

Základy matematické analýzy

Příklady a Landauova notace

Jitka Hrabáková¹, Tomáš Kalvoda², Ivo Petr³

¹`jitka.hrabakova@fit.cvut.cz` ²`tomas.kalvoda@fit.cvut.cz`, ³`ivo.petr@fit.cvut.cz`,

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze

4. září 2019
ZS 2018/2019



Hlavní body

- 1 Obsahy plošných útvarů
- 2 Úvod do Landauovy symboliky
- 3 Odhadování rychlosti růstu součtů



Hlavní body

- 1 Obsahy plošných útvarů
- 2 Úvod do Landauovy symboliky
- 3 Odhadování rychlosti růstu součtů

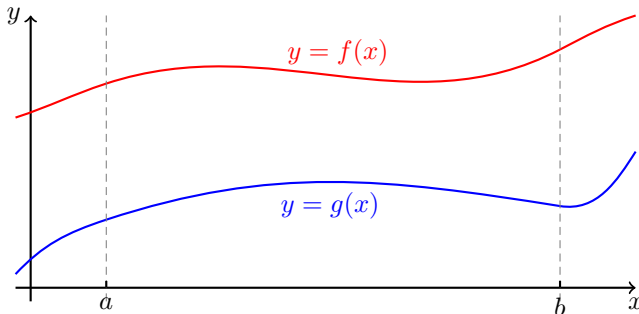


Plocha útvaru ohraničeného dvěma funkcemi

Věta:

Nechť f a g jsou funkce spojitě na $\langle a, b \rangle$ takové, že $f(x) \geq g(x)$ pro každé $x \in \langle a, b \rangle$. Pak obsah plochy P ohraničené přímkami $x = a$ a $x = b$ a grafy funkcí f a g je rovna

$$P = \int_a^b (f(x) - g(x)) \, dx.$$

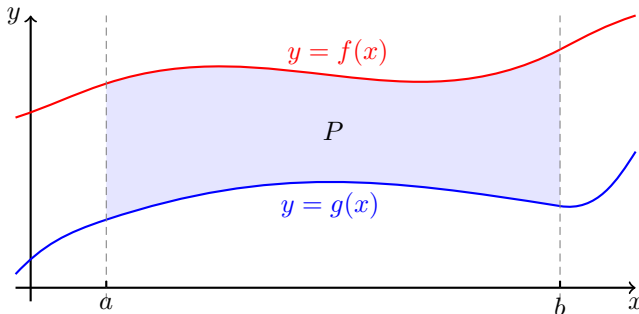


Plocha útvaru ohraničeného dvěma funkcemi

Věta:

Nechť f a g jsou funkce spojité na $\langle a, b \rangle$ takové, že $f(x) \geq g(x)$ pro každé $x \in \langle a, b \rangle$. Pak obsah plochy P ohraničené přímkami $x = a$ a $x = b$ a grafy funkcí f a g je rovna

$$P = \int_a^b (f(x) - g(x)) \, dx.$$



Příklad

Příklad.

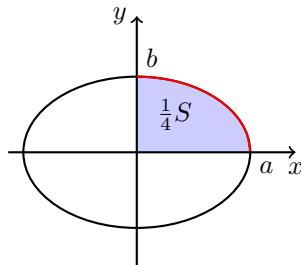
Vypočtete obsah S elipsy s hlavní poloosou a a vedlejší poloosou b .



Příklad

Příklad.

Vypočtete obsah S elipsy s hlavní poloosou a a vedlejší poloosou b .

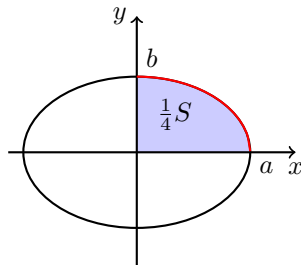


Příklad

Příklad.

Vypočtěte obsah S elipsy s hlavní poloosou a a vedlejší poloosou b .

Rovnice elipsy zní $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Vrchní oblouk elipsy je popsán funkcí $f(x) = b\sqrt{1 - x^2/a^2}$, $D_f = \langle 0, a \rangle$.



Příklad

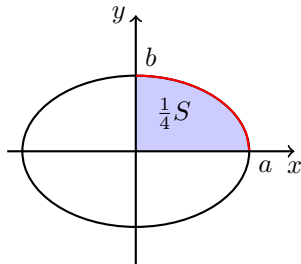
Příklad.

Vypočtete obsah S elipsy s hlavní poloosou a a vedlejší poloosou b .

