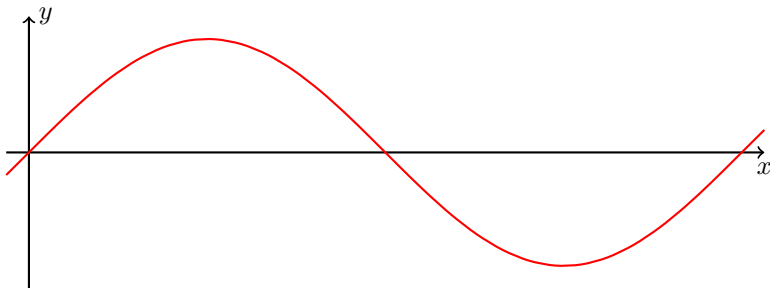
- 1 Supremum a infimum
- 2 Konstrukce Riemannova integrálu
- 3 Vlastnosti Riemannova integrálu
- 4 Per partes a substitute pro určitý integrál
- 5 Poznámky
- 6 Integrace sudých a lichých funkcí



Poznámka:

Určitý integrál interpretujeme jako obsah plochy mezi grafem funkce a osou x . Ovšem tento obsah se počítá i se znaménkem:

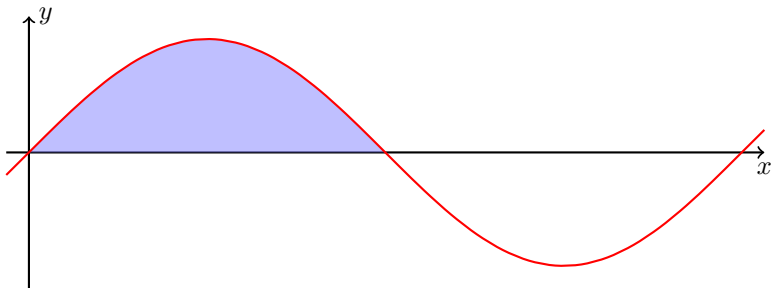
$$\int_0^{\pi} \sin(x) dx = 2, \quad \int_0^{2\pi} \sin(x) dx = 0, \quad \int_{\pi}^{2\pi} \sin(x) dx = -2.$$



Poznámka:

Určitý integrál interpretujeme jako obsah plochy mezi grafem funkce a osou x .
Ovšem tento obsah se počítá i se znaménkem:

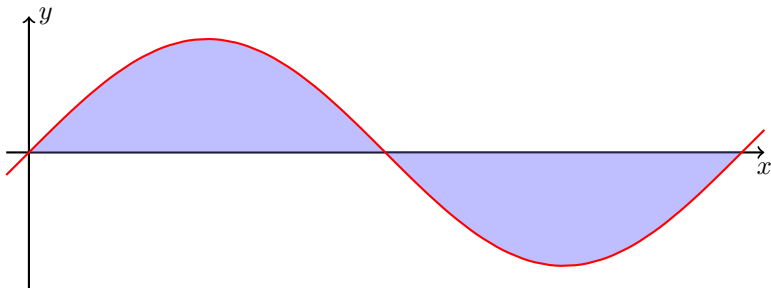
$$\int_0^{\pi} \sin(x) dx = 2, \quad \int_0^{2\pi} \sin(x) dx = 0, \quad \int_{\pi}^{2\pi} \sin(x) dx = -2.$$



Poznámka:

Určitý integrál interpretujeme jako obsah plochy mezi grafem funkce a osou x . Ovšem tento obsah se počítá i se znaménkem:

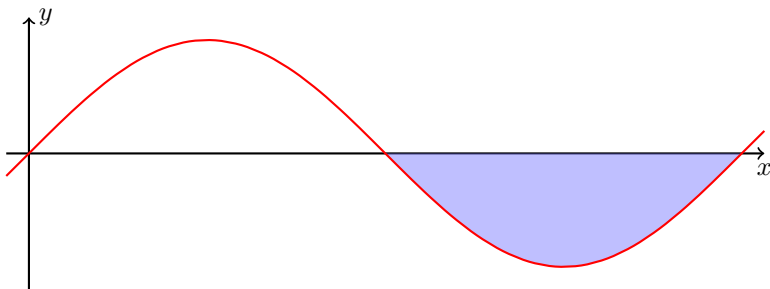
$$\int_0^{\pi} \sin(x) dx = 2, \quad \int_0^{2\pi} \sin(x) dx = 0, \quad \int_{\pi}^{2\pi} \sin(x) dx = -2.$$



Poznámka:

Určitý integrál interpretujeme jako obsah plochy mezi grafem funkce a osou x .
Ovšem tento obsah se počítá i se znaménkem:

$$\int_0^{\pi} \sin(x) dx = 2, \quad \int_0^{2\pi} \sin(x) dx = 0, \quad \int_{\pi}^{2\pi} \sin(x) dx = -2.$$



Nespojité funkce

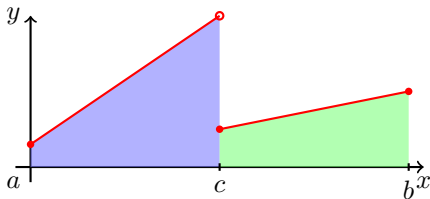
Poznámka:

Předpokládejme, že pro funkci f na intervalu $\langle a, b \rangle$ platí

- existuje $c \in (a, b)$ tak, že f je spojitá na $\langle a, c \rangle$ i (c, b) ,
- existují jednostranné limity funkce f v bodě c .