Rovnice elipsy zní $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Vrchní oblouk elipsy je popsán funkcí $f(x) = b\sqrt{1 - x^2/a^2}$, $D_f = \langle 0, a \rangle$.

Tudíž, použijeme-li substituci $x = a \sin t$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}S &= \int_0^a f(x)dx = b \int_0^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}dx = \\ &= b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2(t)} \cdot a \cos(t)dt = \\ &= ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)dt = \frac{\pi}{4}ab.\end{aligned}$$



Dostáváme $S = \pi ab$.



Příklad

Příklad.

Spočítejte obsah plochy ohraničené křivkami $y = x^3$ a $y = x$.



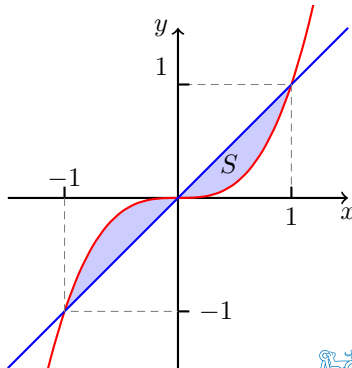
Příklad

Příklad.

Spočítejte obsah plochy ohraničené křivkami $y = x^3$ a $y = x$.

Nejprve nalezneme průsečíky grafů. Řešením rovnice $x^3 = x$ jsou $x = -1$, $x = 1$ a $x = 0$. Dostáváme proto průsečíky

$$(-1, -1), (1, 1) \text{ a } (0, 0).$$



Příklad

Příklad.

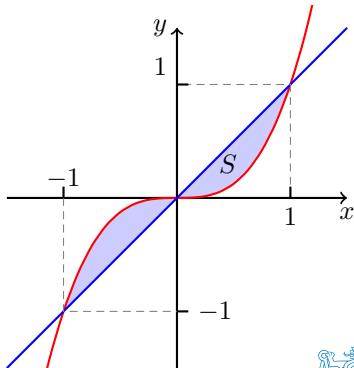
Spočítejte obsah plochy ohraničené křivkami $y = x^3$ a $y = x$.

Nejprve nalezneme průsečíky grafů. Řešením rovnice $x^3 = x$ jsou $x = -1$, $x = 1$ a $x = 0$. Dostáváme proto průsečíky

$$(-1, -1), (1, 1) \text{ a } (0, 0).$$

Z náčrtku (resp. průběhu) je pak patrné, že obsah plochy je

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^1 (x - x^3) dx = 2 \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \\ &= 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$



Příklad

Příklad.

Nalezněte obsah plochy ohraničené křivkami

$$y = \frac{1}{4}x^2 - 1, \quad y = 1 - \frac{1}{4}x^2, \quad x^2 + y^2 = 1.$$



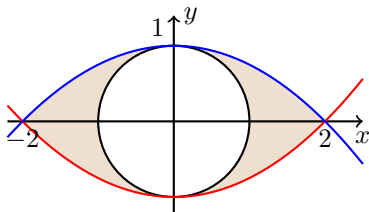
Příklad

Příklad.

Nalezněte obsah plochy ohraničené křivkami

$$y = \frac{1}{4}x^2 - 1, \quad y = 1 - \frac{1}{4}x^2, \quad x^2 + y^2 = 1.$$

Obsah útvaru bez vyjmuté kružnice je



$$\begin{aligned} & \int_{-2}^2 \left(1 - \frac{1}{4}x^2\right) - \left(\frac{1}{4}x^2 - 1\right) dx = \\ & 2 \int_0^2 2 - \frac{1}{2}x^2 dx = 2 \left[2x - \frac{x^3}{6}\right]_0^2 = \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

Takže plocha našeho útvaru je

$$S = \frac{16}{3} - \pi.$$



Hlavní body

- 1 Obsahy plošných útvarů
- 2 Úvod do Landauovy symboliky
- 3 Odhadování rychlosti růstu součtů



Landauova symbolika

Definice:

Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou číselné posloupnosti. Řekneme, že

- $a_n \sim b_n$, právě když existuje posloupnost $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 1 \quad \text{a} \quad a_n = \alpha_n b_n \quad \text{pro každé } n \geq n_0.$$



Landauova symbolika

Definice:

Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou číselné posloupnosti. Řekneme, že

- $a_n \sim b_n$, právě když existuje posloupnost $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 1 \quad \text{a} \quad a_n = \alpha_n b_n \quad \text{pro každé } n \geq n_0.$$

- $a_n = \mathcal{O}(b_n)$, právě když existuje konstanta $c > 0$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že

$$|a_n| \leq c|b_n| \quad \text{pro všechna } n \geq n_0.$$



Landauova symbolika

Definice:

Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou číselné posloupnosti. Řekneme, že

- $a_n \sim b_n$, právě když existuje posloupnost $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 1 \quad \text{a} \quad a_n = \alpha_n b_n \quad \text{pro každé } n \geq n_0.$$

- $a_n = \mathcal{O}(b_n)$, právě když existuje konstanta $c > 0$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že

$$|a_n| \leq c|b_n| \quad \text{pro všechna } n \geq n_0.$$

- $a_n \sim b_n$: $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ se pro velká n chovají stejně, jsou **asymptoticky ekvivalentní**.
- $a_n = \mathcal{O}(b_n)$: $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je **asymptoticky omezená** posloupností $(b_n)_{n=1}^{\infty}$.



Landauova symbolika

- Existují další symboly porovnávající další charakteristiky chování dvou posloupností. Podrobněji se jimi budete zabývat v BI-ZDM.



Landauova symbolika

- Existují další symboly porovnávající další charakteristiky chování dvou posloupností. Podrobněji se jimi budete zabývat v BI-ZDM.

Poznámka:

Pokud $b_n > 0$ pak lze definici přeformulovat do praktického tvaru

$$a_n \sim b_n \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1,$$

$$a_n = \mathcal{O}(b_n) \quad \Leftrightarrow \quad \text{posloupnost } \left(\frac{a_n}{b_n} \right)_{n=1}^{\infty} \text{ je omezená.}$$

Poznamenejme, že pokud existuje konečná limita $\lim a_n/b_n$, pak je posloupnost $(a_n/b_n)_{n=1}^{\infty}$ omezená.



Příklady

Příklad.

Platí

$$n^2 + \frac{1}{2}n - 1 \sim n^2,$$

$$2n = \mathcal{O}(n^2),$$

$$n = \mathcal{O}(n^2),$$

$$4n^2 = \mathcal{O}(n^2).$$



Příklady

Příklad.

Platí

$$n^2 + \frac{1}{2}n - 1 \sim n^2,$$

$$2n = \mathcal{O}(n^2),$$

$$n = \mathcal{O}(n^2),$$

$$4n^2 = \mathcal{O}(n^2).$$

- Zápis $a_n = \mathcal{O}(b_n)$ není příliš šťastný. Lepší je ho chápat ve smyslu $a_n \in \mathcal{O}(b_n)$. Historicky se však ujal a používá se.



Příklady

Příklad.

Platí

$$\begin{aligned}n^2 + \frac{1}{2}n - 1 &\sim n^2, \\2n &= \mathcal{O}(n^2), \\n &= \mathcal{O}(n^2), \\4n^2 &= \mathcal{O}(n^2).\end{aligned}$$

- Zápis $a_n = \mathcal{O}(b_n)$ není příliš šťastný. Lepší je ho chápat ve smyslu $a_n \in \mathcal{O}(b_n)$. Historicky se však ujal a používá se.
- Například pokud $a_n = \mathcal{O}(n)$ a současně $b_n = \mathcal{O}(n)$, neplyne odtud, že $a_n = b_n$.



Příklady

Příklad.

Platí

$$\begin{aligned}n^2 + \frac{1}{2}n - 1 &\sim n^2, \\2n &= \mathcal{O}(n^2), \\n &= \mathcal{O}(n^2), \\4n^2 &= \mathcal{O}(n^2).\end{aligned}$$

- Zápis $a_n = \mathcal{O}(b_n)$ není příliš šťastný. Lepší je ho chápat ve smyslu $a_n \in \mathcal{O}(b_n)$. Historicky se však ujal a používá se.
- Například pokud $a_n = \mathcal{O}(n)$ a současně $b_n = \mathcal{O}(n)$, neplyne odtud, že $a_n = b_n$.
- Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je omezená, právě když $a_n = \mathcal{O}(1)$.