Potom můžeme počítat její Riemannův integrál následujícím způsobem

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$



Příklad.

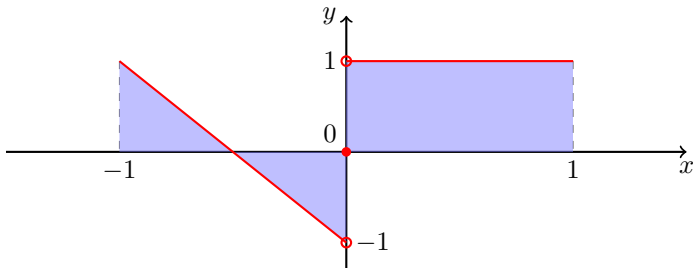
Vypočtete integrál $\int_{-1}^1 f(x)dx$, kde $f(x) = |x| - x + \operatorname{sgn}(x)$.

Funkce f není spojitá v bodě 0:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = -1.$$

Takže

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{-1}^0 (-2x - 1)dx + \int_0^1 1dx = -[x^2 + x]_{-1}^0 + 1 = 1.$$



Zobecněný Riemannův integrál

Definice:

Nechť f je funkce definovaná na intervalu $\langle a, b \rangle$ pro nějaké $a \in \mathbb{R}$ a $b \in (a, +\infty)$, která je Riemannovsky integrabilní na intervalu $\langle a, c \rangle$ pro každé $c \in (a, b)$. Pokud existuje konečná limita

$$\lim_{c \rightarrow b-} \int_a^c f(x) \, dx,$$

pak její hodnotu značíme

$$\int_a^b f(x) \, dx,$$

nazýváme **zobecněným Riemannovým integrálem** funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$ a říkáme, že integrál $\int_a^b f(x) \, dx$ konverguje.



Zobecněný Riemannův integrál

Definice:

Nechť f je funkce definovaná na intervalu $\langle a, b \rangle$ pro nějaké $a \in \mathbb{R}$ a $b \in (a, +\infty)$, která je Riemannovsky integrabilní na intervalu $\langle a, c \rangle$ pro každé $c \in (a, b)$. Pokud existuje konečná limita

$$\lim_{c \rightarrow b-} \int_a^c f(x) \, dx,$$

pak její hodnotu značíme

$$\int_a^b f(x) \, dx,$$

nazýváme **zobecněným Riemannovým integrálem** funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$ a říkáme, že integrál $\int_a^b f(x) \, dx$ konverguje.

- Pokud $\int_a^b |f(x)| \, dx$ konverguje, tak lze ukázat, že i $\int_a^b f(x) \, dx$ konverguje. V takovém případě říkáme, že f má **absolutně konvergentní zobecněný Riemannův integrál** na $\langle a, b \rangle$.



Zobecněný Riemannův integrál

Definice:

Nechť f je funkce definovaná na intervalu $\langle a, b \rangle$ pro nějaké $a \in \mathbb{R}$ a $b \in (a, +\infty)$, která je Riemannovsky integrabilní na intervalu $\langle a, c \rangle$ pro každé $c \in (a, b)$. Pokud existuje konečná limita

$$\lim_{c \rightarrow b-} \int_a^c f(x) \, dx,$$

pak její hodnotu značíme

$$\int_a^b f(x) \, dx,$$

nazýváme **zobecněným Riemannovým integrálem** funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$ a říkáme, že integrál $\int_a^b f(x) \, dx$ konverguje.

- Pokud $\int_a^b |f(x)| \, dx$ konverguje, tak lze ukázat, že i $\int_a^b f(x) \, dx$ konverguje. V takovém případě říkáme, že f má **absolutně konvergentní zobecněný Riemannův integrál** na $\langle a, b \rangle$.
- Analogicky definujeme předchozí pojmy pro interval (a, b) .



Zobecněný Riemannův integrál

- Předchozí definice je zajímavá, především, když $b = +\infty$, anebo když funkci v bodě b nejde spojitě dodefinovat.