Hlavní body

- 1 Obsahy plošných útvarů
- 2 Úvod do Landauovy symboliky
- 3 Odhadování rychlosti růstu součtů



Připomenutí známých součtů

Součty známých posloupností:



Připomenutí známých součtů

Součty známých posloupností:

- **aritmetická posloupnost** $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, tj. $a_n = a_1 + (n - 1)d$,

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n a_1 + d \sum_{k=1}^n (k - 1) = a_1 n + d \cdot \frac{n(n - 1)}{2} = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$



Připomenutí známých součtů

Součty známých posloupností:

- **aritmetická posloupnost** $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, tj. $a_n = a_1 + (n - 1)d$,

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n a_1 + d \sum_{k=1}^n (k - 1) = a_1 n + d \cdot \frac{n(n - 1)}{2} = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

- **geometrická posloupnost** $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, tj. $a_n = a_1 q^{n-1}$,

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n a_1 q^{k-1} = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad q \neq 1.$$



Připomenutí známých součtů

Součty známých posloupností:

- **aritmetická posloupnost** $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, tj. $a_n = a_1 + (n - 1)d$,

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n a_1 + d \sum_{k=1}^n (k - 1) = a_1 n + d \cdot \frac{n(n - 1)}{2} = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

- **geometrická posloupnost** $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, tj. $a_n = a_1 q^{n-1}$,

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n a_1 q^{k-1} = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad q \neq 1.$$

- Dále známe součty některých číselných řad. Například víme, že:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} = e^2, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \pi^{2k} = \cos(\pi) = -1, \quad \text{atp.}$$



Sčítání členů posloupností

- Hledání explicitního vzorce pro daný součet je obecně komplikovaná a často neřešitelná úloha.



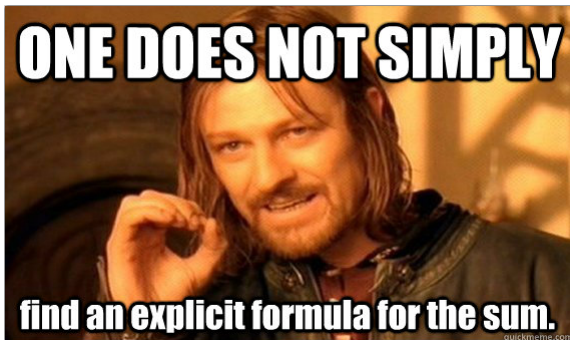
Sčítání členů posloupností

- Hledání explicitního vzorce pro daný součet je obecně komplikovaná a často neřešitelná úloha.
- Často nás ale přesný součet ani nezajímá, jde nám pouze o typické chování pro velká n . Tedy o tzv. asymptotické chování součtů.



Sčítání členů posloupností

- Hledání explicitního vzorce pro daný součet je obecně komplikovaná a často neřešitelná úloha.
- Často nás ale přesný součet ani nezajímá, jde nám pouze o typické chování pro velká n . Tedy o tzv. asymptotické chování součtů.



Odhadování rychlosti růstu různých součtů

Věta:

Nechť f je spojitá funkce na $\langle 1, +\infty \rangle$ a $n \in \mathbb{N}$.

① Je-li f klesající, pak

$$f(n) + \int_1^n f(x) \, dx \leq \sum_{k=1}^n f(k) \leq f(1) + \int_1^n f(x) \, dx.$$



Odhadování rychlosti růstu různých součtů

Věta:

Nechť f je spojitá funkce na $\langle 1, +\infty \rangle$ a $n \in \mathbb{N}$.

① Je-li f klesající, pak

$$f(n) + \int_1^n f(x) \, dx \leq \sum_{k=1}^n f(k) \leq f(1) + \int_1^n f(x) \, dx.$$

② Je-li f rostoucí, pak

$$f(1) + \int_1^n f(x) \, dx \leq \sum_{k=1}^n f(k) \leq f(n) + \int_1^n f(x) \, dx.$$



Odhadování rychlosti růstu různých součtů

Důkaz pro f klesající.

Buď $k \in \mathbb{N}$, pak pro každé $x \in \langle k, k+1 \rangle$ platí $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$.

Odhadování rychlosti růstu různých součtů

Důkaz pro f klesající.

Buď $k \in \mathbb{N}$, pak pro každé $x \in \langle k, k+1 \rangle$ platí $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$.
Z věty o nerovnosti mezi integrály dostaneme nerovnost

$$f(k+1) = \int_k^{k+1} f(k+1) dx \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq \int_k^{k+1} f(k) dx = f(k).$$

Odhadování rychlosti růstu různých součtů

Důkaz pro f klesající.

Buď $k \in \mathbb{N}$, pak pro každé $x \in \langle k, k+1 \rangle$ platí $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$.
Z věty o nerovnosti mezi integrály dostaneme nerovnost

$$f(k+1) = \int_k^{k+1} f(k+1) dx \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq \int_k^{k+1} f(k) dx = f(k).$$

Sečtením nerovností pro $k = 1, 2, \dots, n-1$ dostaneme

$$\sum_{k=2}^n f(k) \leq \int_1^n f(x) dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k).$$

Odhadování rychlosti růstu různých součtů

Důkaz pro f klesající.

Buď $k \in \mathbb{N}$, pak pro každé $x \in \langle k, k+1 \rangle$ platí $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$.
Z věty o nerovnosti mezi integrály dostaneme nerovnost

$$f(k+1) = \int_k^{k+1} f(k+1) dx \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq \int_k^{k+1} f(k) dx = f(k).$$

Sečtením nerovností pro $k = 1, 2, \dots, n-1$ dostaneme

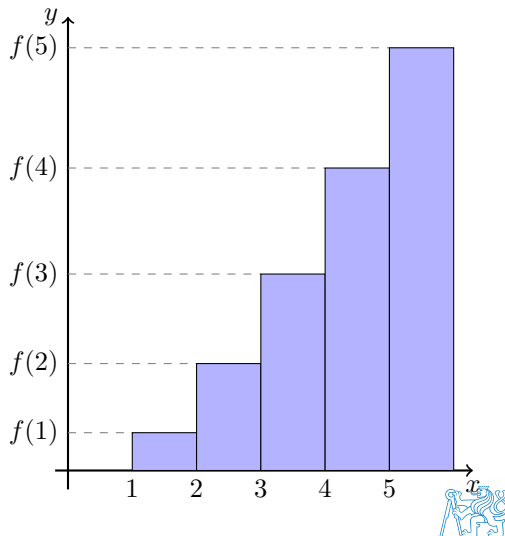
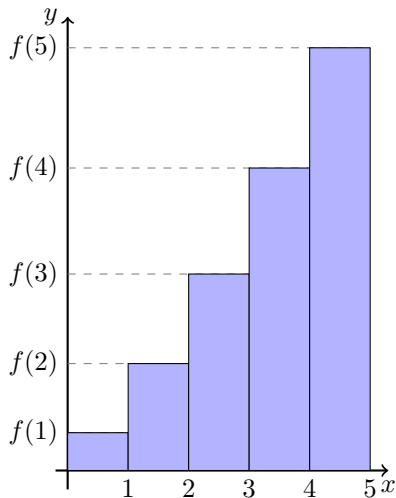
$$\sum_{k=2}^n f(k) \leq \int_1^n f(x) dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k).$$

Odtud

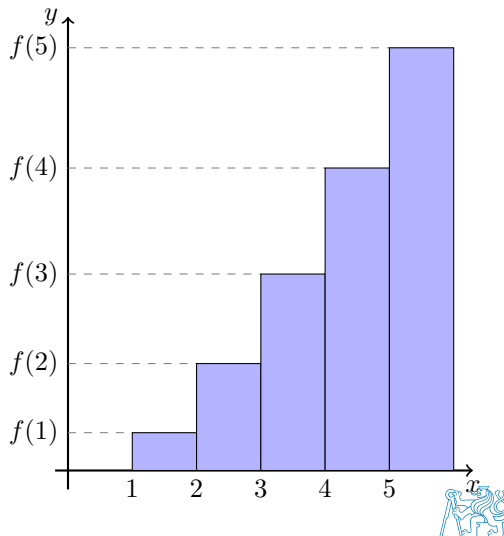
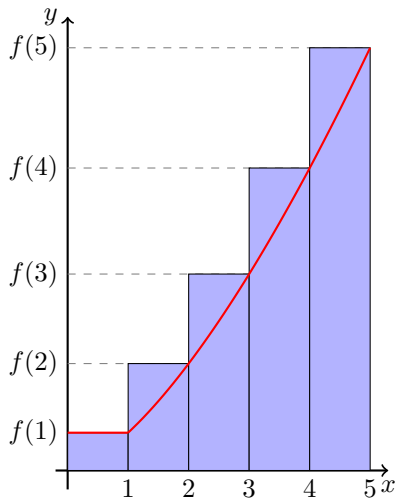
$$f(n) + \int_1^n f(x) dx \leq \sum_{k=1}^n f(k) \leq f(1) + \int_1^n f(x) dx.$$