Zobecněný Riemannův integrál

- Předchozí definice je zajímavá, především, když $b = +\infty$, anebo když funkci v bodě b nejde spojitě dodefinovat.
- Platí tedy např.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_1^c \frac{1}{x^2} dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{c} + \frac{1}{1} \right) = 1$$



Zobecněný Riemannův integrál

- Předchozí definice je zajímavá, především, když $b = +\infty$, anebo když funkci v bodě b nejde spojitě dodefinovat.
- Platí tedy např.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_1^c \frac{1}{x^2} dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{c} + \frac{1}{1} \right) = 1$$

a

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{c \rightarrow 0_+} \int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{c \rightarrow 0_+} (2 - 2\sqrt{c}) = 2.$$



Zobecněný Riemannův integrál

- Předchozí definice je zajímavá, především, když $b = +\infty$, anebo když funkci v bodě b nejde spojitě dodefinovat.
- Platí tedy např.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_1^c \frac{1}{x^2} dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{c} + \frac{1}{1} \right) = 1$$

a

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{c \rightarrow 0+} \int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{c \rightarrow 0+} (2 - 2\sqrt{c}) = 2.$$

- Dále se můžeme zabývat situací, kdy chceme dát smysl $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$. Zde se omezíme pouze na absolutně konvergentní případy pro spojitě funkce.



Zobecněný Riemannův integrál

Definice:

Buď f spojitá funkce definovaná na $\mathbb{R}$. Pokud existuje konečná limita

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} \int_{-c}^c |f(x)| dx,$$

pak tuto její hodnotu značíme $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$ a o f říkáme, že má **absolutně konvergentní zobecněný Riemannův integrál** na $\mathbb{R}$.



Zobecněný Riemannův integrál

Definice:

Bud' f spojitá funkce definovaná na $\mathbb{R}$. Pokud existuje konečná limita

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} \int_{-c}^c |f(x)| dx,$$

pak tuto její hodnotu značíme $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$ a o f říkáme, že má **absolutně konvergentní zobecněný Riemannův integrál na $\mathbb{R}$** .

- Pokud má funkce absolutně konvergentní zobecněný Riemannův integrál na $\mathbb{R}$, pak i limita

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} \int_{-c}^c f(x) dx \quad \text{existuje a značíme ji} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx.$$

Tuto hodnotu pak nazýváme **zobecněným Riemannovým interálem f na $\mathbb{R}$** .



Zobecněný Riemannův integrál

Definice:

Bud' f spojitá funkce definovaná na $\mathbb{R}$. Pokud existuje konečná limita

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} \int_{-c}^c |f(x)| dx,$$

pak tuto její hodnotu značíme $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$ a o f říkáme, že má **absolutně konvergentní zobecněný Riemannův integrál** na $\mathbb{R}$.

- Pokud má funkce absolutně konvergentní zobecněný Riemannův integrál na $\mathbb{R}$, pak i limita

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} \int_{-c}^c f(x) dx \quad \text{existuje a značíme ji} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx.$$

Tuto hodnotu pak nazýváme **zobecněným Riemannovým interálem** f na $\mathbb{R}$.

- Absolutní konvergence zajišťuje, že hodnota zobecněného Riemannova integrálu nezávisí na způsobu jakým meze „posíláme“ do nekonečna.



Hlavní body

- 1 Supremum a infimum
- 2 Konstrukce Riemannova integrálu
- 3 Vlastnosti Riemannova integrálu
- 4 Per partes a substitute pro určitý integrál
- 5 Poznámky
- 6 Integrace sudých a lichých funkcí



Využití symetrií funkce při integraci

Věta:

Nechť f je funkce spojitá na uvažovaných intervalech.

- ① Je-li f sudá funkce na $\langle -a, a \rangle$, pak

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

- ② Je-li f lichá funkce na $\langle -a, a \rangle$, pak

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

- ③ Je-li f periodická na $\mathbb{R}$ s periodou T , pak pro každé $a, b \in \mathbb{R}$ platí

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_b^{b+T} f(x) dx.$$

Důkaz.

- ❶ Pomocí substitute $y = -x$ dostáváme

$$\int_{-a}^0 f(x)dx = \int_a^0 f(-y)(-1)dy = \int_0^a f(y)dy.$$

- ❷ Stejným způsobem jako v prvním bodě odvodíme

$$\int_{-a}^0 f(x)dx = - \int_0^a f(x)dx.$$

- ❸ Pomocí substitute $y = x + T$ a periodicity f snadno nahlédneme, že

$$\begin{aligned} \int_a^{a+T} f(x)dx &= \int_a^b f(x)dx + \int_b^{a+T} f(x)dx = \int_{a+T}^{b+T} f(y)dy + \int_b^{a+T} f(x)dx = \\ &= \int_b^{a+T} f(x)dx + \int_{a+T}^{b+T} f(x)dx = \int_b^{b+T} f(x)dx. \end{aligned}$$

Příklad.

Vypočítejte integrály

$$\int_{-2}^2 (x^3 + 3x^2 - x) dx, \quad \int_{-1}^1 x e^{x^2} dx, \quad \int_0^{2\pi} |\sin x| dx.$$

$$\int_{-2}^2 (x^3 + 3x^2 - x) dx = 3 \cdot 2 \int_0^2 x^2 dx = 3 \cdot 2 \cdot \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = 16.$$

$$\int_{-1}^1 x e^{-x^2} dx = 0.$$

V posledním případě je integrand funkce periodická s periodou π a navíc sudá, proto

$$\int_0^{2\pi} |\sin x| dx = \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| dx = 2 \int_0^{\pi} \sin x dx = 2 \left[-\cos x \right]_0^{\pi} = 4.$$