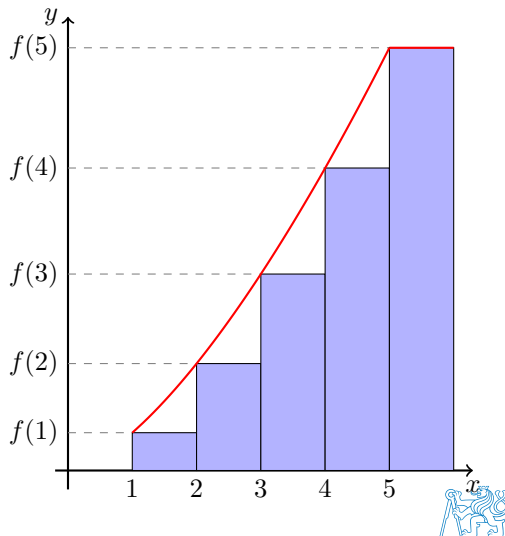
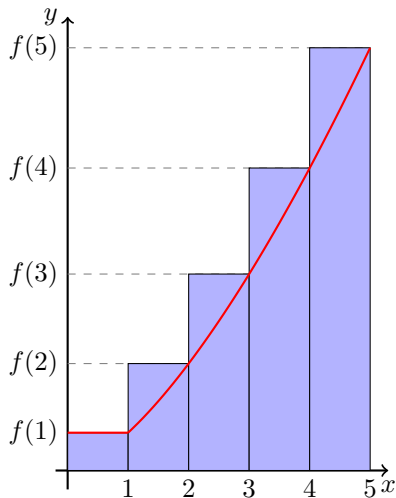
Geometrická interpretace odhadu



Geometrická interpretace odhadu



Geometrická interpretace odhadu



Příklad.

Pomocí odhadu odhadněte rychlost růstu posloupnosti

$$a_n = \sum_{k=1}^n k^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$



Příklad.

Pomocí odhadu odhadněte rychlost růstu posloupnosti

$$a_n = \sum_{k=1}^n k^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nyní $f(x) = x^2$ je rostoucí na $\langle 1, +\infty \rangle$ a proto pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$1 + \int_1^n x^2 dx \leq \sum_{k=1}^n k^2 \leq n^2 + \int_1^n x^2 dx.$$



Příklad.

Pomocí odhadu odhadněte rychlost růstu posloupnosti

$$a_n = \sum_{k=1}^n k^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nyní $f(x) = x^2$ je rostoucí na $\langle 1, +\infty \rangle$ a proto pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$1 + \int_1^n x^2 dx \leq \sum_{k=1}^n k^2 \leq n^2 + \int_1^n x^2 dx.$$

Tudíž

$$\frac{1}{3}n^3 + \frac{2}{3} \leq a_n \leq \frac{1}{3}n^3 + n^2 - \frac{1}{3}.$$



Příklad.

Pomocí odhadu odhadněte rychlost růstu posloupnosti

$$a_n = \sum_{k=1}^n k^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nyní $f(x) = x^2$ je rostoucí na $\langle 1, +\infty \rangle$ a proto pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$1 + \int_1^n x^2 dx \leq \sum_{k=1}^n k^2 \leq n^2 + \int_1^n x^2 dx.$$

Tudíž

$$\frac{1}{3}n^3 + \frac{2}{3} \leq a_n \leq \frac{1}{3}n^3 + n^2 - \frac{1}{3}.$$

Pro velká n je největším členem $\frac{1}{3}n^3$, přesněji

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\frac{1}{3}n^3} = 1, \quad \text{tj.} \quad a_n \sim \frac{1}{3}n^3.$$



Příklad.

Určete rychlost růstu posloupnosti $(n!)_{n=1}^{\infty}$.



Příklad.

Určete rychlost růstu posloupnosti $(n!)_{n=1}^{\infty}$.

Využijme šikovné úpravy

$$\ln n! = \sum_{k=1}^n \ln k.$$

Funkce $f(x) = \ln x$ je rostoucí na $\langle 1, +\infty \rangle$ a proto

$$0 + \int_1^n \ln(x) \, dx \leq \sum_{k=1}^n \ln(k) \leq \ln(n) + \int_1^n \ln(x) \, dx.$$

Primitivní funkcí F k funkci f je funkce $F(x) = x \ln(x) - x + C$, tudíž

$$n \ln(n) - n + 1 \leq \sum_{k=1}^n \ln(k) \leq \ln(n) + n \ln(n) - n + 1.$$



Odlogaritmováním (monotonie e^x) poslední nerovnosti pak dostáváme

$$e^{n \ln(n) - n + 1} \leq n! \leq e^{\ln(n) + n \ln(n) - n + 1}$$

a po úpravě

$$e \cdot \frac{n^n}{e^n} \leq n! \leq en \cdot \frac{n^n}{e^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Neboli $n! = \mathcal{O}(n^{n+1}/e^n)$.



Odlogaritmováním (monotonie e^x) poslední nerovnosti pak dostáváme

$$e^{n \ln(n) - n + 1} \leq n! \leq e^{\ln(n) + n \ln(n) - n + 1}$$

a po úpravě

$$e \cdot \frac{n^n}{e^n} \leq n! \leq en \cdot \frac{n^n}{e^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Neboli $n! = \mathcal{O}(n^{n+1}/e^n)$.

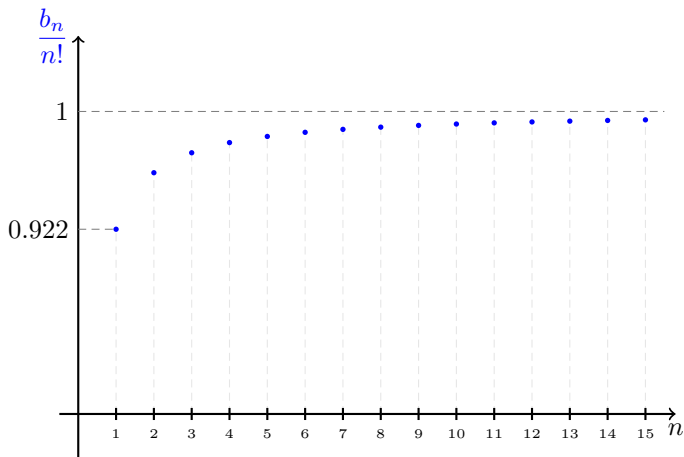
Poznámka:

Tento odhad už je pro většinu aplikací dostatečný. Lze ho však ještě dále zlepšovat. Všimněte, že na rozdíl od předchozího příkladu nám nyní nedává posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ takovou, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{b_n} = 1.$$

Získání takovéto posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ vyžaduje další práci. Pro úplnost uvedme, že tuto vlastnost má například (tzv. **Stirlingův vzorec**)

$$b_n = \sqrt{2\pi n} \cdot \frac{n^n}{e^n} \sim n!.$$



$$b_n = \sqrt{2\pi n} \cdot \frac{n^n}{e^n}$$



Harmonická čísla

Příklad.

Již víme, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = +\infty.$$

Odhadněme nyní **jak rychle** se $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ blíží k nekonečnu s rostoucím n .



Harmonická čísla

Příklad.

Již víme, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = +\infty.$$

Odhadněme nyní **jak rychle** se $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ blíží k nekonečnu s rostoucím n .

Podle předchozí věty, pro $f(x) = \frac{1}{x}$ klesající na $\langle 1, +\infty \rangle$ dostáváme odhad

$$\frac{1}{n} + \int_1^n \frac{1}{x} dx \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x} dx.$$

Po integraci

$$\frac{1}{n} + \ln(n) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n), \quad n \in \mathbb{N}.$$



Harmonická čísla: znovu a podrobněji

Poznámka:

Opět máme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}{\ln(n)} = 1, \quad \text{tj.} \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln n.$$

Dále si povšimněte, že

$$\frac{1}{n} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \leq 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

O posloupnosti $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right)$ lze ukázat, že je klesající a tudíž má limitu.

Tato limita se označuje γ a nazývá se **Eulerova–Mascheroniho konstanta**. Její přibližná hodnota je $\gamma = 0,577218\dots$



Příklad.

Kolikrát se zavolá funkce `doSomething()` v následujícím příkladě?

```
for (i = 0; i < n; i++) {  
    j = 1;  
    while ( j < i ) {  
        doSomething();  
        j = j * 2;  
    }  
}
```



Příklad.

Kolikrát se zavolá funkce doSomething() v následujícím příkladě?

```
for (i = 0; i < n; i++) {  
    j = 1;  
    while ( j < i ) {  
        doSomething();  
        j = j * 2;  
    }  
}
```

- Přesný počet volání: $\sum_{i=1}^{n-1} \lceil \log_2 i \rceil$.



Příklad.

Kolikrát se zavolá funkce `doSomething()` v následujícím příkladě?

```
for (i = 0; i < n; i++) {  
    j = 1;  
    while ( j < i ) {  
        doSomething();  
        j = j * 2;  
    }  
}
```

- Přesný počet volání: $\sum_{i=1}^{n-1} \lceil \log_2 i \rceil$.
- Hrubý odhad:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} \lceil \log_2 i \rceil &\leq \sum_{i=1}^{n-1} (\log_2 i + 1) \leq \sum_{i=1}^{n-1} (\log_2(n-1) + 1) = \\ &= (n-1)(1 + \log_2(n-1)) \leq n(1 + \log_2 n) = \mathcal{O}(n \log_2 n). \end{aligned}$$



- Jemný odhad: jistě platí

$$\sum_{i=1}^{n-1} \log_2 i \leq \sum_{i=1}^{n-1} \lceil \log_2 i \rceil \leq \sum_{i=1}^{n-1} 1 + \log_2 i$$



- Jemný odhad: jistě platí

$$\sum_{i=1}^{n-1} \log_2 i \leq \sum_{i=1}^{n-1} \lceil \log_2 i \rceil \leq \sum_{i=1}^{n-1} 1 + \log_2 i$$

a tudíž

$$0 + \int_1^{n-1} \log_2 x \, dx \leq \sum_{i=1}^{n-1} \lceil \log_2 i \rceil \leq 1 + \log_2(n-1) + \int_1^{n-1} (1 + \log_2 x) \, dx.$$



- Jemný odhad: jistě platí

$$\sum_{i=1}^{n-1} \log_2 i \leq \sum_{i=1}^{n-1} \lceil \log_2 i \rceil \leq \sum_{i=1}^{n-1} 1 + \log_2 i$$

a tudíž

$$0 + \int_1^{n-1} \log_2 x \, dx \leq \sum_{i=1}^{n-1} \lceil \log_2 i \rceil \leq 1 + \log_2(n-1) + \int_1^{n-1} (1 + \log_2 x) \, dx.$$

Protože ale

$$\int_1^{n-1} \log_2 x \, dx = (n-1) \log_2(n-1) - \frac{n-1}{\ln 2},$$



- Jemný odhad: jistě platí

$$\sum_{i=1}^{n-1} \log_2 i \leq \sum_{i=1}^{n-1} \lceil \log_2 i \rceil \leq \sum_{i=1}^{n-1} 1 + \log_2 i$$

a tudíž

$$0 + \int_1^{n-1} \log_2 x \, dx \leq \sum_{i=1}^{n-1} \lceil \log_2 i \rceil \leq 1 + \log_2(n-1) + \int_1^{n-1} (1 + \log_2 x) \, dx.$$

Protože ale

$$\int_1^{n-1} \log_2 x \, dx = (n-1) \log_2(n-1) - \frac{n-1}{\ln 2},$$

dostáváme

$$\sum_{i=1}^{n-1} \lceil \log_2 i \rceil \sim n \log_2 n.$$



Integrální kritérium

Z předcházejících odhadů sum pomocí integrálů je patrné, že platí následující věta.



Integrální kritérium

Z předcházejících odhadů sum pomocí integrálů je patrné, že platí následující věta.

Věta:

Bud' $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ číselná řada s kladnými členy. Nechť existuje spojitá a monotónní funkce definovaná na $\langle 0, +\infty \rangle$ taková, že $f(n) = a_n$ pro každé n . Potom:



Integrační kritérium

Z předcházejících odhadů sum pomocí integrálů je patrné, že platí následující věta.

Věta:

Bud' $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ číselná řada s kladnými členy. Nechť existuje spojitá a monotónní funkce definovaná na $\langle 0, +\infty \rangle$ taková, že $f(n) = a_n$ pro každé n . Potom:

- Pokud integrál $\int_1^{\infty} f(x) dx$ konverguje, pak číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.



Integrační kritérium

Z předcházejících odhadů sum pomocí integrálů je patrné, že platí následující věta.

Věta:

Bud' $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ číselná řada s kladnými členy. Nechť existuje spojitá a monotónní funkce definovaná na $\langle 0, +\infty \rangle$ taková, že $f(n) = a_n$ pro každé n . Potom:

- Pokud integrál $\int_1^{\infty} f(x) dx$ konverguje, pak číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
- Pokud integrál $\int_1^{\infty} f(x) dx$ diverguje, pak číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.



Příklad.

Řada $\sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha}$ konverguje pro $\alpha < -1$ a diverguje pro $\alpha \geq -1$.



Příklad.

Řada $\sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha}$ konverguje pro $\alpha < -1$ a diverguje pro $\alpha \geq -1$.

Protože

$$\int_1^n x^{\alpha} dx = \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1}, \quad \alpha \neq -1, \quad \text{a} \quad \int_1^n x^{-1} dx = \ln n$$

platí

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n x^{\alpha} dx = \frac{1}{-1-\alpha}, \quad \alpha < -1,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n x^{\alpha} dx = +\infty, \quad \alpha \geq -1.$$

